arXiv:2601.04038v1 [math.PR] 7 Jan 2026

广义伽马卷积（GGC）的幂问题及相关问题 *

Tord Sj¨odin†

2026年1月8日

摘要

广义伽马卷积（GGC）类对于尺度变换、弱极限、独立随机变量的加法和乘法均保持封闭。我们的主要结果证实了一个由来已久的猜想：GGC 对 $q-$ 次幂也保持封闭，$q>1$。证明使用了独立伽马变量有限和的密度函数的显式迭代公式、双曲完全单调函数（HCM）和拉普拉斯变换。

我们将该结果应用于独立 GGC 的 $q-th$ 幂的和与乘积，$q\geq 1$、对称扩展广义伽马卷积（symEGGC），并给出一个关于 $X\sim GGC$ 蕴含 $Exp（X）\sim GGC$ 的新证明。

*2010*年美国数学学会学科分类：主要分类 60E10，次要分类 62E15

关键词和短语：伽马分布、广义伽马卷积（广义伽马卷积）、完全单调（完全单调）、双曲完全单调（双曲完全单调）、伯恩斯坦函数、拉普拉斯变换

1 引言

广义伽马卷积（GGC）由 O. Thorin[10],[11] 在研究对数正态分布的无限可分性时引入，另见 [12]。GGC 类由有限个和的极限分布组成

*谨以此文纪念我的同事兼好友、荣休教授 Lennart Bondesson，瑞典于默奥大学

†数学与数理统计系，瑞典于默奥大学，S-90187 于默奥，瑞典；电子邮件：tartansson48@gmail.com；电话：+46-90-786 5000；传真：-

这些和由相互独立的伽马随机变量（rvs）构成；该类对于尺度变换、弱极限以及独立随机变量的和与乘积均是封闭的。关于 GGC 及其与双曲完全单调函数（HCM）关系的全面研究，见 Bondesson [3], ，另见 Steutel、van Hahn [9], 第 VI 章第 §5 节以及 Bondesson [4]。我们以 Feller [6]作为概率论的一般参考。关于无限可分性、GGC 的背景以及 O. Thorin 的开创性工作，参见 Bondesson、Grandell、Peetre [5]撰写的精彩传记。同一领域中关于伽马分布混合类的一个问题由 Behme、Bondesson [2] 以及作者在 [8]中进行了研究。

我们的主要结果（定理 1）证实了一个至少可追溯到 20 世纪 80 年代末的旧猜想： GGC ，即 $X \sim GGC$ 且 $q > 1$ 意味着$X^q \sim GGC$ （本文称之为幂问题），该问题见 Bondesson [3], 第 97 页。已知这一猜想在若干特殊情形下成立，参见 Bondesson [3], 第 6 章和[4], 第 7 节。若 PF_∞ 表示有限个指数随机变量之和的极限分布类，则 $X \sim PF_\infty$ 意味着，对于 $q \geq 1$， $X^q \sim GGC$ ，参见 Bondesson[3], 定理 6.2.7。因此，对于形状参数为正整数的独立伽马分布随机变量之和，该猜想也成立。Bondesson [4], 猜想 1 曾提出幂问题的答案为肯定。我们的主要结果（定理 1）证实了这一猜想。证明基于 Bondesson 对广义伽马卷积的刻画（见 [3], 定理 5.4.1）、有限个独立伽马分布随机变量之和的密度函数的显式迭代公式，以及连续代换。该结果被用于给出一个新的证明，说明 $X \sim GGC$意味着 $e^X - 1 \sim GGC$，见 Bondesson。 [4], 定理 4，（定理 2）；此外，还应用于独立广义伽马卷积之幂的和与乘积（定理 3），以及对称扩展广义伽马卷积的包含定理， $symEGGC$ （定理 4）。

第 2 节首先介绍该领域使用的标准记号、对我们设定的回顾以及三个引理，其中引理 2 用于证明中的归纳步骤。我们的主要结果（定理 1）在第 3 节陈述并证明，应用则在第 4 节给出。

2 背景

本节介绍必要的背景知识，并定义陈述和证明定理所需的概念，参见 Bondesson [3]。若函数 $f : (0, \infty)^n \to [0, \infty)$ 满足 $(-1)^m D^m f \geq 0$，对所有正整数 m 均成立，则称其为完全单调函数（CM）；若函数 $f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ 满足：对于每个固定的 $u > 0$， $H(w) = f(uv) \cdot f(u/v)$ 关于 -1 完全单调，则称其为双曲完全单调函数（HCM）

$w = v + v^{-1}$，参见 Bondesson [3], 第 5 章。我们用 $Gamma(\beta,\ b)$ 表示密度为 $f(x) = b^{\beta} \cdot \Gamma(\beta)^{-1} \cdot x^{\beta-1} \cdot e^{-bx}$, $x > 0$ 的标准伽马分布，并用 $Gamma(1,\ b) = Exp(b)$ 表示指数分布。广义伽马卷积（GGC）定义为有限个相互独立的伽马随机变量 $X_i \sim Gamma(\beta_i,\ b_i)$,$1 \le i \le n$ 之和 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 的极限分布。于是，当且仅当该分布的拉普拉斯变换 ϕ 可表示为

$$\phi(s) = E[e^{-sX}] = \exp\big(-as + \int \log(\frac{t}{t+s})\, U(dt)\big),\ s \ge 0,$$

其中 $a \ge 0$ （称为左端点），而 U（dt）是定义在 $(0,\ \infty)$ 上的非负测度，在 $(0,\ \infty)$ 的紧子集上具有有限质量，并且 $\int_0^1 |\log\ t|\, U(dt) < \infty$ 且 $\int_1^{\infty} t^{-1}\, U(dt) < \infty$，参见 Bondesson [3] 第 3 章。我们采用以下广为人知的广义伽马卷积的刻画，参见 Bondesson [3],定理 5.4.1。

命题 1 定义在 $(0, \infty)$ 上的函数 $\phi(s)$ 满足 $\phi(0+) = 1$ 是广义伽马卷积的拉普拉斯变换，当且仅当 ϕ 是双曲完全单调函数。

我们通过考察有限和 $S_n = X_1 + X_2 +$，开始分析 $q-$ 的 GGC 次幂，并证明 $X \sim GGC$ 蕴含 $X^q \sim GGC$
$\cdots + X_n$ 个相互独立的伽马分布随机变量，$X_i \sim Gamma(\beta_i,\ b_i)$，$1 \le i \le n$。回想一下，如果所有 $\beta_i = 1$, $1 \le i \le n$，那么 S_n 是相互独立的指数分布随机变量之和，且由 Bondesson [3], 第 96 页可知，$X^q \sim GGC$。若所有 β_i 都是正整数，也可得出相同结论，因为此时每个 X_i都是 β_i 个相互独立的 $Exp(b_i)$随机变量之和，因此又回到了第一种情况。由于 GGC 对弱极限封闭，不妨假设每个 β_i 都是有理数 $\beta_i = p_i/N$，其中 p_i为某个正整数，且 $N \ge 2$有一个共同的分母 $1 \le i \le n.$。于是每个 X_i 都是 p_i 个相互独立的随机变量之和 $X_{i,\ j} \sim Gamma(1/N,\ b_i)$，$1 \le i \le n$, $1 \le j \le p_i$。S_n 的拉普拉斯变换 ϕ_{S_n} 变为

$$\phi_{S_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} (\frac{b_i}{s+b_i})^{p_i/N} = \prod_{i=1}^{n} \Big(\prod_{j=1}^{p_i} (\frac{b_i}{s+b_i})^{1/N} \Big)$$

并且 S_n 是形状参数为 1/N 的独立伽马分布随机变量的有限和。根据拉普拉斯变换的唯一性（引理 3），不失一般性，可假设 $\beta_i = \beta$、$1 \le i \le n$ 对某个 $\beta > 0$ 成立。

我们从上述和的密度公式的一般形式开始

，稍后再将其专门化到 $\beta_i = \beta$、 $1 \le i \le n$ 的情形。当$n = 2$时，直接计算可得

$$f_{S_2}(x) = \frac{b_1^{\beta_1} \cdot b_2^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_1) \cdot \Gamma(\beta_2)} \cdot x^{\beta_1+\beta_2-1} \cdot \int_0^1 e^{-x\cdot(b_1(1-u)+b_2u)} \cdot (1-u)^{\beta_1-1} \cdot u^{\beta_2-1}\, du \tag{1}$$

对于一般的 n，我们使用 Akkouchi [1],定理 1 得到

$$f_{S_n}(x) = D_n \cdot x^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n-1} \cdot \int_0^1 \cdots \int_0^1 e^{-x\cdot C_n(\mathbf{u})} \cdot B_n(\mathbf{u})\, du_1 du_2 \cdots du_{n-1}, \tag{2}$$

其中 $\mathbf{u} = (u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots,\ u_{n-1})$，且

$$C_n(\mathbf{u}) = b_1(1-u_1) + b_2u_1(1-u_2) + \cdots + b_{n-2} \cdot u_1u_2\cdots u_{n-3} \cdot (1-u_{n-2}) +$$
$$+ b_{n-1} \cdot u_1u_2\cdots u_{n-2} \cdot (1-u_{n-1}) + b_n \cdot u_1u_2\cdots u_{n-1},$$

注意到 $C_n(\mathbf{u})$ 中最后两项之和可化简为

$$u_1u_2\cdots u_{n-2} \cdot \big(b_{n-1} \cdot (1-u_{n-1}) + b_n \cdot u_{n-1}\big), \tag{3}$$

这用于证明 $n \ge 3$ 的定理 1。进一步地

$$B_n(\mathbf{u}) = \frac{\Gamma(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\cdots\Gamma(\beta_n)} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} u_j^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_j-1} \cdot (1-u_j)^{\beta_{j+1}-1}$$

and

$$D_n = \frac{b_1^{\beta_1} \cdot b_2^{\beta_2} \cdots b_n^{\beta_n}}{\Gamma(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)},$$

对所有 $\mathbf{u}$ 均成立。

引理 1（Feller [6], 判据 2, 第 441 页）设 $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ 为完全单调函数，并假设 $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ 具有完全单调导数。则 $f \circ g$为完全单调函数。

下一个引理用于定理 1 证明中的归纳步骤。

引理 2 设 b_1、 b_2、 β_1、 β_2、 A 和 B 为正数，且 $0 < \alpha < 1$。则

$$L = \int_0^1 \int_0^1 e^{-E} \cdot g(u,v)\, du\, dv, \tag{4}$$

其中 $g = g(u, v) = \big((1-u)(1-v)\big)^{\beta_1 - 1} \cdot (uv)^{\beta_2 - 1}$ 且

$$E = b_1\big((1-u)Ay^{\alpha} + (1-v)By^{-\alpha}\big) + b_2(uAy^{\alpha} + By^{-\alpha})$$

关于 $Ay^{\alpha} + By^{-\alpha}$，对于 $y > 0$，是完全单调的。

关于 $n = 2$ 的引理 2 的证明包含在定理 1 的证明中。一般情形将在下一节末尾证明。

引理 3（Feller [6], 第 XIII.I 章，定理 1，第 408 页）（唯一性。）不同的概率分布具有不同的拉普拉斯变换。

3 幂

本节陈述并证明我们的主要结果：广义伽马卷积在取 $q-$ 次幂时仍保持封闭性，$q > 1$。

定理 1 设 $q > 1$，并假设 $X \sim GGC$。那么 $X^q \sim GGC.$

证明。 如上所述，只需证明该定理对独立伽马变量的有限和成立，其中 $X_i \sim Gamma(\beta,\ b_i)$，$1 \le i \le n$，对所有 $\beta > 0$ 均成立。证明采用归纳法，并使用 S_n 的密度 f_{S_n} 和 S_n^q 的拉普拉斯变换 $\phi_{S_n^q}$ 的显式公式。我们从 $n = 2$ 的情形开始。此时， S_2 的密度由 (1) 给出，而 S_2^q 的拉普拉斯变换为

$$\phi_{S_2^q}(s) \sim \int_0^{\infty} e^{-sx^q} \cdot x^{2\beta-1} \cdot \left(\int_0^1 e^{-x\cdot(b_1\cdot(1-u)+b_2\cdot u)} \cdot (u\cdot(1-u))^{\beta-1}\, du \right) dx.$$

我们将使用命题 1，并回顾第 1 节中双曲完全单调类（HCM）的定义。我们将 $H_2 = \phi_{S_2^q}(st) \cdot \phi_{S_2^q}\binom{s}{t}$ 计算为两个此类积分的乘积，得到

$$H_2 \sim \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-sx^q\cdot(t\cdot y + t^{-1}\cdot y^{-1})} \cdot x^{2\beta-1}. \tag{5}$$

$$\int_0^1\int_0^1 e^{-x\cdot\left(b_1\cdot((1-u)\cdot y^{\alpha} + (1-v)\cdot y^{-\alpha}) + b_2\cdot(u\cdot y^{\alpha} + v\cdot y^{-\alpha})\right)} \big(u(1-u)\cdot v(1-v)\big)^{\beta-1}\, du dv\, dx \frac{dy}{y},$$

经过双曲变量代换 $x \to x\cdot y$、 $y \to x/y$和代换$y \to y^{\alpha}$、 $\alpha = 1/q$，并着手证明 H_2 关于 $t + t^{-1}$是完全单调的。我们

固定 s 和 x，并将内积分记为 I_2。然后，经过代换$u \to \frac{1}{1+u}$和 $v \to \frac{1}{1+v}$，$I_2 = \int\int e^{-E_1} \cdot g(u, v)dudv$，其中

$$E_1 = x \cdot \frac{b_1(u \cdot y^\alpha + v \cdot y^{-\alpha}) + b_2(v \cdot y^\alpha + u \cdot y^{-\alpha}) + (b_1uv + b_2) \cdot (y^\alpha + y^{-\alpha})}{(1+u)(1+v)}$$

以及 $g(u, v) = (uv)^{\beta-1}((1+u)(1+v))^{2\beta}$，积分区间为 $(0, \infty) \times (0, \infty)$。我们的目标是证明 I_2 关于 $y^\alpha + y^{-\alpha}$是完全单调的。不失一般性，设 $y > 1$ 并令 $y^\alpha + y^{-\alpha} = 2s$。于是得到

$$y^\alpha = s + \sqrt{s^2 - 1} \text{ and } y^{-\alpha} = s - \sqrt{s^2 - 1}$$

并注意到，y^α 关于 $y^\alpha + y^{-\alpha}$也是伯恩斯坦函数。

接下来我们定义

$$E_2 = b_1(u \cdot y^\alpha + v \cdot y^{-\alpha}) + b_2(v \cdot y^\alpha + u \cdot y^{-\alpha}) = (b_1u + b_2v) \cdot y^\alpha + (b_1v + b_2u) \cdot y^{-\alpha}$$

并记

$$\Delta = (b_1u + b_2v) - (b_1v + b_2u) = (b_1 - b_2)(u - v).$$

我们注意到，当 b_1，b_2、u，v互换且 $y \to y^{-1}$时，积分 I_2保持不变。如果在集合 $\{\Delta > 0\}$ 或 $\{\Delta < 0\}$中的任意一个上计算积分 I_2，结论同样成立。

如果 $\Delta > 0$，我们可以将 E_2 改写为

$$E_2 = A \cdot (y^\alpha + y^{-\alpha}) + B \cdot y^\alpha,$$

其中，$A > 0$和 $B \geq 0$仅取决于 u、v、b_1和 b_2。由此可知，在此情况下，E_2以及由此得到的 E_1都是关于 $y^\alpha + y^{-\alpha}$ 的伯恩斯坦函数。
在相反的情况下，$\Delta < 0$我们得到 $E_2 = A \cdot (y^\alpha + y^{-\alpha}) + B \cdot y^{-\alpha}$。由上述代换可知，$I_2$ 关于 $y \to y^{-1}$ 保持不变，因此我们回到了第一种情况。我们得出，E_1 是关于 $y^\alpha + y^{-\alpha}$ 的伯恩斯坦函数，而 I_2 是关于 $y^\alpha + y^{-\alpha}$的完全单调函数。

那么，根据 Bondesson [3], Ex. 4.3.4, p. 69，由于$y^\alpha + y^{-\alpha}$ 是关于 $y + y^{-1}$ 的伯恩斯坦函数，I_2 关于 $y + y^{-1}$ 也完全单调。根据伯恩斯坦定理，I_2可表示为拉普拉斯变换 $I_2 = \int e^{-\lambda \cdot (y + y^{-1})} d\nu(\lambda)$，其中对应于一个非负博雷尔测度 ν，且。将此公式代入 H_2，得到

$$H_2 \sim \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(sx^q \cdot (t \cdot y + t^{-1} \cdot y^{-1}) + \lambda \cdot (y + y^{-1})\right)} \frac{dy}{y} d\nu(\lambda).$$

指数（符号取反后）是 y 和 y^{-1} 的线性组合，且等于

$$y\cdot(sx^q\cdot t+\lambda)+y^{-1}\cdot(sx^q\cdot t^{-1}+\lambda)=\rho\cdot\left(s^2x^{2q}+\lambda^2+sx^q\lambda\cdot(t+t^{-1})\right),$$

在进行代换、令第二项等于 $1/\rho$ 之后。这证明了 H_2 关于 $t+t^{-1}$ 完全单调，进而由命题 1 得出 $(X_1+X_2)^q\sim GGC$，从而完成了定理 1 在 $n=2$ 情形下的证明。

令 $n\geq 3$ 为任意整数，并令 S_n 为式 (2) 中定义的 n 个独立伽马变量之和。我们从 S_n^q 的拉普拉斯变换 $\phi_{S_n^q}$ 出发，

$$\phi_{S_n^q}(x)\sim\int_0^\infty e^{-sx^q}\cdot x^{n\beta-1}\cdot\int_0^1\cdots\int_0^1 e^{-x\cdot C_n(\mathbf{u})}\cdot B_n(\mathbf{u})\,du_1\cdots du_{n-1}\,dx.$$

类比 $n=2$ 的情形，我们将 $H_n=\phi_{S_n^q}(st)\cdot\phi_{S_n^q}\left(\begin{smallmatrix}s\\t\end{smallmatrix}\right)$ 定义为两个此类积分的乘积，并类比式 (5) 得到

$$H_n\sim\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(sx^q\cdot(t\cdot y+t^{-1}\cdot y^{-1})\right)}\cdot x^{2n\beta-1}\cdot$$

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 e^{-x\cdot\left(C_n(\mathbf{u})y^\alpha+C_n(\mathbf{v})y^{-\alpha}\right)}\cdot B_n(\mathbf{u})\cdot B_n(\mathbf{v})\,du_1\cdots du_{n-1}dv_1\cdots dv_{n-1}\,dx\frac{dy}{y},$$

经过双曲变量代换 $x\to x\cdot y,\,y\to x/y$ 以及代换 $y\to y^\alpha$ 之后。我们将 H_n 中的内积分记为 I_n。

现在假设对于任意 $n-1$ 个独立伽马变量之和，I_{n-1} 关于 $y^\alpha+y^{-\alpha}$ 完全单调。I_n 中最后两个积分等于

$$J_n=\int_0^1\int_0^1 e^{-x\cdot E_n}\cdot\left((1-u_{n-1})\cdot(1-v_{n-1})\right)^{\beta-1}\left(u_{n-1}\cdot v_{n-1}\right)^{(n-1)\beta-1}du_{n-1}\,dv_{n-1},$$

其中根据（3）

$$E_n=b_{n-1}\cdot\left((1-u_{n-1})\cdot Ay^\alpha+(1-v_{n-1})\cdot By^{-\alpha}\right)+$$
$$+b_n\cdot\left(u_{n-1}Ay^\alpha+v_{n-1}By^{-\alpha}\right)$$

and

$$A=u_1u_2\cdots u_{n-2},\ B=v_1v_2\cdots v_{n-2}.$$

我们将引理 2 应用于 A 和 B 的这些值。于是， J_n 关于 $Ay^{\alpha}+By^{-\alpha}$ 是完全单调的，并且可以表示为拉普拉斯变换

$$J_n=\int_0^{\infty} e^{-\lambda\cdot\left(u_1u_2\cdots u_{n-2}\cdot y^{\alpha}+v_1v_2\cdots v_{n-2}\cdot y^{-\alpha}\right)}\,\nu(d\lambda),$$

对于某个非负博雷尔测度 ν。现在我们将 J_n 代回 I_n。于是，对于每个固定的 $\lambda>0$， I_n 对应于 I_{n-1}，它是 $n-1$ 个独立伽马变量之和，因此根据归纳假设，我们得出 I_n 关于 $y^{\alpha}+y^{-\alpha}$ 是完全单调的。回顾一下，$y^{\alpha}+y^{-\alpha}$ 关于 $y+y^{-1}$ 是伯恩斯坦函数；再进行与证明情形 $n=2$ 时所用的类似代换，即可证明 H_n 关于 $t+t^{-1}$ 是完全单调的。由此得出 $S_n^q\sim GGC$，并由命题 1 完成定理 1 的证明。□

引理 *2* 的证明。证明与定理 1 证明中的情形 $n=2$ 类似，只需将 y^{α}, $y^{-\alpha}$ 替换为 Ay^{α}, $By^{-\alpha}$。为方便读者，我们简述证明。由 (4) 可知，我们必须证明 $L=\int_0^1\int_0^1 e^{-\cdot E}\cdot g(u,\ v)\,du\,dv$，其中

$$E=b_1\big((1-u)Ay^{\alpha}+(1-v)By^{-\alpha}\big)+b_2(uAy^{\alpha}+vBy^{-\alpha}),$$

关于 $Ay^{\alpha}+By^{-\alpha}$ 是完全单调的。我们先进行代换 $u\to\frac{1}{1+u}$ 和 $v\to\frac{1}{1+v}$，得到 $L=\int\int e^{-E_1}g(u,v)dudv$，其中

$$E_1=x\cdot\frac{b_1(uAy^{\alpha}+vBy^{-\alpha})+b_2(vAy^{\alpha}+uBy^{-\alpha})+(b_1uv+b_2)(Ay^{\alpha}+By^{-\alpha})}{(1+u)(1+v)}$$

以及 $g(u,v)=(uv)^{\beta_1-1}\cdot\big((1+u)(1+v)\big)^{-\beta_1-\beta_2}$，积分区间为 $(0,\infty)\times(0,\infty)$。

容易看出，如果交换 (b_1,b_2) 和 (u,v)，则 L 保持不变，且 $Ay^{\alpha}\to By^{-\alpha}$。不失一般性，假设 $Ay^{\alpha}>By^{-\alpha}$，并令 $Ay^{\alpha}+By^{-\alpha}=2s$。于是得到

$$Ay^{\alpha}=s+\sqrt{s^2-AB}\ \text{ and }\ By^{-\alpha}=s-\sqrt{s^2-AB}$$

并注意到， Ay^{α} 关于 $Ay^{\alpha}+By^{-\alpha}$ 也是伯恩斯坦函数。

令 E_2 表示 E_1 分子中的前两项，则我们可以将 E_2 重写为

$$E_2=(b_1u+b_2v)\cdot Ay^{\alpha}+(b_1v+b_2u)\cdot By^{-\alpha}$$

且 $\Delta = (b_1u + b_2v) - (b_1v + b_2u) = (b_1 - b_2)(u - v)$。证明的其余部分与 $n = 2$ 的情形相同，留给读者完成。由此可知，E_1 关于 $Ay^\alpha + By^{-\alpha}$ 是伯恩斯坦函数，而 L 关于 $Ay^\alpha + By^{-\alpha}$ 是完全单调的，从而完成引理 2 的证明。□

注 1. </style>关于 $X \sim GGC$ 推出 $X^q \sim GGC, q > 1$的旧猜想，是 GGC 的一项自然结构性质，Bondesson [3], 第 97 页提到了这一点。
Bondesson [4], 采用了另一种方法，其中 S_n^q 的拉普拉斯变换用各个随机变量$X_i, 1 \leq i \leq n$的密度函数之积来表示。Bondesson [4], 的猜想 2 给出了定理 1 成立的一个充分条件。

对于每个 $q \geq 1, \alpha = 1/q$ 以及固定的正数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 和$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，函数

$$\int \frac{1}{v_1 v_2 \cdots v_n} e^{-E} d\mathbf{v}, where\, E = (\sum u_i v_i^\alpha)^q + (\sum u_i v_i^{-\alpha})^q + \sum \lambda_i (\frac{t}{v_i} + \frac{v_i}{t})$$

关于 $t + t^{-1}$ 是完全单调的。

注 2. </style>与注 1 中的方法相比，此处所用方法的优点在于，I_n 是归纳定义的，I_n 被积函数中的指数关于 y^α 和 $y^{-\alpha}$是线性函数，对于所有 n，内积分 J_n 仅含两个变量，而且逐次代换法在此处适用。

注记 *3.* 对于 $n = 2$，积分 I_2（其中 $c = 1$）可借助计算机代数表示为两个一阶修正贝塞尔函数的乘积

$$I_2 = \pi \cdot \Gamma(\beta)^2 \cdot e^{-(y + \frac{1}{y})} \cdot \mathrm{BesselI}(\beta, y/2) \cdot \mathrm{BesselI}(\beta, 1/2y).$$

一个大胆但自然的猜想是，定理 1 对更一般的复合函数 $f \circ X, X \sim GGC$ 也成立，其中 f 属于定义在 $[0, \infty)$ 上、由光滑递增凸函数构成的某个函数类，并满足 $f(0) = 0$。

4 应用

类 GGC 对独立随机变量的和与乘积封闭，现在对 $q-$ 次幂 $q > 1$ 也封闭。由此得到以下结果。

定理 2 设 $\{X_i\}_1^n$ 为相互独立的随机变量，$X_i \sim GGC$，并设 $q_i \geq 1$，
n $n1 \leq i \leq n$。那么 $\prod X_i^{q_i} \sim GGC$ 且 $\sum X_i^{q_i} \sim GGC$.1 1

扩展广义伽马卷积类（$EGGC$）由 Thorin [12] 引入，由相互独立的正、负伽马随机变量之和的极限分布构成。 $EGGC$ 中的对称分布记为 $symEGGC$，其特征为：当且仅当 $X = \sqrt{Y \cdot Z}$ 时， $X \sim symEGGC$，其中 $Y \sim GGC$ 为某个值，且 $Z \sim N$ 相互独立（0，1）；参见 Bondesson [4], 第 5 章，或 Steutel、van Harn [9], 第 VI 章第 11 节。定理 1 表明，若 $0 < \alpha < 1$，则每个 $Y \sim GGC$ 都可写为 $Y = Z^{\alpha}$，其中 $Z \sim GGC$。由此得到 Bondesson [4], 定理 2 的以下推广。

定理3 令 $0 < \alpha \leq 2 \leq \beta$，则

(a) 若 $Y \sim GGC$ 与 $Z \sim N(0,1)$ 相互独立，则 $Y^{1/\alpha} \cdot Z \sim symEGGC$。

(b) 若 $X \sim symEGGC$ 存在 $Y \sim GGC$ 和一个与之独立的 $Z \sim N(0,1)$，使得 $X = Y^{1/\beta} \cdot Z$。

若 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个分布类，我们用 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ 表示由相互独立的随机变量 $X \sim \mathcal{A}$ 和 $Y \sim \mathcal{B}$的乘积 $X \cdot Y$ 构成的分布类。于是，定理3可表述为

$$GGC^{1/\alpha} \times N(0,1) \subseteq symEGGC \subseteq GGC^{1/\beta} \times N(0,1),$$

$0 < \alpha \leq 2 \leq \beta$，当 $\alpha = \beta = 2$时取等号。

最后，我们给出 Bondesson [4] 定理3的新证明，参见第1075页的评论。

定理4 如果 $X \sim GGC$ 的左端点为 $a \geq 0$，那么 $e^X - e^a \sim GGC$。

证明。 如果 $a = 0$、 $X \sim GGC$ 和 $0 < r < 1$，那么由定理 1 和

$$Pr((1+rX)^{\frac{1}{r}} \leq 1+u) = Pr(X \leq [(1+u)^r - 1]/r) \to Pr(e^X \leq 1+u),$$

根据洛必达法则， $r \to 0$，。因此 $e^X - 1 \sim GGC$，因为 GGC 在弱极限下是闭的。如果 $a > 0$，我们有 $e^X - e^a = e^a(e^{X-a} - 1)$，$(X - a) \sim GGC$的左端点为零，而 $e^X - e^a \sim GGC$ 由第一种情况得出。□

5 致谢

作者感谢荣休教授 L. Bondesson 将我引入广义伽马卷积（GGC）领域，感谢他对本文所处理问题的介绍，以及在我的研究工作方面给予的诸多鼓励性讨论和意见。

参考文献

[1] Akkouchi M, 《伽马分布的卷积》, 《苏州数学学报》, 第 31 卷第 2 期, 第 205–211 页, 2005年[2] Behme A、Bondesson L, 《一类伽马(k)分布的尺度混合, 其为广义伽马卷积》, 《伯努利》, 23, 第 1 期, 第 773–787 页, 2017年[3] Bondesson L, 《广义伽马卷积及相关分布与密度类》, 《统计学讲义》, 第 76 卷, 施普林格出版社, 纽约, 1992年[4] Bondesson L, 《一类关于独立随机变量的加法和乘法均封闭的概率分布》, 《理论概率学杂志》, 28(3), 第 1063–1081 页, 2015年[5] Bondesson L、Grandell J、Peetre J, 《Olof Thorin 的生平与工作（1912—2004）》, 《爱沙尼亚科学院院刊》, 第 57 卷, 2008年, 第 18–25 页[6] Feller W, 《概率论及其应用导论》, 第 II 卷, 约翰·威立父子公司, 1966年[7] Schilling R. L、Song R、Vondracek Z, 《伯恩斯坦函数》, 《数学研究》第 37 卷, 瓦尔特·德·格鲁伊特出版社, 柏林, 2010年[8] Sj¨odin T, 《伽马分布混合、具有双曲单调密度的分布及广义伽马卷积（GGC）》, 《概率与数理统计》, 第 41 卷, 第 1 分册, 2021年, 第 1–7 页[9] Steutel F. W、van Harn K, 《实数轴上概率分布的无限可分性》, 马塞尔·德克尔出版社, 纽约, 2004年[10] Thorin O, 《帕累托分布的无限可分性》, 《斯堪的纳维亚精算学杂志》, 1977年, 第 31–40 页[11] Thorin O, 《对数正态分布的无限可分性》, 《斯堪的纳维亚精算学杂志》, 1977年, 第 121–148 页[12] Thorin O, 《广义 Γ–卷积概念的扩展》, 《斯堪的纳维亚精算学杂志》, 1978年, 第 141–149 页