arXiv:2601.04049v1 [q-fin.CP] 7 Jan 2026

用于多维期权定价的量子计算：端到端流程

Julien Hok[1] 和 ´AlvaroLeitao[2,3,*]

[1]Investec Bank，英国[2]中信研究中心，西班牙[3]数学系，
A Coru˜ña大学，西班牙[*]通讯作者：
alvaro.leitao@udc.gal

2026年1月8日

摘要

本文提出了一个端到端的多资产期权定价框架，将符合市场的风险中性密度恢复与量子加速数值积分相结合。首先，我们利用正态逆高斯（NIG）模型，根据欧式期权报价校准无套利边际分布，充分发挥该模型解析处理简便且能够捕捉偏度和肥尾的优势。随后，通过高斯 Copula 将各边际分布耦合起来，构建联合分布。为解决求解定价公式所需高维积分带来的计算瓶颈，我们采用基于量子振幅估计（QAE）的量子加速蒙特卡洛（QAMC）技术，相较于经典蒙特卡洛（CMC）方法实现了二次收敛改进。理论结果为边际密度估计（通过余弦级数展开）和多维定价分别建立了精度边界与查询复杂度。针对流动性较高的股票实体（法国农业信贷银行、安盛、米其林）的实证测试证实了较高的校准精度，并表明在达到相当精度的情况下，QAMC 所需查询次数比经典方法少 10 至 100 倍。本研究为将兼顾无套利的建模方法与量子计算相结合提供了切实可行的路径，并突出了其对可扩展性以及未来扩展至复杂衍生品的意义。

1 引言

多项标的资产期权定价是量化金融中的核心问题，对风险管理、结构化产品和多资产奇异期权交易具有广泛意义。在高维情形下，经典估值流程（包括构建风险中性分布、对市场曲面进行一致的插值/外推，以及对复杂收益进行数值积分）面临显著的计算和建模挑战。一个核心要求是根据观察到的普通期权及其隐含波动率，恢复无套利的边际风险中性密度，同时以易于处理且切合实际的方式表征资产间的依赖结构，从而获得适用于篮子期权、价差期权、最差表现期权及其他路径无关多变量收益定价的联合分布。在此背景下，传统方法严重依赖简单化的随机模型和数值方法，例如经典蒙特卡洛（CMC）模拟。这些方法虽然稳健，但在扩展到高维情形时，往往缺乏代表性且计算成本高昂。

两条发展脉络塑造了这一领域的格局。首先，在分布建模方面，受股票收益中负偏斜和肥尾等实证特征的推动，行业已不再局限于对数正态假设。L´évy模型能够捕捉跳跃和厚尾，同时借助特征函数保持解析上的可处理性，从而便于进行基于傅里叶变换的估值 [6, 38, 14, 26]。在这一类模型中，正态逆高斯（NIG）模型尤其具有吸引力：其密度函数平滑，偏斜和峰度可调，支持无套利的时间切片校准，并且对股票期权的拟合效果已得到实证验证 [13, 30]。这些特性使NIG非常适合构建多资产定价所需的边际市场分布。在

另一方面，NIG过程的CMC模拟并非易事，效率也较低，尤其是在高维情形下。关于依赖结构，金融领域通常采用Copula将其与边际分布分别建模 [8]。著名的Sklar定理保证，Copula与边际分布结合后可得到有效的联合分布 [35]。其次，在计算方面，CMC方法长期以来一直是期权定价的主力方法（见 [20]），但其缓慢的收敛速度 $O(1/\epsilon^2)$)，使得在高维情形下实现高精度颇具挑战。原生量子算法，尤其是 [4, 33, 37]，中提出的算法，利用所谓的量子振幅估计（QAE），实现 $O(1/\epsilon)$收敛，带来理论上的二次加速。这两条脉络的交汇引出了一个值得探讨的问题：能否将由市场数据驱动、兼顾无套利约束的多资产定价分布构造，与量子加速估计量相结合，从而在多维期权定价中实现精度与成本权衡方面的实际收益？在介绍我们为解决这一问题所提出的方案之前，先来讨论一些相关文献。

为了概括每项资产的市场信息，从业者通常会使用隐含波动率曲面，因此需要进行稳健的插值/外推，以避免静态套利。随机波动率启发式（SVI）参数化 [18] 及其无套利扩展 [19] 因其简约性以及对凸性和蝶式套利的控制能力而得到广泛采用。其他方法包括局部波动率自助法，以及采用绑定的时变参数的随机波动率模型族 [2, 29], ，例如[25, 24], ；还有施加全局无套利约束的全到期日非参数方法 [12]。正则化技术（例如 Tikhonov正则化）是稳定病态校准的标准方法 [9, 11]。例如， [15, 27, 28]讨论了上述部分模型的校准。

量子计算探索如何利用量子力学原理，使信息处理能力超越经典极限。自问世以来，该领域在算法设计和硬件开发方面取得了显著进展，推动量子技术迅速发展，并激发了人们在不同领域寻找实际应用的热情。在这些新兴领域中，量化金融作为量子技术创新的一个有前景的方向，受到了广泛关注，参见 [36, 23]及其中的参考文献。对于通过蒙特卡洛类方法进行期权定价这一具体任务，近期研究（参见 [39, 7, 31, 1]）展示了基于量子方法的实用流程，其中包括态制备和编码策略。在这一框架下，通过将量子振幅估计程序应用于基于积分的表述（例如期权定价中使用的表述），即可实现量子优势。然而，在当前硬件约束下，原始的量子振幅估计实现仍不切实际。为解决这一局限，近年来出现了多种硬件高效变体， [21, 17, 32, 31] 等方法使得量子振幅估计能够部署于近期量子设备上。尽管如此，目前大多数应用于金融衍生品问题的量子计算演示仍采用风格化分布或玩具收益。当前仍缺乏端到端流程，能够：(a) 从真实期权报价推断无套利风险中性边际分布；(b) 构建具有经验意义依赖结构的联合分布；以及 (c) 执行量子加速估值。

因此，本文通过提出一套完整流程来回应上述问题（即尝试回答前面提出的问题）：(i) 使用指数 NIG 模型恢复市场一致的边际风险中性密度；(ii) 通过 Copula（为便于处理，采用高斯 Copula）构建联合分布；(iii) 部署量子加速蒙特卡洛（QAMC）方法，同时应用于边际密度估计（通过正交余弦展开）和最终的多维期权估值。该流程采用模块化设计（可适配其他边际分布和 Copula），并量化了经典估计器与量子估计器之间的精度—成本权衡。从市场分布构建的角度来看，我们给出了相关的实践结果（价格与 NIG 位置参数无关、正则化校准解的连续性与存在性）、套利合理性检查，以及对流动性良好的个股（法国农业信贷银行、安盛、米其林）的实证验证，由此得到能够匹配市场偏斜和尾部特征的校准分布。关于所提出的基于量子计算的多变量定价方案，我们从理论和实证两方面证明，与 CMC 相比，QAMC 在应用于整个流程中的关键环节——即边际分布重构和最终的多资产期权估值——时，能够实现预期的二次收敛改进。从这个意义上说，选择 NIG 模型并非随意之举，因为在该模型的设定下，驱动资产演化的密度函数具有解析表达式，而分布函数和分位数函数（CMC 模拟所需）则没有闭式形式，因此抽样过程的计算成本较高。

本文结构如下。第 2 节介绍如何根据市场信息构建资产分布，包括流程问题的细节（第 2.1 节和第 2.2 节）、指数 NIG 模型（第 2.3 节）以及校准结果（第 2.4 节）。第 3 节介绍基于量子的多维期权估值的不同组成部分：一般定价公式以及 Copula 的引入

（第 3.1 节）、应用于边际分布恢复和最终期权价格计算的 QAMC 方法，以及严谨的理论分析（第 3.2 节）和实验结果（第 3.3 节）。最后，第 4 节讨论主要发现并作出总结。

2 市场分布的构建

为了利用 Copula 框架构建多维市场风险中性分布，我们首先对每种标的资产的边际分布进行建模。此步骤包括针对每个到期日，对市场上观察到的欧式期权价格拟合参数分布。本文采用第 2.3 节介绍的 NIG分布。

2.1 市场欧式看涨期权和看跌期权价格

风险中性测度下的欧式看涨期权和看跌期权价格，以风险中性密度 $f(S_T)$ 表示，定义如下:

$$C(T,K) = e^{-rT}\int_K^\infty f(S_T)(S_T-K)\,\mathrm{d}S_T,$$
$$P(T,K) = e^{-rT}\int_0^K f(S_T)(K-S_T)\,\mathrm{d}S_T,$$

其中， T为期权到期时间， K为执行价格， r为无风险利率， $f(S_T)$为标的资产在到期日的风险中性密度。

根据 Breeden 和 Litzenberger [5]，并假设满足充分的正则性条件，对 K 求一次导数可得累积分布函数,

$$\frac{\partial C(T,K)}{\partial K} = -e^{-rT}\int_K^\infty f(S_T)\,\mathrm{d}S_T,$$

而进行两次微分则会得到概率密度函数,

$$\frac{\partial^2 C(T,K)}{\partial K^2} = e^{-rT}f(K). \tag{1}$$

通常，市场上的普通期权价格首先会使用 Black-Scholes 期权定价公式转换为隐含波动率,

$$C^{\mathrm{BS}}(T,K) = S_0 e^{-qT}\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2),$$
$$P^{\mathrm{BS}}(T,K) = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S_0 e^{-qT}\Phi(-d_1),$$

其中

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - q + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

其中， S_0 为标的资产的现货价格， q 为连续股息率， σ 为标的资产的波动率， Φ（。）为标准正态分布的累积分布函数。与到期日 T和行权价 K 相关的隐含波动率_$\sigma_{\mathrm{imp}}(T,\ K)$通过匹配市场价格、 V和 Black-Scholes 价格来定义，即

$$V^{\mathrm{BS}}(T,K;\sigma_{\mathrm{imp}}) = \bar{V}(T,K), \quad V \in \{C,P\},$$

由于 Black-Scholes 价格关于波动率参数严格递增，因此该定义是良好的。因此，普通期权价格与隐含波动率之间存在一一映射关系。业内人士将普通期权市场数据表示为隐含波动率，因为它更易于解释和监测。对于给定的到期日，隐含波动率作为行权价的函数并非常数，通常呈现微笑曲线形状或发生偏斜。这通常称为波动率微笑。

要使用风险中性密度公式 (1)，需要获得任意正行权价对应的普通期权价格或隐含波动率。交易期权的市场数据仅在离散的行权价点上可用。因此，我们需要一个插值/外推引擎，根据离散的市场数据集生成平滑函数 $C(T,K)/P(T,K)$ 或 $\sigma_{\mathrm{imp}}(T,K)$，下一节将对此进行讨论。

2.2 拟合与插值方法

根据市场信息的表示方式，隐含波动率曲面的可用拟合方法可分为几类，包括:

- 隐含波动率——直接将隐含波动率表示为行权价和到期日的函数。业界采用了不同的参数化方法，从简单（且可能产生套利）的带截断二次偏斜，到样条函数或 SVI 参数化 [18, 19]。

- 时间切片分布——针对每个到期日分别定义股票价格的分布。典型示例包括使用随机波动率模型生成的分布（如 SABR 模型 [24],），或直接对股票概率密度函数进行参数化。

- 非齐次随机过程——通过按时间顺序拟合每个到期日的隐含波动率，对随机过程的时变参数进行自举。一种很好的示例是 [2] 中提出并在 [29] 中改进的耦合局部波动率方法。

- 全期限非参数密度——以不可套利的方式将所有到期日一并拟合。 [12] 中提出了一种值得关注的方法。

所有这些方法各有优缺点，相关讨论可参见例如 [12]。本文采用时间切片分布法，以 NIG分布对标的资产在各个到期日的风险中性概率密度函数进行参数化，作为示例。上述讨论的其他方法也可用于构建市场分布。

2.3 指数 NIG 模型

设 $T > 0$ 为一个固定的时间范围，并设 $S\colon t \in [0,T] \mapsto S(t)$ 表示某项金融资产的市场价格。我们假设，在风险中性概率 $\mathbb{Q}$下， $S(t)$ 的动态满足

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} = (r-q)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}X(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

其中初始值已给定，即 $S(0) = S_0$， $r \geq 0$ 为无风险利率， $q \geq 0$ 为连续股息率（两者均为确定性且连续复利），而 $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是一个 NIG Lévy 过程，满足 $X(0) = 0$，其增量满足

$$X(t+\Delta t) - X(t) \sim \mathrm{NIG}(\alpha, \beta, \delta\Delta t, \mu\Delta t) \quad \text{for all } \Delta t \geq 0,$$

带参数（α、 β、 δ、 μ）的 NIG分布，记作 NIG（α、 β、 δ、 μ），其密度函数如下:

$$f_{\mathrm{NIG}}(x;\alpha,\beta,\delta,\mu) = \frac{\alpha\delta}{\pi} e^{\delta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\beta(x-\mu)} \frac{\mathrm{K}_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

其中:

- $\mathrm{K}_1(z)$ 是第二类修正贝塞尔函数，阶数为 1,
- $\alpha > 0$ 是尾部（陡峭度）参数，用于控制峰度（ α 越大，尾部越轻），
- $\beta \in (-\alpha, \alpha)$ 是偏度参数（$\beta < 0$ 表示左偏， $\beta > 0$ 表示右偏， $\beta = 0$表示对称），
- $\delta > 0$ 是尺度参数,
- $\mu \in \mathbb{R}$ 是位置参数。

NIG过程的特征函数 $\varphi(u;\ t) := \mathbb{E}\left[e^{iuX_t}\right]$ 可写为 $\varphi(u;\ t) = e^{t\cdot\vartheta(u)}$，其中，特征指数（或 L´évy 符号）有精确形式。

$$\vartheta(u) := \log\varphi(u;1) = i\mu u - \delta\left(\sqrt{\alpha^2-(\beta+iu)^2} - \sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right).$$

随机微分方程（2）的解由指数NIG过程给出

$$S(T) = S(t)\exp\left((r-q+\omega)\tau + X(\tau)\right), \quad \tau := T-t,$$

其中，ω 是鞅或补偿项调整。它通过强制满足以下条件，确保折现资产价格是真正的$\mathbb{Q}$-鞅：

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S(T)\mid\mathcal{F}_t] = e^{(r-q)\tau}S(t).$$

这将导出以下条件

$$\omega = -\mu + \delta\left(\sqrt{\alpha^2-(\beta+1)^2} - \sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right).$$

在我们的语境下，NIG分布具有以下理想性质：

- 它具有显式的密度函数，该函数光滑且可微，从而确保数值稳定性。
- 当针对每个到期日分别进行校准时，它在各个时间切片上均无套利。
- 特征函数具有已知的闭式表达，因此可以通过傅里叶反演技术高效定价。
- 其灵活的尾部行为和偏度使其能够准确拟合市场隐含分布（例如参见[13, 40, 30]）。

通过针对每个到期日 T，根据观察到的市场期权价格或隐含波动率，获得一组校准后的 NIG参数（$\bar{\alpha},\ \beta,\ \delta,\ \bar{\mu}$），我们可以恢复出平滑、无套利的风险中性密度 $f_{\mathrm{NIG}}(x)$。该校准后的 NIG 密度作为资产价格在到期日 T的边际分布，之后将按照第 3.1.1 节所述，使用 Copula函数将其与其他资产的分布耦合。

2.3.1 NIG模型校准

下文将介绍一些有关 NIG 模型校准的有用结果。

命题2.1 (NIG 价格与位置参数无关)。 给定第 *2.3* 节中的 *NIG*定价模型，并设 $h:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 为可测的收益函数（例如欧式看涨期权或看跌期权收益），使得欧式期权价格，

$$V^{\mathrm{NIG}}(T,K;\theta) = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[h(S(T),K)],$$

是定义良好且有限的。那么，$V_{\mathrm{NIG}}(T, K;\ \theta)$ 与位置参数 μ无关。

证明。 时刻 T 的对数价格可表示为

$$\log S(T) = \log S_0 + (r-q+\omega)T + X(T),$$

其中，$X(T) \sim \mathrm{NIG}(\alpha,\beta,\delta T,\mu T)$。

$X(T)$ 的密度取决于 μT，表现为位置平移。鞅修正 ω 可显式表示为

$$\omega = -\mu + \delta\left(\sqrt{\alpha^2-(\beta+1)^2} - \sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right),$$

它与 $-\mu$呈线性关系。

代入后，随机变量 $\log S(T)$ 可改写为

$$\begin{aligned}\log S(T) &= \log S_0 + (r-q)T + \omega T + X(T)\\ &= \log S_0 + (r-q)T + T\left(-\mu + \delta\left(\sqrt{\alpha^2-(\beta+1)^2} - \sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)\right) + X(T)\\ &= \log S_0 + (r-q)T + \delta T\left(\sqrt{\alpha^2-(\beta+1)^2} - \sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right) + (X(T)-\mu T).\end{aligned}$$

由于 $X(T) - \mu T \sim \text{NIG}(\alpha,\ \beta,\ \delta T,\ 0)$，在 $\mathbb{Q}$ 下，$\log S(T)$ 的分布仅取决于 $\alpha,\ \beta,\ \delta$，而与 μ 无关。因此，$S(T)$ 的分布，以及由此得到的期望 $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[h(S(T)\ K)]$，均与 μ 无关。

□

这一结果说明，在校准过程中固定 $\mu = 0$ 是合理的，且不失一般性。为证明命题 2.3，我们首先证明模型期权价格关于 NIG 参数连续。

引理 2.2（NIG 期权价格的连续性）。设 $V_{\text{NIG}m}(T, K; \theta)$ 表示在参数为 $\theta = (\alpha, \beta, \delta) \in \Theta$的 *NIG* 模型下，第 m 个欧式看涨/看跌期权的价格，其中 Θ 是命题 *2.3* 中定义的一个非空紧集。那么，对于每个 m，映射

$$\theta \mapsto V_m^{\text{NIG}}(T, K; \theta)$$

在 Θ 上连续。

证明。令 $\theta = (\alpha\ \ \beta,\ \delta) \in \Theta$，并考虑 NIG 模型下第 m 个欧式期权的价格，

$$V_m^{\text{NIG}}(T, K; \theta) = e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} h\left(S_0 e^{\omega(\theta)T + x}, K\right) f_{\text{NIG}}(x; \theta)\, \mathrm{d}x,$$

其中 $f_{\text{NIG}}(x; \theta)$ 是参数为 $(\alpha,\ \beta,\ \delta T,\ 0)$ 的 NIG 密度，而 $\omega(\theta)$ 是鞅修正项。映射 $\theta \mapsto \omega(\theta)$ 连续，且 $f_{\text{NIG}}(x; \theta)$ 关于 $(x,\ \theta)$ 在 $\mathbb{R} \times \Theta$ 上联合连续。因此，对于每个固定的 $x \in \mathbb{R}$，被积函数关于 θ 逐点连续。为应用控制收敛定理，我们注意到，可容许条件 $\alpha^2 > \beta^2$ 和 $\alpha^2 > (\beta+1)^2$ 确保 NIG 密度关于 $|x|$呈指数衰减，且在 $\theta \in \Theta$ 上一致。对于欧式看涨期权，其收益的表现形式为 $h(S,\ K) \sim S \sim e^x$，因此被积函数满足

$$h(S_0 e^{\omega T + x}) \cdot f_{\text{NIG}}(x; \theta) \sim e^{(1+\beta)x - \alpha|x|},$$

当 $\alpha > \beta + 1$ 时，该函数可积。对于看跌期权，收益有界，因此可积性可直接由 f_{NIG} 的指数衰减推出。因此，被积函数一致地受一个与 θ 无关的可积函数支配，由控制收敛定理可得

$$\lim_{s \to \infty} V_m^{\text{NIG}}(T, K; \theta_s) = V_m^{\text{NIG}}(T, K; \theta),$$

对于 Θ 中的任意序列 $\theta_s \to \theta$，均成立。这证明了 $\theta \mapsto V_{\text{NIG}m}(T,\ K; \theta)$ 的连续性。 □

命题 2.3 (正则化校准问题解的存在性)。 **</style}设 是 NIG 模型可容许参数 :=** (α, β, δ) </style}的非空紧子集，且其固定 $:= 0$ 满足约束条件

$$\alpha > 0, \quad \delta > 0, \quad \beta^2 < \alpha^2, \quad (\beta + 1)^2 < \alpha^2.$$

定义 *Tikhonov* 正则化最小二乘目标函数:

$$\mathcal{J}(\theta) := \sum_{m=1}^{M} w_m \left(V_m^{\text{NIG}}(T, K; \theta) - \bar{V}_m(T, K)\right)^2 + \lambda \|\theta - \theta_0\|^2,$$

其中，$\{\bar{V}_m(T, K)\}_{m=1}^M$ 为观测到的市场欧式看涨/看跌期权价格，$V_{\text{NIG}m}(T, K;\ \theta)$ </style}为 *NIG* 模型下参数为 θ 时的模型欧式看涨/看跌期权价格，$w_m \geq 0$ 为固定权重，$\theta_0 \in \Theta$ 为固定先验（参考）参数向量，$\lambda \geq 0$ 为正则化参数，$\|\cdot\|$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的欧几里得范数。

那么，该最小化问题

$$\min_{\theta \in \Theta} \mathcal{J}(\theta)$$

至少存在一个解。

证明。 参数集 Θ 是紧的，并且根据假设，目标函数中的所有量均为有限值。根据引理 2.2，对于每个 m，映射 $\theta \mapsto V_m(T,\ K; \theta)$ 都是连续的。因此，$\mathcal{J}(\theta)$ 是定义在紧域上的连续实值函数。根据魏尔斯特拉斯极值定理，$\mathcal{J}$ 在 Θ 上取得全局最小值。

□

备注 （非唯一性）。 正则化校准问题存在解并不意味着解是唯一的。由于期权价格对 *NIG*参数的依赖结构是非线性的，目标函数 $\mathcal{J}(\theta)$ 通常是非凸的。可能存在多个局部极小值，并且标准优化算法可能会根据初始猜测的不同而收敛到不同的解。

备注 (稳定性与敏感性)。 虽然命题 *2.3*保证了极小化点的存在性，但并未讨论解相对于市场数据 $\{V_m\}$ 扰动的¯稳定性。在模型校准等不适定逆问题中，输入的微小变化可能导致估计参数发生较大变化。引入蒂霍诺夫正则化项 $\lambda\|\theta-\theta_0\|^2$ 正是为了通过强制解接近参考参数 θ_0来减轻这种不稳定性。因此， $\lambda>0$ 的选择在校准精度与稳定性之间取得平衡（有关更多详情，请参见 *[9], [10]*中的第*3*章、第*13*节或 *[11]* ）。

2.4 校准方法与实际实施

2.4.1 市场数据

我们数值实验所使用的市场数据包括从泛欧交易所获取的法国三家大型公司——法国农业信贷银行、安盛和米其林——的欧式看涨期权和看跌期权报价，数据截至2024年12月24日。该数据集涵盖多个到期日，并针对每个到期日提供行权价水平以及欧式看涨期权和看跌期权的买卖报价。此外，数据还提供股票期货曲线。现货价格取自通过雅虎财经获取的市场收盘价。

2.4.2 市场隐含贴现、远期和股息曲线

在我们的方法中，我们构建市场隐含贴现因子、远期价格和股息收益率，以确保与观测到的欧洲普通期权价格保持一致。这一步对于从市场报价过渡到用于期权定价和密度恢复的风险中性分布至关重要。

我们利用欧式普通期权的经典 看跌看涨平价关系 。对于给定的行权价 K 和到期日 T，平价关系如下：

$$C(T,K)-P(T,K)=FW(T)\cdot DF(T)-K\cdot DF(T), \tag{4}$$

其中， $C(T,K)$ 和 $P(T,K)$ 分别表示欧式看涨期权和看跌期权的市场价格，$FW(T)$ 表示标的资产在到期日 T 的远期价格，而 $DF(T)$ 表示到期日 T 的无风险贴现因子。

根据买价和卖价报价，我们计算欧式看涨期权和看跌期权的中间价。随后，我们应用公式 (4)，对行权价 K 进行线性回归。该回归的斜率和截距使我们能够估算每个到期日对应的贴现因子 $DF(T)$ 和远期价格 $FW(T)$。

使用推断出的 t-远期关系 远期价格，我们利用标准的现货

$$FW(T)=S_0e^{(r-q)T},$$

其中 S_0 为现货价格， r 为无风险利率。

此过程确保推断出的市场曲线在内部保持一致，并使所有输入（现货价格、远期价格和贴现因子）与实际观察到的期权市场数据相符。这样，我们就无需依赖外部的利率或股息收益率估算，从而避免引入不一致或套利机会。

2.4.3 套利合理性检查

我们的定价模型以无套利原则为基础。因此，输入数据保持内部一致至关重要。对于每个期权到期日，我们都会验证是否存在数字期权套利和蝶式套利，并在模型校准前消除任何违反无套利原则的情况。

对于严格递增的行权价序列 $K_1<K_2<K_3$，我们使用普通期权价格的一侧有限差分来近似数字看涨期权和看跌期权价格。无套利假设要求以下

不等式成立,

$$0 < \frac{C(T,K_1) - C(T,K_2)}{K_2 - K_1} < 1,$$
$$0 < \frac{P(T,K_2) - P(T,K_1)}{K_2 - K_1} < 1.$$

这些表达式对应于数字看涨期权和看跌期权的隐含价格，在无套利假设下必须严格介于 0 和 1 之间。

当期权价格曲面未能体现行权价上的凸性时，就会出现蝶式套利。对于欧式看涨期权，必须满足以下凸性条件,

$$C(T,K_1) - C(T,K_2) - \frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_2}\left(C(T,K_2) - C(T,K_3)\right) \geq 0.$$

欧式看跌期权也适用类似条件，即

$$P(T,K_1) - P(T,K_2) - \frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_2}\left(P(T,K_2) - P(T,K_3)\right) \geq 0.$$

违反这些条件意味着隐含风险中性概率分布不一致。在我们的数据集中，我们检测到少量违规情况，具体而言，是尾部极远处的数字看跌期权套利。这些不一致之处已在拟合前予以消除。

2.4.4 校准方法

我们针对每种资产和到期日，通过求解命题 2.3 中所述的正则化约束非线性最小二乘问题，将NIG分布校准至市场期权价格。请注意，该流程旨在恢复平滑且无套利的边际风险中性密度，以便用于基于Copula的联合分布构造。

接下来，我们结合上述方法上的考量，对命题 2.3 的结果进行调整。令 $\theta = (\alpha,\ \beta,\ \delta)$ 表示待校准的 NIG参数，其中位置参数 μ 固定为零（命题2.1 已从解析角度证明了这一点）。随后，校准过程将通过最小化以下目标函数来完成,

$$\mathcal{J}(\theta) = \sum_{m=1}^{M} w_m \left(V_m^{\mathrm{NIG}}(T,K;\theta) - \bar{V}_m(T,K)\right)^2 + \lambda\|\theta - \theta_0\|^2,$$

其中:

- $\bar{V}_m(T,\ K)$ 表示不同执行价格和到期日的流动性良好的欧式看涨/看跌期权的中间市场价格,
- $V_{\mathrm{NIG}m}(T,\ K;\theta)$ 再次表示使用指数 NIG 模型计算得到的模型价格,
- w_m 表示与买卖价差成反比的权重（以反映定价不确定性）,
- θ_0 表示参数的先验猜测，取为使用 ATM隐含波动率的布莱克-斯科尔斯模型给出的参数，并且
- $\lambda \geq 0$ 是一个正则化系数，用于控制与先验的接近程度。

该目标函数在拟合市场数据的准确性与稳定性之间取得平衡，采用了 Cont 和 Tankov [9] 所讨论的蒂霍诺夫式正则化。由于目标函数是非凸的，因此谨慎初始化至关重要。我们针对 (α,β,δ) 中合理的起始点进行网格搜索，并选取优化前目标函数值最低的起始点。这种启发式方法有助于避免收敛到较差的局部极小值。我们使用 scipy.optimize.minimize 中的 trust-constr 算法作为优化器，该算法支持约束条件、边界以及稳健的收敛设置。我们收紧优化容差，以确保精确收敛。这样¯ ¯便能针对每项资产和到期日，得到一组校准后的参数 $(\bar{\alpha},\beta,\delta)$。

2.4.5 校准结果

校准后的 NIG 密度与观测到的市场期权价格高度吻合，能够捕捉偏斜和微笑曲线等关键特征。由此得到的风险中性密度在每个时间切片上均无套利。对于法国农业信贷银行，最大的定价误差（以现货价格归一化）约为 21 个基点，出现在尾部区域。在平值执行价附近，误差通常约为 10 个基点（见图 1）。对于安盛，最大差异约为 10 个基点（见图 2）；而对于米其林，约为 6 个基点（见图 3），表明这三项资产的校准精度都很高。每张图都将校准后的 NIG 密度与基于平值隐含波动率的先验对数正态分布进行了比较。正如股票市场中的预期，各分布均呈现肥尾和左偏，而 NIG 模型能够很好地捕捉这些特征。加入蒂霍诺夫正则化项可以稳定参数估计，并防止在报价稀疏或嘈杂的区域发生过拟合。总体而言，结果证实了 NIG 模型刻画经验偏度和峰度的能力，支持其用于基于量子的定价和类 Copula 多变量建模等下游任务。

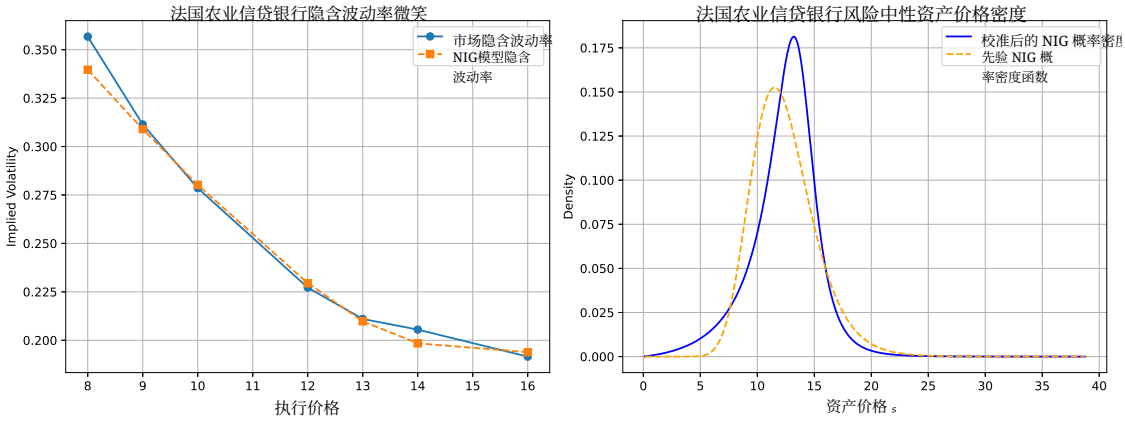


图 1： 法国农业信贷银行，1年期到期（2025年12月19日），数据截至2024年12月24日，收盘现货价格为12.91欧元。校准参数： $\bar{\alpha} = 4.69$, $\bar{\beta} = -3.06$, $\bar{\delta} = 0.18$，其中 $\lambda = 5 \times 10^{-7}$。左图：市场隐含波动率与校准后的隐含波动率对比。右图：使用平值隐含波动率得到的先验对数正态密度函数与校准后的密度函数对比。

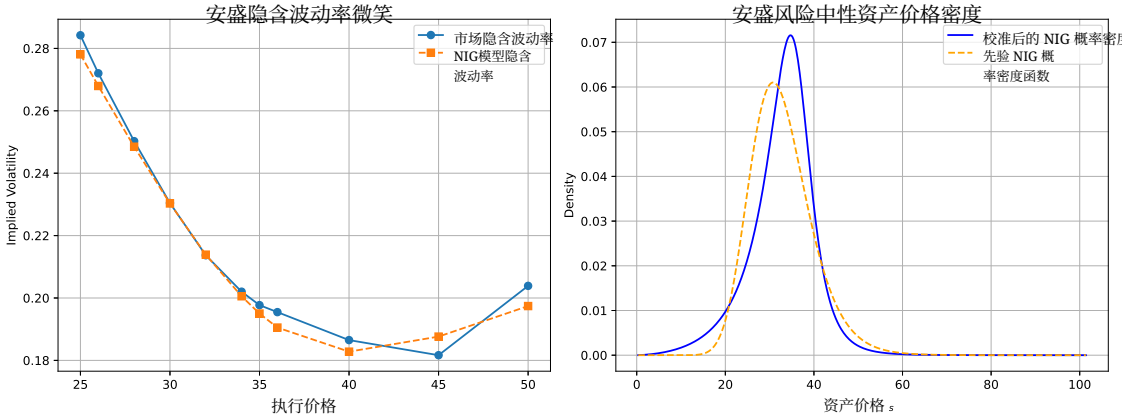


图 2：安盛，1年期到期（2025年12月19日），数据截至2024年12月24日，收盘现货价格为33.8欧元。校准参数： $\bar{\alpha} = 5.24$, $\bar{\beta} = -3.26$, $\bar{\delta} = 0.18$，其中 $\lambda = 5 \times 10^{-7}$。左：市场隐含波动率与校准后的隐含波动率。右：使用平值隐含波动率的先验对数正态密度函数与校准后的密度函数。

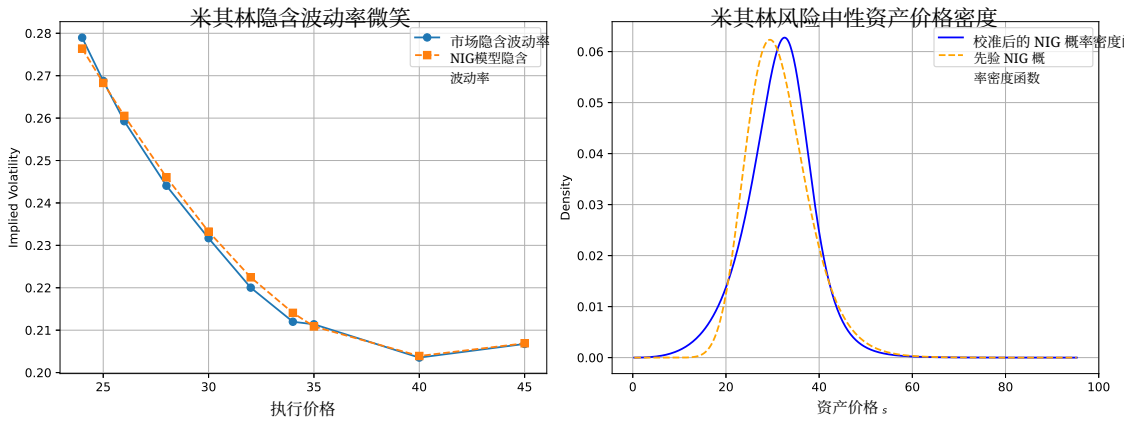


图 3： 米其林，1年期到期（2025年12月19日），数据截至2024年12月24日，收盘现货价格为31.76欧元。校准参数： $\bar{\alpha} = 6.2$, $\bar{\beta} = -3.31$, $\bar{\delta} = 0.26$，其中 $\lambda = 5 \times 10^{-7}$。左图：市场隐含波动率与校准后的隐含波动率对比。右图：使用平值隐含波动率得到的先验对数正态密度函数与校准后的密度函数对比。

3 使用量子计算进行多维期权定价

我们探讨量子计算在解决多维期权定价问题时的能力。

3.1 使用 Copula 进行多维期权定价

我们关注欧式类期权的多元期权定价，其收益函数通常可写为

$$h\left(\mathbf{S}, K\right), \quad \mathbf{S} = \left(S_i(T),\, i = 1, 2, \ldots, N\right),$$

其中，与通常情况一样， $h(\cdot)$ 是用于定义衍生品合约的单变量收益函数， S_i 表示 i^{th} 标的证券的价格， T 是合约到期日， K 表示合约行权价。以下列出一些常见示例：

1. 算术篮子看涨期权，

$$h\left(S_i(T), K\right) = \max\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i(T) - K,\, 0\right),$$

2. 最差表现者看跌期权，

$$h\left(S_i(T), K\right) = \max\left(K - \min_{i=1,\ldots,N} S_i(T),\, 0\right),$$

3. 价差看涨期权，

$$h\left(S_1(T), S_2(T), K\right) = \max\left(S_1(T) - S_2(T) - K,\, 0\right).$$

一般而言，给定 对于多变量收益，期权价值随后可表示为一个期望值 n as

$$V(T, K) = e^{-rT}\mathbb{E}[h(\mathbf{S}, K)] = e^{-rT}\int_{\Omega} f(\mathbf{S}) h(\mathbf{S}, K)\, \mathrm{d}^N\mathbf{S}, \tag{5}$$

为方便起见，这里也将其写成积分形式。为了通过数值方法求解该积分，需要获得标的资产的联合密度函数。下文将介绍一种基于 copula 的方法，用于推导该联合密度。

3.1.1 通过 Copula 构建联合分布

在多元期权定价中，尤其是在涉及多个标的资产时，对到期日资产价格的联合分布进行建模至关重要。虽然可以根据市场期权价格分别推断各资产的边缘分布（参见第 2.3.1 节），但其联合行为必须考虑资产间依赖关系。

Copula 为单独建模这种依赖结构与边际分布提供了强大而灵活的工具。Copula 是定义在单位超立方体 $[0,1]^N$ 上的多元分布函数，具有均匀边缘分布，因此能够根据给定的边际分布构造联合分布。更确切地说，借助 Sklar定理，使用 Copula 可以分别处理各个单变量边际分布及其依赖关系；该定理保证了基于 Copula 的联合分布与各边际分布之间的一致性。

定理 3.1 (Sklar定理 [35])。 对于随机向量$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_N)$在 $\mathbb{R}^N$ 上的任意联合分布函数 F，若其边缘分布函数为 $F_1, \ldots, F_N$，则存在一个 ***Copula*** C使得

$$F(x_1, \ldots, x_N) = \mathcal{C}(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_N)), \tag{6}$$

对于任意 $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$。若 $F_1, \ldots, F_N$连续，则 ***Copula*** $\mathcal{C}$是唯一的。反过来，对于任意边际分布 $F_1, \ldots, F_N$以及一个 N元 ***Copula*** $\mathcal{C}$，按(6) 定义的函数 F是一个有效的联合分布函数，其边际分布为 $F_1, \ldots, F_N$。

根据公式 (6)，如果边际分布 $F_1, \ldots, F_N$具有密度 $f_1, \ldots, f_N$且可微，则 Copula $\mathcal{C}$可微，其密度 c 为

$$c(u_1, \ldots, u_N) = \frac{\partial^N}{\partial u_1 \cdots \partial u_N} \mathcal{C}(u_1, \ldots, u_N),$$

然后，通过 直接推导，向量 $(X_1, \ldots, X_N)$ 的联合密度 f可写为:

$$f(x_1, \ldots, x_N) = c\left(F_1(x_1), \ldots, F_N(x_N)\right) \cdot \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i). \tag{7}$$

该公式将联合密度表示为两个部分的乘积:

- 在边缘分布函数处取值的 Copula 密度，它刻画了变量之间的相互依赖关系；
- 边缘密度的乘积，它刻画了各个变量自身的行为。

一种常用的 Copula（也是本文将采用的 Copula）是高斯 Copula，因为它具有良好的可处理性。令 $\Phi_N(\cdot; \Sigma)$ 表示相关矩阵为 $\Sigma \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 的 N 维标准正态累积分布函数，并令 Φ^{-1} 表示单变量标准正态分位数函数。高斯 Copula 定义为

$$\mathcal{C}_\Sigma(u_1, \ldots, u_N) = \Phi_N\left(\Phi^{-1}(u_1), \ldots, \Phi^{-1}(u_N); \Sigma\right).$$

相应的 Copula 密度为

$$c_\Sigma(u_1, \ldots, u_N) = \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{z}^\top (\Sigma^{-1} - \mathcal{I})\mathbf{z}\right),$$

其中 $\mathbf{z} = (\Phi^{-1}(u_1) \ldots, \Phi^{-1}(u_N))$， $\mathcal{I}$ 是单位矩阵。

基于 Copula 的多维期权估值

利用 (7)，我们可以将 (5) 中的定价公式改写为

$$\begin{aligned} V(T,K) &= e^{-rT}\mathbb{E}[h(\mathbf{S},K)] \\ &= e^{-rT}\int_\Omega h(\mathbf{S},K)c\left(F_1(S_1),\ldots,F_N(S_N)\right)\cdot\prod_{i=1}^{N} f_i(S_i)\mathrm{d}^N\mathbf{S} \\ &= e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathrm{ind}}[h(\mathbf{S},K)c\left(F_1(S_1),\ldots,F_N(S_N)\right)], \end{aligned} \tag{8}$$

其中，同样地，**S** 是表示到期日资产价格的随机变量向量 T, $h(x)$ 是最终支付函数，而 $\mathbb{E}^{ind}[\cdot]$ 是对**S**应用的期望算子，并将其分量 S_i 视为相互独立。利用 (8)，在相关 联合分布下对收益进行定价，可以改写为在独立 边际分布下求期望，但需用 Copula 密度$c(F_1(\cdot)\ldots,F_N(\cdot))$对收益加权。换言之，相关性完全由这一乘法权重体现。

因此请注意，为了构建（并使用）上述 Copula 方法，需要边际密度和分布函数。在衍生品定价框架中，这类表达式通常不存在解析闭式解，或者从数值和/或计算角度来看，其可处理性并不理想。例如，对于第 2.3 节介绍的 NIG 模型，虽然密度函数已知，由式 (3) 给出，但分布函数（及其逆函数，即分位数函数）需要通过数值方法处理，通常会导致较高的计算成本和不稳定性。因此，为了使我们的方法具有普适性（并为利用可能带来显著计算优势的量子算法铺平道路），下一节第 3.1.2 节将提出一种基于余弦基函数的非参数密度估计方法，并回顾其主要理论性质；这些性质随后将用于从理论上证明量子优势。

3.1.2 余弦级数密度（及分布）估计

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 是定义在有限区间 $[a,b]$ 上（或实际上支撑于该区间上）的概率密度函数，与随机变量 X 相关。在正交级数密度估计中，目标密度在 $[a,b]$ 上的函数完备正交归一基中展开，其系数通过 L^2 内积投影得到。对于余弦基

$$\gamma_k(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{b-a}}, & k=0,\\[2mm] \sqrt{\dfrac{2}{b-a}}\,\cos\Big(\dfrac{k\pi(x-a)}{b-a}\Big), & k\geq 1,\end{cases}$$

我们有正交归一性质

$$\int_a^b \gamma_k(x)\,\gamma_\ell(x)\,\mathrm{d}x=\delta_{k\ell},\qquad k,\ell\geq 0,$$

每个基函数都一致有界于

$$|\gamma_k(x)|\leq\sqrt{\frac{2}{b-a}},\qquad x\in[a,b],\ k\geq 0, \tag{9}$$

因此，任意平方可积函数 $f\in L^2([a,b])$ 都可以进行余弦展开

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\gamma_k(x), \tag{10}$$

其中

$$a_k:=\mathbb{E}[\gamma_k(X)]=\int_a^b f(x)\,\gamma_k(x)\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

备注。 有时，为了得到 a_k 系数，使用严格为正的基函数可能更方便。在这种情况下，可以应用以下变换，

$$\gamma_k^{+}(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b-a}{2}}\gamma_k(x),$$

whi**ch** 满足 $0\leq\gamma_k^{+}(x)\leq 1$。然后，余弦系数也可以等价地通过以下方式获得 y

$$a_k:=\mathbb{E}[\gamma_k(X)]=\sqrt{\frac{2}{b-a}}\left(2\mathbb{E}[\gamma_k^{+}(X)]-1\right). \tag{12}$$

将 (10) 中的级数截断至 $\mathcal{K}$ 项，可得到近似值

$$f(x) \approx f^{\mathcal{K}}(x) := \sum_{k=0}^{\mathcal{K}-1} a_k \, \gamma_k(x),$$

这构成了傅里叶余弦（COS）方法的基础，该方法广泛用于密度计算和期权定价计算（例如参见 [14]）。 f 的光滑性或解析性决定了 $f^{\mathcal{K}}$到 f的收敛性，以下定理对此作了阐述。

定理 3.2 (有限区间上的一致余弦级数逼近)。 设 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 是一个实值函数，并定义其余弦系数

$$a_0 := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad a_k := \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{k\pi(x-a)}{b-a}\right)\mathrm{d}x, \quad k \geq 1.$$

定义 $\mathcal{K}$项部分和

$$f^{\mathcal{K}}(x) := \sum_{k=0}^{\mathcal{K}-1} a_k \cos\left(\frac{k\pi(x-a)}{b-a}\right), \qquad x \in [a,b].$$

假设截断区间 $[a,b]$ 的选取满足： f 及其前 $m-1$ 阶导数在端点处为零（或可忽略）：

$$f^{(j)}(a) = f^{(j)}(b) = 0, \qquad j = 0, \ldots, m-1.$$

This 实际上，当 f 光滑且在 $[a$,之外快速衰减时，该条件便会满足 $b]$。那么：

1. **(**代数情形**)** 如果 $f \in C^m([a,b])$ 且 $f^{(m)}$ 在 $[a,b]$上具有有界变差，则存在 $\zeta^{\mathrm{alg}} > 0$，使得对每个 $\mathcal{K} \geq 1$,

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f^{\mathcal{K}}(x)| \leq \zeta^{\mathrm{alg}} \mathcal{K}^{-m},$$

等价地，系数满足 $|a_k| = O(k^{-(m+1)})$。

2. **(**指数情形**)**如果 f 可解析延拓至包含 的复条带

$$\{\, z \in \mathbb{C} : |\Im z| < \rho \,\}$$

其中 $[a,b]$，对于某个 $\rho > 0$，则存在常数 $\zeta^{\exp}$、$\nu > 0$，使得对每个 $\mathcal{K} \geq 1$,

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f^{\mathcal{K}}(x)| \leq \zeta^{\exp} e^{-\nu\mathcal{K}},$$

即余弦展开以指数速率一致地收敛。

常数 ζ^{alg}、$\zeta^{\exp}$、ν取决于 f、区间 $[a,b]$和正则性参数，但不取决于 $\mathcal{K}$。

注释。端点假设实际上确保 f 在 $[a,b]$ 上具有紧支撑，从而使边界项在反复分部积分时消失。这在傅里叶余弦和谱近似理论中是标准做法；例如，参见 *Boyd [3], Trefethen [41],Zygmund [43],*以及*Fang*和*Oosterlee [14]*。

3.1.3 边缘分布的估计

接下来，我们说明边缘累积分布函数的估计过程。这里，我们只考虑足够光滑、可由余弦级数良好逼近的边缘分布（参见定理 3.2 中的假设）；这在期权定价中通常是如此。

令 X_i 表示边缘随机变量，其对应的密度和分布函数分别为 f_i 和 F_i。那么，给定估计的系数 $\hat{a}_k^{X_i} \approx a_k^{X_i} := \mathbb{E}[\gamma_k(X_i)]$ （见公式（11）），我们得到一个逼近 f_i 的余弦级数，表示为

$$f_i \approx \hat{f}_i(x) := \sum_{k=0}^{\mathcal{K}_i-1} \hat{a}_k^{X_i} \, \gamma_k(x). \tag{13}$$

ˆ 此外，通过对其积分，我们得到 F_i 的近似值 $F_{i\circ}$ 事实上，由于余弦级数近似的准确性并不能在整个实轴上得到保证，而只能在一个有限区间内得到保证，因此我们将 F_i 在该区间之外设为 0 或 1。也就是说，我们定义

$$\hat{F}_i(x) := \begin{cases} 0, & x < a_i, \\ \sum_{k=0}^{\mathcal{K}_i} \hat{a}_k^{X_i} \, \Gamma_{k,[a_i,b_i]}(x), & a_i \le x < b_i, \\ 1, & x \ge b_i, \end{cases} \tag{14}$$

其中，

$$\Gamma_{k,[a_i,b_i]}(x) := \int_{a_i}^{x} \gamma_k(t) \, \mathrm{d}t,$$

由下式给出

$$\Gamma_{k,[a_i,b_i]}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_i}{\sqrt{b_i - a_i}}, & k = 0, \\ \dfrac{\sqrt{2(b_i - a_i)}}{k\pi} \, \sin\Big(\dfrac{k\pi(x - a_i)}{b_i - a_i}\Big), & k \ge 1. \end{cases}$$

3.2 用于多维期权定价的 Quantum 算法

本节提出一种基于量子计算的方法，以解决上述所建立的多维期权估值问题，并探讨其理论和实际意义。我们首先概述所采用的量子例程，接着介绍支持量子优势的若干理论结果，并将在下一节 3.3 的实验中对其进行实证验证。

3.2.1 Quantum 加速蒙特卡洛技术

蒙特卡洛方法是解决期权定价问题的知名积分技术，适用于将问题表述为期望的情形。该方法通过在积分区域内生成随机样本，并计算函数在这些样本处的平均值，来近似定积分的值 [20]。

我们考虑计算函数 ϕ 的期望（例如，第 3.1 节所述期权定价问题中的收益 h，或第 3.1.2 节中的余弦基函数 γ_k ）作用于多维随机变量 $\mathbf{X}$ 的结果，其形式为 N 维定积分，即

$$\mathbb{E}[\phi(\mathbf{X})] = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}^N \mathbf{x},$$

其中， f 是具有紧支撑 Ω 的密度。请注意，多维期权价格（式 (5)）和余弦级数展开系数（式 (11)）的定义都可以写成这种形式。

因此，成熟的经典蒙特卡罗方法包括生成 L 个独立同分布的 N 维样本 $\mathbf{X}_l$，其中 $l = 0, \ldots, L-1$，这些样本取自与 f 相关的分布，从而将积分值近似为

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}^N \mathbf{x} \approx \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \phi(\mathbf{X}_l). \tag{15}$$

由于对于某些类型的积分，这种方法的计算开销可能很大，近年来，人们利用量子计算的优势开发了量子振幅蒙特卡罗技术 [33, 37, 23],。与经典方法相比，这些技术有望在查询次数方面实现二次加速，从而降低估计误差。

常见的起点是积分的离散形式，即黎曼和，它定义在$J = 2^{Nn}$ 个离散点上，其中 n 表示每个维度离散化所用的量子比特数[1]，

[1]我们已假设每个空间方向上的离散点数量相同，且不失一般性 n.

其表达式为

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}^N\mathbf{x} \approx \sum_{j=0}^{J-1} f(\mathbf{x}_j)\phi(\mathbf{x}_j). \tag{16}$$

QAMC 方法的核心思想是将积分的值封装在量子态的振幅中，然后在进行测量时，最大化获得该值的概率。为此，我们假设可以在由 $Nn+1$ 个量子比特构成的电路上构造以下量子态[2]

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = \mathcal{U}|x_1\rangle^n \ldots |x_N\rangle^n|0\rangle = &\sum_{j=0}^{2^{Nn}-1} \sqrt{f(\mathbf{x}_j)\phi(\mathbf{x}_j)}\,|x_1\rangle^n \ldots |x_N\rangle^n|1\rangle \\ &+ \sum_{j=0}^{2^{Nn}-1} \sqrt{1-f(\mathbf{x}_j)\phi(\mathbf{x}_j)}\,|x_1\rangle^n \ldots |x_N\rangle^n|0\rangle, \end{aligned} \tag{17}$$

其中，$\mathcal{U}$ 是一个量子算子，它将近似所需积分的黎曼和（的平方根）封装到辅助量子比特的量子态 $|1\rangle$ 的振幅中。预言机 $\mathcal{U}$ 通常由两个算子组成：一个用于加载密度 f，另一个用于加载感兴趣的函数 ϕ。文献中存在许多执行此类量子态制备的方法，例如参见 [22, 42, 39, 7, 34], ；在本文所考虑的情形中，这些方法通常需要一个辅助辅助量子比特（即式（17）中量子态$|\psi\rangle$ 的最后一个量子比特）。

接下来，可以通过量子振幅估计程序 [4, 33], （一种量子算法，能够从量子态中高效提取振幅信息）来估计该积分的值。在这一特定表述中（采用平方根编码），测量该状态时获得 $|1\rangle$ 的概率$|\psi\rangle$，即该状态振幅的平方，恰好是式（16）中该积分的黎曼估计量，而该估计量又近似于 $\mathbb{E}[\phi(\mathbf{x})]$。正如后文第 3.2.2 节和第 3.3 节将要展示的，将量子振幅估计应用于所提出的多变量期权估值方法，从理论和实证两方面来看，都能相较于 CMC 方法实现显著加速。

3.2.2 量子优势：理论结果

首先回顾一个众所周知的结果，它构成了 QAMC 方法的基础，即下一定理中阐述的量子振幅估计程序。

定理3.3（量子振幅估计； [33]中的定理2.3）。令 $\varrho, \epsilon \in (0,1)$。假设我们可以访问随机变量 $Y \in \mathbb{R}^N$ 的态制备预言机 $\mathcal{A}_Y$，以及函数 $\phi\colon \mathbb{R}^N \to [0,1]$ 的受控旋转预言机W_ϕ，则存在一种量子算法，以至少 $1-\varrho$ 的概率输出 $\mathbb{E}_Y[\phi(Y)]$，的 ϵ- 近似，并分别查询 $\mathcal{A}_Y$ 和 W_ϕ

$$O\left(\frac{1}{\epsilon}\log\frac{1}{\varrho}\right)$$

次。

备注。请注意，在此背景下，我们假设在经典计算中，查询一次量子预言机等同于从给定分布中抽取一个样本，同时也避免讨论任何特定的计算能力或技术成熟度问题。因此，在第*3.3*节中，我们将在这些前提下对样本数和查询次数进行公平比较。

边缘分布的量子估计

在推导使用量子振幅蒙特卡罗技术估计边际分布时收敛性的严格理论结果之前，我们先简要讨论如何构建应用该技术所需的量子态（见第 3.2.1 节）。首先，按照第 3.1.2 节和第 3.1.3 节所述的方法，我们需要定义一个预言机，用以封装对式（11）中的期望进行近似的黎曼和。为此，如文献中常见的做法，我们将两个量子操作结合起来，把概率密度函数和一个感兴趣的函数加载到量子态的振幅中

[2]为清晰起见，我们有意省略了归一化常数。

。在本例中，要加载 f_i，我们假设存在一个预言机 $\mathcal{A}_{X_i}$，使得[3]

$$\mathcal{A}_{X_i}|0\rangle^n = \sum_{j=0}^{2^n-1} \sqrt{f_i(x_j)}\,|x\rangle^n. \tag{18}$$

接下来，通过采用受控旋转，将所关注的函数加载进来。然后，假设我们可以访问受控旋转操作 W_{γ_k}，对于 $k=0,\ .....,\ \mathcal{K}_i-1$，该操作将状态 (18) 转换为状态

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{a_k}|0\rangle^n|0\rangle := W_{\gamma_k}(A_{X_i}\otimes\mathcal{I})|0\rangle^n|0\rangle = &\sum_{j=0}^{2^n-1}\sqrt{f_i(x_j)\gamma_k(x_j)}\,|x\rangle^n|1\rangle \\ &+\sum_{j=0}^{2^n-1}\sqrt{(1-f_i(x_j)\gamma_k(x_j)}\,|x\rangle^n|0\rangle,\end{aligned} \tag{19}$$

其中，$\mathcal{I}$ 是单位矩阵，我们定义了算子 $\mathcal{U}_{a_k} := W_{\gamma_k}(A_{X_i}\otimes\mathcal{I})$，它符合第 3.2.1 节中 QAMC 的一般描述。下文将给出主要定理，说明 QAMC 方法的精度以及将其用于恢复边缘分布时所需的成本。

定理 3.4（恢复边缘分布的量子复杂度）。设 $\varrho_i, \epsilon_i \in$（0，1）。设 X_i 为服从分布 f_i 的实值随机变量。假设满足以下条件：

1. f_i 具有定理 3.2 的性质。
2. 对于 $k=0,\ldots,\mathcal{K}_i-1$，可以访问预言机 $\mathcal{U}_{a_k}$，如（19）所示。
3. 对于某些 $[a_i,b_i]$，$F_i(a_i)\le\epsilon_i/2$ 和 $F_i(b_i)\ge 1-\epsilon_i$ 成立。

ˆ那么，以至少 $1-\varrho_i$ 的概率，我们得到 F_i，使得

$$\left|\hat{F}_i(x)-F_i(x)\right|\le\epsilon_i \tag{20}$$

根据定理3.3，对于任意 $x\in\mathbb{R}$，查询 $\mathcal{U}_{a_k}$ 共 $k=0,\ldots,\mathcal{K}_i-1$

$$O\left(\frac{\sqrt{b_i-a_i}\mathcal{K}_i^2}{\epsilon_i}\log\frac{\mathcal{K}_i}{\varrho_i}\right)$$

次。

- 对于代数情形，我们设

$$\mathcal{K}_i=\left\lceil\left(\frac{4\zeta_i^{\mathrm{alg}}(b_i-a_i)}{\epsilon_i}\right)^{\frac{1}{m_i}}\right\rceil, \tag{21}$$

其中 ζ_i^{alg} 是满足以下条件的实数

$$\sup_{x\in[a_i,b_i]}\left|f_i^{\mathcal{K}}(x)-f_i(x)\right|\le\zeta_i^{\mathrm{alg}}\mathcal{K}^{-m_i} \tag{22}$$

对任意 $\mathcal{K}\in\mathbb{N}$ 均成立。

- 对于指数情形，我们设

$$\mathcal{K}_i=\left\lceil\log\left[\left(\frac{4\zeta_i^{\exp}(b_i-a_i)}{\epsilon_i}\right)^{\frac{1}{\nu_i}}\right]\right\rceil, \tag{23}$$

其中 $\zeta_i^{\exp}$ 是满足以下条件的实数

$$\sup_{x\in[a_i,b_i]}\left|f_i^{\mathcal{K}}(x)-f_i(x)\right|\le\zeta_i^{\exp}e^{-\nu_i\mathcal{K}} \tag{24}$$

对任意 $\mathcal{K}\in\mathbb{N}$ 均成立。

[3]由于我们处理的是边缘分布，因此问题的维数为一，可以避免使用向量式粗体记号。

证明。 根据 (14) 中 $\hat{F}_i$ 的定义和假设 3，可以立即看出 (20) 对任意 $x \in (-\infty, -a_i] \cup [b_i, \infty)$ 均成立。因此，接下来我们将重点讨论 $x \in (a_i, b_i)$ 的情形。我们先计算 $|\hat{f}_i(x) - f_i(x)|$。将其分解为

$$|\hat{f}_i(x) - f_i(x)| \leq |\hat{f}_i(x) - f_i^{\mathcal{K}_i}(x)| + |f_i^{\mathcal{K}_i}(x) - f_i(x)| \tag{25}$$

第一项是蒙特卡洛误差，第二项是级数截断误差。我们分别对每一项进行界定。对于第二项，当 $x \in (a_i, b_i)$ 处于代数收敛情形时，有

$$\left| f_i^{\mathcal{K}_i}(x) - f_i(x) \right| \leq \zeta_i^{\mathrm{alg}} \mathcal{K}_i^{-m_i} \leq \frac{\epsilon_i}{4(b_i - a_i)}, \tag{26}$$

其中，我们使用了式 (22)，并按式 (21) 定义 $\mathcal{K}_i$。在指数收敛情形下，我们得到

$$\left| f_i^{\mathcal{K}_i}(x) - f_i(x) \right| \leq \zeta_i^{\exp} e^{-\nu_i \mathcal{K}_i} \leq \frac{\epsilon_i}{4(b_i - a_i)}, \tag{27}$$

其中，我们使用了式 (24)，并按式 (23) 定义 $\mathcal{K}_i$。为界定第一项，我们暂时假设：依托于定理3.3，取 $\delta = \frac{\varrho_i}{\mathcal{K}_i}$ 和 $\epsilon = \frac{\epsilon_i}{4\mathcal{K}_i\sqrt{2(b_i - a_i)}}$，某个量子算法对每个满足以下条件的 $k = 0, \ldots\ldots, \mathcal{K}_i - 1$ 输出估计值 $\mathbb{E}_{X_i}[\gamma_k(X_i)]$

$$\left| \widehat{\mathbb{E}}_{X_i}[\gamma_k(X_i)] - \mathbb{E}_{X_i}[\gamma_k(X_i)] \right| = |\hat{a}_k^{X_i} - a_k^{X_i}| \leq \frac{\epsilon_i}{4\mathcal{K}_i\sqrt{2(b_i - a_i)}}. \tag{28}$$

于是有

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}_i(x) - f_i^{\mathcal{K}_i}(x) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{\mathcal{K}_i - 1} \left(\hat{a}_k^{X_i} - a_k^{X_i} \right) \gamma_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\mathcal{K}_i - 1} \left| \hat{a}_k^{X_i} - a_k^{X_i} \right| \sqrt{\frac{2}{b_i - a_i}} \\ &\leq \frac{\epsilon_i}{4(b_i - a_i)} \end{aligned} \tag{29}$$

其中，第一个不等式使用了式 (9)，第二个不等式使用了式 (28)。

结合式 (25)、(26)（或 (27)）和 (29)，可得

$$\left| \hat{f}_i(x) - f_i(x) \right| \leq \frac{\epsilon_i}{2(b_i - a_i)}.$$

对 $(a_i, x]$ 积分，得到

$$\begin{aligned} \left| F_i(x) - \hat{F}_i(x) \right| &\leq |F_i(a_i)| + \int_{a_i}^{x} \left| \hat{f}_i(y) - f_i(y) \right| \mathrm{d}y \\ &\leq \frac{\epsilon_i}{2} + \frac{\epsilon_i}{2(b_i - a_i)}(x - a_i) \\ &\leq \epsilon_i \end{aligned}$$

对于 $x \in (a_i, b_i)$。

为完成证明，我们来证明关于成功概率和复杂度的结论。由于对于每个，将定理3.3应用于 $\varrho = \frac{\varrho_i}{\mathcal{K}_i}$ 和 $\epsilon = \frac{\epsilon_i}{4\mathcal{K}_i\sqrt{2(b_i - a_i)}}$的概率均为

$k = 0, \ldots\ldots, \mathcal{K}_i - 1$输出满足式（28）的 $\mathbb{E}_{X_i}[\gamma_k(X_i)]$的概率至少为 $1 - \frac{\varrho_i}{\mathcal{K}_i}$，因此所有这些应用都输出此类估计值的概率为

$$\prod_{k=0}^{\mathcal{K}_i - 1} \left(1 - \frac{\varrho_i}{\mathcal{K}_i} \right) = \left(1 - \frac{\varrho_i}{\mathcal{K}_i} \right)^{\mathcal{K}_i}.$$

利用不等式 $(1 - x)^p \geq 1 - px$，对于 $x \in [0, 1]$ 和整数 $p \in \mathbb{N}$，我们得到

$$\left(1 - \frac{\varrho_i}{\mathcal{K}_i} \right)^{\mathcal{K}_i} \geq 1 - \varrho_i.$$

根据定理3.3，对每个 $\mathcal{U}_{a_k}$ （由态制备预言机 $\mathcal{A}_{X_i}$ 和受控旋转预言机 W_{γ_k} 组成，见式 (19)）的查询次数为

$$O\left(\frac{\sqrt{b_i-a_i}\mathcal{K}_i}{\epsilon_i}\log\left(\frac{\mathcal{K}_i}{\varrho_i}\right)\right).$$

最后，将它们对 $k=0,...,\mathcal{K}_i-1$ 求和，得到

$$O\left(\frac{\sqrt{b_i-a_i}\mathcal{K}_i^2}{\epsilon_i}\log\left(\frac{\mathcal{K}_i}{\varrho_i}\right)\right).$$

□

多维期权价格的量子估计

计算出边缘分布函数（并定义 Copula）后，即可直接应用第 3.1 节中描述的多维期权定价方法，其中还可以进一步采用 QAMC 方法，具体而言，用于计算表达式 (5) 或表达式 (8) 中的积分/期望。接下来，我们将说明如何在每种情况下封装所需的量子态；从现在起，我们分别将这两种情况称为联合和独立形式。

对于联合情形，我们需要构建一个量子态，使其利用通过 Copula 得到的近似联合密度来表示 (5) 中的积分值，形式如下

$$\hat{f}(\mathbf{x})=\hat{f}(x_1,\dots,x_N):=c\left(\hat{F}_1(x_1),\dots,\hat{F}_N(x_N)\right)\cdot\prod_{i=1}^{N}\hat{f}_i(x_i),$$

ˆˆ其中， f_i和 F_i, $i=1,\dots,N$分别是由 (13) 和 (14) 给出的近似密度和分布函数。接下来，假设可以访问量子算子 $\mathcal{A}_{\mathbf{X}}$ ，该算子作用于初始零态时满足

$$\mathcal{A}_{\mathbf{X}}|0\rangle^n\dots|0\rangle^n=\sum_{j=0}^{2^{Nn}-1}\sqrt{\hat{f}(\mathbf{x}_j)}\,|x_1\rangle^n\dots|x_N\rangle^n, \tag{30}$$

ˆ因此，它会将近似联合密度函数 f 的平方根加载到量子态的振幅中。接下来，为了近似期权价格，我们需要加载收益函数 $h(\cdot)$，这需要一个预言机W_h 。将其应用于先前定义的状态 (30) 后，我们得到

$$\begin{aligned}W_h(\mathcal{A}_{\mathbf{X}}\otimes\mathcal{I})|0\rangle^n\dots|0\rangle^n|0\rangle=&\sum_{j=0}^{2^{Nn}-1}\sqrt{\hat{f}(\mathbf{x}_j)h(\mathbf{x}_j)}\,|x_1\rangle^n\dots|x_N\rangle^n|1\rangle\\&+\sum_{j=0}^{2^{Nn}-1}\sqrt{(1-\hat{f}(\mathbf{x}_j)h(\mathbf{x}_j)}\,|x_1\rangle^n\dots|x_N\rangle^n|0\rangle.\end{aligned} \tag{31}$$

为了将这些推导纳入第 3.2.1 节对 QAMC 的一般描述，我们用$\mathcal{U}_V:=W_h(\mathcal{A}_{\mathbf{X}}\otimes\mathcal{I})$ 表示构造量子态的预言机，该量子态可通过联合形式估算多维期权价格。在定理3.3的前提下，QAMC 算法能够近似得到由 $\mathbb{E}[h(\mathbf{X})]$ 给出的（未贴现）价格，其精度低于预先设定的ϵ_V，置信度为 $1-\varrho_V$，查询 $\mathcal{U}_V$的次数为 $O\left(\frac{1}{\epsilon_V}\log\frac{1}{\varrho_V}\right)$ 的量级。

独立情形利用了 Copula 性质，将联合密度分解为如式 (7) 所示的两项，这一分解已在式 (8) 中得到应用。同样，给定分布ˆ ˆ函数 $F_1,\dots,F_N$的式 (14) 形式的近似，我们将调整后的收益函数定义为

$$\hat{H}(\mathbf{x})=\hat{H}(x_1,\dots,x_N):=\frac{1}{c_{\max}}h(x)\,c\Big(\hat{F}_1(x_1),\dots,\hat{F}_N(x_N)\Big),\quad c_{\max}:=\max_{u\in[0,1]^N}c(u), \tag{32}$$

它是.....的近似

$$H(\mathbf{x})=\frac{1}{c_{\max}}h(x)\,c(F_1(x_1),\dots,F_N(x_N)). \tag{33}$$

接下来，需要一个预言机 $\mathcal{A}_{\mathbf{X}}^{\mathrm{ind}}$，用于封装独立的联合分布 $f_{\mathrm{ind}}(\mathbf{x}) = f^{\mathrm{ind}}(x_1,\dots,x_N) := \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i)$。因此，假设我们能够像之前一样构建一个 Nn 量子比特量子态，如下所示：

$$\mathcal{A}_{\mathbf{X}}^{\mathrm{ind}}|0\rangle^n \dots |0\rangle^n = \sum_{j=0}^{2^{Nn}-1} \sqrt{f^{\mathrm{ind}}(\mathbf{x}_j)}\,|x_1\rangle^n \dots |x_N\rangle^n. \tag{34}$$

为了加载式（32）中的（近似）调整后的收益函数，我们再次考虑一个量子旋转算子 $W_{\hat{H}}$，使得

$$\begin{aligned} W_{\hat{H}}(\mathcal{A}_{\mathbf{X}}^{\mathrm{ind}} \otimes \mathcal{I})|0\rangle^n \dots |0\rangle^n|0\rangle = &\sum_{j=0}^{2^{Nn}-1} \sqrt{f^{\mathrm{ind}}(\mathbf{x}_j)\hat{H}(\mathbf{x}_j)}\,|x_1\rangle^n \dots |x_N\rangle^n|1\rangle \\ &+ \sum_{j=0}^{2^{Nn}-1} \sqrt{(1-f^{\mathrm{ind}}(\mathbf{x}_j)\hat{H}(\mathbf{x}_j)}\,|x_1\rangle^n \dots |x_N\rangle^n|0\rangle. \end{aligned}$$

与之前一样，我们用 $\mathcal{U}_{V^{\mathrm{ind}}} := W_{\hat{H}}(\mathcal{A}_{\mathbf{X}}^{\mathrm{ind}} \otimes \mathcal{I})$ 表示，以便将先前的量子态构造纳入第 3.2.1 节中的 QAMC 描述。请注意，这种表述允许在可用时使用精确的真实密度函数来定义独立联合密度 f^{ind}。

下面的定理讨论了采用独立方法的定价算法的精度和复杂度。

定理 3.5 (根据独立边际分布估算期权价格的量子复杂度**)**。 设 $\varrho_c, \epsilon_c \in (0,1)$。设 $c\colon [0,1]^N \to \mathbb{R}$ 为一个 ***Copula*** 的密度，并假设存在 $c'_{\max} \in \mathbb{R}$，使得对于任意 $i = 1$、.....、N 以及任意 $u \in [0,1]^N$，

$$\left|\frac{\partial}{\partial u_i} c(u_1,\dots,u_N)\right| \le c'_{\max}. \tag{35}$$

设 $X_1, \dots, X_N$ 为实值随机变量，并假设对于每个 X_i，定理 *3.4* 中的所有假设均成立。假设对于任何形式为 (32) 且 $h\colon \mathbb{R}^N \to [0,1]$ 的函数，我们都可以访问旋转预言机 $W_{\hat{H}}$。那么，以至少 $1-\varrho_c$ 的概率，*QAMC* 算法输出 ϵ_c-近似值 $\mathbb{E}[h(\mathbf{X})]$，，查询 W_{γ_k}

$$O\left(\frac{N^2 c'_{\max}\sqrt{I_{\max}}\mathcal{K}_{\max}^2}{\epsilon_c}\log\left(\frac{N\mathcal{K}_{\max}}{\varrho_c}\right)\right) \tag{36}$$

次， $W_{\hat{H}}$

$$O\left(\frac{c_{\max}}{\epsilon_c}\log\left(\frac{1}{\varrho_c}\right)\right) \tag{37}$$

次，并且 $\mathcal{A}_{X_i}$

$$O\left(\frac{N^2 c'_{\max} I_{\max}\mathcal{K}_{\max}^2}{\epsilon_c}\log\left(\frac{N\mathcal{K}_{\max}}{\varrho_c}\right) + \frac{N c_{\max}}{\epsilon_c}\log\left(\frac{1}{\varrho_c}\right)\right) \tag{38}$$

次，其中 $I_{\max} := \max_{i=1,\dots,N}(b_i - a_i)$ 且 $\mathcal{K}_{\max} := \max_{i=1,\dots,N}\mathcal{K}_i$。

证明。 将定理 3.4 应用于每个 X_i，其中 $\epsilon_i = \frac{\epsilon_c}{2Nc'_{\max}}$ 和 ~~$\varrho_i = \frac{\varrho_c}{2N}$~~，每个估计量 $\hat{F}_i$ 均满足

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left|\hat{F}_i(x) - F_i(x)\right| \le \frac{\epsilon_c}{2Nc'_{\max}} \tag{39}$$

以概率 概率至少为 $1 - \frac{\varrho_c}{2N}$。对于任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$，利用泰勒定理和（35），我们得到

$$\begin{aligned} \left|\hat{H}(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x})\right| &= \frac{h(\mathbf{x})}{c_{\max}}\left|c\Big(\hat{F}_1(x_1),\dots,\hat{F}_N(x_N)\Big) - c(F_1(x_1),\dots,F_N(x_N))\right| \\ &\le \frac{c'_{\max}h(x)}{c_{\max}}\sum_{i=1}^{N}\left|\hat{F}_i(x_i) - F_i(x_i)\right| \\ &\le \frac{\epsilon_c}{2c_{\max}}. \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}^{\mathrm{ind}}[\hat{H}(\mathbf{X})]-\mathbb{E}^{\mathrm{ind}}[H(\mathbf{X})]\right| &= \left|\sum_{j=0}^{2^{Nn}-1}\Big(\hat{H}(\mathbf{x}_j)-H(\mathbf{x}_j)\Big)\,f^{\mathrm{ind}}(\mathbf{x}_j)\right| \\ &\le \sum_{j=0}^{2^{Nn}-1}\left|\hat{H}(\mathbf{x}_j)-H(\mathbf{x}_j)\right| f^{\mathrm{ind}}(\mathbf{x}_j) \\ &\le \frac{\epsilon_c}{2c_{\max}},\end{aligned} \tag{40}$$

其中，再次强调，Nn 表示按照第 3.2.1 节所述用于 QAMC 估计的量子比特数，并且回顾一下，$f^{\mathrm{ind}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i)$。

另一方面，定理3.3中参数为 $\epsilon = \frac{\epsilon_c}{2c_{\max}}$ 和 $\varrho = \frac{\varrho_c}{2}$ 的量子振幅估计 ~~QAE~~ 输出 $\widehat{\mathbb{E}}^{\mathrm{ind}}[\hat{H}(\mathbf{X})]$，满足

$$\left|\widehat{\mathbb{E}}^{\mathrm{ind}}[\hat{H}(\mathbf{X})]-\mathbb{E}^{\mathrm{ind}}[\hat{H}(\mathbf{X})]\right| \le \frac{\epsilon_c}{2c_{\max}} \tag{41}$$

其概率至少为 $1-\frac{\varrho_c}{2}$。

结合 (40) 和 (41)，可得

$$\begin{aligned}\left|c_{\max}\,\hat{\mathbb{E}}^{\mathrm{ind}}[\hat{H}(\mathbf{X})]-\mathbb{E}_X[h(\mathbf{X})]\right| &\le c_{\max}\left(\left|\hat{\mathbb{E}}^{\mathrm{ind}}[\hat{H}(\mathbf{X})]-\mathbb{E}^{\mathrm{ind}}[\hat{H}(\mathbf{X})]\right|+\left|\mathbb{E}^{\mathrm{ind}}[\hat{H}(\mathbf{X})]-\mathbb{E}^{\mathrm{ind}}[H(\mathbf{X})]\right|\right) \\ &\le \epsilon_c.\end{aligned}$$

当每个 $\hat{F}_i$ 均满足 (39) 和 (41) 时，该结论成立，其概率至少为

$$\left(1-\frac{\varrho_c}{2N}\right)^{N}\left(1-\frac{\varrho_c}{2}\right) \;\ge\; 1-\varrho_c,$$

依次使用不等式 $(1-x)^p \ge 1-px$，对于 $x\in[0,1]$ 和整数 $p\in\mathbb{N}$。

最后，我们来评估该算法的查询复杂度。在估计每个 $\hat{F}_i$ 时，$\mathcal{A}_{X_i}$ 和 $\{W_{\gamma_k}\}_k$ 会被查询

$$O\left(\frac{Nc'_{\max}\sqrt{b_i-a_i}\mathcal{K}_i^2}{\epsilon_c}\log\left(\frac{N\mathcal{K}_i}{\varrho_c}\right)\right)$$

$\mathcal{A}_{\mathbf{X}}^{\mathrm{ind}}$在估计所有 $\hat{F}_1$、……、$\hat{F}_d$ 时，查询次数会乘以 N。在估计式 (41) 中，加载 f^{ind} 和 $W_{\hat{H}}$ 的预言机被调用的次数为 (37) 阶。在 $\mathcal{A}_{\mathbf{X}}^{\mathrm{ind}}$ 中，预言机 $\mathcal{A}_{X_1}$、……、$\mathcal{A}_{X_N}$ 各调用一次，总计调用 N 次。综合这些观察，我们得到式 (36)、(37) 和 (38) 中的查询次数边界。

□

3.3 实验结果

本节通过实验测试所提出的基于量子的方法的性能，具体而言，将其应用于估计余弦级数展开的边缘密度系数（见式 (11)）的期望，以及最终的多维期权价格（见式 (5) 或 (8)）。我们将比较由式 (15) 给出的 CMC估计器与类似的 QAMC 的精度收敛模式；后者是在对形式如式 (17) 的状态应用量子振幅估计算法后得到的。为此，在给定精度要求的情况下，我们报告 CMC 所需的样本数 L，以及 QAMC 所需的量子预言机查询次数 $\mathcal{U}_y$，$y\in\{a_k,V,V_{\mathrm{ind}}\}$。此外，由于这些技术本质上具有随机性，每项估计实验都会重复 2^5 次，从而得以提供平均值或置信区间等统计数据。

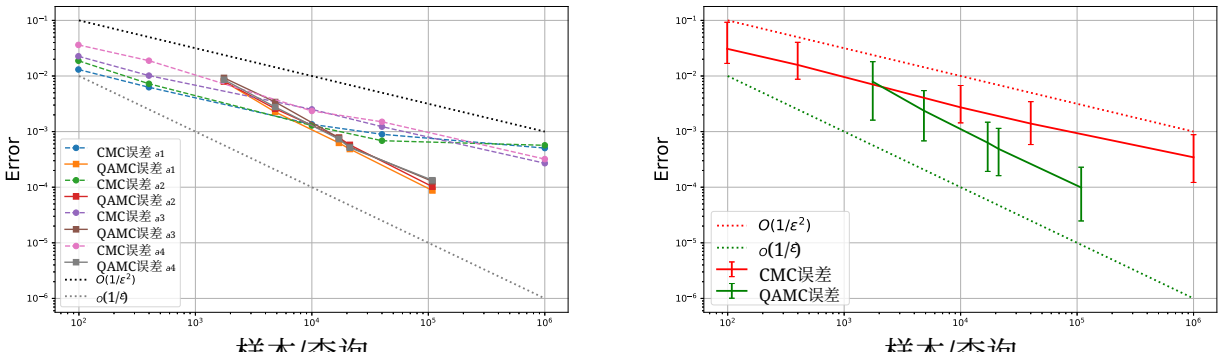
作为边际分布，我们考虑拟合于法国农业信贷银行、安盛和米其林市场报价的 NIG分布（见第 2.4 节）。所采用的校准参数分别列于图 1、图 2 和图 3，对应法国农业信贷银行、安盛和米其林。其余市场数据则按照第 2.4.1 节所述，从泛欧交易所提取。

所有实验均在配备英特尔酷睿Ultra 9 285H处理器和64 GB内存的系统上进行。代码使用 Python 3.10 实现，并在量子软件包 myQLM 1.12.2 下采用 NEASQC：金融应用程序库 [16]。量子模拟器依赖基于 C 的线性

代数库，因而成为理想的[4] 模拟器。作为量子振幅估计程序，我们采用了 [32, 31] 中提出的实数域量子振幅估计的改进版本来计算余弦级数系数（其中量的符号十分重要），并采用 [21, 17] 中的迭代量子振幅估计来估计期权价格（假定为正值）。这两种量子算法都配有严格的理论分析，其误差收敛符合定理3.3中所述的阶。

3.3.1 估计密度余弦展开系数时的收敛

在第一个实验中，分别分析了CMC估计器和QAMC估计器在恢复经校准的NIG 密度[5] （对应于安盛）时，精度随样本数和预言机查询次数的收敛情况。为此，考察近似系数与参考值之间的误差（参考值由公式(16)中的黎曼求积通过经典方式计算得到）。求积中的离散点数设为 $J = 2^5$，这对应于QAMC 方法所使用的 $n = 5$ 个量子比特。在图4中展示了所得结果，其中 $\mathcal{K} = 2^4$。左图展示了前四个（十六个相关系数中的）相关系数的误差收敛曲线（不包括系数 a_0，该系数具有精确解），取各次实验试验结果的平均值。右图展示了所有系数的平均误差，以及重复实验所得的90%置信区间。我们观察到，CMC估计器在索引较高的系数（即幅值较小的系数）上的表现会恶化，而QAMC不会受到这一问题的影响，这是由于量子态中振幅具有自然的内在归一化特性。总的来说，实验实现了预期的总体行为：相对于CMC，QAMC提供了一致的二次加速优势。



(a) 第 k个系数的误差。　　(b) 所有系数的平均误差。

图4：使用 CMC 和 QAMC 估计 a_k 时的精度收敛。

此外，图5展示了随着展开项数 $\mathcal{K}$ 增加而恢复出的密度和分布函数，这些展开项的系数是通过使用相同数量的样本/查询（~ 5000），分别采用 CMC 和 QAMC 方法计算得到的。可以看出，对于较低的 $\mathcal{K}$，两种方法的表现非常相似，几乎无法区分；而当项数较多时，基于 QAMC 的估计优于 CMC 对应方法所得的估计。还需注意的是，正如预期的那样，随着 $\mathcal{K}$ 增加，整体估计效果有所改善。

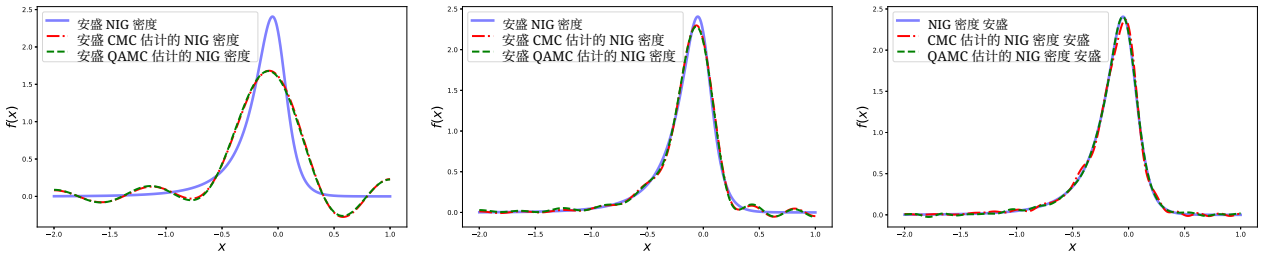
3.3.2 期权价格估计的收敛

接下来，我们通过与前一项实验相同的方式，将 QAMC 估计器与 CMC 估计器在样本/查询数方面的误差收敛进行比较，以评估 QAMC 估计器解决最终多维期权估值问题的表现。我们考虑两个定价问题（见第 3.1 节）：

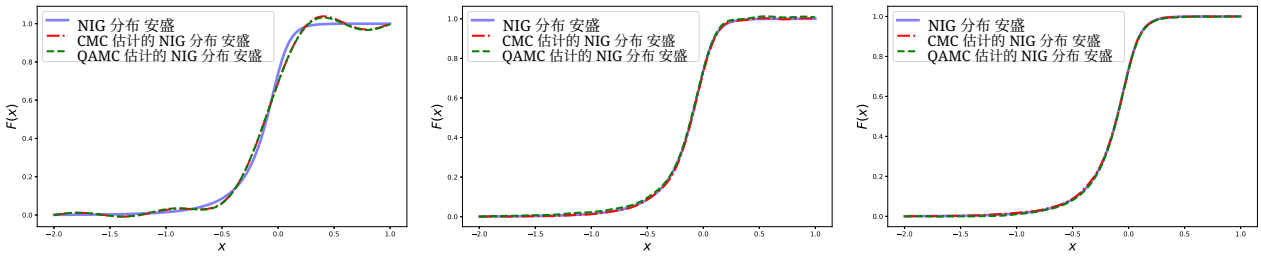
1. 以安盛和米其林为标的资产的1年期价差期权看涨期权。行权价设为and$K = 0$ and，我们使用具有相关矩阵的高斯 Copula 对联合分布进行建模

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -0.25 \\ -0.25 & 1 \end{pmatrix}.$$

[4]其中不包括系统噪声、量子比特相干时间等因素 [5]我们考虑指数 NIG 模型的 NIG 分量，因此此处描绘的密度函数对应于表达式（3）。



(a) 具有 $\mathcal{K} = 2^3$ 的 NIG 密度。 (b) 具有 $\mathcal{K} = 2^4$ 的 NIG 密度。 (c) 具有 $\mathcal{K} = 2^5$ 的 NIG 密度。



(d) 具有 $\mathcal{K} = 2^3$ 的 NIG分布。 (e) 具有 $\mathcal{K} = 2^4$ 的 NIG分布。 (f) 具有 $\mathcal{K} = 2^5$ 的 NIG分布。

图5：采用 CMC 和 QAMC 估计的安盛 NIG 密度和分布函数，随 $\mathcal{K}$变化。

2. 以安盛、法国农业信贷银行和米其林为标的资产的算术篮子一年期看涨期权。行权价设为 $K = 25$，我们使用具有相关矩阵的高斯 Copula 对联合分布进行建模

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.25 \\ -0.2 & 1 & -0.15 \\ -0.25 & -0.15 & 1 \end{pmatrix}.$$

同样，估计精度是通过与经典计算的黎曼和所得到的参考价格进行比较来衡量的。由于所用量子模拟器的计算需求极高，我们会根据当前问题的维数调整所采用的离散点数量。对于价差期权，我们在每个空间方向上选取 $J = 2^3$ 个点（$N = 2$）；而对于算术篮子期权估值，则选择每维 $J = 2^2$ 个离散点（$N = 3$）。因此，两种情况下，我们均使用总计 $Nn = 6$ 个量子比特来应用 QAMC 技术。为单独考察最终价格计算所产生的误差，我们使用$\mathcal{K} = 2^7$ 个余弦级数系数来恢复边缘密度，这些系数由经典方法计算（因此不会产生与量子相关的近似误差）。图6分别在左、右面板中展示了价差看涨期权和算术篮子看涨期权的 CMC 与 QAMC 估计量（使用联合形式和独立形式）的精度收敛结果。同样，我们展示了多次重复估计的平均值以及 90% 置信区间。

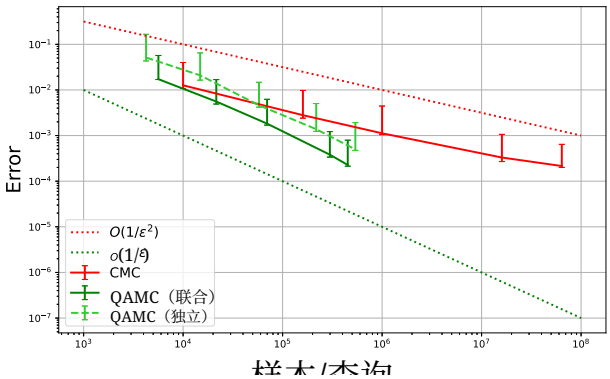
我们可以从定价实验中得出以下结论：

• CMC 和 QAMC 算法均以各自的理论收敛阶收敛，即分别为 $1/\epsilon^2$ 和 $1/\epsilon$。这再次通过实验证明，作为多维期权定价中 CMC 方案的替代方案，基于 QAMC 的方案可带来二次加速。

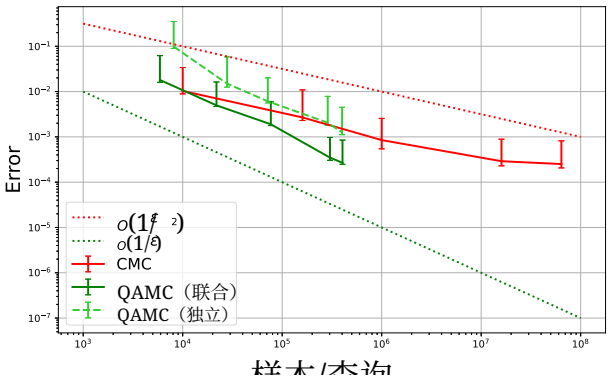
• 尽管收敛阶相同，但对于这一特定估值问题，依赖联合形式的 QAMC 明显优于独立形式的对应方案，在查询数方面呈现出更低的截距。

• 当样本数较大时，CMC 的收敛性甚至会恶化，这表明其可能已趋于饱和。

• 实际而言，当要求高精度（低于 10^{-3}）时，与 CMC 相比，QAMC 只需 $10 - 100$ 更少的样本/查询，即可达到指定精度。



(a) 价差看涨期权



(b) 算术篮子看涨期权

图6：多维期权价格估计精度的收敛。

4 结论

本文提出了一个全面的多资产期权定价框架，将市场一致性建模与量子加速计算相结合。通过根据真实期权报价校准 NIG边缘分布，并使用高斯 Copula 将其耦合，我们构造出能够捕捉股票市场中观察到的偏度和肥尾特征的无套利联合分布。所提出的校准过程具有存在性和连续性的理论保证，能够以极小的定价误差实现高精度，并适用于多个资产。

在计算方面，我们证明了基于量子振幅估计的 QAMC 方法，相较于 CMC，实现了预期的收敛二次加速。实证实验表明，在精度相当的情况下，QAMC 所需的查询次数显著更少（减少一至两个数量级），尤其是在高维情形下。这些结果验证了量子算法在复杂衍生品定价中的实际可行性，并凸显了其克服经典方法固有可扩展性限制的潜力。

除了直接的性能提升之外，本研究还强调了将考虑套利因素的建模与量子技术相结合的重要性，以确保财务稳健性和计算效率。未来研究应探索高斯 Copula 以外更丰富的依赖结构，将该流程扩展至路径依赖型收益，并研究硬件实现，以评估现实世界中的资源限制。通过结合严谨的市场建模与量子计算，本研究为在量化金融领域实现可部署的量子解决方案迈出了奠基性的一步。

致谢

两位作者感谢泛欧交易所数据支持团队的热心协助，感谢他们提供并澄清了本分析所用的期权数据。,

A. Leitao 感谢西班牙科学与创新部通过 Ram´on y Cajal 2022 资助项目及编号为 PID2022-141058OB-I00 的计划提供资助；同时感谢加利西亚自治区教育、科学、大学与职业培训部通过编号为 ED451C 2022/047 和 ED431F 2025/032 的计划提供资助，并感谢 CITIC 的支持。CITIC 是加利西亚大学系统内获认证的卓越中心，也是 CIGUS网络 的成员，并获得加利西亚自治区教育、科学、大学与职业培训部的补助。此外，该项目还通过 FEDER Galicia 2021-27运营计划（编号：ED451G 2023/01）获得欧盟共同资助。

参考文献

[1] F. Alonso、A. Leitao 和 C. V´azquez。用于基于傅里叶的分布估计并应用于期权定价的量子机器学习方法，2025年。[2] J. Andreasen 和 B. Huge。波动率插值。《风险杂志》，第 76–79 页，2011年。[3] J. P. Boyd。《切比雪夫与傅里叶谱方法》。Dover，2001年。[4] G. Brassard、P. Høyer、M. Mosca 和 A. Tapp。量子振幅放大与估计。载于 S. J. L. Jr 和 H. E. Brandt 编，《量子计算与信息》，第 305 卷《当代数学》，第 53–74 页。美国数学会，2002年。[5] D. T. Breeden 和 R. H. Litzenberger。期权价格中隐含的状态或有索赔价格。《商业杂志》，51(4):621–651，1978年。[6] P. Carr 和 D. B. Madan。使用快速傅里叶变换进行期权估值。Journal of Computational Finance，2(4):61–73，1999年。[7] A. Carrera Vazquez 和 S. Woerner。用于量子振幅估计的高效态制备。《应用物理评论》，15(3):034027，2021年。[8] U. Cherubini、E. Luciano 和 W. Vecchiato。《金融中的 Copula 方法》。Wiley 金融丛书。John Wiley & Sons，新泽西州霍博肯，第一版，2004年。[9] R. Cont 和 P. Tankov。《跳跃过程金融建模》。金融数学丛书。Chapman and Hall/CRC，2004年。[10] R. Cont、P. Tankov 和 E. Voltchkova。含跳跃的期权定价模型：积分微分方程与逆问题。载于 P. Neitt¨anm¨aki、T. Rossi、S. Korotov、E. O˜nate、J. P´eriaux 和 D. Kn¨orzer 编，《欧洲计算方法在应用科学与工程中的大会》（ECCOMAS），芬兰于韦斯屈莱，2004年。ECCOMAS。[11] S. Cr´epey。利用 Tikhonov正则化 校准广义 Black–Scholes 模型中的局部波动率。《SIAM 数学分析杂志》，34(5):1183–1206，2003年。[12] H. de March 和 P. Henry-Labord`ere。构建无套利隐含波动率：Sinkhorn 算法及其变体，2019年。[13] A. Eriksson、E. Ghysels 和 F. Wang。正态逆高斯分布与衍生品定价。《衍生品杂志》，16(3):23–37，2009年。[14] F. Fang 和 C. W. Oosterlee。一种基于傅里叶余弦级数展开的欧式期权新定价方法。《SIAM 科学计算杂志》，31(2):826–848，2008年。[15] J. L. Fern´andez、A. M. Ferreiro、J. A. Garc´ıa-Rodr´ıguez、A. Leitao、J. G. L´opez-Salas 和 C. V´azquez。静态与动态 SABR 随机波动率模型：使用图形处理器进行校准与期权定价。《数学与计算机仿真》，94:55–75，2013年。[16] G. Ferro 和 A. Manzano。NEASQC：金融应用，2024年。[17] S. Fukuzawa、C. Ho、S. Irani 和 J. Zion。改进的迭代量子振幅估计在渐近意义下是最优的。载于《2023 年算法工程与实验研讨会（ALENEX）论文集》，第 135–147 页。工业与应用数学学会，佛罗伦萨，2023年 1 月。[18] J. Gatheral。一种简约的无套利隐含波动率参数化及其在波动率衍生品估值中的应用。载于全球衍生品大会，2004年。[19] J. Gatheral 和 A. Jacquier。无套利 SVI 波动率曲面。《量化金融》，14(1):59–71，2014年。[20] P. Glassermann。《金融工程中的蒙特卡罗方法》。Springer，2004年。

[21] D. Grinko、J. Gacon、C. Zoufal 和 S. Woerner。迭代量子振幅估计。npj Quantum Information，7(1)，2021年。[22] L. Grover 和 T. Rudolph。创建与可高效积分的概率分布相对应的叠加态，2002年。[23] A. G´omez、A. Leitao、A. P. Manzano、M. R. Nogueiras、G. Ord´o˜nez 和 C. V´azquez。量子计算金融在衍生品定价和风险价值领域的综述。Archives of Computational Methods in Engineering，9：4137–4163，2022年。[24] P. Hagan、D. Kumar、A. Lesniewski 和 D. Woodward。管理波动率微笑风险。Wilmott Magazine，第84–108页，2002年。[25] S. L. Heston。随机波动率下期权的闭式解及其在债券和货币期权中的应用。The Review of Financial Studies，6(2)：327–343，1993年。[26] J. Hok 和 T. L. R. Chan。使用勒让德多项式进行期权定价。Journal of Computational and Applied Mathematics，322：25–45，2017年。[27] J. Hok 和 S.-H. Tan。通过高效的数值偏微分方程方法校准含随机利率的局部波动率模型。Decisions in Economics and Finance，42(2)：609–637，2019年。[28] A. Leitao、J. L. Kirkby 和 L. Ortiz-Gracia。CTMC–Heston模型：使用SWIFT进行校准和奇异期权定价。Journal of Computational Finance，24(4)：71–114，2021年。[29] A. Lipton 和 A. Sepp。填补空白。Risk Magazine，第66–71页，2011年10月。[30] K. Maekawa 和 K. ichi Kawai。NIG分布下的期权定价：日经225期权的实证分析。计量经济学会2004年远东会议607，计量经济学会，2004年8月。[31] A. P. Manzano、G. Ferro、A. Leitao、C. V´azquez 和 A. G´omez。使用量子计算机进行期权定价的替代流程。EPJ Quantum Technology，12，2025年。28。[32] A. P. Manzano、D. Musso 和 ´A. Leitao。实数域量子振幅估计。EPJ Quantum Technol- ogy，10(1)：1–24，2023年。[33] A. Montanaro。蒙特卡洛方法的量子加速。Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences，471(2181)，2015年。[34] M. Moosa、T. W. Watts、Y. Chen、A. Sarma 和 P. L. McMahon。用于加载任意函数傅里叶近似的线性深度量子电路。Quantum Science and Technology，9(1)：015002，2023年。[35] R. B. Nelsen。《Copula简介》。Springer统计学丛书。Springer，第2版，2006年。[36] R. Or´us、S. Mugel 和 E. Lizaso。金融量子计算：概述与展望。Reviews in Physics，4：100028，2019年。[37] P. Rebentrost、B. Gupt 和 T. R. Bromley。量子计算金融：金融衍生品的蒙特卡洛定价。Physical Review A，98(2)，2018年。[38] W. Schoutens。金融中的L´evy过程：金融衍生品定价。Wiley概率与统计丛书。John Wiley & Sons，奇切斯特，西萨塞克斯；纽约，第1版，2003年。Wiley概率与统计丛书第534卷。[39] N. Stamatopoulos、D. J. Egger、Y. Sun、C. Zoufal、R. Iten、N. Shen 和 S. Woerner。使用量子计算机进行期权定价。Quantum，4：291，2020年。[40] B. Tavin。作为波动率微笑函数的隐含分布。Bankers, Markets and Investors，119：31–42，2012年7月。[41] L. N. Trefethen。《MATLAB中的谱方法》。SIAM，2000年。

[42] C. Zoufal、A. Lucchi 和 S. Woerner。用于学习和加载随机分布的量子生成对抗网络。*Quantum Information*，7(103)，2019年。[43] A. Zygmund。三角级数。剑桥大学出版社，1959。