arXiv:2601.04050v1 [math.SP] 7 Jan 2026

度量图的平面性判据

ALICE BROLIN 和 PAVEL KURASOV

In memory of Heinz Langer
who taught us not only mathematics

Abstract. Colin de Verdi`ère 参数是赋予离散图的一个数值，等于与该图相关的一类拉普拉斯矩阵中第二特征值的最大重数。本文证明，通过考察顶点处具有δ耦合的度量图上的拉普拉斯算子之第二特征值的最大重数，可以在度量图的框架下得到 Colin de Verdi`ère 参数。本文还介绍了两类不同的拉普拉斯算子以及一类薛定谔算子，它们都导出 Colin de Verdi`ère 数。

1. Introduction

Colin de Verdi`ere 图参数除了其他用途外，还能描述一个离散图是否为平面图。它推广了 Kuratowski [20],的经典结果，但为图的平面性问题提供了新的见解。该参数定义为与图相关的一族特定厄米矩阵中第二特征值的最大重数。通过为边指定长度，可以自然地将每个离散图关联到一个度量图。我们证明，Colin de Verdi`ere 参数也可以描述为作用于度量图上的不同一族薛定谔算子中第二特征值的最大重数。与离散图不同，度量图上的薛定谔算子由许多参数决定：边长、顶点条件以及边上的势 [5, 17]。为了获得平面性判据，这些参数应满足某些附加假设，例如 Colin de Verdi`ere 原始方法中的矩阵 $\mathbf{A}$，其对角线以外的元素应为负（见第2节）。对于度量图，这类附加假设究竟应是什么，*a priori* 并不明确。此外，减少参数数量能使优化问题更容易；因此我们将首先寻找最小的参数族。这三种可选参数族将在第4、7和8节中介绍。这些参数族经过专门构造，使得相应的世俗矩阵 $\mathbf{Q}(\lambda_2)$（见（3.6））恰好与 Colin de Verdi`ere 矩阵 $\mathbf{A}$ 重合。所提出的度量图算子族为 Colin de Verdi`ere 矩阵提供了良好的几何解释，尤其是对施加于矩阵上的强阿诺德性质（SAP）的解释（见第4节）。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 34L05、35P05、81Q10。
Key words and phrases. 度量图、ColindeVerdi`ère 数、平面性、δ耦合。此项工作部分获得瑞典研究理事会资助，资助项目编号为 2020-03780 和 2024-04650。

我们的研究关注度量图上的微分算子，但我们的分析为原始的 Colin de Verdi`ere 构造提供了新的见解。先简要介绍这一构造（相关说明见第2节）。

给定一个（离散）图 $G = (V, E)$，Colin de Verdi`ere 参数 $\mu(G)$ 是与该图相关的一组对称 $|V| \times |V|$矩阵（称为 Colin de Verdi`ere 矩阵；见定义 2.2）中第二特征值的最大重数。这些矩阵 $\mathbf{A}$ 的定义方式是：若两个顶点之间有边，则非对角元严格为负；否则为零。对角元可以是任意实数。此外，这些矩阵必须恰有一个负特征值，并满足强阿诺德性质（见第 2 节）。

矩阵 $\mathbf{A}$ 的选取背后有两个基本思想，使这一构造成为可能：

- 与图 G相关的矩阵 $\mathbf{A}$ 被选为对角线以外的元素均非正，以保证相应的半群保持正性，并使 Perron-Frobenius 定理成立，即 基态可以取为正（参见例如 [7] 和 [1, 定理 7.1]）；
- 平面性判据的证明基于对与第二特征值相对应的特征向量的节点域进行精细分析，而这只有在基态符号确定的情况下才有可能。

Colin de Verdi`ère 参数提供了有关离散图 G平面性的信息（见定理 2.5）。

现在来讨论如何将这些思想推广到度量图上的微分算子。所谓度量图，是指由有限个紧区间（ $\mathbb{R}$的子集）组成，并将其中若干端点识别起来，从而形成顶点（见第 4 节）。随后，自伴的 Scrhr¨odinger 算子 $-\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ 作用于定义在边上的函数，并在顶点处满足某些条件（见第 4 节，其中解释了顶点条件的双重作用）。所考虑的度量图是紧的，因此算子的谱是离散的，且特征值趋于 $+\infty$。度量图上微分算子的谱理论可视为离散图谱理论的一种自然推广，使谱具有更丰富的结构。因此，人们不禁想要探究，Colin de Verdi`ère 的经典分析能否推广到度量图。显然，在讨论这种推广时，应当考虑上述基本原理。

（无界）微分算子的基态非退化性与正性，由相应半群的保正性保证，这一点由经典的 Beurling-Deny 判据所述 [6, 24] 这一联系在度量图上的薛定谔算子中已有详细讨论 [16], 另见 [17, 第4节。5]特别是，研究表明，顶点处所谓的广义 delta 耦合可确保基态为正，且与边长无关。因此，本文将始终只考虑由广义 delta 耦合给出的顶点条件（见 [17, 第3节）。7][1]

为了能够讨论节点域，顶点处的函数应满足加权连续性条件，这意味着广义

[1]请注意，顶点处的标准 δ 耦合，尤其是标准顶点条件，都是广义 delta 耦合的特例。

δ耦合的类别应进一步缩小，从而得到定义 6.1 所述的加权δ耦合。顶点条件的选择极为重要，因为正如第5节所示，仅考虑标准顶点条件是不够的。

下面讨论如何选取最小算子族。在原始文献中，人们改变某个矩阵 $\mathbf{A}$，其非对角元与边相关。所改变的参数总数为

$$\#\text{ vertices} + \#\text{ edges}. \tag{1.1}$$

每个离散图都可以关联一个度量图上的薛定谔算子。看来，仅考虑标准拉普拉斯算子是不够的（见第5节），因此我们考虑以下三个族，其中顶点参数由δ耦合来体现：

(1) 顶点处带有δ耦合的度量图上的拉普拉斯算子（第4节）。(2) 顶点处带有加权δ耦合的等边度量图上的拉普拉斯算子（第6节）。(3) 顶点处带有标准δ耦合、边上势为常数的等边度量图上的薛定谔算子（第8节）。

每个族中的参数个数由公式（1.1）给出。每个族对应的世俗矩阵由（3.6）给出，是 Colin de Verdi`ère 矩阵 $\mathbf{A}$ 的直接类比。考察第一个族时，Colin de Verdi`ère 方法的几何解释尤为清晰：决定矩阵 $\mathbf{A}$的参数正是边长和顶点处的权重。

我们的研究与度量图上的拉普拉斯算子的谱隙研究密切相关。关于标准拉普拉斯算子近期成果的全面介绍可见 [2–4, 11, 15, 18, 22, 23],, 另见 [17, 第 12] 章。

2. Colin de Verdière parameter for discrete graphs

Colin de Verdi`ère 参数最初定义于 1990 [8] （另见译文 [9]）。我们将遵循 [12], ，该文对这一主题作了自成一体的介绍。

设 $G = (V, E)$ 是一个连通离散图，其中 $V = \{v^m\}_{m=1}^M$ 是顶点集， E 是边集。若顶点 v^i 与 v^j 之间有一条边，我们记作 $v^i \sim v^j$。定义在 G 上的函数定义于各顶点，因此可以与 $\mathbb{C}^M$ 中的向量等同。我们始终假设该图是**简单**，即不含环或平行边。

对于每个离散图 G，我们关联集合 $\mathcal{S}_G \subset \mathrm{Sym}_M$，其元素为实值对称矩阵 $M \times M$ $\mathbf{A} = (a_{ij})$，满足

(1) a_{ii} 是任意实数，(2) 若 $v^i \sim v^j$，则 $a_{ij} < 0$；(3) 若 $v^i \not\sim v^j$ 且 $i \neq j$，则 $a_{ij} = 0$。

我们用 $\mathcal{S}_G^{\perp} \subset \mathrm{Sym}_M$ 表示矩阵 $= \mathbf{X} x_{ij}()$ 的集合，满足

(1) $a_{ii} = 0$，(2) $a_{ij} = 0$ 若 $v^i \sim v^j$。

注 2.1。 如果 G 是连通的，那么任意 $\mathbf{A} \in \mathcal{S}_G$ 的基态都是单重的，且相应的特征函数可以选为严格正的。

严格正性源自 Perron-Frobenius 定理，对集合 $\mathcal{S}_G$ 的选取至关重要。

我们用 $\xi_1 < \xi_2 \leq ...$ 表示 $\mathbf{A}$ 的特征值。Colin de Verdi`ere 参数背后的思想是研究第二特征值的重数 μ 。由于对角线上的值是任意的，因此总可以考虑矩阵 $\mathbf{A} - \xi_2\mathbf{I}$ ，而不是 $\mathbf{A}$。因此，只需考虑恰好具有一个负特征值的矩阵，并研究 $\xi_2 = 0$ 的重数。显然，只有当第二特征值的重数在某种意义上对扰动保持稳定时，它才反映图的拓扑。

如果 $\mathbf{A} \in \mathcal{S}_G$ 具有**强阿诺德性质**，则称不存在非零对称矩阵$\mathbf{X} \in \mathcal{S}_G^{\perp}$ 使得

$$\mathbf{AX} = \mathbf{0}. \tag{2.1}$$

$\mathcal{S}_G$ 中具有一个负特征值且还具有强阿诺德性质的矩阵，称为**Colin de Verdi`ere 矩阵**。

$\mathbf{A} \in \mathcal{S}_G$ 的 dim(ker(**A**)) $= \mu$ 具有强阿诺德性质，等价于空间 $\mathcal{S}_G$ 和

$$\mathcal{R}_{\mu}^{M} = \{\mathbf{A} \in \mathrm{Sym}_M | \dim(\ker(\mathbf{A})) = \mu\}$$

在空间 Sym$_M$ 中横截地相交于$\mathbf{A}$ 。

定义 2.2. 与图 G相关联的 Colin de Verdi`ère 矩阵的特征值 $\xi_2 = 0$的最大重数 $\mu$，即为**Colin de Verdi`<style id='6}ère 图参数 $\mu(G)$。**

注 2.3。 最优的 Colin de Verdi`ère 矩阵并不唯一：乘以一个实参数会得到一族最优矩阵。

请注意，上述定义只考虑具有强阿诺德性质的对称矩阵**A**，这使 Colin de Verdi`ère 图参数具备了小图单调性这一重要性质。

定理 2.4 (见 [8]或 [12]中的陈述 1.3。 ***Colin de Verdi`ère*** 图参数 $\mu(G)$ 具有小图单调性

$$H \text{ is a minor of } G \quad \Rightarrow \quad \mu(H) \leq \mu(G).$$

特别地， $\mu(G)$ 不会因删除边或收缩边而增大。

Colin de Verdi`ere 图参数的重要性体现在，它决定了离散图是否为平面图。

定理 2.5 （定理 3.2 和 5.7，见 [8] 以及定理 3，见 [21]）。 设 G 为一个简单连通离散图， μ 表示其 ***Colin de Verdi`ere*** 参数。那么有：

- μ（G） $= 1$ 当且仅当 G 是路径，
- μ（G） ≤ 2 当且仅当 G 是外平面图，
- μ（G） ≤ 3 当且仅当 G 是平面图，
- μ（G） ≤ 4 当且仅当 G 是无链接可嵌入的。

性质 (1) –(3) 最初由 Colin de Verdi`ere 在其原始论文中提出 [8] ，其中$\mu(G)$ 首次被引入；性质 (3) 的证明自然需要用到库拉托夫斯基定理 [20]。第四个陈述已在 [21] 中得到证明。

另有研究表明，对于重要的图类，无需额外要求满足强阿诺德性质——满足其他要求的矩阵会自动具备这一性质 [13, 25]。

3. Metric graphs and M matrices

度量图 $\Gamma = (\mathsf{E}, \mathsf{V})$ 由区间集 E（$E_n = [x_{2n-1}, x_{2n}]$、$n = 1$、……、N）以及端点 x_1、……、x_{2N} 的一个划分 V 构成；这些区间称为边，而划分所得的非空等价类 $(v^i)_{i=1}^{M}$ 称为顶点。若将每个顶点中的所有点视为同一点，则 Γ 成为一个度量空间。如果存在一条边，其一个端点属于 v^i，另一个端点属于 v^j，我们记作 $v^i \sim v^j$。我们假设度量图是简单且连通的。若 $v^i \sim v^j$，则用 ℓ_{ij} 表示连接 v^i 和 v^j 的边的长度。相应的边记作 E_{ij}；换句话说，我们用两种方式表示边：按某种顺序编号为 E_n、$n = 1$、2、……、N，或标明它们连接的顶点为 E_{ij}、i、$j = 1$、2、……、M.。由于图是简单的，参数 n 和 ij 可相互唯一确定。相应的离散图（具有相同的顶点集和边集）记作 $G = G(\Gamma)$。

Γ 上的函数空间为 $L^2(\Gamma) = \bigoplus_{n=1}^{N} L^2(E_n)$。本文只考虑由微分表达式 $Lu = -\frac{d^2}{dx^2}u$ 在 Γ 上定义的拉普拉斯算子。极大算子定义在定义域 $W_2^2(\Gamma) = \bigoplus_{n=1}^{N} W_2^2(E_n)$ 上，但该算子并非对称的。要使其自伴，需要引入某些顶点条件，分别在每个顶点处关联函数值与其一阶导数。为此，我们引入函数在端点处的极限值及其有向一阶导数：$u(x_j) := \lim^{x \to x_j} u(x)$ $\partial u(x_j) := (-1)^{j+1} \lim_{x \to x_j} u'(x)$，其中极限从边的内部取值。

在本文的第一部分，我们只在顶点处使用 δ 耦合，并称其为标准耦合，以便与后文介绍的加权 δ 耦合相区别。

定义 3.1. 设 $\alpha^j \in \mathbb{R}$ 为实耦合参数。则顶点 v^j 处的**标准 δ 耦合** 由以下条件给出：

$$\begin{cases} \vec{u}(x_i) = \vec{u}(x_l), =: \vec{u}(v^j)\ x_i, x_l \in v^j, \\ \sum_{x_i \in v^j} \partial\vec{u}(x_i) = \alpha^j \vec{u}(v^j). \end{cases} \tag{3.1}$$

注意，第一个条件意味着函数在各顶点处连续，因此其取值 $u(v^j)$ 是定义良好的。我们用 $L^{\vec{\alpha}}(\Gamma)$ 表示 Γ 上的拉普拉斯算子，其标准 δ 耦合由 $\vec{\alpha}$ 给出。

这些算子的谱可用 M 函数描述（见 [17]中的第 5.3.4 节）。设 u 是微分方程 $-u'' = \lambda u$，$\Im\mathrm{m}\,\lambda \neq 0$ 在每条边上的任意解。则 M 函数将各顶点处的狄利克雷数据和诺伊曼数据联系起来：

$$\mathbf{M}(\lambda) : \begin{pmatrix} u(v^1) \\ u(v^2) \\ \vdots \\ u(v^M) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \partial u(v^1) \\ \partial u(v^2) \\ \vdots \\ \partial u(v^M) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

其中我们使用记号 $\partial u(v^j) := \sum_{x_i \in v^j} \partial u(x_i)$。

设连接两个顶点 v^i 和 v^j、长度为 ℓ_{ij} 的边以 $E_1 = [x_1, x_2]$ 为参数化。则将函数值 $(u(x_1)\ u(x_2))$ 映射到法向导数值 $(\partial u(x_1)\ \partial u(x_2))$ 的该边的 Titchmarsh-Weyl M函数由如下 2×2 矩阵给出

$$\mathbf{M_e}(\lambda) := \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\ell_{ij})}{\sin(\sqrt{\lambda}\ell_{ij})} & \frac{\sqrt{\lambda}}{\sin(\sqrt{\lambda}\ell_{ij})} \\ \frac{\sqrt{\lambda}}{\sin(\sqrt{\lambda}\ell_{ij})} & -\frac{\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\ell_{ij})}{\sin(\sqrt{\lambda}l\ell_{ij})} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

如果对于某个 λ，该矩阵有非平凡的核，那么该 λ 就是该边的 Neumann特征值，因为必定存在某个函数满足 $-u'' = \lambda u$和 $(u(x_1)\ u(x_2)) \neq (0,\ 0)$，但 $(\partial u(x_1)\ \partial u(x_2)) = (0,\ 0)$。

Γ 的矩阵M函数由 2×2 边 M 函数组成：

$$(\mathbf{M}(\lambda))_{ij} = \begin{cases} -\sum\limits_{v^m \sim v^i} \sqrt{\lambda}\cot\sqrt{\lambda}\ell_{im}, & j = i; \\ \dfrac{\sqrt{\lambda}}{\sin\sqrt{\lambda}\ell_{ij}}, & v^i \sim v^j; \\ 0, & v^i \not\sim v^j, j \neq i. \end{cases} \tag{3.4}$$

我们注意到 $\lambda \mapsto \cos(\sqrt{\lambda}\ell_{ij})$是一个整函数，而 $\lambda \mapsto \frac{\sqrt{\lambda}}{\sin(\sqrt{\lambda}\ell_{ij})}$是一个在 $(\frac{\pi}{\ell_{ij}})^2 n^2$处有简单极点的亚纯函数，其中 n 是正整数。因此，矩阵值 M 函数可以延拓到实轴上的所有 $\lambda \neq \left(\frac{\pi}{\ell_{ij}}\right)^2 n^2$，$n = 1,\ 2,\ \ldots\ldots$。

实数 $\lambda \neq \left(\frac{\pi}{\ell_{ij}}\right)^2 n^2, \forall \ell_{ij}$，是带有δ相互作用的拉普拉斯算子的特征值，当且仅当线性方程

$$\left(\mathbf{M}(\lambda) - \operatorname{diag}\ \{\alpha_m\}\right) \begin{pmatrix} u(v^1) \\ \vdots \\ u(v^M) \end{pmatrix} = 0 \tag{3.5}$$

有非平凡解。我们定义世俗矩阵

$$\mathbf{Q}(\lambda) := \mathbf{M}(\lambda) - \operatorname{diag}\ \{\alpha_m\}. \tag{3.6}$$

该特征值的重数与$\mathbf{Q}(\lambda)$的核的维数一致，因此我们证明了：

引理3.2. 对于满足 $\lambda \neq (\frac{\pi}{\ell_{ij}})^2$ 对所有 $i \sim j$成立的 λ，$\ker(\mathbf{Q}(\lambda))$的维数等于相关拉普拉斯算子 $L^{\vec{\alpha}}(\Gamma)$的特征值 λ 的重数。

为理解 M 函数的奇点与$\mathbf{Q}(\lambda)$的特征值之间的关系，我们采用了 [19]中提出的思想。M 函数是矩阵值的 Herglotz-Nevanlinna函数，即对于 $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$，$M(\lambda)$ 是解析的、对称的，且$\mathbf{M}(\lambda) = \mathbf{M}(\lambda)^*$，并且在上半平面中虚部非负$\frac{\Im\mathfrak{m}\mathbf{M}(\lambda)}{\Im\mathfrak{m}\,\lambda} \geq 0$ 其中 $\Im\mathfrak{m}(\mathbf{M}(\lambda)) = \frac{\mathbf{M}(\lambda) - \mathbf{M}(\lambda^*)}{2i}$。

引理3.3。 *Titchmarsh-Weyl M*函数$\mathbf{M}(\lambda)$是一个 *Herglotz-Nevanlinna*$M \times M$ 矩阵值函数，具有以下性质：

- 对于每个不是$(\frac{\pi}{\ell_{ij}})^2$ $\mathbf{M}(\lambda)$的奇点的 $\lambda \in \mathbb{R}$, 恰有M个实特征值 $\xi_j(\lambda)$ $j = 1$、2、.....、 M，它们依赖于 λ [2]且是解析的
- 特征值是实数 λ 的递增函数，但在以下点可能出现奇点

$$\lambda = \left(\frac{\pi}{\ell_{ij}}\right)^2 n^2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

- 所有 M 特征值在 λ 趋于 $-\infty$ 时趋于 $-\infty$，并满足以下渐近式:

$$\xi_j \sim -d_j\sqrt{|\lambda|}, \quad \lambda \to -\infty, \tag{3.8}$$

其中 d_j 是顶点 v^j的度。

证明。由$\mathbf{M}(\lambda)$的显式公式（3.3）可知，该矩阵值函数在非实lambda处是解析的，并且$\mathbf{M}(\lambda)^* = \mathbf{M}(\lambda)$。M-函数的奇点与分母中出现的正弦函数的零点重合，即拉普拉斯算子在各边上的狄利克雷-狄利克雷特征值。这些奇点由公式（3.7）给出。

矩阵值函数$\mathbf{M}(\lambda)$是由公式（3.4）给出的各单边矩阵值M-函数之和。每个矩阵值函数都是Herglotz-Nevanlinna函数。这是因为对于 $\mathfrak{Im}(\lambda) > 0$，其特征值

$$\mathfrak{Im}(\mathbf{M}_e(\lambda)) = \begin{pmatrix} \mathfrak{Im}\left(-\frac{\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l_{ij})}{\sin(\sqrt{\lambda}l_{ij})}\right) & \mathfrak{Im}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sin(\sqrt{\lambda}l_{ij})}\right) \\ \mathfrak{Im}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sin(\sqrt{\lambda}l_{ij})}\right) & \mathfrak{Im}\left(-\frac{\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l_{ij})}{\sin(\sqrt{\lambda}l_{ij})}\right) \end{pmatrix}$$

are

$$\mathfrak{Im}\left(-\frac{\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}l_{ij})}{\sin(\sqrt{\lambda}l_{ij})}\right) \pm \mathfrak{Im}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\sin(\sqrt{\lambda}l_{ij})}\right).$$

若令 $\sqrt{\lambda}l_{ij} =: x + iy$，则特征值可写为

$$\frac{1}{\ell_{ij}}\,\mathfrak{Im}\left((x+iy)\tan(\frac{x+iy}{2})\right), -\frac{1}{\ell_{ij}}\,\mathfrak{Im}\left((x+iy)\cot(\frac{x+iy}{2})\right)$$

其中 x, $y > 0$。此时 $\mathfrak{Im}(\mathbf{M}_e)$ 是正定的，因为我们有

$$\mathfrak{Im}\left((x+iy)\tan(\frac{x+iy}{2})\right) = \frac{\sinh(y)x + \sin(x)y}{\cosh(y) + \cos(x)} > 0$$

and

$$-\mathfrak{Im}\left((x+iy)\cot(\frac{x+iy}{2})\right) = \frac{\sinh(y)x - \sin(x)y}{\cosh(y) - \cos(x)} > 0.$$

因此$\mathbf{M}(\lambda)$ 也是一个 Herglotz-Nevanlinna函数。

对于与 (3.7) 不同的实数 λ，矩阵 $\mathbf{M}(\lambda)$ 是厄米特的，因此微扰理论（参见例如 [14, 定理 6.1]）表明，$\mathbf{M}(\lambda)$ 的特征值关于 λ 解析地依赖。由于 M 函数是Herglotz-Nevanlinna函数，它们是非减函数。

当 λ趋于 $-\infty$时，$\mathbf{M}(\lambda)$中所有非对角线元素都趋于 0。在对角线上，余切 $\sqrt{\lambda}l_{im}$ 趋于 1；考虑到

[2]如果两条特征值曲线相交，为了保持解析性，可能需要调整指标的顺序。

对每个顶点，恰好有 d_j 项形如 $-\sqrt{\lambda}$ 余切 $\sqrt{\lambda}\ell_{im} \sim -\sqrt{\lambda}$。□

请注意，引理3.3中的结论对于赫尔格洛茨-涅万林纳矩阵值函数$\mathbf{Q}(\lambda) := \mathbf{M}(\lambda) - \mathrm{diag}\,\{\alpha_j\}$. 也完全成立。对于足够小的负值$\lambda \to -\infty$，矩阵$\mathbf{Q}(\lambda)$严格为负。随着 λ 增大，$\mathbf{Q}(\lambda)$的特征值 $\xi_j(\lambda)$也随之增大，而图的基态对应于使最大特征值 ξ_j（记为 $\xi_1(\lambda)$）穿过直线 $\xi = 0$的那个 λ_1，即

$$\xi_1(\lambda_1) = 0.$$

Γ 的基态是简单的 [16, 17],，因此没有其他能量曲线 $\xi_j(\lambda)$ $j \neq 1$会在 λ这个值处穿过该直线。

在点 λ_1正右侧，矩阵值函数$\mathbf{Q}(\lambda)$恰有一个正特征值。可能出现两种情形：

- 拉普拉斯算子的第二特征值对应于 λ_2，在该点第二条能量曲线趋近于直线 $\xi = 0$。
- 第一条能量曲线趋近于奇点并趋于 $+\infty$，然后从 $-\infty$开始在奇点右侧继续延伸。在这种情况下，λ_2再次出现，成为最大 ξ_j 与轴 $\xi = 0$相交的点。

在第一种情况下，矩阵 $\mathbf{M}(\lambda_2)$ 的第二大特征值为 $\xi = 0$。在第二种情况下，$\mathbf{M}(\lambda_2)$ 是一个非正矩阵，其最大特征值为 $\xi = 0$。

此外，还有一种边界情形，其中 λ_2 与 M 函数的最低奇点重合。下文中我们将只考虑对应于第一种情况的度量图，此时 λ_2 位于最低奇点之下。 λ_2的重数等于在该能量处穿过坐标轴的能量曲线条数。

4. Metric graphs with standard delta couplings

本节将讨论具有任意边长且在顶点处满足标准德尔塔条件的度量图上的拉普拉斯算子。因此，我们始终假设定义域中的函数在顶点处连续。可变参数包括边长 $\ell_{ij} \in \mathbb{R}_+$，以及顶点处的 δ耦合 $\alpha_j \in \mathbb{R}$。

我们的策略是证明，对于任意一个 Colin de Verdi`ere 矩阵$\mathbf{A}$，都可以找到一个与离散图 G 相关联的度量图 Γ，使得方程

$$\mathbf{M}(\lambda_2) - \mathrm{diag}\,\{\alpha_j\} = -\mathbf{A}. \tag{4.1}$$

对第二特征值 $\lambda_2(\Gamma)$成立。此外，我们还需要 $\lambda_2(\Gamma)$低于 M 函数的所有奇点。为此，我们引入一类在顶点处具有 δ耦合的度量图，并称之为可容许的。

定义 4.1. 在顶点处具有 δ耦合 α_j 的度量图 Γ 称为**可容许的**，当且仅当：

- 第二特征值 $\lambda_2(\Gamma)$低于 M 函数的所有奇点。由于最低的奇点为 $\left(\frac{\pi}{\ell_{\text{最大}}}\right)^2$，这意味着

$$\lambda_2(\Gamma) < \left(\frac{\pi}{\ell_{\max}}\right)^2; \tag{4.2}$$

- 矩阵 $\mathbf{Q}(\lambda_2) = \mathbf{M}(\lambda_2(\Gamma)) - \mathrm{diag}\,\{\alpha_j\}$ 具有强阿诺德性质。

这里 $\ell_{\max}$ 是最长边的长度： $\ell_{\max} = \max_{i\neq j} \ell_{ij}$.

条件 (4.2) 是为了确保边上的特征函数值由其在端点处的函数值唯一确定。一般而言，我们只有估计 $\lambda_2(\Gamma) \leq \left(\frac{2\pi}{\ell_{\max}}\right)^2$，该估计对具有任意顶点条件的拉普拉斯算子均成立。条件 (4.2) 意味着矩阵$\overline{\mathbf{Q}(\lambda_2)}$ 的非对角元素非负。

关于度量图的强阿诺德性质。强阿诺德性质（SAP）对于筛选出现在 Colin de Verdi`ere 判据中的矩阵至关重要；第 2 节已讨论过离散拉普拉斯算子的这一性质。对于度量图而言，这一性质与特征函数的零集有着显著的联系。

度量图上微分算子的特征函数零集可能具有非零测度：这类函数在整条边上都为零。这一性质使度量图上的微分算子区别于光滑流形上的常规微分算子。例如，如果度量图中有一个环，就存在一系列支撑于该环、并在图其余部分为零的特征函数。更一般地，每条边上的特征函数方程的解由两个常数决定（因为它是二阶微分方程的解），因此，如果某个特征值的重数至少为三，那么总能找到一个在图中任意一条边上为零的特征函数。在条件 (4.2) 下，特征函数在任意两个相邻顶点处为零，就能保证它在这两个顶点之间的边上恒为零。

对于度量图 Γ 中的任意顶点 v^0，都可以自然地关联一个（度量）星图，该星图由 v^0 、所有相邻边及相邻顶点构成。每个图 Γ 恰有 M 个这样的星子图，我们将它们视为嵌入在原度量图中。对于一度顶点，其中一些星子图会退化为单个区间。要保证与 v^0 相邻的边构成一个星子图，充分必要条件是假设原图是简单图（没有环或重边）；否则，与 v^0 相邻的边可能在 Γ中构成环或环路。

例如，考虑度数为 6 的星图（见图 1）。该图有 7 个顶点，因此有 7 个星子图:

- 与中心顶点 v^5对应的图 S_6 本身;
- 6 与一度顶点 $v^1, v^2, v^3, v^4.v^5$,以及 v^6 对应的单边图。

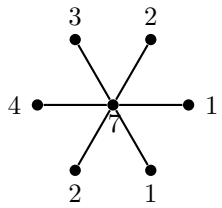

FIGURE 1. 星图 S_6。

我们来证明，若图是等边的，例如边长均为 1，则第二特征值的最大重数可以等于 5。假设标准

顶点条件施加于 v^7，并在 $\partial u(v^j) = -u(v^j)$ $j = 1$，2、.....、6，在度为一的顶点处采用 δ耦合（见图 1）。对应于 $\lambda_2 = 0$ 的特征函数在边上是线性的，在 v^7 处为零，并在其他顶点处满足 δ耦合。将边参数化为 $[0, 1]$ ，方向从中心顶点向外，则边上的特征函数与 x成正比。为满足 v^7 处的标准条件，特征函数至少应支撑在两条边上。由此可得， $\lambda_2 = 0$ 的重数等于 5，尽管该图显然是平面图。原因在于，这个度量图不满足 SAP：在对应于 $\lambda = 0$ 的特征函数中，可以找到在任意一条边上均为零的函数，而这些边（平凡地）构成 S_6的星子图。

在确定图的平面性时，可以忽略度为 1 的顶点：可以始终将这些顶点及其相邻边删除，并在必要时重复此过程，直到结果稳定。也可以删除所有度为 2 的顶点，并以一条边替代相应的两条相邻边。以下假设图 Γ 没有度为 1 或 2 的顶点，因此所有星子图都至少包含三条边。重特征值（如上所述）总会导致某些边上存在特征函数为零的情况，但在度至少为 3 的星子图上特征函数为零则要罕见得多。例如，特征值的重数为 3 可保证存在在边上为零的特征函数，而只有当重数为 4 时，才能保证存在在 3 星子图上为零的特征函数。

违反 SAP 与存在于所述星子图上为零的特征函数有关。

引理 4.2。 设 Γ 是一个简单度量图，且不存在度数既不为一也不为二的顶点；设 $L^{\vec{\alpha}}(\Gamma)$ 是作用在 Γ上的拉普拉斯算子，且在各顶点处满足 δ耦合。设 λ^* 满足

$$\lambda^* < \left(\frac{\pi}{\ell_{\max}(\Gamma)} \right)^2 \tag{4.3}$$

是 $L^{\vec{\alpha}}(\Gamma)$的一个特征值，且不存在两个特征函数分别在 Γ的某两个星子图上恒为零，则世俗矩阵 $\mathbf{Q}(\lambda^*)$ 具有 *SAP*。

证明。 世俗矩阵$\mathbf{Q}(\lambda^*)$（矩阵$\mathbf{A}$的类似物）不具有 **SAP** ，当且仅当存在矩阵 $\mathbf{X} \in \mathcal{S}_G^{\perp}$，使得 $\mathbf{Q}(\lambda^*)\mathbf{X} = 0.$ 。$\mathbf{X}$ 的每一列都属于 $\mathbf{Q}(\lambda^*)$的核，因此确定了度量图上对应于特征值 λ^*的一个拉普拉斯算子特征函数。考虑任意一个这样的特征函数，例如与第一列对应的特征函数。该列中，与 v^1 相邻的顶点相对应的所有元素均为零，因为$\mathbf{X} \in \mathcal{S}_G^{\perp}$。不等式（4.3）保证度量图上对应的特征函数在与 v^1相关联的整个星子图上恒为零。矩阵 $\mathbf{X}$ 应当是对称的，因此，只有当至少两个度量图特征函数分别在两个（不同的）星子图上恒为零时，才能取非零值。□

上述引理可以加强，要求不存在在 Γ 的三个不同星子图上均为零的特征函数。为证明这一点，需要说明任意特征函数在 Γ 中至少有三个顶点处非零。这一结论可由图是简单图且没有度为一和二的顶点这一事实推出。当然，还应考虑不等式（4.3）。

该引理成立的条件可能是：特征值 λ^* 的重数不超过 Γ 中第二小的顶点度加 1。例如，如果 λ^* 的重数至少为 4，那么对于任意一个度为 3 的顶点，总能找到在相应星图上为零的特征函数。

我们只考虑与固定离散图 G 相关联的度量图。正如我们在引言中提到的，对于某些离散图，上述定义中的第二个条件自动成立。

我们将 Colin de Verdi`ere 参数推广到度量图，定义如下：

定义 4.3. 度量图的 Colin de Verdi`ere 参数 $\mu(\Gamma)$，等于在所有与同一离散图相关联的可容许度量图中取遍时，顶点处采用标准 delta 耦合的拉普拉斯算子 $\lambda_2(\Gamma)$ 的最大重数。

与经典的 Colin de Verdi`ere 数类似，这个图参数可用于判定图的平面性。

定理 4.4. *Colin de Verdi`ere* 图参数 $\mu(G)$ 和 $\mu(\Gamma)$ 相等，前提是 G 是与度量图 Γ 相关联的离散图。

证明。 我们的目标是证明 $\mu(G) = \mu(\Gamma)$。我们将证明分为两步：

(1) $\mu(G) \leq \mu(\Gamma)$。令 $\mathbf{A}$ 为一个 Colin de Verdi`ere 矩阵，其第二特征值的重数达到最大。我们选取一个正数 λ_2，使得对于所有 $v^i \sim v^j$，$\sqrt{\lambda_2} < |a_{ij}|$ 成立；然后构造一个算子 $L_{\vec{\alpha}\delta}$，使 λ_2为其第二特征值，并满足方程 (4.1)。

考虑任意一条边，例如连接两个顶点 v^i 和 v^j的边。矩阵 $-\mathbf{Q}(\lambda_2)$ 和 $\mathbf{A}$ 中对应的元素分别为

$$-\frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sin(\sqrt{\lambda_2}\ell_{ij})} \quad \text{and} \quad a_{ij} < 0,$$

函数 $\ell \mapsto \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sin(\sqrt{\lambda_2}\ell)}$ 的定义域为 $\ell \in (0, \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_2}})$，值域为 $[\sqrt{\lambda_2}, \infty)$，因此存在 ℓ_{ij} 使这些元素相等

$$a_{ij} = -\frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sin(\sqrt{\lambda_2}\ell_{ij})}, \tag{4.4}$$

因为我们已选取满足 $\sqrt{\lambda_2} < |a_{ij}|$的 λ_2。注意，ℓ_{ij}有两个可能的取值，可以任意选择。

这样我们得到一个度量图 Γ，使得矩阵 $-\mathbf{Q}(\lambda_2)$ 与$\mathbf{A}$ 在对角线以外的元素完全相同。为了使这两个矩阵完全相同 $-\mathbf{Q}(\lambda_2) = \mathbf{A}$，我们调整 $L_{\vec{\alpha}\delta}$ 中 δ-耦合的取值。由于$\mathbf{Q}$的所有奇点都位于 λ_2 的右侧（条件 (4.2)），且 $\xi = 0$ 是$\mathbf{A}$的第二低特征值，因此 λ_2 是 $L_{\vec{\alpha}\delta}$ 的第二特征值。$\mathbf{Q}(\lambda_2)$ 具有强阿诺德性质，因为$\mathbf{A}$ 也具有该性质。至此，第一部分的证明完成。

(2) $\mu(G) \geq \mu(\Gamma)$。考虑算子 $L_{\vec{\alpha}\delta}$ 中的一个，它在具有标准 delta 耦合的可容许度量图中使 λ_2 的重数最大。接着取 $\mathbf{A} = -\mathbf{Q}(\lambda_2)$，我们得到一个 Colin de Verdi`ere 矩阵。方程 (4.2) 意味着 $\sin\sqrt{\lambda_2}\ell_{ij} > 0$，这又意味着当 $v^i \sim v^j$ 时，$-\mathbf{Q}(\lambda_2)$ 的非对角线元素为负。此外，$\xi = 0$ 是 $\mathbf{A}$ 的第二小特征值。第二个断言由此得出。

□

图参数 $\mu(\Gamma)$ 由与 Γ 相关联的离散图确定。引入这一新参数的优势在于，可以对 Colin de Verdi`ere 矩阵 $\mathbf{A}$ 的各个元素作出几何解释。

当然，为了推广 Colin de Verdi`ere 参数，我们首先尝试了度量图上的标准拉普拉斯算子（对应于耦合常数$\alpha_j = 0$）。看来，这类度量图还不够丰富。

5. Delta couplings are necessary

我们可以提出这样一个问题：能否仅用顶点处没有 δ 相互作用的标准拉普拉斯算子，推广 Colin de Verdi`ere 判据？下文将给出一个反例，证明存在一个非平面图，其 λ_2 的最大重数小于或等于 3。

考虑图 $K_{3,\ 3}$。将第一组中的顶点标记为 1，2、3，第二组中的顶点标记为 4、5，6。通过在顶点 2 和 3 之间添加一条边，得到新图 Γ。我们要证明第二特征值的最大重数为 3。通过缩放各条边，可以假设 $\lambda_2 = 1$。这意味着至多一条边的长度可以为 $\geq \pi$，且没有边的长度可以为 $\geq 2\pi$。否则 $\lambda_2 < 1$，因为存在一个试探函数，它不是特征函数，与 $\psi_1 \equiv 1$正交，且瑞利商等于 1（证明思路与引理 7.1的证明相同）。

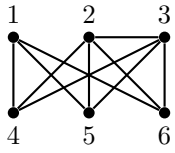

Figure 2. 添加了一条边的图 $K_{3,\ 3}$。

如果有一条边的长度为 π，那么我们将验证 1 的最大重数至多为 3，这样便可假设没有边的长度为 π。我们需要考虑三种可能性：

$$(1)\ \ell_{23} = \pi; \quad (2)\ \ell_{14} = \pi; \quad (3)\ \ell_{36} = \pi.$$

作为说明，考虑第一种情形。反设 λ_2 的重数至少为 4。于是存在一个不恒等于零、且在顶点 v^3、v^5、v^6处为零的特征函数。考察v^2 与 v^3 之间的边，可知该函数在 v^2处也为零。由于边 E_{25}、E_{35}、E_{36}、E_{26} 的长度均小于 π，该函数在这些边上必恒等于零。考虑顶点 v^5。那里除一个法向导数外，其余法向导数均为零，因此边 E_{15} 上的特征函数在属于 v^5的端点处满足平凡的柯西数据。于是，该特征函数在边 E_{15}上恒等于零。类似地可知，该特征函数在边 E_{16}上为零。考察顶点 v^1，可知该特征函数在边E_{14}上为零，特别地，它在顶点 v^4处为零。边 E_{24} 和 E_{34} 的长度小于 π，因此该特征函数在这些边上为零。最后可知，该特征函数在边 E_{23} 上也必为零，因而它是平凡的。我们的假设是错误的。

现在考虑一般情形 $\ell_{ij} \neq \pi$。M 函数的形式为

$$\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ 0 & m_{23} & m_{33} & m_{34} & m_{35} & m_{36} \\ m_{14} & m_{24} & m_{34} & m_{44} & 0 & 0 \\ m_{15} & m_{25} & m_{35} & 0 & m_{55} & 0 \\ m_{16} & m_{26} & m_{36} & 0 & 0 & m_{66} \end{pmatrix} =: (\vec{m}_1 \quad \vec{m}_2 \quad \vec{m}_3 \quad \vec{m}_4 \quad \vec{m}_5 \quad \vec{m}_6)$$

且所有元素均为有限值。[3]

要使重数为 4，该矩阵中至多只有两列线性无关。显然，$\vec{m}_1$ 和 $\vec{m}_4$ 线性无关，因为 $m_{ij} = \frac{1}{\sin \ell_{ij}} \neq 0$, $i \neq j$。由此可见，$\vec{m}_5, \vec{m}_6$ 必为 $\vec{m}_4$的倍数。因此，必要条件是 $m_{44} = m_{55} = m_{66} = 0$。记住，只有一条边可以长于 π。因此，所讨论的 $m_{ij}, i \neq j$, 中至多只有一个为负，所以存在 $a, b > 0$ 使得 $a\vec{m}_4 = \vec{m}_5$, $b\vec{m}_4 = \vec{m}_6$。

由于 $m_{44} = 0$，我们有

$$\cot(\ell_{14}) = -(\cot(\ell_{24}) + \cot(\ell_{34})). \tag{5.1}$$

注意，对于 $i = 1,2,3$

$$\frac{1}{\sin(\ell_{i5})} = \frac{a}{\sin(\ell_{i4})} = a\sqrt{1 + \cot^2(\ell_{i4})} \tag{5.2}$$

并且由于 $m_{55} = 0$，我们得到

$$0 = \pm\sqrt{a^2(1 + \cot^2(\ell_{14})) - 1} \pm \sqrt{a^2(1 + \cot^2(\ell_{24})) - 1} \pm \sqrt{a^2(1 + \cot^2(\ell_{34})) - 1}$$

根据方程 (5.1)，可能的解为 $a^2 = 1$ 和

$$a^2 = \frac{3}{3 + 2(\cot^2(\ell_{14}) + \cot^2(\ell_{24}) + \cot^2(\ell_{34}))} \leq 1$$

但 $a^2 = 1$ 是唯一能得到实值长度的解。这是因为方程 (5.2) 得出

$$\frac{1}{\sin(\ell_{i5})} = \frac{\sqrt{1 + \cot^2(\ell_{i4})}}{\sqrt{1 + 2\frac{\cot^2(\ell_{14}) + \cot^2(\ell_{24}) + \cot^2(\ell_{34})}{3}}}.$$

如果我们没有 $\cot^2(\ell_{14}) = \cot^2(\ell_{24}) = \cot^2(\ell_{34}) = 0$，那么至少对于一个 i，我们会得到 $\frac{1}{\sin(\ell_{i5})} < 1$, 这是不可能的。我们得出结论，$a^2 = 1$ 是唯一的解，因此 $a = 1$。用同样的论证可得 $b = 1$。

这表明 $\vec{m}_4 = \vec{m}_5 = \vec{m}_6$。可以看出，如果 $\vec{m}_2$ 和 $\vec{m}_3$ 将是 $\vec{m}_1, \vec{m}_4$ 的线性组合，那么我们需要满足 $\frac{m_{11}}{m_{14}^2} = \frac{-m_{22}}{m_{24}^2} = \frac{-m_{33}}{m_{34}^2}$. 这等价于

$$3\frac{\cot(\ell_{24}) + \cot(\ell_{34})}{1 + (\cot(\ell_{24}) + \cot(\ell_{34}))^2} = \frac{\cot(\ell_{23}) + 3\cot(\ell_{24})}{1 + \cot(\ell_{24})^2} = \frac{\cot(\ell_{23}) + 3\cot(\ell_{34})}{1 + \cot(\ell_{34})^2}.$$

[3]含有若干个零项的 M 函数形式不足以证明零特征值的重数不可能等于 4。矩阵给出了一个反例

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

最后一个方程表明，余切$(\ell_{23}) = 3^{1-\cot(\ell_{24})}$ 余切 (ℓ_{34}) 余切 (ℓ_{24}) +余切 (ℓ_{34}) 因此

$$3\frac{\cot(\ell_{24})+\cot(\ell_{34})}{1+(\cot(\ell_{24})+\cot(\ell_{34}))^2} = \frac{3}{\cot(\ell_{24})+\cot(\ell_{34})}.$$

然而， 该方程显然没有任何解

我们得出结论：若不考虑 δ耦合，非平面图的第二特征值的最大重数可能小于 4。

6. Weighted delta couplings

让我们研究一下，能否使用标准 δ 耦合以外的其他顶点条件来推广 Colin de Verdi`ere 理论。对于函数 $u \in W_2^2(\Gamma)$，令 $\vec{u}^j$为由函数 u 在顶点 v^j 处的取值组成的 d_j 维向量，并令 $\partial\vec{u}^j$ 为顶点 v^j处法向导数组成的 d_j 维向量：

$$\vec{u}^j = \{u(x_i)\}_{x_i\in v^j}, \qquad \partial\vec{u}^j = \{(-1)^{i+1}u'(x_i)\}_{x_i\in v^j}. \tag{6.1}$$

这里， d_j 是顶点 v^j 的度——即连接到 v^j的边数。

那么，最一般的顶点条件由 $d_j\times d_j$ 维矩阵A^j 和 B^j给出。

$$A^j\vec{u}^j = B^j\partial\vec{u}^j, \quad j=1,2,\dots,M. \tag{6.2}$$

矩阵 A^j， B^j 应满足以下两个条件：

$$\operatorname{rank}(A^j,B^j) = d_j, \quad A^j(B^j)^* = B^j(A^j)^*.$$

此外，矩阵必须恰当地反映图的连通结构，即 顶点 v^j 处的相同条件不能用具有相同块对角形式的 A^j 和 B^j来表示，否则就相当于把顶点 v^j 拆分成两个顶点。

相应的算子是自伴的、有下界且具有离散谱。该算子的谱性质详见 [5, 17]。

我们已经提到，Colin de Verdi`ere 理论使用 Perron-Frobenius 定理和特征函数的节点域。度量图上的拉普拉斯算子的 Perron-Frobenius 性质由顶点条件决定，所有能够导出正基态的顶点条件已在 [16, 17] 中得到刻画。这些条件称为**广义 delta 耦合**，特别要求 $\vec{u}^j$ 的所有可能取值都由若干个具有正坐标且支撑不相交的向量张成。为了能够引入节点域，我们需要每个顶点处的函数值具有确定的符号，因此只应允许函数值与一个具有正分量的单一向量成比例的加权δ耦合。在这种情况下，可以说函数满足加权连续性条件，因此相应的顶点条件将称为加权δ耦合。

定义 6.1. 令 $\vec{c}^j$ 为一个各分量均为正数的 d_j维向量， $\alpha^j\in\mathbb{R}$为一个实耦合参数。则顶点 v^j 处的**加权 δ 耦合**由以下条件给出：

$$\begin{cases} \vec{u}^j \parallel \vec{c}^j, \\ \langle\vec{c}^j, \partial\vec{u}^j\rangle = \alpha^j\frac{\langle\vec{c}^j,\vec{u}^j\rangle}{\|\vec{c}^j\|^2}. \end{cases} \tag{6.3}$$

第一个条件可视为顶点处的加权连续性。自然地，我们引入函数在该顶点处的平均值:

$$u_w(v^j) := \frac{\langle \vec{c}^j, \vec{u}^j \rangle}{\|\vec{c}^j\|^2}. \tag{6.4}$$

考虑到 (6.3)，我们有 $u_w(v^j) = \frac{1}{\|\vec{c}^j\|^2} \sum_{x_i \in v^j} (\vec{c}^j)_i u(x_i) = u(x_{i_0}) \quad (\vec{c}^j)_{i_0}$，对于任意 $i_0 \in v^j$。下文中，我们始终假设度量图 Γ 的每个顶点都满足加权德尔塔条件。令 $\vec{c}^j = (1, 1, \ldots\ldots, 1)$ $\forall j$，即可得到标准德尔塔条件。

为引入 M 函数，我们定义

$$\partial u_w(v^j) = \langle \vec{c}^j, \vec{u}^j \rangle, \quad m = 1, 2, \ldots, M. \tag{6.5}$$

那么，M 函数为:

$$\mathbf{M}(\lambda) : \begin{pmatrix} u_w(v^1) \\ u_w(v^2) \\ \vdots \\ u_w(v^M) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \partial u_w(v^1) \\ \partial u_w(v^2) \\ \vdots \\ \partial u_w(v^M) \end{pmatrix}, \tag{6.6}$$

而不是 (3.2)。引入由向量 $\vec{c}^i$ 确定的 $M \times M$ 矩阵 $\mathbf{C}$ 将很方便，其定义如下

$$c_{ij} = \begin{cases} (\vec{c}^i)_n, & \text{if } x_n \in v^i \text{ is the end point on the edge to } v^j, \\ 0, & \text{if there is no edge between } v^i \text{ and } v^j. \end{cases} \tag{6.7}$$

重复第3节中的计算，我们得到满足加权连续性条件的图的 M 函数:

$$(\mathbf{M}(\lambda))_{ij} = \begin{cases} -\sum\limits_{v^m \sim v^i} c_{im}^2 \sqrt{\lambda} \cot \sqrt{\lambda} \ell_{im}, & j = i; \\ c_{ij} c_{ji} \dfrac{\sqrt{\lambda}}{\sin \sqrt{\lambda} \ell_{ij}}, & v^i \sim v^j; \\ 0, & v^i \not\sim v^j, j \neq i. \end{cases} \tag{6.8}$$

引理3.2无需任何修改即可成立，而在引理3.3中，必须修改渐近式 (3.8)

$\xi_j \sim -\left(\sum_{v^j \sim v^i} c_{ij}^2\right) \sqrt{|\lambda|}, \quad \lambda \to -\infty.$

7. Equilateral graphs with weighted continuity at the vertices

本节将讨论如何检验带加权δ耦合的等边度量图的平面性。不失一般性，我们假设所有边的长度均为 1: $\ell_{ij} = 1$. 一类重要的加权连续性条件是为每条边关联同一个权重，即矩阵 C 的各项选取为满足 $c_{ij} = c_{ji}$. 这样便可使参数数量保持与 (1.1) 中相同。

在所考虑的情形下，M 函数的奇点总是位于第二特征值之上 $\lambda_2(\Gamma)$。

引理7.1。设 Γ 为一个带有加权δ耦合的等边图（边长为 $\ell_{ij} = 1$）。如果 Γ 不是由单个区间给出的，那么 $\lambda_2 < \pi^2$.

证明。 所讨论的每个图至少有两条边，记为 $E_1 = [x_1, x_2]$ 和 $E_2 = [x_3, x_4]$，因为我们不允许有环。考虑一个仅在这两条边上不恒等于零的测试函数 φ ：

$$\varphi(x) = \begin{cases} h_1 \sin \pi(x - x_1), & x \in e_1, \\ h_2 \sin \pi(x - x_3), & x \in e_2, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

该函数在 Γ 上连续。可以选择非零常数 h_1， h_2 以确保正交条件 $\int_\Gamma \varphi(x)\psi_1(x)\, dx = 0$ 得到满足。 φ 的瑞利商等于 π^2 ，因此 $\lambda_2 \leq \pi^2$。要证明不等式是严格的，只需证明 φ 不是特征函数。由于不允许存在平行边， E_1 的至少一个端点不等价于 E_2 中的某个端点。在不包含 E_2 端点的顶点处，关于导数的平衡条件不满足。因此， λ_2 严格小于 π^2。□

通过考察 M 函数也可以得到相同的结果。考虑极限 $\lim_{\lambda \to \pi^2} \frac{\pi - \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \mathbf{Q}(\lambda)$，它等于一个矩阵：对角线之外的值为 $c_{ij}c_{ji}$ ，对角线上的值为 $\sum_{j \sim i} c_{ij}^2$ 。该矩阵的二次型为 $\sum_{v^i \sim v^j} (c_{ij}v_i + c_{ji}v_j)^2$. 由于 Γ 是连通的，该矩阵至多有一个非正特征值。因此， $\mathbf{Q}(\lambda)$ 的所有特征值中，除至多一个外，其余都趋于 ∞，当 $\lambda \to \pi^2$ 时。趋于 $+\infty$ 的能量曲线数量至少为 $M-1$，其中 $M =$ #顶点。因此 $\lambda_{M-1} < \pi^2$, 因为至少有 $M-1$ 条能量曲线必须在 π^2 左侧穿过位于 $\xi = 0$ 的轴。

鉴于引理7.1，在定义可容许度量图时，无需要求 M函数的奇点位于 $\lambda_2(\Gamma)$ 的右侧。

定义7.2。 带有 $\vec{c}$ 权重并在α_j 顶点处具有δ耦合的等边度量图 Γ 当且仅当满足以下条件时称为**可容许的**

- the matrix $\mathbf{Q}(\lambda_2(\Gamma)) = \mathbf{M}(\lambda_2(\Gamma)) - \operatorname{diag}\{\alpha_j\}$ possesses the Strong Arnold Property.

定义7.3。 加权等边度量图的 Colin de Verdi`ere 参数 $\mu_w(\Gamma)$ 等于在所有与同一离散图相关联的可容许等边度量图中取遍时，具有顶点处加权δ耦合的拉普拉斯算子的 $\lambda_2(\Gamma)$ 的最大重数。

定理7.4。 *Colinde Verdi`ere*图参数 $\mu(G)$ 和 $\mu_w(\Gamma)$相等，条件是 Γ 是与离散图 G 相关联的等边度量图。

证明。 $\mu(G) \geq \mu_w(G)$ 的论证与定理4.4的证明几乎相同：需要注意， $\lambda_2 < \pi^2$ 意味着 $\sin \sqrt{\lambda_2} > 0$，从而 $-\mathbf{Q}(\lambda_2)$ 的非对角元素为负。

还需证明 $\mu(G) \leq \mu_w(G)$。设$\mathbf{A}$ 为最优的 Colin de Verdi`ere 矩阵之一。我们将构造一个带加权δ耦合的度量图，使得 $\lambda_2 = (\frac{\pi}{2})^2$. 为此，我们选择：

$$c_{ij} = \sqrt{\frac{\pi}{2}|a_{ij}|} \quad \text{and} \quad \alpha_j = a_{jj}. \tag{7.1}$$

注意，由于$\mathbf{A}$ 是实对称矩阵，我们得到 $c_{ij} = c_{ji}$ 。我们得到矩阵$-\mathbf{Q}((\pi/2)^2)$与矩阵$\mathbf{A}$重合。因此，$(\pi/2)^2$ 是一个特征值

重数为 $\mu(G)$。它不是基态，因为$\mathbf{Q}((\pi/2)^2)$有一个正特征值。$\mathbf{Q}(\lambda)$的最低奇点是点 $\lambda = \pi^2$，因此只有一条能量曲线在$(\pi/2)^2$左侧与直线 $\xi = 0$ 相交。因此，$(\pi/2)^2$ 是第二特征值 $\lambda_2 =(\pi/2)^2$. $\mathbf{Q}(\lambda_2)$具有强阿诺德性质，因为$\mathbf{A}$ 具有该性质。第一个断言得证。□

我们决定使用 $\lambda_2 = (\pi/2)^2,$ ，不过任何其他 $0 < \lambda < \pi^2$ 也可以。这样便能利用余切$\pi/2 = 0$这一事实来简化公式。

8. Schrödinger operators

到目前为止，我们只考察了在每条边上作用为 $-\frac{d^2}{dx^2}$ 的拉普拉斯算子。不过，也可以考察由以下微分表达式给出的薛定谔算子：

$$L_q = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

其中 q 是一个实值函数。这里我们将范围限制在 q 在每条边上为常数的情形。我们用 q_{ij} 表示 q 在连接 v^i 和 v^j的边上的取值。只需考虑带有标准 δ 耦合的等边图。

L_q 在从 v^i 到 v^j 的边上的边 M 函数为

$$\mathbf{M_e}(\lambda) := \begin{pmatrix} -\sqrt{\lambda - q_{ij}}\cot(\sqrt{\lambda - q_{ij}}) & \frac{\sqrt{\lambda - q_{ij}}}{\sin(\sqrt{\lambda - q_{ij}})} \\ \frac{\sqrt{\lambda - q_{ij}}}{\sin(\sqrt{\lambda - q_{ij}})} & -\sqrt{\lambda - q_{ij}}\cot(\sqrt{\lambda - q_{ij}}) \end{pmatrix}.$$

因此， $L_q(\Gamma)$ 的 M 函数将为

$$(\mathbf{M}(\lambda))_{ij} = \begin{cases} -\sum\limits_{v^j \sim v^m} \sqrt{\lambda - q_{mj}}\cot\sqrt{\lambda - q_{mj}}, & i = j; \\ \dfrac{\sqrt{\lambda - q_{ij}}}{\sin\sqrt{\lambda - q_{ij}}}, & v^i \sim v^j; \\ 0, & v^i \not\sim v^j,\ i \neq j; \end{cases} \tag{8.1}$$

且 L_q 的谱由 $\mathbf{Q}(\lambda) = \mathbf{M}(\lambda) - \mathsf{diag}\{\alpha_j\}$ 给出，其中 $\lambda \neq q_{ij} + \pi^2 n^2$，$n$ 为正整数。

这一次我们可以选择 $\lambda = 0$，并假设 Colin de Verdi`ere 矩阵$\mathbf{A}$ 经过缩放，使得 $|a_{ij}| > 1$, 只要 $v^i \sim v^j$. 。于是，为了得到 $-\mathbf{Q}(0) = \mathbf{A}$，我们需要满足以下方程，而不是方程 (4.4)

$$-\frac{\sqrt{-q_{ij}}}{\sin\sqrt{-q_{ij}}} = a_{ij}.$$

这始终是可能的，因为函数 $^y\!/_{\sin y}$ 在区间 $(0,\ \pi)$ 上的值域覆盖区间 $(1,\ \infty)$。注意，这样的 q_{ij} 始终满足 $-\pi^2 < q_{ij} < 0.$ 。M 函数的奇点位于点 $\lambda = q_{ij} + \pi^2 n^2$, $n = 1,\ 2,\ \ldots\ldots$，它们全都是正数。此外， $\lambda = 0$ 是 $-\mathbf{A}$ 的第二大特征值，因此 $\lambda = 0$ 是 L_q 的第二小特征值。由此，我们可以将 Colin de Verdi`ere 参数解释为：在顶点处具有 δ耦合的等边图上，薛定谔方程的最大重数。

通过考虑顶点处具有 δ耦合、由以下微分表达式给出的磁薛定谔算子，可以推广上述讨论

$$L_{q,a} = \left(i\frac{d}{dx} + a(x)\right)^2 + q(x).$$

实磁势 a 的变化会引入另一个 N 参数，其值等于磁势沿各边的积分。这种方法引出了 Colin de Verdi`ere 在 [10]中引入的参数 ν 。

还可以将这三类情况结合起来，研究在非等边图上、顶点处具有加权δ耦合且势不是边上分段常势的薛定谔算子。尽管参数数量大得多，这类算子仍使第二特征值达到相同的最大重数。

Acknowledgements

我们感谢匿名审稿人，不仅指出了一些有助于改进表述的更正之处，还建议进一步研究强阿诺德性质在度量图背景下的表现。关于这一主题的结果已补充至第4节。

Data availability statement

本研究期间生成的数据集可应合理请求向通讯作者索取。

Ethics Declarations

本机构无需为个案或病例系列报告提供伦理审批。作者声明不存在利益冲突。本研究部分由瑞典研究理事会资助，资助编号为 2020-03780 和 2024-04650。

References

[1] Andr´as B´atkai、Marjeta Kramar Fijav˘z 和 Abdelaziz Rhandi, *Positive operator semigroups*, 《算子理论：进展与应用》，第257卷，Birkh¨auser/Springer，Cham，2017年。从有限维到无限维；附有 Rainer Nagel 和 Ulf Schlotterbeck 撰写的序言。[2] Gregory Berkolaiko、James B. Kennedy、Pavel Kurasov 和 Delio Mugnolo, *Impediments to diffusion in quantum graphs: geometry-based upper bounds on the spectral gap*, 《美国数学会会刊》**151** (2023)，第8期，3439–3455。[3] , *Surgery principles for the spectral analysis of quantum graphs*, 《美国数学会汇刊》**372** (2019)，第7期，5153–5197。[4] , *Edge connectivity and the spectral gap of combinatorial and quantum graphs*, 《物理学杂志A》**50** (2017)，第36期，365201，29。[5] Gregory Berkolaiko 和 Peter Kuchment, *Introduction to quantum graphs*, 《数学调查与专著》，第186卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2013年。[6] A. Beurling 和 J. Deny, *Espaces de Dirichlet. I. Le cas élémentaire*, 《数学学报》**99** (1958)，203–224（法语）。[7] Abraham Berman 和 Robert J. Plemmons, *Nonnegative matrices in the mathematical sciences*, 《应用数学经典》，第9卷，工业与应用数学学会（SIAM），费城，宾夕法尼亚州，1994年。1979年原版的修订重印本。[8] Yves Colin de Verdi`ere, *Sur un nouvel invariant des graphes et un critère de planarité*, 《组合理论杂志B辑》**50** (1990)，第1期，11–21（法语）。

[9] , *On a new graph invariant and a criterion for planarity*, 《图结构理论》（华盛顿州西雅图，1991），《当代数学》，第147卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1993年，第137–147页。[10] , *Multiplicities of eigenvalues and tree-width of graphs*, 《组合理论杂志B辑》74 (1998)，第2期，121–146。[11] ~~Leonid~~ Friedlander, *Extremal properties of eigenvalues for a metric graph*, 《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）55 (2005)，第1期，199–211（英语，附英语和法语摘要）。[12] H. van der Holst、L. Lov´asz 和 A. Schrijver, *The Colin de Verdière graph parameter*, 《图论与组合生物学》（巴拉顿莱莱，1996），《Bolyai数学学会研究》，第7卷，J´anos Bolyai数学学会，布达佩斯，1999年，第29–85页。[13] Hein van der Holst, *On the strong Arnol'd hypothesis and the connectivity of graphs*, 《电子线性代数杂志》20 (2010)，574–585。[14] Tosio Kato, *Perturbation theory for linear operators*, 《数学经典》，Springer-Verlag，柏林，1995 1980 1335452 。该版重印本。MR James B. [15] Kennedy、Pavel Kurasov、Gabriela Malenova 和 Delio Mugnolo, *On the spectral gap of a quantum graph* ´ **17** 2016 9, 2439 2473 , 《亨利·庞加莱年刊》（），第–期。[16] Pavel Kurasov, *On the ground state for quantum graphs*, 《数学物理通讯》109 (2019)，第11期，2491–2512。[17] , *Spectral geometry of graphs*, 《算子理论：进展与应用》，第293卷，Birkh¨auser/Springer，柏林，[2024] ©2024。[18] Pavel Kurasov 和 Sergey Naboko, *Rayleigh estimates for differential operators on graphs*, 《谱理论杂志》4 (2014)，第2期，211–219。[19] Pavel ~~Kurasov~~ 和 Sergei Naboko, *Gluing graphs and the spectral gap: a Titchmarsh-Weyl matrix-valued function approach* **255** 2020 3, 303 326 , 《数学研究》（），第–期。[20] Casimir Kuratowski, *Sur le problème des courbes gauches en topologie*, 《基础数学》15 (1930)，271–283（法语）。[21] L ´ ´ ´ aszlo Lovasz 和 Alexander Schrijver, *A Borsuk theorem for antipodal links and a spectral characterization of linklessly embeddable graphs* **126** 1998 , 《美国数学会会刊》（），第5期，1275 1285–。[22] Serge Nicaise, *Spectre des réseaux topologiques finis* 2 **111** 1987 4, , 《数学科学通报》（）（），第–期（法语，附英语摘要）。[23] , *Estimées du spectre du laplacien sur un réseau topologique fini*, 《巴黎科学院报告》S´erie I Math. 303 (1986)，第8期，343–346（法语，附英语摘要）。[24] Michael Reed 和 Barry Simon, *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators* [ ], 1978 , 学术出版社 Harcourt Brace Jovanovich，纽约—伦敦出版商，[25] , [25] Alexander Schrijver 和 Bart Sevenster, *The strong Arnold property for 4-connected flat graphs* **522** 2017 153 160 , 《线性代数及其应用》（），–。

Dept. of Mathematics, Stockholm Univ., 106 91 Stockholm Sweden
Email address: alice.brolin@math.su.se

Dept. of Mathematics, Stockholm Univ., 106 91 Stockholm Sweden
Email address: kurasov@math.su.se