# 高阶稀疏网格组合技术

Julia Muñoz-Echániz* Christoph Reisinger†

$8^{\text{th}}$ 2026年1月

arXiv:2601.04075v1 [math.NA] 7 Jan 2026

**摘要**

我们证明了一种广义稀疏网格组合技术，该技术将有限差分解的多变量外推与标准组合公式相结合，可将规则网格上的二阶精度格式提升为四阶精度的组合稀疏网格解。在分析中，我们在一般维数下，将该格式的多变量误差展开中的所有项刻画为一系列半离散问题的解。首先，在对格式的截断误差、稳定性和解的正则性作出适当假设的条件下，对这一结果进行形式化推导。随后，我们以具有光滑数据的泊松问题为例验证这些假设，并展示最高达七维情形下的实际收敛性。

## 1 引言

高维偏微分方程的解长期以来一直是计算方法面临的挑战。传统的基于网格的方法容易受到维数影响，达到所需精度所需的自由度会呈指数级增长。这一点在标准张量积离散中表现得最为明显。为缓解维数灾难，人们采用了多种方法，包括自适应张量近似（综述见 [1] ）、人工神经网络（包括深度Galerkin [27], 物理信息神经网络[20],和深度倒向随机微分方程方法 [9]），以及稀疏网格（开创性论文见 [30]；综述见 [6]，其中包括稀疏有限元 [4, 26]或小波 [17], ，以及组合技术[8, 13]）。本文重点关注后者。

由 [30] 引入的稀疏基，是指在张量积网格上的标准基的一个子空间；在具有混合正则性的空间中，该子空间经过选择，以在精度与计算复杂度之间实现最佳权衡。可以证明（例如见 [6]），对于某一正则性类，这种采用标准多重线性基函数的空间以成本 $\mathcal{O}\big(N(\log\ N)^{d-1}\big)$实现了$\mathcal{O}\big(N^{-2}(\log\ N)^{d-1}\big)$ 的逼近精度，其成本远低于误差为 $\mathcal{O}(N^{-2})$时标准方法所需的 $\mathcal{O}(N^d)$。运用标准Galerkin论证，这种逼近率可在适当的空间中转化为有限元解的误差界 [3, 4]。

相比之下， [8, 13]中提出的稀疏网格组合技术，先在构成稀疏网格基的每个规则各向异性张量积网格上定义解，然后再进行线性组合。这在多个方面大大简化了实现：可以使用张量网格上的标准代码（例如有限差分、有限元）；所得离散矩阵的带状结构比稀疏有限元刚度矩阵更简单；不同网格上的格式可以完全并行求解。

*牛津大学数学研究所，英国，电子邮件：juliamunozechanizge@gmail.com
†牛津大学数学研究所，英国，电子邮件：christoph.reisinger@maths.ox.ac.uk

然而，组合技术的分析更为复杂，需要对某些层次增量进行精细的多元展开。证明大致分为两类。 [18] 和 [19] 等方法运用椭圆算子的 Sobolev 空间技术，直接推导出多元层次余量的界（见下文定义），进而直接得到整体误差。 [7]将这种方法推广到张量空间中的更一般算子。第二类证明首先给出各向异性笛卡尔网格上误差的一种特定多元展开，并按坐标方向的所有可能子集分组，然后利用外推机制推导出整体稀疏网格误差。 [5] 通过傅里叶分析采用了这种方法，而 [22] 则利用一系列辅助半离散问题来定义展开中的各项。

鉴于稀疏网格组合技术可以视为基于某种多变量误差展开的外推公式，因此自然会想到，是否可以通过选择合适的权重（必要时纳入更多网格），提高收敛阶，使其高于各个网格上所用方案的收敛阶。对于规则（“完整”）张量网格，这很容易实现：对粗网格的解与沿所有方向细化后的网格解进行线性组合，即可消除主阶误差项；这种方法称为理查森外推（参见 [24]）。但将此方法直接应用于后续细化层级上的稀疏网格解并不可行，因为主阶误差项中含有对数因子，因此对组合解进行朴素的理查森外推并不能提高收敛阶。

相反，在我们的分析中，我们对构成稀疏网格的各个规则网格上的解分别进行多元外推，从而得到这些网格上的解，其多变量误差展开具有适当的更高阶。随后应用稀疏网格组合技术，即可得到更高阶的稀疏网格解。简而言之，我们需要的不是“先组合，再外推”，而是“先外推，再组合”。

对这类格式的分析大致分为两个步骤。首先，我们必须证明张量网格上的低阶解具有误差展开，且该展开可以分解为低阶项（需要进行外推）和纯高阶项。对于这种展开，我们借鉴了 [22]，中半离散格式的递归应用，但还需要大幅引入新的步骤，以便将所有低阶项与所需的高阶项分离开来。其次，我们必须求得能够消去低阶项的外推权重。

本文的主要贡献如下：

- 从具有二阶多变量误差展开的规则张量积解推导出四阶稀疏网格组合公式；
- 在关于稳定性、光滑性以及离散和半离散问题截断误差的一般条件下，证明所需的误差展开成立；
- 以具有光滑数据的泊松问题为例，验证必要的假设；
- 通过数值验证，确认了二维至七维泊松问题的渐近误差符合预测。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍组合技术，陈述相关已有结果，并给出本文的主定理。第 3 节推导外推公式，并证明在满足某种多变量二阶误差展开的条件下，外推解具有类似的四阶展开，最终使稀疏网格解达到四阶误差。第 4 节在形式假设下证明二阶展开的形式，这是本文技术性最强的部分。最后，第 5 节验证泊松问题中心差分格式所满足的这些形式假设，并给出数值测试。

## 2 背景与主要结果

### 2.1 组合技术

组合技术通过对精心挑选的一族各向异性张量积网格上的解进行线性组合，构造出一个全局近似。

令 $I^d = [0,1]^d$ 表示 $d$ 维单位立方体，并考虑一族笛卡尔网格，其各个方向上的网格尺寸为 $h_i = 2^{-l_i}$ $i = 1, \ldots\ldots, d$，其中 $l_i \in \mathbb{N}_0$。对于向量$\mathbf{l} = (l_1, \ldots\ldots, l_d) \in \mathbb{N}_0^d$，定义 $U(\mathbf{l}) := u_{2^{-\mathbf{l}}} = u_{\mathbf{h}}$ 为函数 $u\colon I^d \to \mathbb{R}$ 在相应张量积网格上的近似，该网格的网格尺寸为 $\mathbf{h} = 2^{-\mathbf{l}}$。

特别地，我们用 $\mathbf{u_h}$ 表示网格点处（近似）值组成的离散向量，并通过适当的插值算子 $\mathcal{I}$ 将其扩展到 $I^d$，即 $u_{\mathbf{h}} := \mathcal{I}\mathbf{u_h}$。我们最终关注的情形是：$u_{\mathbf{h}}$ 是某个偏微分方程（PDE）的有限差分解；在这种情况下，$u_{\mathbf{h}}$ 不同于通过在网格点处计算该偏微分方程的精确解 $u$ 所得到的向量。因此，我们将后者记为 $u(\mathbf{x_h})$。

给定这样一族 $U = (U(\mathbf{l}))^{\mathbf{l}\in\mathbb{N}_0^d}$ 近似，其层次余量 定义为序列

$$\delta U := \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_d U,$$

其中，单变量差分算子 $\delta_k$ 逐分量作用：

$$\delta_k U(\mathbf{l}) := \begin{cases} U(\mathbf{l}) - U(\mathbf{l} - \mathbf{e}_k), & \text{if } l_k > 0, \\ U(\mathbf{l}), & \text{if } l_k = 0, \end{cases}$$

且$\mathbf{e}_k$ 是 $\mathbb{R}^d$中的第 $k$ 个单位向量。算子 $\delta_k$ 可交换。

给定指标集 $\mathcal{M}_n \subset \mathbb{N}_0^d$，层级 $n$ 处的近似定义为：

$$u_n := \sum_{\mathbf{l}\in\mathcal{M}_n} \delta U(\mathbf{l}).$$

对于标准 Smolyak指标集 $\mathcal{M}_n := \{\mathbf{l} \in \mathbb{N}_0^d : \ |\mathbf{l}|_1 := l_1 + \cdots + l_d \le n\}$，层级 $n$ 处的稀疏网格近似（见 [29]）具有如下显式形式：

$$u_n = \sum_{l=n}^{n+d-1} a_{l-n} \sum_{|\mathbf{l}|_1=l} U(\mathbf{l}), \qquad a_i = (-1)^{d-1-i}\binom{d-1}{i}, \quad 0 \le i \le d-1. \tag{2.1}$$

采用组合技术的主要原因在于，与标准的“全”网格相比，它能够在保持较高精度的同时降低计算成本，尤其适用于高维问题。维数为 $d$、层级为 $n$ 的全张量积网格需要 $\mathcal{O}(2^{nd})$ 个网格点，从而导致计算复杂度随着 $d$呈指数增长。相比之下，组合技术采用一组由多重指标 $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_d) \in \mathbb{N}_0^d$索引的各向异性网格，这些多重指标满足 $|\mathbf{i}|_1 \le n$。满足 $|\mathbf{i}|_1 = k$ 的此类网格数量为：

$$\binom{k+d-1}{d-1} = O(k^{d-1}).$$

第$\mathbf{i}$层的每个独立网格约有 $O(2^{|\mathbf{i}|_1}) \le O(2^n)$ 个网格点。对所有网格求和后，组合技术所需的自由度总数满足：

$$N_{\text{dof}} = \mathcal{O}(n^{d-1}2^n).$$

与完整网格的计算成本$\mathcal{O}(2^{nd})$相比，这显著降低了计算成本，尤其是在维数 $d$ 增加时。因此，在误差控制的前提下，组合技术为高维问题提供了一种可行的方法；若进行完整网格计算，则这些问题将难以处理。下文将对此进行讨论。

## 2.2 既有误差分析

我们简要概述组合技术的误差分析方法，该方法包含两个主要部分，如引言所述：首先，建立误差展开，将离散误差分解为来自低维相互作用的贡献；其次，说明组合技术如何利用这些展开，有系统地消去低阶项，从而提高收敛速率和精度。

我们考虑 $I^d = [0,1]^d$ 上的线性偏微分方程，并将 $u$ 关于 $x_i$ 的偏导数记为 $\partial_i u$ 。对于多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_d)$ ，令 $D^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} u$。

现在我们给出误差分析所依据的关键结果，并以泊松问题为例说明：总的有限差分误差和插值误差可以分解为低维贡献之和。

**定理 2.1**（泊松问题的有限差分误差展开）。设 $u$ 是 $I^d$ 上泊松问题的一个解，使得对于所有 $\alpha \in \{0,\ldots,4\}^d$， $D^\alpha u$ 连续，$\|D^\alpha u\|_\infty \le K$ 且 $D^\alpha u|_{\partial I^d} = 0$。

令 $\mathbf{u}_h$ 表示张量积网格上的二阶精度标准中心有限差分近似，其网格尺寸为 $\mathbf{h} = (h_1, \ldots\ldots, h_d) = (2^{-l_1}, \ldots\ldots, 2^{-l_d})$ ；令 $u(\mathbf{x_h})$ 表示在同一网格上取值的精确解。令 $\mathcal{I}(\cdot)$ 表示该网格上的多重线性插值算子。则：

1. 离散误差展开*([22,*定理 *3.3])*
   存在有界的 $w_{j_1,\ldots,j_m}(\mathbf{x}_h; h_{j_1}, \ldots, h_{j_m})$ 使得

$$u(\mathbf{x}_h) - \mathbf{u}_h = \sum_{m=1}^{d} \sum_{\{j_1,\ldots,j_m\}\subset\{1,\ldots,d\}} w_{j_1,\ldots,j_m}(\mathbf{x}_h; h_{j_1}, \ldots, h_{j_m})\, h_{j_1}^2 \cdots h_{j_m}^2. \tag{2.2}$$

2. 精确解的插值误差*([22,*定理 *4.2])*
   存在 $\alpha_{j_1,\ldots,j_m}(\mathbf{x}_h; h_{j_1}, \ldots, h_{j_m})$ 使得

$$u(x) - (\mathcal{I}u(x_h))(x) = \sum_{m=1}^{d} \sum_{\{j_1,\ldots,j_m\}\subset\{1,\ldots,d\}} \alpha_{j_1,\ldots,j_m}(x; h_{j_1}, \ldots, h_{j_m})\, h_{j_1}^2 \cdots h_{j_m}^2,$$

   对于所有 $x \in I^d$，有

$$\|\alpha_{j_1,\ldots,j_m}(\cdot; h_{j_1}, \ldots, h_{j_m})\|_\infty \le \left(\frac{4}{27}\right)^m \|\partial_{j_1}^2 \ldots \partial_{j_m}^2 u\|_\infty.$$

3. 插值下的组合误差*([22,*定理 *4.3])*
   因此，插值后的有限差分解的总误差满足 *es*

$$u(x) - \mathcal{I}u_h(x) = \sum_{m=1}^{d} \sum_{\{j_1,\ldots,j_m\}\subset\{1,\ldots,d\}} v_{j_1,\ldots,j_m}(x; h_{j_1}, \ldots, h_{j_m})\, h_{j_1}^2 \cdots h_{j_m}^2, \tag{2.3}$$

   对所有 $x \in I^d$ 均成立，其中每个$v_{j_1,\ldots,j_m}$ 都一致有界，并且取决于离散化误差和插值误差。

在确立离散误差可以展开为低维贡献之和后，我们现在转向分析的第二个关键部分：理解组合技术如何利用这一结构提高精度。下一个定理按照先前关于$p = 2$ 和 $d = 2$,3 in [8]的结果，给出了适用于一般阶 $p$ 和维数 $d$的严格误差界。

**定理 2.2 (**稀疏网格误差界； [22]中的定理5.4)。假设对所有 $u_h$ ，点态误差均可按以下形式展开

$$u - u_h = \sum_{m=1}^{d} \sum_{\{j_1,\ldots,j_m\}\subset\{1,\ldots,d\}} v_{j_1,\ldots,j_m}(\cdot; h_{j_1},\ldots,h_{j_m})\, h_{j_1}^{p}\cdots h_{j_m}^{p},$$

其中 $|v_{j_1,\ldots,j_m}| \le K$ 对所有 $1 \le m \le d$ 以及所有 $\{j_1,\ldots,j_m\} \subset \{1,\ldots,d\}$均成立。

那么，组合解(2.1)满足以下误差估计

$$|u - u_n| \le \frac{2K}{(d-1)!}\left(\frac{2^p+1}{2^{p-1}}\right)^{d-1} (n+2(d-1))^{d-1}\, 2^{-pn}.$$

文献 [15]探讨了将这一方法推广到采用三次样条插值的四阶单调格式。早期关于高阶稀疏网格格式在期权定价中的实验研究包括文献 [16] 和 [14]。

我们的方法在以下方面有着关键区别：我们不使用标准组合公式来组合高阶格式的近似，而是修改组合技术中的权重，以提高低阶格式的精度阶。这样便能以极小的实现改动、高效地修改现有标准代码。

文献中从先验 和后验 角度讨论了权重的最优选择 [12]„ 其中包括“opticom”方法。该方法从投影到子空间的线性组合中，求得给定函数的最佳近似。

与下文的框架更为密切相关的是， [10] 假设存在一种所谓的阶数（$q$， $p$）展开，其形式为

$$u - u_{\mathbf{h}} = \sum_{m=1}^{d} \sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_m\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} \eta_{j_1,\ldots,j_m} h_{j_1}^{q}\ldots h_{j_m}^{q} + \gamma_{j_1,\ldots,j_m}(h_{j_1},\ldots,h_{j_m}) h_{j_1}^{p}\ldots h_{j_m}^{p}, \tag{2.4}$$

其中 $p > q$ 为正整数，随后通过求解线性规划，根据展开项的上界确定最优组合权重。之后， [11] 将结果推广到不同维数采用不同阶数的情形，并将外推嵌入自适应稀疏网格组合技术中。我们的分析在 $q = 2$， $p = 4$ 的情况下给出了与（2.4）类似的展开，可视为对文献 [10, 11] 中方法的理论论证。

## 2.3 本文的主要结果

令 $\mathbf{u_h}$ 与前文相同，表示有限差分近似；令 $u_{\mathbf{h}}$ 表示$\mathbf{u_h}$在网格尺寸为$\mathbf{h}$ =（$h_1$，.....， $h_d$）的张量积网格上的分片多线性插值函数。

文献 [2] 将组合技术置于多变量外推方法的背景下。本文在组合技术中采用多元外推来提高阶数。

定义外推解

$$\tilde{u}_{\mathbf{h}} = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \sum_{\substack{\{i_1,\ldots,i_k\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} u_{\mathbf{h}}^{(i_1,\ldots,i_k)} \tag{2.5}$$

其中 $\alpha_k = \frac{(-4)^k}{(-3)^d}$，并且，对于 $\mathbf{i} = (i_1,\ldots,i_k)$，

$$\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{i}} \coloneqq \mathbf{u}_{\mathbf{h}^{\mathbf{i}}}, \quad u_{\mathbf{h}}^{\mathbf{i}} \coloneqq u_{\mathbf{h}^{\mathbf{i}}}, \qquad \text{where } \mathbf{h}^{\mathbf{i}} = (h_1^{\mathbf{i}},\ldots,h_d^{\mathbf{i}}) \text{ with } h_j^{\mathbf{i}} = \begin{cases} h_j/2, & j \in \{i_1,\ldots,i_k\},\\ h_j, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

也就是说，离散解$\mathbf{u}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{i}}$和插值解 $u_{\mathbf{h}}^{\mathbf{i}}$ 的网格宽度已在维数 $i_1,\ldots,i_k$上通过二分细化进行了细化。

**注 2.3.** 在 $d=1$ 维中，外推 (2.5) 等价于 *Richardson* 外推。对于 $d\geq 2$，外推需要使用最多经过 $d+1$ 次单向细化的网格。下面构造的稀疏组合解本身是由来自 $d$ 个细化层级的网格上的解线性组合而成，因此需要使用来自 $2d$ 个层级的网格。

我们可以将其与 *[25]*,在二维中的“分裂外推”方案进行对比

$$u_{\mathrm{SL}}=\frac{4}{3}u_{\mathbf{h}}^{(1)}+\frac{4}{3}u_{\mathbf{h}}^{(2)}-\frac{5}{3}u_{\mathbf{h}}, \tag{2.6}$$

该方案将 $h_1$ 和 $h_2$ 中的二阶误差提升至 $h_1^4+h_2^4+h_1^2h_2^2$ 阶。对于具有 $h_1=h_2$ 的完整网格，该方法可达到四阶，但项 $h_1^2h_2^2$ 会阻碍所需的高阶展开，因此无法在 $p=4$ 的情况下应用定理 *2.2*。

下面的定理说明，外推公式 (2.5)（据我们所知，这是新颖的）能够达到预期效果，消去所有纯二阶项。

**定理 2.4**。 假设存在函数 $\beta_j\in L^\infty\big(I^d\times[0,1]^{d-1}\big)$, $\gamma_{j_1,\ldots,j_m}\in L^\infty\big(I^d\times[0,1]^m\big)$，使得有限差分误差满足如下展开

$$u-u_{\mathbf{h}}=\sum_{j=1}^{d}\beta_j(\cdot;h_1,\ldots,h_{j-1},h_{j+1},\ldots,h_d)h_j^2+\sum_{m=1}^{d}\sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_m\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}}\gamma_{j_1,\ldots,j_m}(\cdot;h_{j_1},\ldots,h_{j_m})h_{j_1}^4\ldots h_{j_m}^4 \tag{2.7}$$

对所有为 *2* 的负幂的 $h_j$，且满足$\|\gamma_{j_1,\ldots,j_m}\|_\infty\leq K$。那么

$$u-\tilde{u}_{\mathbf{h}}=\sum_{m=1}^{d}\sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_m\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}}\tilde{\gamma}_{j_1,\ldots,j_m}(\cdot;h_{j_1},\ldots,h_{j_m})h_{j_1}^4\ldots h_{j_m}^4$$

其中$\|\tilde{\gamma}_{j_1,\ldots,j_m}\|_\infty\leq\frac{5^d}{3^d}K$。

证明。 证明见第 3 节。 □

**注 2.5**。 我们将在下文论证，任何在原点处取值为 *0* 的、足够光滑的 $h_1,\ldots,h_d$ 的对称函数，都具有右端项 (2.7)所示的展开。形式上，可以假设在 $h_1^2,\ldots,h_d^2$ 中存在完整的泰勒展开，先将所有至少含有第一组求和中某个 $j$ 对应因子 $h_j^2$ 的项归为一组，然后将其余所有仅为 $h_1^4,\ldots,h_d^4$ 的函数的项收集到第二组求和中。

定理 2.4 使我们进入定理 2.2 的适用范围，并允许我们定义高阶稀疏网格解。在组合公式中用 $\tilde{u}_{\mathbf{h}}$ 替换 $u_{\mathbf{h}}$，并按 **i** 重新分组，我们得到层级 $n$ 下的高阶组合解，其形式为

$$\hat{u}_n\coloneqq\sum_{l=n}^{n+d-1}a_{l-n}\sum_{\substack{|\mathbf{j}|=l\\ \mathbf{h}=2^{-\mathbf{j}}}}\tilde{u}_{\mathbf{h}}=\sum_{l=n}^{n+2d-1}\sum_{\substack{|\mathbf{i}|=l\\ \mathbf{h}=2^{-\mathbf{i}}}}b_l u_{\mathbf{h}}$$

其中 $b_l=\sum_{j=}^{\min\{l-n,d-1\}}{}_{\text{最大值}\{0,l-n-d\}}\,a_j\alpha_{l-n-j}\binom{N_l}{l-n-j}$，且 $\alpha_k=(-4)^k\,(-3)^d$，$N_l=\binom{m}{l}\binom{d-m}{k-l}$。第 3 节给出了更详细的推导。

由此可写出高阶组合解的误差界。定理 2.4 得证后，以下结果可由定理 2.2 直接推出。

[1]该公式收录于其中一位作者的博士论文 [21]（德语），但未包含此处第 4 节所提供的收敛性分析。

**推论 2.6**（高阶组合解的误差界）。 假设定理 *2.4* 中的条件成立，特别是 $u_{\mathbf{h}}$ 满足 （2.7）。

*Then*

$$|u-\hat{u}_n| \le \frac{10}{3}\frac{K}{(d-1)!}\left(\frac{85}{24}\right)^{d-1}(n+2d-1)^{d-1}2^{-4n}.$$

接下来需要证明前提 (2.7) 成立，这是分析中技术难度最高的部分。在第 4 节中，我们在关于离散化格式和一些半离散辅助格式的截断误差（假设 4.4），以及关于解的光滑性和稳定性的一些自然假设下，给出一个一般性证明。这些假设需要针对具体应用加以验证。我们在第 5 节中对泊松问题进行了验证。

我们有以下结果：

**定理 2.7**。 在假设 *4.3* 和 *4.4* 下，存在一致有界函数 $\beta_j$和 $\gamma_{j_1,\dots,j_m}$ ，使得对于所有为负的 *2* 的幂的 $h_j$ ，有限差分误差满足如下展开：

$$u(\mathbf{x}_h)-\mathbf{u}_h = \sum_{j=1}^{d} h_j^2\beta_j(\mathbf{x}_h;h_1,\dots,h_{j-1},h_{j+1},\dots,h_d) + \sum_{m=1}^{d}\sum_{\substack{\{j_1,\dots,j_m\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{j_1}^4\dots h_{j_m}^4\gamma_{j_1,\dots,j_m}(\mathbf{x}_h;h_{j_1},\dots,h_{j_m}). \tag{2.8}$$

这里，特别地，记 $I^{(i_1,\dots,i_m)}{}_h := \{x\in I^d :\ x_{i_k}=jh_{i_k},\ 0\le j\le h_{i_k}^{-1}\}$,

$\beta_j(\cdot;h_1,\dots,h_{j-1},h_{j+1},\dots,h_d)\in L^\infty\big(I_h^{(1,\dots,j-1,j+1,\dots,d)}\big)$ $\gamma_{j_1,\dots,j_m}(\cdot;h_{j_1},\dots,h_{j_m})\in L^\infty\big(I_h^{(j_1,\dots,j_m)}\big)$ 与**h**无关，且一致有界。

证明。 证明见第 4 节。

□

**注 2.8.** 在张量网格上对有限差分解进行插值，以构造稀疏组合解，有两种替代方案。在“外推–插值–组合”这一序列中，我们需要一个四阶插值函数，并进行适当的误差分解，以保持前一外推步骤所达到的整体四阶精度。文献 *[15]*表明，对于足够光滑的函数，迭代单变量三次样条插值满足这种误差分解。

在“插值–外推–组合”这一序列中，外推步骤可以将多线性插值的二阶精度提升至四阶，并在组合后得到四阶稀疏网格解，前提是插值误差具有(2.7)右端项所示的展开形式。我们确信，可以结合文献 *[22]* 中推导插值误差的技巧与定理 *2.7* 证明中针对有限差分误差更精细展开所采用的技巧，证明这一点。然而，冗长的分析会显著增加本文篇幅，而且很可能不会带来新的见解，因此这里从略。第 *5* 节的数值测试证实，对二阶有限差分解进行多线性插值后再外推和组合，确实可以实现四阶收敛。

总之，通过将二阶有限差分格式外推至四阶，然后应用稀疏网格组合公式，我们得到了一个整体误差界

$$|u-\hat{u}_n| = O\big((n+2d-1)^{d-1}2^{-4n}\big),$$

仅使用 $O(n^{d-1}2^n)$ 个自由度，而非 $O(2^{nd})$ 个自由度，从而使高阶组合解既准确又具有维数效率。

## 3　多元外推与高阶组合　　n

本节的目标是通过首先在笛卡尔子网格上构造四阶外推，进而构建高阶稀疏网格组合公式。我们先在经典笛卡尔网格上应用外推来构建高阶解，然后再通过稀疏网格公式将其组合起来。通过在每个稀疏子网格上对网格尺寸为 $\mathbf{h}$ 的网格预先执行外推步骤，可以确保所有截至所需阶数的混合误差项均消失。

对于外推步骤，我们可以采取更抽象的视角。设$\mathbf{u}_h$ 是一个依赖于参数向量（$h_1, \ldots, h_d$）的量，并且 $u$ 是当所有 $k = 1, \ldots, d$趋于 $h_k \to 0$ 时的极限。

在本文的背景下， $u$ 是单位立方体 $[0,1]^d$上的线性偏微分方程的解，而$\mathbf{u}_h$ 是在网格尺寸为$\mathbf{h} = （h_1, \ldots, h_d）$的张量积网格上具有二阶精度的有限差分近似，其中 $u_{\mathbf{h}}$：$[0,1]^d \to \mathbb{R}$是其多重线性插值函数，且$u_{\mathbf{h}}（\mathbf{j} \odot \mathbf{h}） = （\mathbf{u}_h）_{\mathbf{j}}$。

在定理 2.1 的设定下，并进一步假设 $w$ 可以继续展开，

$$u - u_{\mathbf{h}} = \sum_{m=1}^{d} \sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_m\} \\ \subset\{1,\ldots,d\}}} h_{j_1}^2 \ldots h_{j_m}^2 \beta_{j_1,\ldots,j_m} + R(h),$$

其中余项 $R（h）$汇集了高阶项和混合项。通过在每个笛卡尔子网格上应用这种多元外推，我们旨在精确消去所有混合二次项$h_{j_1}^2 \ldots h_{j_m}^2$，使得每个网格上剩余的主导误差为 $O（h^4）$阶。

回顾 (2.5) 中及其后立即引入的记号。则 $u^{(i_1,\ldots,i_k)}$ $\mathbf{h}$ 满足误差展开

$$u - u_{\mathbf{h}}^{(i_1,\ldots,i_k)} = \sum_{m=1}^{d} \sum_{\{j_1,\ldots,j_m\} \subset \{1,\ldots,d\}} 4^{-N(\mathbf{i},\mathbf{j})} h_{j_1}^2 \ldots h_{j_m}^2 \beta_{j_1,\ldots,j_m} + \bar{R}(h),$$

¯其中 $N(\mathbf{i},\mathbf{j}) = \|\{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, \ldots, j_m\}\|$，而 $R(h)$ 表示余项，汇集了显式混合二次项之外的所有高阶误差贡献。

定义

$$N_l := \sum_{\substack{\{i_1,\ldots,i_k\} \subset \{1,\ldots,d\} \\ |\{i_1,\ldots,i_k\} \cap \{j_1,\ldots,j_m\}| = l}} 1 \quad = \quad \binom{m}{l} \binom{d-m}{k-l}$$

该量统计满足 $N(\mathbf{i},\mathbf{j}) = l$ 的子网格数量。于是

$$\sum_{\substack{\{i_1,\ldots,i_k\} \\ \subset\{1,\ldots,d\}}} \sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_m\} \\ \subset\{1,\ldots,d\}}} 4^{-N(\mathbf{i},\mathbf{j})} \beta_{j_1,\ldots,j_m} h_{j_1}^2 \ldots h_{j_m}^2 = \sum_{l=0}^{d} N_l 4^{-l} \sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_m\} \\ \subset\{1,\ldots,d\}}} \beta_{j_1,\ldots,j_m} h_{j_1}^2 \ldots, h_{j_m}^2$$

从而

$$\sum_{\substack{\{i_1,\ldots,i_k\} \\ \subset\{1,\ldots,d\}}} u - u_{\mathbf{h}}^{(i_1,\ldots,i_k)} = \sum_{m=1}^{d} \left[ \sum_{l=\max\{0,m+k-d\}}^{\min\{m,k\}} 4^{-l} N_l \right] \sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_m\} \\ \subset\{1,\ldots,d\}}} \beta_{j_1,\ldots,j_m} h_{j_1}^2 \ldots h_{j_m}^2 + \bar{R}(h).$$

第 $m$阶项 $h_{j_1}^2 \ldots h_{j_m}^2$ 只有在（通过交换求和顺序）时才会消失

$$\sum_{k=0}^{d} \alpha_k \sum_{l=\max\{0,m+k-d\}}^{\min\{m,k\}} 4^{-l} N_l = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \sum_{l=\max\{0,m+k-d\}}^{\min\{m,k\}} 4^{-l} \binom{m}{l} \binom{d-m}{k-l} = 0.$$

求解关于 $\alpha_k$ 的这个线性方程组，

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \binom{d}{k} = 1, \\ \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \sum_{l=\max\{0,m+k-d\}}^{\min\{m,k\}} 4^{-l} \binom{m}{l} \binom{d-m}{k-l} = 0, \end{cases}$$

我们推测（根据对较小 $d$ 的显式计算），闭式解为 $\alpha_k = (-4)^k\ (-3)^d$。 ——

在定理 2.4 后续的证明中，我们将这些权重应用于外推解 $\tilde{u}_h$，并证明所有二阶混合项确实消失，只在误差展开中留下纯四次高阶项。这构成了本节的关键结果，因为它将名义上二阶的离散化提升为实际上四阶的稀疏网格近似。我们先通过一个引理证明这一关键消去步骤。

**引理 3.1**。令 $\alpha_k := (-4)^k/(-3)^d$，其中 $0 \le k \le d$。那么，对于任意 $\beta : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ 以及指标 $i_j \in \{0,1\}$（其中 $1 \le j \le d$），有

$$\sum_{k=0}^{d} \alpha_k \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_d=k \\ i_j \in \{0,1\}}} 4^{-i_1}\, \beta\big(i_2, \ldots, i_d\big) \;=\; 0.$$

证明。将 $h_\ell = 2^{-i_\ell}$ 代入 $\ell = 2, .., d$，得到

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \sum_{i_1+\cdots+i_d=k} 4^{-i_1}\, \beta(h_2, \ldots, h_d) &= \frac{1}{(-3)^d} \sum_{k=0}^{d} (-4)^k \sum_{i_1+\cdots+i_d=k} 4^{-i_1}\, \beta(i_2, \ldots, i_d) \\ &= \frac{1}{(-3)^d} \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \sum_{i_1+\cdots+i_d=k} 4^{i_2+\ldots+i_d}\, \beta(i_2, \ldots, i_d) \\ &= \frac{1}{(-3)^d} \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \sum_{i_1+\cdots+i_d=k} \tilde{\beta}(i_2, \ldots, i_d), \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中我们定义了 $\tilde{\beta}(i_2, .., i_d) = 4^{i_2+\ldots+i_d}\, \beta(i_2, .., i_d)$。

由于（3.1）中的最后一项求和不依赖于 $i_1$，因此对于所有 $0 < k < d$，我们可以将其拆分为

$$\sum_{i_1+\cdots+i_d=k} \tilde{\beta}(i_2, \ldots, i_d) = \sum_{i_2+\cdots+i_d=k-1} \tilde{\beta}(i_2, \ldots, i_d) + \sum_{i_2+\cdots+i_d=k} \tilde{\beta}(i_2, \ldots, i_d),$$

在范围的起始和末尾也可以进行类似处理。因此，（3.1）是一个望远镜求和，这就证明了该结论。 □

证明。 [定理 2 的证明。4]

首先，满足零阶相容性条件:

$$\sum_{k=0}^{d} \alpha_k \binom{d}{k} = \frac{1}{(-3)^d} \sum_{k=0}^{d} (-4)^k \binom{d}{k} = \frac{(1-4)^d}{(-3)^d} = 1.$$

余项由引理 3.1 得出，并且

$$\begin{aligned} u - \tilde{u}_h &= \sum_{m=1}^{d} \sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_m\} \\ \subset\{1,\ldots,d\}}} \sum_{k=0}^{d} \alpha_k \sum_{\substack{\sum_\ell i_\ell = k \\ i_\ell \in \{0,1\}}} \gamma_{j_1,\ldots,j_m}\big(h_{j_1+i_{j_1}}, \ldots, h_{j_m+i_{j_m}}\big) \prod_{r=1}^{m} h_{j_r+i_{j_r}}^4 \\ &= \sum_{m=1}^{d} \sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_m\} \\ \subset\{1,\ldots,d\}}} \Big(\prod_{r=1}^{m} h_{j_r}^4\Big) \underbrace{\sum_{k=0}^{d} \frac{(-4)^k}{(-3)^d} \sum_{\substack{\sum_\ell i_\ell = k \\ i_\ell \in \{0,1\}}} \gamma_{j_1,\ldots,j_m}\big(h_{j_1} 2^{-i_{j_1}}, \ldots, h_{j_m} 2^{-i_{j_m}}\big)\, 16^{-(i_{j_1}+\cdots+i_{j_m})}}_{=:\ \tilde{\gamma}_{j_1,\ldots,j_m}(h_{j_1},\ldots,h_{j_m})}. \end{aligned}$$

估计该系数可得

$$\left|\tilde{\gamma}_{j_1,\dots,j_m}\right| \;\le\; \sum_{k=0}^{d} \frac{K\,4^k}{3^d}\binom{d}{k} \;=\; K\,\frac{(1+4)^d}{3^d} \;=\; K\,\frac{5^d}{3^d}. \qquad \square$$

# 4 误差展开

在本节中，我们证明主要结果定理 2.7。对于情形 $d = 2$，附录 A 给出了一个形式证明（即未详细验证所需的正则性及其他性质）。该证明突出了证明的一般原理，但避开了一般情形中一些更具技术性的步骤。

我们在算子理论框架下给出论证，使其适用于任何特定模型之外的情形；随后，我们将其专门应用于线性边值问题的有限差分离散化（特别是泊松问题；见第 5 节）。

设 $A\colon\ C^\infty([0,1]^d,\ \mathbb{R}) \to C^\infty([0,1]^d,\ \mathbb{R})$ 为某个线性算子。固定网格尺寸向量 $\mathbf{h}$，令 $I_{h_j} := \{0, h_j, 2h_j, \dots, 1\}$ 和 $I_h := \prod_{j=1}^d I_{h_j}$，并记 $\mathcal{X}_h$ 为定义在 $I_h$ 上的网格函数空间。令 $A_h : \mathcal{X}_h \to \mathcal{X}_h$ 为 $A$ 的二阶离散化。对于某个具有足够正则性的函数 $f\colon\ [0,1]^d \to \mathbb{R}$，令 $u \in C^\infty(I^d)$ 为 $Au = f$ 的解，并令 $u_h \in \mathcal{X}_h$ 为 $A_h u_h = f_h$ 的解，其中 $f_h$ 是 $f$ 到 $I_h$ 的标准限制。

我们将 $u_h$ 解释为 $I_h$ 上 $u$ 的网格近似。那么，本节的目标是建立如下形式的误差展开：

$$u - u_h = \sum_{j=1}^{d} h_j^2 \beta_j(h_1, \dots, h_{j-1}, h_{j+1}, \dots, h_d) + \sum_{m=1}^{d} \sum_{\substack{\{j_1,\dots,j_m\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{j_1}^4 \dots h_{j_m}^4 \gamma_{j_1,\dots,j_m}(h_{j_1}, \dots, h_{j_m}). \tag{4.1}$$

理解有限差分格式中的误差 $u - u_h$，通常首先要考察截断误差 $A_h[u - u_h] = A_h u - f_h$。因此，将该残差按网格尺寸的幂展开，是误差分析的关键环节。随后，全局离散误差便可视为离散算子的逆作用于这一局部误差的结果。接下来，我们或许会直接对 $A_h$ 求逆，以获得所需的 $u - u_h$ 误差展开。然而，由于 $A_h^{-1}$ 对网格尺寸 $(h_1, \dots, h_d)$ 的依赖并非平凡，这种方法无法直接得到所需形式 (4.1) 的展开。

为克服这一障碍，我们引入一种理论上的误差修正方案。我们将通过归纳法证明以下命题：

**命题 *4.1.*** 对于任意 $1 \le m \le d$ 和 $0 \le n \le m$，存在函数 $\beta_j^{(n,m)}(h_1, \dots, h_{j-1}, h_{j+1}, \dots, h_d)$，$\beta_{j\,j_2\dots}^{(n,m)}{}_{,\dots,j_k}(h_{j_2}, \dots, h_{j_k})$ $\gamma_{j_1\dots}^{(n,m)}{}_{,\dots,j_k}(h_{j_1}, \dots, h_{j_k})$ 和 $\sigma^{k_1,\dots,k_{m-l}}_{i_1\dots i_l}{}^{(n,m)}(h_{i_1}, \dots, h_{i_l})$，使得

$$A_h\left[u - \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\substack{\{j_1,\dots,j_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{j_1}^4 \dots h_{j_k}^4 \gamma_{j_1,\dots,j_k}^{(n,m)}(h_{j_1}, \dots, h_{j_k}) - \sum_{j=1}^{d} h_j^2 \beta_j^{(n,m)}(h_1, \dots, h_{j-1}, h_{j+1}, \dots, h_d)\right] - f_h$$

$$= \sum_{k=m+1}^{d} \sum_{\substack{\{j_1,\dots,j_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{j_1}^4 \dots h_{j_k}^4 \gamma_{j_1,\dots,j_k}^{(n,m)}(h_{j_1}, \dots, h_{j_k}) + \sum_{k=m+1}^{d} \sum_{\substack{\{j\}\sqcup\{j_2,\dots,j_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_j^2 h_{j_2}^2 \dots h_{j_k}^2 \beta_{j,j_2,\dots,j_k}^{(n,m)}(h_{j_2}, \dots, h_{j_k})$$

$$+ \sum_{l=n}^{m} \sum_{\substack{\{i_1,\dots,i_l\}\sqcup\{k_1,\dots,k_{m-l}\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{k_1}^2 \dots h_{k_{m-l}}^2 h_{i_1}^4 \dots h_{i_l}^4 \sigma_{i_1,\dots,i_l}^{k_1,\dots,k_{m-l}\,(n,m)}(h_{i_1}, \dots, h_{i_l}). \tag{4.2}$$

此外，所有函数 $\beta_j^{(n,m)}$， $\beta_{j\,j_2\,\ldots}^{(n,m)}{}_{,,,j_k}$， $\gamma_{j_1\,\ldots}^{(n,m)}{}_{,,j_k}$， $\sigma^{k_1}{}_{,\ldots,k_{m-l},(n,m)\;i_1,\ldots,i_l}$ 都具有以下性质：

- 它们是 $C^\infty$ 部分网格连续变量的函数，并且所有导数在边界上都为零。
- 它们是偶函数，并且关于其所依赖的每个网格尺寸变量都是 $C^\infty$ 。

在证明该命题之前，我们先说明展开式 (4.1)，以及由此得到的定理 2.7，如何直接由该命题推出。

定理 *2.7* 的证明。取 $n = m = d$ 代入 (4.2)，

$$A_h\left[u - \sum_{k=1}^{d-1}\sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_k\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} h_{j_1}^4\ldots h_{j_k}^4\gamma_{j_1,\ldots,j_k}^{(d,d)}(h_{j_1},\ldots,h_{j_k}) - \sum_{j=1}^{d} h_j^2\beta_j^{(d,d)}(h_1,\ldots,h_{j-1},h_{j+1},\ldots,h_d)\right] - f_h$$
$$= h_1^4\ldots h_d^4\gamma_{1,\ldots,d}^{(d,d)}(h_1,\ldots,h_d)$$
$$\Longrightarrow u - u_h = \sum_{k=1}^{d}\sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_k\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} h_{j_1}^4\ldots h_{j_k}^4\,\bar\gamma_{j_1,\ldots,j_k}^{(d,d)}(h_{j_1},\ldots,h_{j_k}) + \sum_{j=1}^{d} h_j^2\beta_j^{(d,d)}(h_1,\ldots,h_{j-1},h_{j+1},\ldots,h_d),$$

其中，我们乘以 $A_h^{-1}$ 并定义 $\bar\gamma_{1\,\ldots\,d,}^{(d,d)}(\cdot) := A_h^{-1}\gamma_{1\,\ldots\,d,}^{(d,d)}(\cdot)$, 利用了如下事实：根据假设 4.3，算子 $A_h$ 存在逆算子，且其有界性不依赖于 $(h_1,\ldots,h_d)$。由此证明了定理 2.7 中的 (2.8)。

□

剩下的工作是对 $1 \le m \le d$ 和 $0 \le n \le m$使用归纳法证明命题 4.1。证明的整体策略在基础情形和归纳步骤中均适用，并受到第 4 节二维论证的启发，可概括如下。

1. 找出 (4.2) 右端项中尚未符合所需展开结构的项。2. 构造一个适当的半离散问题，使其截断误差重现所识别的项。3. 从 (4.2) 左端减去该半离散问题的解，从而抵消所识别的项，但代价是在右端引入该半离散问题的截断误差。4. 通过反复应用泰勒展开，并利用截断误差关于网格尺寸是光滑偶函数这一事实，证明该截断误差具有所需形式，即仅由与目标展开相容的项构成。

在整个证明过程中，我们反复采用这一系统化方法，将右端项逐步化为所需形式，从而确立归纳断言。

我们引入以下半离散算子族，以按维数拆分离散化。

**定义 4.2**。 对于任意子集 $\{i_1,\ldots,i_m\} \subset \{1,\ldots,d\}$，定义半离散算子 $A^{(i_1,\ldots,i_m)\,h}$，该算子在方向 $i_1$、…、$i_m$ 上对线性算子 $A$ 进行离散化，并使其余方向保持连续。这些算子给出方程组

$$A_h^{(i_1,\ldots,i_m)}u^{(i_1,\ldots,i_m)} = f_h^{(i_1,\ldots,i_m)}$$

具有边界条件，在部分网格 $I^{(i_1,\ldots,i_m)\,h} := \left\{x \in I^d : \; x_{i_k} = jh_{i_k}, 0 \le j \le h_{i_k}^{-1}, 1 \le k \le m\right\}$。

我们作出以下假设。对于 $m = 0$，为简洁起见，我们定义 $A^{(i_1,\dots,i_m)}{}_h = A$和 $\{i_1, \dots, i_m\} = \emptyset$。

**假设 4.3**。对于任意右端项 $g(\cdot;\ h_{i_1}, \dots, h_{i_m})\colon I^{(i_1,\dots,i_m)}{}_h \mapsto \mathbb{R}$，若其关于空间变量光滑，且所有导数在边界上均为零，并且关于网格尺寸光滑且为偶函数，我们假设半离散问题

$$A_h^{(i_1,\dots,i_m)} w(\cdot; h_{i_1}, \dots, h_{i_m}) = g(\cdot; h_{i_1}, \dots, h_{i_m})$$

存在解 $w$，定义于 $I^{(i_1,\dots,i_m)}{}_h$ 上，且具有以下性质：

*(1)* $w$ 关于所有空间变量均光滑。

*(2)* $w$ 在 $\partial I^{(i_1,\dots,i_m)}{}_h = I^{(i_1,\dots,i_m)}{}_h \cap \partial I^d$上满足齐次边界条件：

$$\partial^\alpha w = 0 \qquad on\ \partial I_h^{(i_1,\dots,i_m)} \quad for\ all\ multi\text{-}indices\ \alpha.$$

也就是说，当任一连续坐标取值为0或1时，解及其所有混合导数均为零。

*(3)* $w$ 关于每个网格尺寸分量 $h_{i_k}$均光滑且为偶函数。

于是，对于任意足够光滑的函数 $w$，考察误差 $[A^{(i_1,\dots,i_m)}{}_h - A_h]w$将使我们能够分离出算子 $A_h$ 仅沿非离散方向产生的离散误差分量。因此，在分析中，寻找关于网格尺寸幂次的此类误差的适当展开将是主要重点。

**假设 4.4**。我们假设，任何函数 $w(\cdot;\ h_{i_1}, \dots, h_{i_m})$ 只要满足假设 *4.3* 中所述的光滑性和边界条件，就具有如下形式的误差表示

$$\left[\mathbf{A}_h^{(i_1,\dots,i_m)} - \mathbf{A}_h\right] w(\cdot; h_{i_1}, \dots, h_{i_m}) = \sum_{k=1}^{d-m} \sum_{\substack{\{j_1,\dots,j_k\} \\ \subset \{1,\dots,d\} - \{i_1,\dots,i_m\}}} h_{j_1}^2 \cdots h_{j_k}^2\, \hat{\sigma}_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_m}(\cdot; h_{j_1}, \dots, h_{j_k}, h_{i_1}, \dots, h_{i_m}),$$

其中每个系数

$$\hat{\sigma}_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_m} : I^{d-m} \times [0,1]^{k+m} \longrightarrow \mathbb{R}$$

满足以下性质：

*(1)* 对于每个固定的网格尺寸元组 $(h_{j_1}, \dots, h_{j_k}, h_{i_1}, \dots, h_{i_m})$，函数 $y \mapsto \hat{\sigma}^{i_1,\dots,i_m}_{j_1,\dots,j_k}(y; h_{j_1}, \dots, h_{j_k}, h_{i_1}, \dots, h_{i_m})$ 关于 $I^{d-m}$ 是光滑的。*(2)* 对于每个固定的网格尺寸元组，$\hat{\sigma}^{i_1,\dots,i_m}_{j_1,\dots,j_k}$ 在边界 $\partial I^{d-m}$ 上为零，并且其关于连续变量的所有混合导数都在 $\partial I^{d-m}$ 上为零。*(3)* 对于每个固定的 $y \in I^{d-m}$，映射 $(h_{j_1}, \dots, h_{j_k}, h_{i_1}, \dots, h_{i_m}) \mapsto \hat{\sigma}^{i_1,\dots,i_m}_{j_1,\dots,j_k}(y;\ h_{j_1}, \dots, h_{j_k}, h_{i_1}, \dots, h_{i_m})$ 是 $[0,1]^{k+m}$ 上的光滑偶函数。

在本节余下部分中，所有陈述和证明均在假设 4.3 和 4.4 下进行。

在第 5 节中，我们将针对满足适当正则性假设的泊松方程，详细验证这些假设。为求完整起见，下面也简要讨论为何在更一般的情形下这些假设是合理的。

对于任意边界数据，假设 4.3 中的零迹假设不会造成任何一般性损失。尽管稀疏网格分析通常是在零迹边界

条件下进行的，但这仅仅是一种方便的归一化。实际上，高维偏微分方程定义在 $\mathbb{R}^d$ 上，其解在无穷远处平滑衰减。局部化到一个有界盒后，所施加的边界值与一个平滑的零迹函数仅相差一个小扰动，而该扰动对稀疏网格误差的影响是可控的。因此，零迹假设并不构成限制。详细讨论请参见 [22]。

对于典型的对称（中心）离散化，假设 **4.4** 中的正则性和对称性是自然的。通过对精确解关于空间变量和网格尺寸进行足够高阶的泰勒展开，并结合使用二阶相容有限差分模板，可以证明这些性质。通过跟踪高阶余项并利用差商的对称性，可以进行严格验证。

可以证明，任何这样的偶光滑函数 $\sigma_{j_1,\dots,j_m}$ 都可以按其自变量的平方进行泰勒展开：

**引理 4.5**。 设 $\sigma\colon [-1,1]^d \to \mathbb{R}$ 是关于 $h_1,\dots,h_d$ 的光滑偶函数，即对所有 $(i_1,\dots,i_d) \in \{0,1\}^d$，都有 $\sigma(h_1,\dots,h_d) = \sigma\big((-1)^{i_1}h_1,\dots,(-1)^{i_d}h_d\big)$。

那么存在光滑偶函数 $\delta_{j_1,\dots,j_m}\colon [-1,1]^m \to \mathbb{R}$ 使得

$$\sigma(h_1,\dots,h_d) = \sum_{m=0}^{d} \sum_{\substack{\{j_1,\dots,j_m\} \\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{j_1}^2 \dots h_{j_m}^2 \delta_{j_1,\dots,j_m}(h_{j_1},\dots,h_{j_m}),$$

其中，按照记号上的惯例，$m=0$, $\delta_{j_1,\dots,j_m} =: \delta_0$ 表示一个常数。

证明。 我们对 $d$ 进行归纳，每一步都在最后一个变量上使用标准的偶泰勒展开。在基础情形 $d=1$ 中，可以写成

$$\sigma(h) = \tfrac{1}{2}\big[\sigma(h) + \sigma(-h)\big] = \sigma(0) + h^2\,\delta(h),$$

其中 $\delta$ 是一个光滑偶函数。在归纳步骤中，对 $h_d$ 进行对称化泰勒展开，并结合维数为 $d-1$ 时的归纳假设，即可得到完整的分解。 □

上述假设结合前一个引理中给出的光滑偶函数展开结果，使我们能够建立以下技术性结果。该引理将在主定理的证明中发挥关键作用，我们会反复应用它来处理各种截断误差项的结构。为便于阐述和查阅，我们在此单独陈述该引理，并在附录 B 中给出详细证明。

**引理 4.6**。 设 $\{i_1,\dots,i_n\} \subseteq \{k_1,\dots,k_p\} \subseteq \{1,\dots,d\}$ 和 $\{j_1,\dots,j_m\} \cap \{k_1,\dots,k_p\} = \emptyset$。令 $\phi(\cdot;\ h_{i_1}、\dots\dots、h_{i_n})$ 为任意充分正则的函数，它关于空间变量光滑，并且关于每个网格尺寸分量均光滑且为偶函数。假设半离散问题

$$A_h^{(k_1,\dots,k_p)}\psi(\cdot;h_{k_1},\dots,h_{k_p}) = \phi(\cdot;h_{k_1},\dots,h_{k_p})$$

存在一个解 $\psi$，满足假设 *4.3* 和 *4.4* 的正则性要求。那么，相应的解 $\psi(\cdot;\ h_{k_1},\dots,h_{k_p}) \in C^\infty(I^d)$ 具有相同的光滑性

以及关于网格尺寸的偶性，并且截断误差满足：

$$
\begin{aligned}
&h_{j_1}^2 \cdots h_{j_m}^2 \, h_{i_1}^4 \cdots h_{i_n}^4 \left[A_h^{(k_1,\ldots,k_p)} - A_h\right]\psi(h_{k_1},\ldots,h_{k_p}) \qquad (4.3)\\
&= \sum_{q=m+n+1}^{d} \sum_{\substack{\{l_1,\ldots,l_q\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} h_{l_1}^4 \cdots h_{l_q}^4 \, \gamma_{l_1,\ldots,l_q}(\cdot; h_{l_1},\ldots,h_{l_q})\\
&\quad + \sum_{q=m+n+1}^{d} \sum_{\substack{\{l\}\sqcup\{l_2,\ldots,l_q\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} h_l^2 h_{l_2}^2 \cdots h_{l_q}^2 \, \beta_{l l_2 \ldots l_q}(h_{l_2},\ldots,h_{l_q})\\
&\quad + \sum_{q=n+1}^{m+n} \sum_{\substack{\{s_1,\ldots,s_q\}\sqcup\{r_1,\ldots,r_{m+n-q}\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} h_{r_1}^2 \cdots h_{r_{m+n-q}}^2 \, h_{s_1}^4 \cdots h_{s_q}^4 \, \sigma_{s_1,\ldots,s_q}^{r_1,\ldots,r_{m+n-q}}(h_{s_1},\ldots,h_{s_q}).
\end{aligned}
$$

此处，$\gamma_{l_1,\ldots,l_q}$、$\beta_{l l_2 \ldots l_q}$ 和 $\sigma^{r_1,\ldots,r_{m+n-q}}_{s_1 \ldots s_q}$，是光滑函数，并且关于网格尺寸变量也是光滑偶函数。

证明。 证明过程是利用假设 4.4 和引理 4.5 展开截断误差，并将所有得到的项整理为右端项 (4.3) 中出现的三种结构之一。附录 B 对这一分解给出了详细论证。

□

现在我们陈述并证明主证明所需的第二个技术引理。

**引理 4.7**。 对于光滑的 $u$，存在光滑函数 $\sigma_j^{(0,1)}$、$\gamma_{j_1 \ldots j_k}^{(0,1)}$、$\beta_{j\, j_2 \ldots j_k}^{(0,1)}$ 以及常数 $\sigma^{j\,(0,1)}$，使得

$$
\begin{aligned}
A_h u - f_h &= \sum_{j=1}^{d} h_j^2 \sigma^{j\,(0,1)} + \sum_{j=1}^{d} h_j^4 \sigma_j^{(0,1)}(h_j)\\
&\quad + \sum_{k=2}^{d} \sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_k\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} h_{j_1}^4 \ldots h_{j_k}^4 \gamma_{j_1,\ldots,j_k}^{(0,1)}(h_{j_1},\ldots,h_{j_k}) + \sum_{k=2}^{d} \sum_{\{j\}\sqcup\{j_2,\ldots,j_k\}} \beta_{j,j_2,\ldots,j_k}^{(0,1)}(h_{j_2},\ldots,h_{j_k}).
\end{aligned}
$$

证明。 考虑根据假设 4.4 得到的二阶有限差分近似的截断误差，

$$
A_h u - f_h = \sum_{m=1}^{d} \sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_m\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} h_{j_1}^2 \ldots h_{j_m}^2 \sigma_{j_1,\ldots,j_m}(h_{j_1},\ldots,h_{j_m}).
$$

此外，由于每个系数 $\sigma_{j_1,\ldots,j_m}(h_{j_1},\ldots,h_{j_m})$ 都是网格尺寸的光滑偶函数，我们可以对变量 $h_j$ 进行泰勒展开。对于 $m \geq 2$，每个乘积

$$
\begin{aligned}
&h_{j_1}^2 \ldots h_{j_m}^2 \sigma_{j_1,\ldots,j_m}(h_{j_1},\ldots,h_{j_m})\\
=&h_{j_1}^2 \ldots h_{j_m}^2 \left[\sigma_0^{(j_1,\ldots,j_m)} + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\substack{\{i_1,\ldots,i_k\}\\ \subset\{j_1,\ldots,j_m\}}} h_{i_1}^2 \ldots h_{i_k}^2 \sigma_{i_1,\ldots,i_k}^{(j_1,\ldots,j_m)}(h_{i_1},\ldots,h_{i_k}) + h_{j_1}^2 \ldots h_{j_m}^2 \sigma_{j_1,\ldots,j_m}^{(j_1,\ldots,j_m)}(h_{j_1},\ldots,h_{j_m})\right]\\
=&h_{j_1}^2 h_{j_2}^2 \ldots h_{j_m}^2 \sigma_0^{(j_1,\ldots,j_m)} + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\substack{\{i_1,\ldots,i_k\}\\ \subsetneq\{j_1,\ldots,j_m\}}} h_{j_1}^2 \ldots h_{j_m}^2 \hat{\sigma}_{i_1,\ldots,i_k}^{(j_1,\ldots,j_m)}(h_{i_1},\ldots,h_{i_k}) + h_{j_1}^4 \ldots h_{j_m}^4 \sigma_{j_1,\ldots,j_m}^{(j_1,\ldots,j_m)}(h_{j_1},\ldots,h_{j_m})
\end{aligned}
$$

其中 $\hat{\sigma}^{(j_1,\dots,j_m)}_{i_1,\dots,i_k}(h_{i_1,\dots,i_k}) := h^2_{i_1}\dots h^2_{i_k}\sigma^{(j_1,\dots,j_m)}_{i_1\dots i_k},(h_{i_1},\dots,h_{i_k})$，分解为一个纯四阶项，其形式为

$$h^4_{j_1}\cdots h^4_{j_m}\ \gamma_{j_1,\dots,j_m}(h_{j_1},\dots,h_{j_m})$$

以及形如以下形式的混合二阶项

$$h^2_j\, h^2_{j_2}\cdots h^2_{j_m}\ \beta_{j,j_2,\dots,j_m}(h_{j_2},\dots,h_{j_m}).$$

对于 $m=1$,

$$h^2_j\sigma_j(h_j) = h^2_j\sigma_0 + h^4_j\sigma_j(h_j).$$

对所有指标集求和后，便可将 $A_h u - f_h$ 精确表示为一个线性组合，其中包含命题陈述中的四阶项和混合二阶项。 □

现在我们可以证明命题 4.1，从而完成定理 2.7 的证明。

命题 *4.1* 的证明。我们将证明组织为一个双参数归纳法。对于每个 $0\le n\le m$ 和 $1\le m\le d$, 令 $P(n,\ m)$ 表示所需证明的陈述。

我们首先验证基础情形 $P(0,\ 1)$。对于固定的 $m$，接着对$n$进行归纳，证明对于所有 $0\le n<m$，均有 $P(n,\ m)\ \Rightarrow P(n+1,\ m)$; 因此，一旦已知 $P(0,\ m)$，便可得到 $P(1,\ m)\dots,\ P(m,\ m)$。最后，我们通过证明 $P(m,\ m)\ \Rightarrow P(0,\ m+1)$，将层级从 $m$ 推进至 $m+1$，由此开启下一序列。这些步骤合在一起，便可得到对于所有 $0\le n\le m$ 和 $1\le m\le d$均成立的$P(n,\ m)$，从而完成证明。

基础情形 $P(0,\ 1)$由引理 4.7给出。

在 $n$ 中进行归纳时，假设对某个 $n<m$, $P(n,\ m)$ 成立，即等式 (4.2) 成立。为了证明 $P(n+1,\ m)$ 成立，我们需要消去以下项

$$\sum_{\substack{\{i_1,\dots,i_n\}\sqcup\{k_1,\dots,k_{m-n}\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h^2_{k_1}\dots h^2_{k_{m-n}}h^4_{i_1}\dots h^4_{i_n}\sigma^{k_1,\dots,k_{m-n}\ (m,n)}_{i_1,\dots,i_n}(h_{i_1},\dots,h_{i_n}).$$

为此，引入以下半离散问题序列:

$$A^{(i_1,\dots,i_n)}_h\hat{\sigma}^{k_1,\dots,k_{m-n}}_{i_1,\dots,i_n}(h_{i_1},\dots,h_{i_n}) = \sigma^{k_1,\dots,k_{m-n}\ (n,m)}_{i_1,\dots,i_n}(h_{i_1},\dots,h_{i_n}).$$

By Lemma 4.6，这样一个半离散问题序列的截断误差满足 :

$$\begin{aligned}
&h^2_{k_1}\dots h^2_{k_{m-n}}h^4_{i_1}\dots h^4_{i_n}\left[A^{(i_1,\dots,i_n)}_h - A_h\right]\hat{\sigma}^{k_1,\dots,k_{m-n}}_{i_1,\dots,i_n}(h_{i_1},\dots,h_{i_n})\\
&= \sum_{k=m+1}^{d}\ \sum_{\substack{\{l_1,\dots,l_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h^4_{l_1}\dots h^4_{l_k}\gamma^{k_1,\dots,k_{m-n},i_1,\dots,i_n}_{l_1,\dots,l_k}(h_{l_1},\dots,h_{l_k})\\
&\quad+\sum_{k=m+1}^{d}\ \sum_{\substack{\{l\}\sqcup\{l_2,\dots,l_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h^2_l h^2_{l_2}\dots h^2_{l_k}\beta^{k_1,\dots,k_{m-n},i_1,\dots,i_n}_{l,l_2,\dots,l_k}(h_{l_2},\dots,h_{l_k})\\
&\quad+\sum_{k=n+1}^{m}\ \sum_{\substack{\{s_1,\dots,s_k\}\sqcup\{r_1,\dots,r_{m-k}\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h^2_{r_1}\dots h^2_{r_{m-k}}h^4_{s_1}\dots h^4_{s_k}\sigma^{r_1,\dots,r_{m-k},k_1,\dots,k_{m-n},i_1,\dots,i_n}_{s_1,\dots,s_k}(h_{s_1},\dots,h_{s_k}).
\end{aligned}\tag{4.4}$$

在 $n$ 中，现在只需将这类半离散问题相减即可得到归纳步骤；应用归纳假设从第二行推导到第三行，并利用 (4.4) 从

第四个等式推导到第五个等式:

$$
\begin{aligned}
&A_h\left[u-\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\substack{\{j_1,\dots,j_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{j_1}^4\dots h_{j_k}^4\gamma_{j_1,\dots,j_k}^{(n+1,m)}(h_{j_1},\dots,h_{j_k})-\sum_{j=1}^{d}h_j^2\beta_j^{(n+1,m)}(h_1,\dots,h_{j-1},h_{j+1},\dots,h_d)\right]-f_h\\
:=&A_h\left[u-\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\substack{\{j_1,\dots,j_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{j_1}^4\dots h_{j_k}^4\gamma_{j_1,\dots,j_k}^{(n,m)}(h_{j_1},\dots,h_{j_k})-\sum_{j=1}^{d}h_j^2\beta_j^{(n,m)}(h_1,\dots,h_{j-1},h_{j+1},\dots,h_d)\right]-f_h\\
&-A_h\left[\sum_{\substack{\{i_1,\dots,i_n\}\sqcup\{k_1,\dots,k_{m-n}\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{k_1}^2\dots h_{k_{m-n}}^2h_{i_1}^4\dots h_{i_n}^4\hat\sigma_{i_1,\dots,i_n}^{k_1,\dots,k_{m-n}}(h_{i_1},\dots,h_{i_n})\right]\\
=&\sum_{k=m+1}^{d}\sum_{\substack{\{j_1,\dots,j_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{j_1}^4\dots h_{j_k}^4\gamma_{j_1,\dots,j_k}^{(n,m)}(h_{j_1},\dots,h_{j_k})+\sum_{k=m+1}^{d}\sum_{\substack{\{j\}\sqcup\{j_2,\dots,j_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_j^2h_{j_2}^2\dots h_{j_k}^2\beta_{j,j_2,\dots,j_k}^{(n,m)}(h_{j_2},\dots,h_{j_k})\\
&+\sum_{l=n+1}^{m}\sum_{\substack{\{s_1,\dots,s_l\}\sqcup\{r_1,\dots,r_{m-l}\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{r_1}^2\dots h_{r_{m-l}}^2h_{s_1}^4\dots h_{s_l}^4\sigma_{s_1,\dots,s_l}^{r_1,\dots,r_{m-l}(n,m)}(h_{s_1},\dots,h_{s_l})\\
&+\sum_{\substack{\{i_1,\dots,i_n\}\sqcup\{k_1,\dots,k_{m-n}\}\\ \subset\{1,\dots d\}}} h_{k_1}^2\dots h_{k_{m-n}}^2h_{i_1}^4\dots h_{i_n}^4\left[\sigma_{i_1,\dots,i_n}^{k_1,\dots,k_{m-n}(n,m)}-A_h\hat\sigma_{i_1,\dots,i_n}^{k_1,\dots,k_{m-n}}\right](h_{i_1},\dots,h_{i_n})\\
=&\sum_{k=m+1}^{d}\sum_{\substack{\{j_1,\dots,j_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{j_1}^4\dots h_{j_k}^4\gamma_{j_1,\dots,j_k}^{(n,m)}(h_{j_1},\dots,h_{j_k})+\sum_{k=m+1}^{d}\sum_{\substack{\{j\}\sqcup\{j_2,\dots,j_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_j^2h_{j_2}^2\dots h_{j_k}^2\beta_{j,j_2,\dots,j_k}^{(n,m)}(h_{j_2},\dots,h_{j_k})\\
&+\sum_{l=n+1}^{m}\sum_{\substack{\{s_1,\dots,s_l\}\sqcup\{r_1,\dots,r_{m-l}\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{r_1}^2\dots h_{r_{m-l}}^2h_{s_1}^4\dots h_{s_l}^4\sigma_{s_1,\dots,s_l}^{r_1,\dots,r_{m-l}(n,m)}(h_{s_1},\dots,h_{s_l})\\
&+\sum_{\substack{\{i_1,\dots,i_n\}\sqcup\{k_1,\dots,k_{m-n}\}\\ \subset\{1,\dots d\}}} h_{k_1}^2\dots h_{k_{m-n}}^2h_{i_1}^4\dots h_{i_n}^4\left[A_h^{(i_1,\dots,i_n)}-A_h\right]\hat\sigma_{i_1,\dots,i_n}^{k_1,\dots,k_{m-n}}(h_{i_1},\dots,h_{i_n})\\
=&\sum_{k=m+1}^{d}\sum_{\substack{\{j_1,\dots,j_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{j_1}^4\dots h_{j_k}^4\gamma_{j_1,\dots,j_k}^{(n+1,m)}(h_{j_1},\dots,h_{j_k})+\sum_{k=m+1}^{d}\sum_{\substack{\{j\}\sqcup\{j_2,\dots,j_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_j^2h_{j_2}^2\dots h_{j_k}^2\beta_{j,j_2,\dots,j_k}^{(n+1,m)}(h_{j_2},\dots,h_{j_k})\\
&+\sum_{l=n+1}^{m}\sum_{\substack{\{s_1,\dots,s_l\}\sqcup\{r_1,\dots,r_{m-l}\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{r_1}^2\dots h_{r_{m-l}}^2h_{s_1}^4\dots h_{s_l}^4\sigma_{s_1,\dots,s_l}^{r_1,\dots,r_{m-l}(n+1,m)}(h_{s_1},\dots,h_{s_l}),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\gamma_{j_1,\dots,j_k}^{(n+1,m)}&:=\gamma_{j_1,\dots,j_k}^{(n,m)}+\sum_{\{i_1,\dots,i_n\}\sqcup\{k_1,\dots,k_{m-n}\}}\gamma_{j_1,\dots,j_k}^{k_1,\dots,k_{m-n},i_1,\dots,i_n},\\
\beta_{j,j_2,\dots,j_k}^{(n+1,m)}&:=\beta_{j,j_2,\dots,j_k}^{(n,m)}+\sum_{\{i_1,\dots,i_n\}\sqcup\{k_1,\dots,k_{m-n}\}}\beta_{j,j_2,\dots,j_k}^{k_1,\dots,k_{m-n},i_1,\dots,i_n},
\end{aligned}
$$

$$\sigma_{s_1,\dots,s_l}^{r_1,\dots,r_{m-l}(n+1,m)} := \sigma_{s_1,\dots,s_l}^{r_1,\dots,r_{m-l}(n,m)} + \sum_{\{i_1,\dots,i_n\}\sqcup\{k_1,\dots,k_{m-n}\}} \sigma_{s_1,\dots,s_l}^{r_1,\dots,r_{m-l},k_1,\dots,k_{m-n},i_1,\dots,i_n}.$$

这表明 $P(n,\ m) \implies P(n+1,\ m)$，$n < m$，从而完成了 $n$ 中的归纳法。要完成证明，我们只需建立剩余的关系 $P(m,\ m) \implies P(0,\ m+1)$。

假设 $P(m,\ m)$ 成立。为了证明 $P(0,\ m+1)$ 成立，我们首先需要消去这些项

$$\sum_{\substack{\{i_1,\dots,i_m\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{i_1}^4 \dots h_{i_m}^4 \sigma_{i_1,\dots i_m}^{(m,m)}(h_{i_1},\dots,i_m).$$

为此，我们引入以下半离散问题序列：

$$A_h^{(i_1,\dots,i_m)}\gamma_{i_1,\dots,i_m}^{(0,m+1)}(h_{i_1},\dots,h_{i_m}) = \sigma_{i_1,\dots,i_m}^{(m,m)}(h_{i_1},\dots,h_{i_m}).$$

By L引理 4.6，这样的半离散问题序列的截断误差满足 :

$$\begin{aligned}
&h_{i_1}^4 \dots h_{i_m}^4 \left[A_h^{(i_1,\dots,i_m)} - A_h\right] \gamma_{i_1,\dots,i_m}^{(0,m+1)}(h_{i_1},\dots,h_{i_m}) \\
&= \sum_{q=m+1}^{d} \sum_{\substack{\{l_1,\dots,l_q\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{l_1}^4 \dots h_{l_q}^4 \gamma_{l_1,\dots,l_q}(h_{l_1},\dots,h_{l_q}) \\
&\quad + \sum_{q=m+1}^{d} \sum_{\substack{\{l\}\sqcup\{l_2,\dots,l_q\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_l^2 h_{l_2}^2 \dots h_{l_q}^2 \beta_{l,l_2,\dots,l_q}(h_{l_2},\dots,h_{l_q}). \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

现在，从 $P(m,m)$ 的右端减去这样一个半离散问题序列，应用归纳假设从第二个等式推导到第三个等式，并使用 (4.5) 从第四行推导到第五行：

$$\begin{aligned}
&A_h\left[u - \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{\{j_1,\dots,j_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{j_1}^4 \dots h_{j_k}^4 \gamma_{j_1,\dots,j_k}^{(0,m+1)}(h_{j_1},\dots,h_{j_k}) - \sum_{j=1}^{d} h_j^2 \beta_j^{(0,m+1)}(h_1,\dots,h_{j-1},h_{j+1},\dots,h_d)\right] - f_h \\
:=&A_h\left[u - \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{\substack{\{j_1,\dots,j_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{j_1}^4 \dots h_{j_k}^4 \gamma_{j_1,\dots,j_k}^{(m,m)}(h_{j_1},\dots,h_{j_k}) - \sum_{j=1}^{d} h_j^2 \beta_j^{(m,m)}(h_1,\dots,h_{j-1},h_{j+1},\dots,h_d)\right] - f_h \\
&\quad - A_h\left[\sum_{\substack{\{i_1,\dots,i_m\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{j_1}^4 \dots h_{j_m}^4 \gamma_{j_1,\dots,j_m}^{(0,m+1)}(h_{j_1},\dots,h_{j_m})\right] \\
&= \sum_{k=m+1}^{d} \sum_{\substack{\{j_1,\dots,j_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{j_1}^4 \dots h_{j_k}^4 \gamma_{j_1,\dots,j_k}^{(m,m)}(h_{j_1},\dots,h_{j_k}) + \sum_{k=m+1}^{d} \sum_{\substack{\{j\}\sqcup\{j_2,\dots,j_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_j^2 h_{j_2}^2 \dots h_{j_k}^2 \beta_{j,j_2,\dots,j_k}^{(m,m)}(h_{j_2},\dots,h_{j_k}) \\
&\quad + \sum_{\substack{\{i_1,\dots,i_m\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{i_1}^4 \dots h_{i_m}^4 \left[\sigma_{i_1,\dots,i_m}^{(m,m)} - A_h \gamma_{i_1,\dots,i_m}^{(0,m+1)}\right](h_{i_1},\dots,h_{i_m}) \\
&= \sum_{k=m+1}^{d} \sum_{\substack{\{j_1,\dots,j_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{j_1}^4 \dots h_{j_k}^4 \gamma_{j_1,\dots,j_k}^{(m,m)}(h_{j_1},\dots,h_{j_k}) + \sum_{k=m+1}^{d} \sum_{\substack{\{j\}\sqcup\{j_2,\dots,j_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_j^2 h_{j_2}^2 \dots h_{j_k}^2 \beta_{j,j_2,\dots,j_k}^{(m,m)}(h_{j_2},\dots,h_{j_k})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{\substack{\{i_1,\ldots,i_m\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} h_{i_1}^4\ldots h_{i_m}^4\left[A_h^{(i_1,\ldots,i_m)}-A_h\right]\gamma_{i_1,\ldots,i_m}^{(0,m+1)}(h_{i_1},\ldots,h_{i_m})\\
=&\sum_{k=m+1}^{d}\sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_k\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} h_{j_1}^4\ldots h_{j_k}^4\left[\gamma_{j_1,\ldots,j_k}^{(m,m)}+\gamma_{j_1,\ldots,j_k}\right](h_{j_1},\ldots,h_{j_k})\\
&+\sum_{k=m+1}^{d}\sum_{\substack{\{j\}\sqcup\{j_2,\ldots,j_k\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} h_j^2h_{j_2}^2\ldots h_{j_k}^2\left[\beta_{j,j_2,\ldots,j_k}^{(m,m)}+\beta_{j,j_2,\ldots,j_k}\right](h_{j_2},\ldots,h_{j_k})\\
=:&\sum_{k=m+1}^{d}\sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_k\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} h_{j_1}^4\ldots h_{j_k}^4\hat{\gamma}_{j_1,\ldots,j_k}(h_{j_1},\ldots,h_{j_k})+\sum_{k=m+1}^{d}\sum_{\substack{\{j\}\sqcup\{j_2,\ldots,j_k\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} h_j^2h_{j_2}^2\ldots h_{j_k}^2\hat{\beta}_{j,j_2,\ldots,j_k}(h_{j_2},\ldots,h_{j_k}).
\end{aligned}
$$

注意，我们可以将上述等式改写为以下便于使用的形式：

$$
\begin{aligned}
&A_h\left[u-\sum_{k=1}^{m}\sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_k\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} h_{j_1}^4\ldots h_{j_k}^4\gamma_{j_1,\ldots,j_k}^{(0,m+1)}(h_{j_1},\ldots,h_{j_k})-\sum_{j=1}^{d}h_j^2\beta_j^{(0,m+1)}(h_1,\ldots,h_{j-1},h_{j+1},\ldots,h_d)\right]-f_h\\
=&\sum_{k=m+2}^{d}\sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_k\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} h_{j_1}^4\ldots h_{j_k}^4\hat{\gamma}_{j_1,\ldots,j_k}(h_{j_1},\ldots,h_{j_k})+\sum_{k=m+2}^{d}\sum_{\substack{\{j\}\sqcup\{j_2,\ldots,j_k\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} h_j^2h_{j_2}^2\ldots h_{j_k}^2\hat{\beta}_{j,j_2,\ldots,j_k}(h_{j_2},\ldots,h_{j_k})\\
&+\sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_{m+1}\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} h_{j_1}^4\ldots h_{j_{m+1}}^4\hat{\gamma}_{j_1,\ldots,j_{m+1}}(h_{j_1},\ldots,h_{j_{m+1}})\\
&+\sum_{\substack{\{j\}\sqcup\{j_2,\ldots,j_{m+1}\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} h_j^2h_{j_2}^2\ldots h_{j_{m+1}}^2\hat{\beta}_{j,j_2,\ldots,j_{m+1}}(h_{j_2},\ldots,h_{j_{m+1}}).
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

由……假 ˆ定，$\beta_{j,\ j_2、\ j_{m+1}}$ 是关于网格尺寸的光滑偶函数，因此根据引理 4。 5:

$$
\begin{aligned}
&h_j^2h_{j_2}^2\ldots h_{j_{m+1}}^2\hat{\beta}_{j,j_2,\ldots,j_{m+1}}(h_{j_2},\ldots,h_{j_{m+1}})\\
=&h_j^2h_{j_2}^2\ldots h_{j_{m+1}}^2\left[\beta_0^{j,j_2,\ldots,j_{m+1}}+\sum_{l=1}^{m}\sum_{\substack{\{r_1,\ldots,r_l\}\\ \subset\{j_2,\ldots,j_{m+1}\}}} h_{r_1}^2\ldots h_{r_l}^2\beta_{r_1,\ldots,r_l}^{j,j_2,\ldots,j_{m+1}}(h_{r_1},\ldots,h_{r_l})\right]\\
=&\sum_{l=0}^{m}\sum_{\substack{\{r_1,\ldots,r_l\}\sqcup\{j\}\sqcup\{s_1,\ldots,s_{m-l}\}\\ =\{j\}\sqcup\{j_2,\ldots,j_{m+1}\}}} h_j^2h_{s_1}^2\ldots h_{s_{m-l}}^2h_{r_1}^4\ldots h_{r_l}^4\beta_{r_1,\ldots,r_l}^{j,j_2,\ldots,j_{m+1}}(h_{r_1},\ldots,h_{r_l}).
\end{aligned}
$$

将上述内容代入式（4.6），最终得到 $P(0,m+1)$：

$$
A_h\left[u-\sum_{k=1}^{m}\sum_{\substack{\{j_1,\ldots,j_k\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}} h_{j_1}^4\ldots h_{j_k}^4\gamma_{j_1,\ldots,j_k}^{(0,m+1)}(h_{j_1},\ldots,h_{j_k})-\sum_{j=1}^{d}h_j^2\beta_j^{(0,m+1)}(h_1,\ldots,h_{j-1},h_{j+1},\ldots,h_d)\right]-f_h
$$

$$= \sum_{k=m+2}^{d} \sum_{\substack{\{j_1,\dots,j_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{j_1}^4 \dots h_{j_k}^4 \gamma_{j_1,\dots,j_k}^{(0,m+1)}(h_{j_1},\dots,h_{j_k}) + \sum_{k=m+2}^{d} \sum_{\substack{\{j\}\sqcup\{j_2,\dots,j_k\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_j^2 h_{j_2}^2 \dots h_{j_k}^2 \beta_{j,j_2,\dots,j_k}^{(0,m+1)}(h_{j_2},\dots,h_{j_k})$$
$$+ \sum_{l=0}^{m+1} \sum_{\substack{\{r_1,\dots,r_l\}\sqcup\{s_1,\dots,s_{m+1-l}\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{s_1}^2 \dots h_{s_{m+1-l}}^2 h_{r_1}^4 \dots h_{r_l}^4 \sigma_{r_1,\dots,r_l}^{s_1,\dots,s_{m+1-l}(0,m+1)}(h_{r_1},\dots,h_{r_l}),$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma_{j_1,\dots,j_k}^{(0,m+1)} &:= \hat{\gamma}_{j_1,\dots,j_k} \text{ for } k \geq m+2, \\ \beta_{j,j_2,\dots,j_k}^{(0,m+1)} &:= \hat{\beta}_{j,j_2,\dots,j_k} \text{ for } k \geq m+2, \\ \sigma_{r_1,\dots,r_{m+1}}^{(0,m+1)} &:= \hat{\gamma}_{r_1,\dots,r_{m+1}}, \\ \sigma_{r_1,\dots,r_l}^{s_1,\dots,s_{m+1-l}(0,m+1)} &:= \beta_{r_1,\dots,r_l}^{s_1,\dots,s_{m+1-l},r_1,\dots,r_l}. \end{aligned}$$

至此，归纳论证完成，命题 4.1 的证明也随之结束。 □

要使上述形式推导对特定偏微分方程成立，剩下的主要步骤是验证假设 4.4 的有效性；该假设保证截断误差具有所需的光滑偶次展开。

尽管这些正则性假设看起来可能较为严格，但它们对一大类线性椭圆型和抛物型偏微分方程均成立。在下一节中，我们将在一定正则性假设下验证泊松方程满足假设 4.3 和假设 4.4，其他重要的模型问题也同样适用于这一框架。

# 5 泊松问题的应用

本节首先确认，对于足够光滑的数据，泊松方程符合高阶组合技术所需的理论框架；随后，我们将给出数值实验，以展示其性能。

## 5.1 泊松方程的理论误差分析

我们考虑泊松问题

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{d} \partial_k^2 u(x) &= f(x), \quad x \in I^d, \\ u(x) &= 0, \qquad x \in \partial I^d. \end{aligned} \tag{5.1}$$

等价地，令 $A: C^\infty(I^d) \to C^\infty(I^d)$ 为线性算子 $(Aw)(x) := \sum_{k=1}^{d} \partial_k^2 w(x)$。那么 (5.1) 可以简洁地写为 $Au = f$ in $I^d$, $u|_{\partial I^d} = 0$。假设 4.3 要求连续解具有足够高阶且一致有界的混合导数，并且这些导数在边界上为零。众所周知，在存在边界角点时，立方体上的椭圆问题的解不会自动从右端项 $f$ 继承这种光滑性。因此，必须对 $f$施加相容性条件。

令 $f_{\mathbf{k}}$表示 $f$的正弦级数系数，其中 $\mathbf{k} = (k_1,\dots,k_d) \in \mathbb{N}^d$。一个正则性结果针对 $n = 2$ in [22], 的情形给出了明确表述：如果

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^d} \sum_{\|\mathbf{i}\|_1 \leq \lfloor d/2 \rfloor} \frac{k_1^{4n+i_1} \cdots k_d^{4n+i_d}}{(k_1^2+\cdots+k_d^2)^2} f_{\mathbf{k}}^2 < \infty, \tag{5.2}$$

那么，(5.1) 的解满足 $u \in X_{2n}^d$，也就是说，所有总阶数为 $\leq 2n$ 的混合导数都是连续的，并且在 $\partial I^d$ 上为零。因此，只要 $f$ 的正弦系数衰减得足够快，泊松方程解就具有稀疏网格分析所需的光滑性。

这些正则性要求可能看起来较为严格，但事实上，它们在实际的高维偏微分方程应用中很常见。通常， underlying 问题定义在 $\mathbb{R}^d$ 上，而为了便于计算，仅将其局部化到一个有界盒中。无界区域上的解是光滑的，而带有渐近边界条件的局部化问题与一个光滑函数之间的差异仅仅是一个小扰动。在标准稳定性假设下，该扰动对稀疏网格误差的贡献是可控且可以忽略的。关于这一局部化论证的更详细讨论见 [22]。

尽管为便于记号书写，我们引入了 $C^\infty$ 所有阶数的混合导数一致有界这一条件，但在存在连续（以及离散）最大值原理的情况下，实际上可以将要求降低为：混合导数仅需在足够高的阶数以内有界。此外，对于泊松问题，只要所有包含某个坐标方向上的至少一个偶数阶导数的混合导数，在足够高的阶数以内保持有界，并在边界上为零即可。正如本节的分析所表明的，这些正是拉普拉斯算子的有限差分近似的截断误差公式中出现的高阶混合导数。这一较弱的假设仍可保证稳定性以及截断误差展开的有效性。我们采用更强的光滑性框架，只是为了避免反复明确说明所需的确切最高阶导数。

我们通过标准的二阶中心有限差分算子对 $A$ 进行离散化。通过简单的截断泰勒展开，对于任意光滑函数 $w$ 和任意 $x \in I^d$,

$$\partial_k^2 w(x) = \frac{1}{h_k^2}\left[w(x + h_k \mathbf{e}_k) - 2w(x) + w(x - h_k \mathbf{e}_k)\right] - \frac{h_k^2}{12}\partial_k^4 w(x) - 2\frac{h_k^4}{6!}\left[\partial_k^6 w(x_*^{(k)}(h_k))\right], \tag{5.3}$$

其中， $x_*^{(k)}(h_k)$ 位于从 $x - h_k \mathbf{e}_k$ 到 $x + h_k \mathbf{e}_k$的直线上，$\mathbf{e}_k$ 是第 $k$ 个单位向量。

我们在网格尺寸为 $h_1, \ldots, h_d$ 的笛卡尔网格上离散该区域。对于每个坐标 $j$，设 $I_{h_j} := \{0, h_j, 2h_j, \ldots, 1\}$。有时，对于子集 $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, d\}$，我们只沿 $\{i_1, \ldots, i_m\}$ 中的方向进行离散化，并使其余坐标保持连续。部分网格为

$$I_h^{(i_1,\ldots,i_m)} := \left\{x \in I^d : \ x_j \in I_{h_j} \text{for } j \in \{i_1, \ldots, i_m\}, \text{ and } x_j \in [0,1] \text{ for } j \notin \{i_1, \ldots, i_m\}\right\}.$$

并记为

$$w_{\mathbf{i}}(y) := w(x_1, \ldots, x_d) \text{ 其中 } x_j = i_j h_j \text{ 当 } j \in \{i_1, \ldots, i_m\}, \quad y = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_{d-m}}) \in [0,1]^{d-m},$$

$$\text{and} \quad \{j_1, \ldots, j_{d-m}\} \sqcup \{i_1, \ldots, i_m\} = \{1, \ldots, d\}.$$

因此，根据（5.3），在半离散节点 $x$ 处沿方向 $\{i_1, \ldots, i_m\}$ 对 $A$ 进行标准二阶中心差分半离散化可得

$$\left(A_h^{(i_1,\ldots,i_m)} w\right)(x) = \sum_{k \in \{i_1,\ldots,i_m\}} \frac{w_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_k}(y) - 2w_{\mathbf{i}}(y) + w_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_k}(y)}{h_k^2} + \sum_{k \notin \{i_1,\ldots,i_m\}} \partial_k^2 w(x).$$

上述正则性结果（5.2）保证泊松问题存在一个解 $u$，其具有假设 4.3 所要求的精确光滑性和边界行为。

对于离散方向 $\{i_1, \ldots, i_m\}$ 的一个固定子集，半离散问题

$$A_h^{(i_1,\ldots,i_m)} w(\cdot; h_{i_1}, \ldots, h_{i_m}) \ = \ g(\cdot; h_{i_1}, \ldots, h_{i_m})$$

是连续坐标中的椭圆方程，并与其余坐标中的有限差分拉普拉斯算子耦合。因此，如果半离散右端项 $g$ 满足与 $g$ 相同类型的

正则性假设（即在 $\partial I^d$ 上具有光滑性且各阶导数均为零），那么半离散问题的解 $w$ 也具有相同性质。

此外，由有限差分模板的对称性可知，$w$ 对每个网格尺寸 $h_{i_k}$ 的依赖关系都是光滑且为偶函数，符合假设 4.3 的要求。

因此，只要其右端项 $g$ 满足相应的光滑性和边界消失条件，每个半离散泊松子问题都满足假设 4.3。

既已证明半离散泊松子问题存在满足假设 4.3 的光滑解，现在我们验证其截断误差也具有假设 4.4 所规定的结构。

根据关于偶次幂的泰勒展开（5.3），半离散算子 $A^{(i_1,\dots,i_m)}{}_h$ 的局部离散误差满足

$$\begin{aligned}\left[A_h^{(i_1,\dots,i_m)} - A_h\right] w(x) &= \sum_{k\notin\{i_1,\dots,i_m\}} \left(\partial_k^2 w(x) - \frac{w_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_k}(y) - 2w_{\mathbf{i}}(y) + w_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_k}(y)}{h_k^2}\right) \\ &= \sum_{k\notin\{i_1,\dots,i_m\}} h_k^2 \frac{-\partial_k^4 w(x)}{12} + \sum_{k\notin\{i_1,\dots,i_m\}} h_k^4 \frac{-\partial_k^6 w(x_*^{(k)}(h_k))}{6!} \\ &=: \sum_{k\notin\{i_1,\dots,i_m\}} h_k^2 \beta_k(x) + \sum_{k\notin\{i_1,\dots,i_m\}} h_k^4 \gamma_k(x;h_k).\end{aligned}$$

这里，$\beta_k(x) = -\frac{1}{12}\partial_k^4 w(x)$ 与所有网格尺寸无关，而 $\gamma_k(x;\, h_k)$ 是关于 $h_k$ 的光滑偶函数，因为（5.3）中的所有奇次幂项都相互抵消。

由于根据假设 5.3，$w$ 及其所有混合导数在 $\partial I^{d-m}$ 上均为零；又因为$\beta_k$和 $\gamma_k(\cdot;h_k)$完全由 $w$的导数构造而成，因此 $\beta_k$和 $\gamma_k(\cdot;\, h_k)$及其所有混合导数在 $\partial I^{d-m}$ 上也均为零。因此，截断误差可加性地分解为各坐标方向上的 $h_k^2$ 和 $h_k^4$ 贡献，其系数函数关于连续变量光滑，关于网格尺寸为偶函数且光滑，并满足所需的齐次边界条件。这验证了半离散泊松算子的假设 5.4。

因此，以下定理可直接由前文得到的抽象误差展开结果推出。

**定理 5.1**。 设 $u$ 是泊松问题 *(5.1)* 的光滑解，且$\mathbf{u}_h$ 是网格$\mathbf{x}_h$上的有限差分近似。那么

$$u(\mathbf{x}_h) - \mathbf{u}_h = \sum_{j=1}^{d} h_j^2 \beta_j(\mathbf{x}_h; h_1,\dots,h_{j-1},h_{j+1},\dots,h_d) + \sum_{m=1}^{d} \sum_{\substack{\{j_1,\dots,j_m\}\\ \subset\{1,\dots,d\}}} h_{j_1}^4 \dots h_{j_m}^4 \gamma_{j_1,\dots,j_m}(\mathbf{x}_h; h_{j_1},\dots,h_{j_m})$$

其中，$\beta_j$ 和$\gamma_{j_1,\dots,j_m}$ 是一致有界函数。

证明。 由于本节已证明，$I^d$ 上的泊松问题满足定理 2.7的假设，因此误差展开立即成立。

□

## 5.2 数值结果

我们针对具有光滑数据的泊松问题测试了高阶稀疏组合技术，具体而言，

$$f(x) = d\,\pi^2 \prod_{i=1}^{d} \sin(\pi x_i),$$

使得

$$u(x) = -\prod_{i=1}^{d} \sin(\pi x_i)$$

在 $[0,1]^d$ 上光滑。选择 $f$ 还可确保较弱版本的假设 4.3 和 4.4 成立：在这种情况下，只需所有包含某个坐标方向上的至少一个偶阶导数的混合导数在边界上为零即可。这些条件略弱于完整假设，但仍与上述分析完全兼容。

我们在内部点 $x^*$ =(0.25，0.5，.....，0.25，0.5) 处计算层次余量 $\hat{\epsilon}_n = |\hat{u}_{n+1}(x^*) - \hat{u}_n(x^*)|$ ，并将离散化细化至层次 $n = 12$，以评估收敛性。这使我们既能验证所提出的高阶稀疏网格（HO-SG）方法是否达到预期的四阶精度，也能将其衰减表现与标准稀疏网格（SG）、标准全网格（FG），以及通过标准理查森外推由 FG 构造的高阶全网格（HO-FG）进行比较。图 1 和图 2 分别展示了余量随细化层次和计算成本的衰减情况，维数为 $d = 1, \ldots\ldots, 7$。

从余量与层次图（图 1）可以看出，标准 FG 和 SG 方法的衰减率与二阶收敛一致，而两种高阶方法的斜率则明显更陡。具体而言，在较大范围的层次和维数内，HO-SG 的余量与参考斜率 $-4$十分吻合，这证实了基于外推的组合技术能够将底层的二阶离散化提升至四阶精度。维数的影响较弱：观测到的收敛率仅有轻微下降。这可以用 Poisson测试问题的光滑性来解释；该问题满足稀疏网格误差估计所依据的正则性假设。因此，HO-SG 方法始终优于标准 SG，并且在渐近区域保持明显的高阶特性。

余量与成本图（图2）进一步展现了 HO-SG 的实际优势。随着维数增加，全网格方法（FG 和 HO-FG）的成本会迅速变得难以承受，而稀疏网格构造则以显著更低的成本达到相近的精度。更重要的是，HO-SG 在兼具成本效益的同时，冗余量衰减速度也明显快于标准 SG；对于给定的自由度数量，它能实现显著更小的误差。总体而言，这些结果表明，HO-SG 在精度与计算成本之间实现了最佳权衡，并为本文理论上确立的四阶收敛性结论提供了有力的数值证据。

## 参考文献


[1] Bachmayr, M.,偏微分方程的低秩张量方法, Acta Numer- ica, 32, 1–121, 2023.[2] Bungartz, H.; Griebel, M.; Rüde, U.,椭圆型边值问题的外推、组合与稀疏网格技术, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 116(1-4), 243–252, 1994.[3] Bungartz, H. J., 稀疏网格及其在三维*Poisson*方程自适应求解中的应用, 1992年.
[4] Bungartz, H. J., 稀疏网格上的高阶有限元, 1998. Habilitationss- chrift.[5] Bungartz, H. J.; Griebel, M.; Röschke, D.; Zenger, C., *Laplace*方程组合技术的逐点收敛性, East-West Journal of Numerical Math- ematics, 2, 21–45, 1994.[6] Bungartz, H. J.; Griebel, M., 稀疏网格, Acta Numerica, 13, 147–269, 2004.[7] Griebel, M.; Harbrecht,H., 关于组合技术的收敛性, In 《稀疏网格及其应用——慕尼黑2012》, pp. 55–74, 施普林格, 2014.

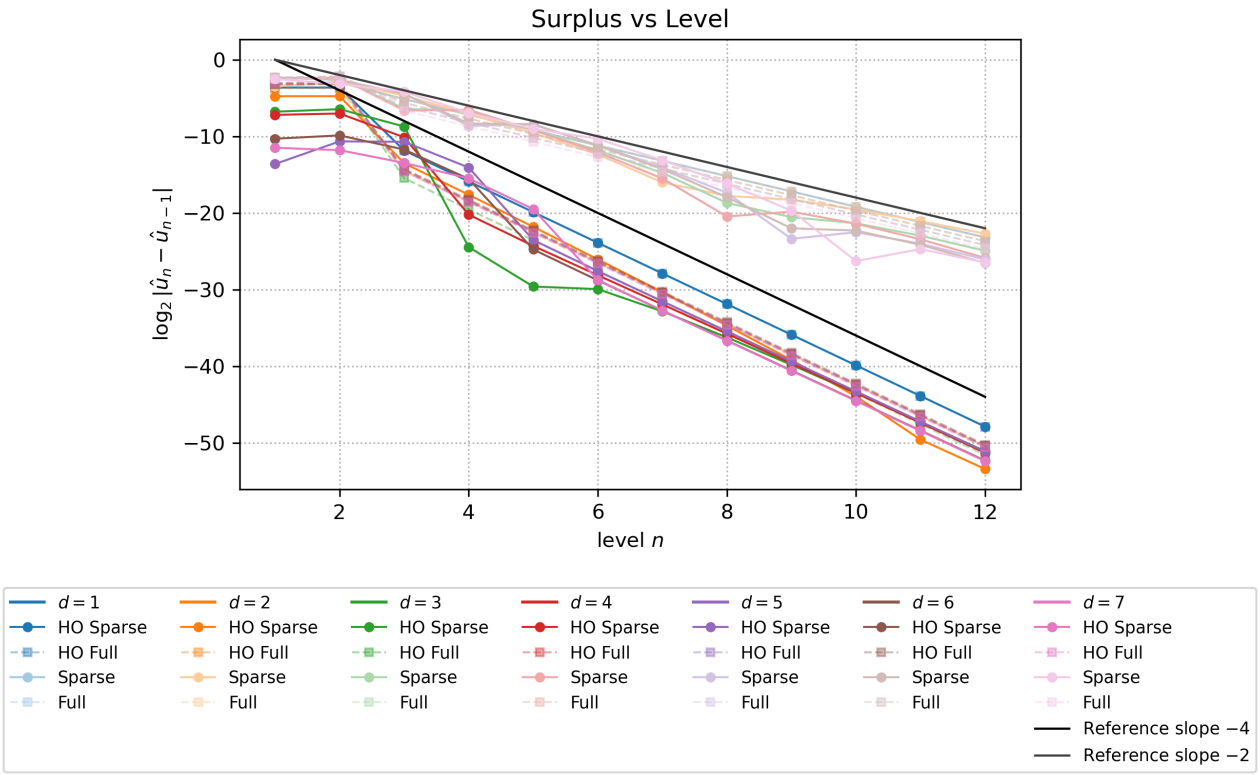


图 1： $1 \leq d \leq 7$下 HO-SG、稀疏网格、HO-FG 和全网格的冗余量与层级 $n$ 的关系。

[8] Griebel, M.; Schneider, M.; Zenger, C., 稀疏网格问题求解的组合技术, In 线性代数中的迭代方法, IMACS, Elsevier, North Holland, 1992年.[9] Han, J.; Jentzen, A.; E, W., 使用深度学习求解高维偏微分方程, 《美国国家科学院院刊》, 115(34), 8505–8510, 2018年.[10] Harding, B., 通过误差分解确定组合技术系数, ANZIAM会议论文集, 56, C355–C368, 2014年.[11] Harding, B., 自适应稀疏网格与外推技术, In 《稀疏网格及其应用——斯图加特2014》, pp. 79–102, 施普林格, 2016年.[12] Hegland, M.; Garcke, J.; Challis, V., 组合技术及其若干推广, 《线性代数及其应用》, 420(2-3), 249–275, 2007年.[13] Hegland, M.; Harding, B.; Kowitz, C.; Pflüger, D.; Strazdins, P., 稀疏网格组合技术理论与应用的最新进展, 《面向百亿亿次计算的软件——SPPEXA 2013–2015》, 143–163, 2016年.[14] Hendricks, C.; Ehrhardt, M.; Günther, M.,组合技术中含混合导数扩散方程的高阶交替方向隐式格式, Applied Numerical Mathe- matics, 101, 36–52, 2016年.[15] Hendricks, C.; Ehrhardt, M.; Günther, M., 组合技术中高阶有限差分格式的误差分裂保持, 《数值数学: 理论、方法与应用》, 10(3), 689–710, 2017年.

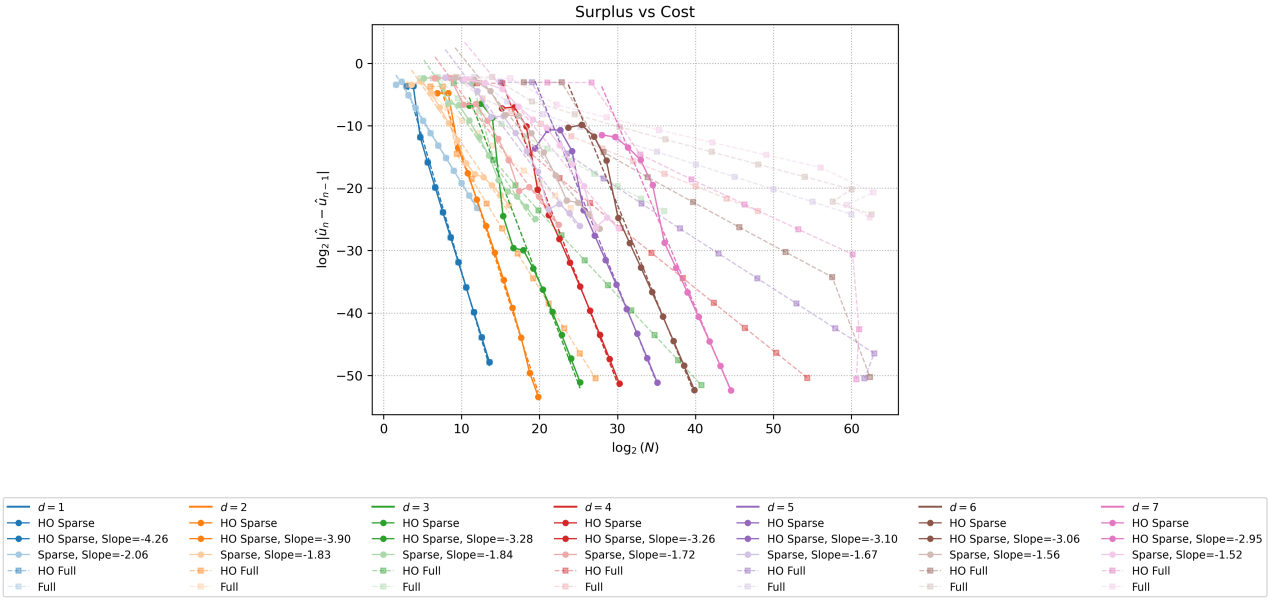


图2　　：HO-SG、稀疏网格、HO-FG 和全网格的冗余量与网格点数量的关系 $N$，适用于 $1 \leq d \leq 7$。

[16] Leentvaar, C.; Oosterlee, C. W., 使用稀疏网格和四阶有限差分为多资产期权定价, 收录于《数值数学与高级应用：ENUMATH 2005论文集》，第六届欧洲数值数学与高级应用会议，西班牙圣地亚哥-德孔波斯特拉，2005年7月，第975–983页，施普林格，2006年。[17] Petersdorff, T. V.; Schwab, C., 高维空间中抛物型方程的数值解, ESAIM：数学建模与数值分析，38(1)，93–127，2004年。[18] Pflaum, C.,组合技术求解二阶椭圆型偏微分方程的收敛性, SIAM数值分析杂志，34(6)，2431–2455，1997年。[19] Pflaum, C.; Zhou, A., 组合技术的误差分析, Numerische Mathematik，84，327–350，1999年。[20] Raissi, M.; Perdikaris, P.; Karniadakis, G. E., 物理信息神经网络：用于求解涉及非线性偏微分方程的正问题和逆问题的深度学习框架, 计算物理学杂志，378，686–707，2019年。[21] Reisinger, C., 高维抛物型方程的高效数值方法及其在期权定价中的应用, 2004年。[22] Reisinger, C.,稀疏网格组合技术中线性差分格式的分析, IMA数值分析杂志，33(2)，544–581，2013年。[23] Reisinger, C.; Wittum, G., 高维期权定价问题的高效层次逼近, SIAM科学计算杂志，29(1)，440–458，2007年。[24] Richardson, L. F.; Gaunt, J. A., 延迟极限逼近法, 《伦敦皇家学会哲学汇刊》A辑（刊载数学或物理学论文），226(636-646)，299–361，1927年。[25] Schüller, A.; Lin, Q., 结合全多重网格技术与外推法求解椭圆型边值问题的高效高阶算法, 1985年。

[26]Schwab, C.; Süli, E.; Todor, R. A., 高维输运主导扩散问题的稀疏有限元逼近, ESAIM：数学建模与数值分析，42(5)，777–820，2008年。[27] Sirignano, J.; Spiliopoulos, K.,*DGM*：一种用于求解偏微分方程的深度学习算法, 计算物理学杂志，375，1339–1364，2018年。[28] Smolyak, S.,某些函数类张量积的求积与插值公式, 苏联数学文献，4，240–243，1963年。[29] Smolyak, S. A., 某些函数类张量积的求积与插值公式, 苏联科学院院刊，148，1042–1045，1962年。苏联数学文献4：240–243，1963年英文译本。[30] Zenger, C., 稀疏网格, 收录于《偏微分方程并行算法》，1990年。第六届GAMM研讨会论文集。

## 二维误差展开

本节中，我们给出定理 2.7 在二维情形 $d=2$下的非正式证明，以阐明一般论证背后的主要思想。具体而言，我们建立了误差展开

$$u-u_h=h_1^2\beta_1(h_2)+h_2^2\beta_2(h_1)+h_1^4\gamma_1(h_1)+h_2^4\gamma_2(h_2)+h_1^4h_2^4\gamma_{12}(h_1,h_2),$$

该展开已分离出导致高阶误差消去的核心机制，同时避免了高维情形所需的繁琐记号。第 $d$ 维情形将在第 5 节中严格处理；它基于相同原理，并通过考虑当 $d>2$ 时出现的额外混合项来扩展这一论证，同时精确陈述所需的假设。

出发点是一个二阶相容性假设（一般情形见后文假设 4.4），其形式为

$$A_hu-f=h_1^2\sigma_1(h_1)+h_2^2\sigma_2(h_2)+h_1^2h_2^2\sigma_{12}(h_1,h_2)$$

其中 $\sigma_1$、$\sigma_2$ 和 $\sigma_{12}$ 都是网格尺寸的偶函数，因此可以进一步展开为

$$\sigma_i(h_i)=\beta_i+h_i^2\gamma_i^{(0)}(h_i),\qquad i=1,2,$$

$$\sigma_{12}(h_1,h_2)=\beta_{12}+h_1^2\tilde\beta_2^{(0)}(h_1)+h_2^2\tilde\beta_1^{(0)}(h_2)+h_1^2h_2^2\gamma_{12}^{(0)}(h_1,h_2)$$

从而截断误差可写成更便于处理的形式

$$\begin{aligned}A_hu-f&=h_1^2\beta_1+h_2^2\beta_2+h_1^2h_2^2\left[\beta_{12}+h_1^2\tilde\beta_2^{(0)}(h_1)\right]+h_1^2h_2^4\tilde\beta_1^{(0)}(h_2)\\&\quad+h_1^4\gamma_1^{(0)}(h_1)+h_2^4\gamma_2^{(0)}(h_2)+h_1^4h_2^4\gamma_{12}^{(0)}(h_1,h_2)\\&=h_1^2\beta_1+h_2^2\beta_2+h_1^2h_2^2\beta_2^{(0)}(h_1)+h_1^2h_2^2\beta_1^{(0)}(h_2)\\&\quad+h_1^4\gamma_1^{(0)}(h_1)+h_2^4\gamma_2^{(0)}(h_2)+h_1^4h_2^4\gamma_{12}^{(0)}(h_1,h_2)\end{aligned}$$

首先，为了消去右端项中的常数项 $\beta_1$ 和 $\beta_2$，我们引入以下半离散问题：

$$\begin{cases}A_h^{(1)}\beta_2^{(1)}(h_1)=\beta_2\\A_h^{(2)}\beta_1^{(1)}(h_2)=\beta_1\end{cases}$$

相应的截断误差为

$$\begin{aligned}\left[A_h^{(1)}-A_h\right]\beta_2^{(1)}(h_1)&=h_2^2\bar{\sigma}_{12}(h_1,h_2)=h_2^2\left[\tilde{\sigma}_{12}+h_1^2\tilde{\sigma}_1(h_1)+h_2^2\tilde{\sigma}_2(h_2)+h_1^2h_2^2\tilde{\sigma}_{12}(h_1,h_2)\right]\\&=h_2^2\left[\tilde{\sigma}_{12}+h_1^2\left(\hat{\sigma}_1+h_1^2\hat{\sigma}_1(h_1)\right)+h_2^2\tilde{\sigma}_2(h_2)+h_1^2h_2^2\left(\sigma_{12}+h_1^2\sigma_1(h_1)+h_2^2\sigma_2(h_2)+h_1^2h_2^2\sigma_{12}(h_1,h_2)\right)\right]\end{aligned}$$

其中，连续展开依赖于假设 4.4；交换 1 和 2 后也有类似结论。乘以 $h_2^2$ 并对 $\beta_1$ 应用相同的论证，可得

$$h_2^2\left[A_h^{(1)}-A_h\right]\beta_2^{(1)}(h_1)=h_2^4\bar{\gamma}_2(h_2)+h_1^2h_2^4\delta_1(h_2)+h_1^4h_2^4\bar{\gamma}_{12}(h_1,h_2)$$

and

$$h_1^2\left[A_h^{(2)}-A_h\right]\beta_1^{(1)}(h_2)=h_1^4\bar{\gamma}_1(h_1)+h_2^2h_1^4\delta_2(h_1)+h_1^4h_2^4\bar{\gamma}_{21}(h_1,h_2).$$

Then

$$\begin{aligned}&A_h\left[u-h_1^2\beta_1^{(1)}(h_2)-h_2^2\beta_2^{(1)}(h_1)\right]-f\\=&h_1^4\gamma_1^{(1)}(h_1)+h_2^4\gamma_2^{(1)}(h_2)+h_1^4h_2^4\gamma_{12}^{(1)}(h_1,h_2)+h_1^2h_2^2\beta_1^{(0)}(h_2)+h_1^2h_2^2\beta_2^{(0)}(h_1)\\&+h_1^2h_2^4\delta_1^{(0)}(h_2)+h_2^2h_1^4\delta_2^{(0)}(h_1)\end{aligned}$$

现在考虑半离散问题

$$\begin{cases}A_h^{(1)}\gamma_1^{(2)}(h_1)=\gamma_1^{(1)}(h_1)\\A_h^{(2)}\gamma_2^{(2)}(h_2)=\gamma_2^{(1)}(h_2)\end{cases}$$

其截断误差为

$$\begin{aligned}\left[A_h^{(1)}-A_h\right]\gamma_1^{(2)}(h_1)&=h_2^2\bar{\sigma}_{12}(h_1,h_2)\\&=h_2^2\left[\tilde{\sigma}_{12}+h_1^2\tilde{\sigma}_1^{(1)}(h_1)+h_2^2\tilde{\sigma}_2(h_2)+h_1^2h_2^2\tilde{\sigma}_{12}(h_1,h_2)\right]\end{aligned}$$

with

$$h_1^4\left[A_h^{(1)}-A_h\right]\gamma_1^{(2)}(h_1)=h_2^2h_1^4\tilde{\delta}_2(h_1)+h_1^4h_2^4\tilde{\gamma}_{12}(h_1,h_2)$$

交换 1 和 2 后也有类似结论。于是

$$\begin{aligned}&A_h\left[u-h_1^2\beta_1^{(1)}(h_2)-h_2^2\beta_2^{(1)}(h_1)-h_1^4\gamma_1^{(2)}(h_1)-h_2^4\gamma_2^{(2)}(h_2)\right]-f\\&=h_1^4h_2^4\gamma_{12}^{(2)}(h_1,h_2)+h_1^2h_2^2\beta_1^{(0)}(h_2)+h_1^2h_2^2\beta_2^{(0)}(h_1)\\&\quad+h_1^2h_2^4\delta_1^{(1)}(h_2)+h_2^2h_1^4\delta_2^{(1)}(h_1)\end{aligned}$$

为了消去右端项中的混合项 $\beta_1^{(0)}(h_2)$ 和 $\beta_2^{(0)}(h_1)$，接下来考虑半离散问题

$$\begin{cases}A_h^{(1)}\beta_2^{(2)}(h_1)=\beta_2^{(0)}(h_1)\\A_h^{(2)}\beta_1^{(2)}(h_2)=\beta_1^{(0)}(h_2)\end{cases}$$

其截断误差为

$$\begin{aligned}\left[A_h^{(1)}-A_h\right]\beta_2^{(2)}(h_1)&=h_2^2\bar{\sigma}_{12}(h_1,h_2)\\&=h_2^2\left[\tilde{\sigma}_{12}+h_1^2\tilde{\sigma}_1(h_1)+h_2^2\tilde{\sigma}_2(h_2)+h_1^2h_2^2\tilde{\sigma}_{12}(h_1,h_2)\right]\end{aligned}$$

with

$$h_1^2h_2^2\left[A_h^{(1)}-A_h\right]\beta_2^{(2)}(h_1)=h_2^2h_1^4\tilde{\delta}_1(h_2)+h_1^4h_2^4\tilde{\gamma}_{12}(h_1,h_2)$$

and

$$h_1^2 h_2^2 \left[A_h^{(2)} - A_h\right] \beta_1^{(2)}(h_2) = h_1^2 h_2^4 \tilde{\delta}_2(h_1) + h_1^4 h_2^4 \tilde{\gamma}_{21}(h_1, h_2).$$

Then

$$A_h \left[u - h_1^2 \beta_1^{(1)}(h_2) - h_2^2 \beta_2^{(1)}(h_1) - h_1^4 \gamma_1^{(2)}(h_1) - h_2^4 \gamma_2^{(2)}(h_2) - h_1^2 h_2^2 \beta_1^{(2)}(h_2) - h_1^2 h_2^2 \beta_2^{(2)}(h_1)\right] - f$$
$$= h_1^4 h_2^2 \gamma_{12}^{(3)}(h_1, h_2) + h_1^2 h_2^4 \delta_1^{(2)}(h_2) + h_2^2 h_1^4 \delta_2^{(2)}(h_1).$$

最后，考虑半离散问题

$$\begin{cases} A_h^{(1)} \delta_2^{(3)}(h_1) = \delta_2^{(2)}(h_1) \\ A_h^{(2)} \delta_1^{(3)}(h_2) = \delta_1^{(2)}(h_2) \end{cases}$$

截断误差为

$$\begin{cases} \left[A_h^{(1)} - A_h\right] \delta_2^{(3)}(h_1) = h_2^2 \bar{\sigma}_{12}(h_1, h_2). \\ \left[A_h^{(2)} - A_h\right] \delta_1^{(3)}(h_2) = h_1^2 \bar{\sigma}_{21}(h_1, h_2). \end{cases}$$

为简化记号，我们将得到的余项重新记为 $\bar{\sigma}_{12} = \tilde{\gamma}_{12}$ 和 $\bar{\sigma}_{21} = \tilde{\gamma}_{21}$，并写作

$$\begin{cases} h_2^2 h_1^4 \left[A_h^{(1)} - A_h\right] \delta_2^{(3)}(h_1) = h_1^4 h_2^4 \tilde{\gamma}_{12}(h_1, h_2). \\ h_1^2 h_2^4 \left[A_h^{(2)} - A_h\right] \delta_1^{(3)}(h_2) = h_1^4 h_2^4 \tilde{\gamma}_{21}(h_1, h_2). \end{cases}$$

减去 $\delta_1^{(3)}$ 和 $\delta_2^{(3)}$ 后，最终得到

$$\begin{aligned} A_h[u &- h_1^2 \beta_1^{(1)}(h_2) - h_2^2 \beta_2^{(1)}(h_1) - h_1^4 \gamma_1^{(2)}(h_1) - h_2^4 \gamma_2^{(2)}(h_2) \\ &- h_1^2 h_2^2 \beta_1^{(2)}(h_2) - h_1^2 h_2^2 \beta_2^{(2)}(h_1) - h_2^2 h_1^4 \delta_2^{(3)}(h_1) - h_1^2 h_2^4 \delta_1^{(3)}(h_2)] - f \\ &= h_1^4 h_2^4 \gamma_{12}^{(4)}(h_1, h_2). \end{aligned}$$

这就证明了所需的二维情形结果。

下一节将严谨处理一般的 $d$ 维情形。这一处理建立在相同原则之上，为所使用的误差展开提供严格论证，并考虑 $d > 2$ 时出现的额外混合项。

## B 第 4 节的证明

**引理 B.1**。设 $\{i_1,\ldots,i_n\}\subseteq\{k_1,\ldots,k_p\}\subseteq\{1,\ldots,d\}$ 且 $\{j_1,\ldots,j_m\}\cap\{k_1,\ldots,k_p\}=\emptyset$。

设 $\phi(\cdot;\ h_{i_1},\ \ldots,\ h_{i_n})$ 为任意充分正则的函数，它关于空间变量光滑，并且关于每个网格尺寸分量光滑且为偶函数。假设半离散问题

$$A_h^{(k_1,\ldots,k_p)}\psi(\cdot;h_{k_1},\ldots,h_{k_p})=\phi(\cdot;h_{k_1},\ldots,h_{k_p})$$

存在一个满足假设 *4.4* 正则性要求的解 $\psi$ 。那么，相应的解 $\psi(\cdot;\ h_{i_1},\ \ldots,\ h_{i_n})\in C^\infty(I^d)$ 继承了关于网格尺寸的相同光滑性和偶性，且截断误差满足：

$$\begin{aligned}
&h_{j_1}^2\cdots h_{j_m}^2\,h_{i_1}^4\cdots h_{i_n}^4\left[A_h^{(k_1,\ldots,k_p)}-A_h\right]\psi(h_{k_1},\ldots,h_{k_p})\\
&=\sum_{q=m+n+1}^{d}\sum_{\substack{\{l_1,\ldots,l_q\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}}h_{l_1}^4\cdots h_{l_q}^4\,\gamma_{l_1,\ldots,l_q}(\cdot;h_{l_1},\ldots,h_{l_q})\\
&\quad+\sum_{q=m+n+1}^{d}\sum_{\substack{\{l\}\sqcup\{l_2,\ldots,l_q\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}}h_l^2h_{l_2}^2\cdots h_{l_q}^2\,\beta_{ll_2\ldots l_q}(h_{l_2},\ldots,h_{l_q})\\
&\quad+\sum_{q=n+1}^{m+n}\sum_{\substack{\{s_1,\ldots,s_q\}\sqcup\{r_1,\ldots,r_{m+n-q}\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}}}h_{r_1}^2\cdots h_{r_{m+n-q}}^2\,h_{s_1}^4\cdots h_{s_q}^4\,\sigma_{s_1,\ldots,s_q}^{r_1,\ldots,r_{m+n-q}}(h_{s_1},\ldots,h_{s_q}).
\end{aligned}$$

这里，$\gamma_{l_1,\ldots,l_q}$、 $\beta_{ll_2\ldots l_q}$和 $\sigma^{r_1,\ldots,s_1\ \ldots\ s_q^{r_{m+n-q}}}$,,是光滑函数，并且关于网格尺寸变量也光滑且为偶函数。

证明。根据假设 4.4 以及 $\psi$ 的正则性,

$$\left[A_h^{(k_1,\ldots,k_p)}-A_h\right]\psi(h_{k_1},\ldots,h_{k_p})=\sum_{q=1}^{d-p}\sum_{\substack{\{l_1,\ldots,l_q\}\\ \subset\{1,\ldots,d\}-\{k_1,\ldots,k_p\}}}h_{l_1}^2\ldots h_{l_q}^2\phi_{l_1,\ldots,l_1}(h_{l_1},\ldots,h_{l_q},h_{k_1},\ldots,h_{k_p})$$

w这里，系数函数 $\phi_{l_1,\ldots,l_q}$ 是关于网格尺寸的光滑偶函数。

根据引理 4.5，我们可以进一步将每个 $\phi_{l_1,\ldots,l_q}$ 关于 $(h_{k_1},\ldots,h_{k_p})$ 展开为

$$\phi_{l_1,\ldots,l_q}(h_{l_1},\ldots,h_{l_q},h_{k_1},\ldots,h_{k_p})=\sum_{w=0}^{p}\sum_{\substack{\{g_1,\ldots,g_w\}\\ \subset\{k_1,\ldots,k_p\}}}h_{g_1}^2\ldots h_{g_w}^2\delta_{g_1,\ldots,g_w}^{l_1,\ldots,l_q}(h_{l_1},\ldots,h_{l_q},h_{g_1},\ldots,h_{g_w}).$$

由此得到误差展开

$$\begin{aligned}
&h_{i_1}^4\ldots h_{i_n}^4h_{j_1}^2\ldots h_{j_m}^2\left[A_h^{(k_1,\ldots,k_p)}-A_h\right]\psi(h_{k_1},\ldots,h_{k_p})= \qquad \text{(B.1)}\\
&=h_{i_1}^4\ldots h_{i_n}^4h_{j_1}^2\ldots h_{j_m}^2\sum_{\substack{1\le q\le d-p\\ 0\le w\le p}}\sum_{\substack{\{g_1,\ldots,g_w\}\subset\{k_1,\ldots,k_p\}\\ \{l_1,\ldots,l_q\}\cap\{k_1,\ldots,k_p\}=\emptyset}}h_{l_1}^2\ldots h_{l_q}^2h_{g_1}^2\ldots h_{g_w}^2\delta_{g_1,\ldots,g_w}^{l_1,\ldots,l_q}(h_{l_1},\ldots,h_{l_q},h_{g_1},\ldots,h_{g_w}).
\end{aligned}$$

现在，引理的证明归结为将上述表达式 (B.1) 中的每一项识别为以下两者之一

1. 对于某个 $q\ge m+n+1$，一个纯四阶项 $h_{l_1}^4\ldots h_{l_q}^4\gamma_{l_1\ldots l_q}(h_{l_1},\ \ldots\ldots,\ h_{l_q})$。

2. 对于某个 $q \geq m+n+1$，一个形式为 $h_l^2 h_{l_2}^2 \dots h_{l_q}^2 \beta_{ll_2\dots l_q}(h_{l_2}, \dots\dots, h_{l_q})$ 的混合二阶项。

3. 某个形如 $h_{r_1}^2 \dots h_{r_{m+n-q}}^2 h_{s_1}^4 \dots h_{s_q}^4 \sigma_{s_1\dots s_q}^{r_1\dots r_{m+n-q}}(h_{s_1}, \dots, h_{s_q})$ 的项，其中 $n+1 \leq q \leq m+n$。

下面的详细的逐情况分组完成了这一分类，从而完成了该引理的证明。接下来，值得注意的是，$\{g_1, \dots, g_w\} \cup \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \{k_1, \dots, k_p\}$ 和 $\big(\{l_1, \dots, l_q\} \cup \{j_1, \dots, j_m\}\big) \cap \{k_1, \dots, k_p\} = \emptyset$。

- 含有 $\{i_1, \dots, i_n\} = \{g_1, \dots, g_w\}$ 和 $\{j_1, \dots, j_m\} = \{l_1, \dots, l_q\}$ 的项属于最后一类 (3)，其中 $q = m+n$：

$$\begin{aligned}
&h_{i_1}^4 \dots h_{i_n}^4 h_{j_1}^2 \dots h_{j_m}^2 h_{g_1}^2 \dots h_{g_w}^2 h_{l_1}^2 \dots h_{l_q}^2 \phi_{g_1\dots g_w}^{l_1\dots l_q}(h_{l_1}, \dots, h_{l_q}, h_{g_1}, \dots, h_{g_w}) \\
=&h_{i_1}^4 \dots h_{i_n}^4 h_{j_1}^4 \dots h_{j_m}^4 \hat{\phi}_{i_1\dots i_n}^{j_1\dots j_m}(h_{i_1}, \dots, h_{i_n}, h_{j_1}, \dots, h_{j_m}).
\end{aligned}$$

- 对于含有 $\{j_1, \dots j_m\} \subseteq \{l_1, \dots, l_q\}$ 的项，令 $\{i_1, \dots, i_n\} \cup \{g_1, \dots, g_w\} = \{u_1, \dots, u_a\}$，其中 $a \geq n$。不失一般性，我们可以假设 $a > n$ 或 $q > m$ 之一成立，因此 $a+q \geq m+n+1$（否则我们回到前一种情况）。接下来

$$\begin{aligned}
&h_{i_1}^4 \dots h_{i_n}^4 h_{j_1}^2 \dots h_{j_m}^2 h_{g_1}^2 \dots h_{g_w}^2 h_{l_1}^2 \dots h_{l_q}^2 \phi_{g_1\dots g_w}^{l_1\dots l_q}(h_{l_1}, \dots, h_{l_q}, h_{g_1}, \dots, h_{g_w}) \\
=&h_{u_1}^2 \dots h_{u_a}^2 h_{l_1}^2 \dots h_{l_q}^2 \hat{\phi}_{g_1\dots g_w}^{l_1\dots l_q}(h_{u_1}, \dots, h_{u_a}, h_{l_1}, \dots, h_{l_q}) \\
=:&h_{d_1}^2 \cdots h_{d_r}^2 \hat{\phi}_{g_1\dots g_w}^{l_1\dots l_q}(h_{d_1}, \dots, h_{d_r}) \\
=&h_{d_1}^4 \cdots h_{d_r}^4 \sigma_{d_1\dots d_r}(h_{d_1}, \dots, h_{d_r}) \\
&+ \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{\substack{\{c_1,\dots,c_s\} \sqcup \{b_1,\dots,b_{r-s}\} \\ = \{d_1,\dots,d_r\}}} h_{b_1}^2 \cdots h_{b_{r-s}}^2 h_{d_1}^4 \dots h_{d_s}^4 \sigma_{d_1\dots d_s}(h_{d_1}, \dots, h_{d_s}) \\
=&h_{d_1}^4 \cdots h_{d_r}^4 \sigma_{d_1\dots d_r}(h_{d_1}, \dots, h_{d_r}) \\
&+ \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{\substack{\{c_1,\dots,c_s\} \sqcup \{b_1,\dots,b_{r-s}\} \\ = \{d_1,\dots,d_r\}}} h_{b_1}^2 \cdots h_{b_{r-s}}^2 h_{d_1}^2 \dots h_{d_s}^2 \hat{\sigma}_{d_1\dots d_s}(h_{d_1}, \dots, h_{d_s})
\end{aligned}$$

其中 $r = a+q \geq m+n+1$、$\{u_1, \dots, u_a\} \sqcup \{l_1, \dots, l_q\} = \{d_1, \dots, d_r\}$，且项 $\hat{\phi}_{g_1\dots g_w}^{l_1\dots l_q}$ 已使用引理 4.5 展开。
这些项可以表示为纯四阶项 (1) 和混合二阶项 (2) 的线性组合。

- 对于其余各项，存在 $j \in \{j_1, \dots, j_m\}$ 使得 $j \notin \{l_1, \dots, l_q\}$。不妨在重新标记后假设 $j = j_1$。首先考虑 $\{l_1, \dots, l_q\} \subseteq \{j_2, \dots, j_m\}$ 且 $\{g_1, \dots, g_w\} \subseteq \{i_1, \dots, i_n\}$ 的情形，此时 $\{j, j_2, \dots, j_m\} \cup \{l_1, \dots, l_q\} \cup \{g_1, \dots, g_w\} \cup \{i_1, \dots, i_n\}$ 恰好包含 $m+n$ 个不同的项。令 $\{l_1, \dots, l_q\} \sqcup \{a_1, \dots, a_{m-1-q}\} = \{j_2, \dots, j_m\}$，则

$$\begin{aligned}
&h_{i_1}^4 \dots h_{i_n}^4 h_{j_1}^2 \dots h_{j_m}^2 h_{g_1}^2 \dots h_{g_w}^2 h_{l_1}^2 \dots h_{l_q}^2 \phi_{g_1\dots g_w}^{l_1\dots l_q}(h_{l_1}, \dots, h_{l_q}, h_{g_1}, \dots, h_{g_w}) \\
=&h_j^2 h_{a_1}^2 \dots h_{a_{m-1-q}}^2 h_{l_1}^4 \dots h_{l_q}^4 h_{i_1}^4 \dots h_{i_n}^4 \hat{\phi}(h_{l_1}, \dots, h_{l_q}, h_{i_1}, \dots, h_{i_n}).
\end{aligned}$$

注意，此处 $n+q \geq n+1$，因此这些项属于最后一种情形（3）。

- 最后，对于剩余项，要么存在 $l \in \{l_1, \dots, l_q\}$，使得 $l \notin \{j_2, \dots, j_m\}$；要么存在 $g \in \{g_1, \dots, g_w\}$，使得 $g \notin \{i_1, \dots, i_n\}$。于是 $\{j, j_2, \dots, j_m\} \cup$

$\{l_1,\ldots,l_q\}\cup\{g_1,\ldots,g_w\}\cup\{i_1,\ldots,i_n\}=:\{j\}\sqcup\{a_1,\ldots,a_r\}$至少包含 $m+n+1$个不同的项。于是

$$\begin{aligned}&h_{i_1}^4\ldots h_{i_n}^4h_{j_1}^2\ldots h_{j_m}^2h_{g_1}^2\ldots h_{g_w}^2h_{l_1}^2\ldots h_{l_q}^2\phi_{g_1\ldots g_w}^{l_1\ldots l_q}(h_{l_1},\ldots,h_{l_q},h_{g_1},\ldots,h_{g_w})\\=&h_j^2h_{a_1}^2\ldots h_{a_r}^2\hat{\phi}(h_{a_1},\ldots,h_{a_r}),\end{aligned}$$

其形式与式（2）中的二阶项相同。

□