arXiv:2601.04077v1 [hep-th] 7 Jan 2026

可积系统

Maciej Dunajski

Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics
*University of Cambridge**Wilberforce Road*,
Cambridge CB3 0WA, *UK*

2026年1月8日

目录

1 经典力学中的可积性 5
1.1 哈密顿形式体系.5 1.2 可积性与作用量–角变量.8 1.3 泊松结构.16

2 孤子方程与逆散射变换 21
2.1 两个例子的历史.21 2.1.1 KdV 的物理推导.22 2.1.2 正弦-戈登方程的 B¨acklund 变换 . . . . . 25 2.2 KdV 的逆散射变换 .26 2.2.1 直接散射 .28 2.2.2 散射数据的性质 .30 2.2.3 逆散射.32 2.2.4 Lax公式.33 2.2.5 散射数据的演化.34 2.3 无反射势与孤子.35 2.3.1 单孤子解.35 2.3.2 N孤子解.36 2.3.3 双孤子渐近行为.37 2.3.4 初始数据.41

3 哈密顿形式体系与零曲率表示 43
3.1 第一积分.43 3.2 哈密顿形式体系.45 3.2.1 双哈密顿系统.46 3.3 零曲率表示.48 3.3.1 黎曼–希尔伯特问题.49 3.3.2 dressing 方法.51 3.3.3 从 Lax 表示到零曲率.53 3.4 层级与有限带隙解.55

4 李对称性和约化 58
4.1 李群与李代数.58 4.2 向量场与单参数变换群.61 4.3 微分方程的对称性.64

4.3.1 如何求对称性.67 4.3.2 延拓公式.67 4.4 Painlev´ 方程.70 4.4.1 Painlev´ 检验.
74

5 习题 76
5.1 习题单 1.76 5.2 习题单 2.78 5.3 习题单 3.81

A 流形 84

序言

这些讲义基于我在 2003—2008 年和 2025–2026 年于剑桥为三年级数学专业学生开设的课程。它们可以作为一学期基础课程的讲义，内容涵盖可积系统、阿诺德–刘维尔定理、逆散射变换、孤子理论中的哈密顿方法以及李点对称性。课程假定学生只掌握基础微积分和常微分方程知识。这些讲义中的错误可能少于 [6], 的前四章，但也可能多于 [7], ，后者曾包含部分相关内容。

有一些优秀的教科书对本文所介绍的内容进行了深入探讨。关于作用量-角变量，请参阅 [4] ；关于逆散射变换，请参阅 [16] ；关于对称性方法，请参阅[17]。参考文献中还列出了其他几本著作，以及一些关于可积性的里程碑式论文。

在准备这些讲义时，我受到了许多同事的研究成果和讲座的启发。特别感谢 Boris Dubrovin、Jenya Ferapontov、Piotr Kosinski、Nick Manton、Paolo Santini、David Stuart 和 Paul Tod，以及许多我已不记得姓名的剑桥学生，他们指出了早期草稿中的错误。

引言

可积系统是这样一类非线性微分方程，它们“原则上”可以通过解析方法求解。这意味着，求解过程可以归结为有限次代数运算和积分。这类系统极为罕见——大多数非线性微分方程都会表现出混沌行为，无法写出显式解。尽管如此，可积系统仍引出了非常有趣的数学，涵盖微分几何、复分析、量子场论和流体动力学等领域。本课程的主要参考书是 [6]。此外，还有其他书籍介绍了课程涉及的特定主题：

- 常微分方程的可积性 [4] （哈密顿形式体系、阿诺德–刘维尔定理、作用量–角变量）。常微分方程的可积性是一个相当明确的概念（即可以加以定义），其依据是存在足够多性质良好的第一积分，或者（用物理学家的说法）运动常数。

- 偏微分方程的可积性 [16], [5]（孤子、逆散射变换）。在这种情形下，人们尚未普遍接受一个可积性的定义。相空间是无限维的，但拥有“无穷多个”第一积分可能还不够——我们可能漏掉了每隔一个的第一积分。这里关注的是解的性质和解的生成方法。我们将研究孤子——在演化过程中保持其形状（以及其他特征）的孤立非线性波。这些孤子解将通过一个反问题构造出来：根据散射数据恢复势。

- 李对称性 [10], [17] （群不变解、向量场、对称性约化、Painlev´e 方程）。强大的对称性方法既可应用于常微分方程，也可应用于偏微分方程。对于常微分方程，掌握足够大的对称群即可构造最一般的解。对于偏微分方程，仅掌握其对称性不足以构造最一般的解，但可以据此从已知解求得新解，并将偏微分方程约化为更易处理的常微分方程。通过反问题可积的偏微分方程可约化为具有 Painlev´e 性质的方程。

第1章

经典力学中的可积性

本章将介绍常微分方程的可积性。这是一个相当明确的概念，其基础是存在足够多个性质良好的第一积分。

1.1 哈密顿形式体系

具有 n 个自由度的系统，其运动由 $2n$ 维相空间中的一条轨迹描述 M（局部来看，它是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的一个开集；但从整体来看，它可以是拓扑非平凡的流形，例如球面或环面。参见附录 A），其局部坐标为

$$(p_j, q_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

动力学变量是函数 $f\colon\ M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$，因此 $f = f\ (p,\ q,\ t)$，其中 t 称为“时间”。设 $f,\ g\colon\ M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$。定义 f 和 g 的泊松括号为一个函数

$$\{f, g\} := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}. \tag{1.1.1}$$

它满足

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \qquad \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

第二个性质称为雅可比恒等式。坐标函数（p_j、q_j）满足正则对易关系

$$\{p_j, p_k\} = 0, \quad \{q_j, q_k\} = 0, \quad \{q_j, p_k\} = \delta_{jk}.$$

给定一个哈密顿量 $H = H(p、\ q、\ t)$（通常为 $H(p、\ q)$），动力学由下式决定

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, \qquad \text{for any} \qquad f = f(p, q, t).$$

设定 $f = p_j$ 或 $f = q_j$ 可得到哈密顿运动方程

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \qquad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}. \tag{1.1.2}$$

$2n$ 常微分方程组（1.1.2）具有确定性，即（p_j（t） q_j（t））由 $2n$ 初始条件（$p_j(0)$ $q_j(0)$）唯一确定。方程（1.1.2）还意味着相空间中的体积元守恒。该系统本质上等价于牛顿运动方程。哈密顿表述使我们能够从更几何的角度理解经典力学。它也是量子化的起点。

定义 1.1.1 若函数 $f = f(p_j, q_j, t)$ 在方程 (1.1.2) 成立时满足 $\dot{f} = 0$，则称其为第一积分或运动常数。等价地，

$$f(p(t), q(t), t) = const$$

若 $p(t)$ $q(t)$ 是方程 (1.1.2) 的解。

一般而言，若系统 (1.1.2) 存在“足够多”的第一积分，并且可以应用降阶，则该系统是可解的。这是因为每个第一积分都能消去一个方程。

- 例子。考虑一个具有一个自由度的系统，其中 $M = \mathbb{R}^2$ 以及哈密顿量

  $$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + V(q).$$

  哈密顿方程 (1.1.2) 给出

  $$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\frac{dV}{dq}.$$

  哈密顿量本身是一个第一积分，因为 $\{H, H\} = 0$。因此

  $$\frac{1}{2}p^2 + V(q) = E$$

  其中， E 是一个称为能量的常数。现在

  $$\dot{q} = p, \quad p = \pm\sqrt{2(E - V(q)}$$

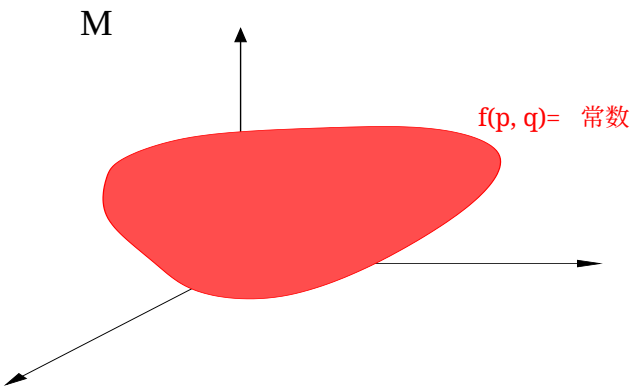
  一次积分便可得到隐式形式的解

  $$t = \pm \int \frac{dq}{\sqrt{2(E - V(q))}}.$$

  如果我们能够计算右侧的积分，并反转关系 $t = t(q)$ 以求出 $q(t)$，就可以得到显式解。这两个步骤并非总是可行，但无论如何，我们肯定会将这个系统视为可积系统。

采用更具几何意义的方法是有益的。假设第一积分 f 不显含时间，并且它定义了超曲面 $f(p, q) = \text{const}$，该超曲面位于 M 中（图 1.1）。两个分别对应于两个独立第一积分的超曲面通常在 M 中相交于一个余维为 2 的曲面。一般而言，轨迹位于一个维数为 $2n - L$的曲面上，其中 L 是独立第一积分的数量。如果 $L = 2n - 1$，该曲面就是一条曲线——即方程 (1.1.2) 的解。

图 1.1：等位面



如何寻找第一积分？给定两个不显含时间的第一积分，如果它们的泊松括号不为零，那么该泊松括号也将是一个第一积分。这是雅可比恒等式以及所有第一积分都与哈密顿量泊松对易这一事实的推论。更一般地，诺特定理给出了一些第一积分（它们对应于哈密顿方程 (1.1.2) 可能具有的对称性，例如时间平移、旋转），但数量仍然不够。寻找第一积分的困难具有深刻的意义。假设我们使用某个常微分方程存在性定理，并将其应用于 (1.1.2)。现在求解代数方程

$$q_k = q_k(p^0, q^0, t), \quad p_k = p_k(p^0, q^0, t),$$

对于初始条件 (p^0, q^0)，从而得到

$$q^0{}_k = q^0{}_k(p, q, t), \quad p^0{}_k = p^0{}_k(p, q, t).$$

这给出了 $2n$ 个第一积分，因为显然 (p^0, q^0) 是我们可以自由指定的常数。其中一个积分决定时间参数化，其他积分或许可用于构造相空间中的轨迹。然而，对于某些积分，方程

$$f(p, q) = \text{const}$$

可能无法在相空间中定义一个“良好”的曲面。相反，它定义了一个病态集合（至少从应用数学的角度来看），该集合稠密地覆盖整个相空间。这样的积分无法在 M 中区分各点。

哈密顿系统总是存在一个第一积分——能量——它给出能量面 $H(p, q) = E$，但通常这也是唯一的第一积分。足够复杂的确定性系统可能遵循热力学定律：系统处于能量面某个元素内的概率，与该元素归一化后的体积成正比。这意味着，时间演化会均匀覆盖相空间中恒定能量面的整个区域。我们尚不清楚能否从哈密顿方程推导出这一遍历假设。

20世纪60年代早期的计算机模拟揭示，一些非线性系统（具有无限多个自由度！）并非遍历的。孤子方程

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}, \quad u = u(x,t), \qquad KdV$$

or

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = \sin\phi, \quad \phi = \phi(x,t), \qquad Sine-Gordon$$

都是这类系统的例子。它们都拥有无穷多个第一积分。我们将在第2章研究它们。

1.2 可积性与作用量–角变量

对于哈密顿方程组（1.1.2），通常只需知道 n（而不是$2n-1$）个第一积分，因为每个第一积分都会使系统的阶数降低二。这构成了以下可积系统定义的基础。

定义1.2.1 可积系统由一个 $2n$维相空间 M 以及 n 个独立函数组成（其意义是，这些函数的梯度 ∇f_j 在 M 中任意一点的切空间上都是线性无关的向量） f_1，.....， f_n： $M \to \mathbb{R}$，且满足

$$\{f_j, f_k\} = 0, \qquad j,k = 1,\ldots,n. \tag{1.2.3}$$

泊松括号（1.2.3）为零意味着这些第一积分彼此对合。我们将证明，可积系统会使哈密顿运动方程完全可解。首先，让我们探究对相空间进行坐标变换所带来的自由度。

$$Q_k = Q_k(p,q), \qquad P_k = P_k(p,q).$$

若此变换保持泊松括号不变，则称其为正则变换

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial Q_k}\frac{\partial g}{\partial P_k} - \frac{\partial f}{\partial P_k}\frac{\partial g}{\partial Q_k}$$

对所有 f、g： $M \longrightarrow \mathbb{R}$。正则变换保持哈密顿方程 (1.1.2) 不变。

给定函数 $S(q,P,t)$，满足

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial P_k}\right) \neq 0$$

我们可以通过令以下各项成立来构造一个正则变换

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}, \quad \widetilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

函数 S 是生成函数 [4, 12, 20]的一个例子。下面定理的思路是寻找一个正则变换，使得在新变量中 $H = H(P_1,\ldots,P_n)$，从而

$$P_k(t) = P_k(0) = \text{const}, \qquad Q_k(t) = Q_k(0) + t\frac{\partial H}{\partial P_k}.$$

实际上，要找到这种正则变换的生成函数非常困难，而判断给定的哈密顿系统是否可积（在事先不知道n 泊松对易积分的情况下）仍然是一个未解决的问题。

定理 1.2.2（Arnold、刘维尔）设

$$(M, f_1, \ldots, f_n)$$

是一个哈密顿量为 $H = f_1$ 的可积系统，并且

$$M_f := \{(p,q) \in M; f_k(p,q) = c_k\}, \qquad c_k = const, \qquad k = 1, \ldots, n$$

是由第一积分 f_k 构成的一个 n 维等位面。那么

- 若 M_f 紧致且连通，则它与一个环面微分同胚

$$T^n := S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1,$$

并且（在 M 中该环面的某个邻域内）可以引入“作用量—角变量”

$$I_1, \ldots, I_n, \phi_1, \ldots, \phi_n, \qquad 0 \le \phi_k \le 2\pi,$$

使得角变量 ϕ_k 是 M_f 上的坐标，而作用量 $I_k = I_k(f_1, \ldots, f_n)$ 是第一积分。

- 正则运动方程 (1.1.2) 变为

$$\dot{I}_k = 0, \qquad \dot{\phi}_k = \omega_k(I_1, \ldots, I_n), \qquad k = 1, \ldots, n \tag{1.2.4}$$

因此，可积系统可以通过求积求解（有限次代数运算以及对已知函数的积分）。

证明。我们将沿用 [4], 给出的证明，但尝试通过避免使用微分形式的语言，使证明更易于理解

- 运动发生在曲面

$$f_1(p,q) = c_1, f_2(p,q) = c_2, \ldots, f_n(p,q) = c_n$$

维数为 $2n - n = n$。定理的第一部分指出，这个曲面是一个环面[1]。对于 M 中的每一点，都恰有一个环面 T^n 经过该点。这意味着 M 可分解为由 n维叶组成的叶状分解。每个叶都是一个环面，不同的环面对应于常数 c_1、.....、 c_n的不同取值。

假设

$$\det\Big(\frac{\partial f_j}{\partial p_k}\Big) \neq 0$$

这样，系统 $f_k(p,q) = c_k$ 就可以求解出动量 p_i

$$p_i = p_i(q, c)$$

[1]证明的这一部分需要一些关于李群和李代数的知识。详见附录 A。

并且关系式 $f_i(q,p(q,c)) = c_i$ 恒成立。对这些恒等式关于 q_j求导

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} + \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial q_j} = 0$$

并将所得方程乘以 $\partial f_m/\partial p_j$

$$\sum_j \frac{\partial f_m}{\partial p_j}\frac{\partial f_i}{\partial q_j} + \sum_{j,k} \frac{\partial f_m}{\partial p_j}\frac{\partial f_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial q_j} = 0.$$

现在交换指标，并减去 (mi) –(im)。由此得到

$$\{f_i, f_m\} + \sum_{j,k} \Big(\frac{\partial f_m}{\partial p_j}\frac{\partial f_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial q_j} - \frac{\partial f_i}{\partial p_j}\frac{\partial f_m}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial q_j}\Big) = 0.$$

第一项为零，因为这些第一积分彼此对合。重新排列第二项中的指标可得

$$\sum_{j,k} \frac{\partial f_i}{\partial p_k}\frac{\partial f_m}{\partial p_j}\Big(\frac{\partial p_k}{\partial q_j} - \frac{\partial p_j}{\partial q_k}\Big) = 0$$

并且，由于矩阵 $\partial f_i/\partial p_k$ 可逆，

$$\frac{\partial p_k}{\partial q_j} - \frac{\partial p_j}{\partial q_k} = 0. \tag{1.2.5}$$

这个条件意味着

$$\oint \sum_j p_j dq_j = 0$$

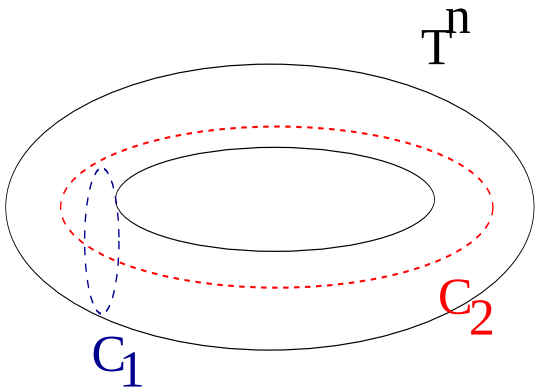
对于环面 T^n 上任意可缩闭曲线，结论均成立。这是斯托克斯定理的推论。为了解释这一点，回想在 $n = 3$ 中

$$\oint_{\delta D} \mathbf{p}\cdot d\mathbf{q} = \int_D (\nabla\times\mathbf{p})\cdot d\mathbf{q}$$

其中 δD 是曲面 D 的边界，并且

$$(\nabla\times\mathbf{p})_m = \frac{1}{2}\epsilon_{jkm}\Big(\frac{\partial p_k}{\partial q_j} - \frac{\partial p_j}{\partial q_k}\Big).$$

- 存在 n 条无法收缩为一点的闭曲线，因此相应的积分不为零。



环面上的周期

因此，我们可以定义作用坐标

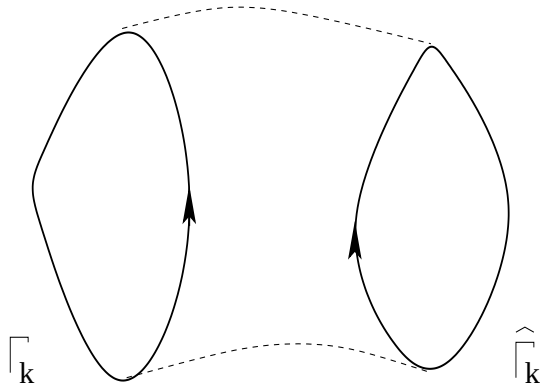
$$I_k := \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_k}\sum_j p_j dq_j, \tag{1.2.6}$$

其中，闭曲线 Γ_k 是环面 T^n 的第 k 个基本圈（一般而言，“周期”指“无边界子流形”）

$$\Gamma_k = \{(\tilde\phi_1,\dots,\tilde\phi_n)\in T^n; 0\le\tilde\phi_k\le 2\pi, \tilde\phi_j = \text{const for } j\neq k\},$$

其中 $\tilde\phi$ 是 T^n 上的一些坐标[2] 。

斯托克斯定理意味着，作用量 (1.2.6) 与 Γ_k 的选取无关。



斯托克斯定理

这是因为

$$\oint_{\Gamma_k}\sum_j p_j dq_j + \oint_{\hat\Gamma_k}\sum_j p_j dq_j = \int\Big(\frac{\partial p_i}{\partial q_j}-\frac{\partial p_j}{\partial q_i}\Big)dq_j\wedge dq_i = 0$$

ˆ 这里我们选取了方向相反的 Γ 和 Γ。

• 作用量 (1.2.6) 也是第一积分，因为 $\oint p(q,c)dq$ 只依赖于 $c_k = f_k$ ，而 f_ks 是第一积分。

作用量彼此泊松对易

$$\{I_i, I_j\} = \sum_{r,s,k}\frac{\partial I_i}{\partial f_r}\frac{\partial f_r}{\partial q_k}\frac{\partial I_j}{\partial f_s}\frac{\partial f_s}{\partial p_k} - \frac{\partial I_i}{\partial f_r}\frac{\partial f_r}{\partial p_k}\frac{\partial I_j}{\partial f_s}\frac{\partial f_s}{\partial q_k} = \sum_{r,s}\frac{\partial I_i}{\partial f_r}\frac{\partial I_j}{\partial f_s}\{f_r, f_s\} = 0$$

尤其是 $\{I_k, H\} = 0$。

环面 M_f 也可以等价地表示为

$$I_1 = \tilde c_1, \qquad \dots, \qquad I_1 = \tilde c_n.$$

对于某些常数 $\tilde c_1,\dots,\tilde c_n$（我们或许会想直接定义 $I_k = f_k$，但这样一来，变换 $(p,q)\to(I,\phi)$ 通常就不是正则变换。）

[2]这是一个非平凡的步骤。在实践中，很难明确描述 n 维环面以及 $2n$ 维相空间中的曲线 Γ_k 。因此，从某种程度上说，阿诺德–刘维尔定理具有存在性定理的性质。

- 我们将使用一个生成函数，构造与作用量 ϕ_k 正则共轭的角坐标

$$S(q,I)=\int_{q_0}^{q}\sum_j p_j dq_j,$$

其中 q_0 是环面上的某个选定点。由 (1.2.5) 和斯托克斯定理可知，这一定义与连接 q_0 和 q 的路径无关。选择不同的q_0 只会给 S 加上一个常数，因此角度仍然是

$$\phi_i=\frac{\partial S}{\partial I_i}$$

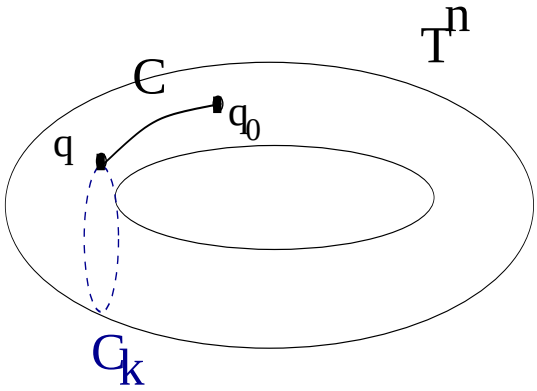
不变量。

- 这些角是周期为 2π的周期坐标。为说明这一点，考虑连接 q_0 和 q 的两条路径 C 和$C\cup C_k$（其中 C_k 表示第 k个周期），并计算

$$S(q,I)=\int_{C\cup C_k}\sum_j p_j dq_j=\int_C\sum_j p_j dq_j+\int_{C_k}\sum_j p_j dq_j=S(q,I)+2\pi I_k$$

so

$$\phi_k=\frac{\partial S}{\partial I_k}=\phi_k+2\pi.$$



生成函数

- 这些变换

$$q=q(\phi,I),\quad p=p(\phi,I),\qquad\text{and}\qquad \phi=\phi(q,p),\quad I=I(q,p)$$

是可以正则（因为它们由生成函数定义）且可逆。因此 s

$$\{I_j,I_k\}=0,\quad \{\phi_j,\phi_k\}=0,\quad \{\phi_j,I_k\}=\delta_{jk}$$

动力学由下式给出

$$\dot\phi_k=\{\phi_k,\widetilde H\},\quad \dot I_k=\{I_k,\widetilde H\},$$

其中

$$\widetilde H(\phi,I)=H(q(\phi,I),p(\phi,I)).$$

I_ks 是第一积分，因此

$$\dot{I}_k = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \phi_k} = 0$$

~ ~因此 $H = H(I)$,
并且

$$\dot{\phi}_k = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial I_k} = \omega_k(I)$$

其中 ω_ks 也都是第一积分。这就证明了（1.2.4）。对这些正则运动方程积分可得

$$\phi_k(t) = \omega_k(I)t + \phi_k(0), \quad I_k(t) = I_k(0). \tag{1.2.7}$$

这些是角速度恒定的 n 圆周运动。

□

轨迹（1.2.7）可能在环面上闭合，也可能稠密地覆盖环面。这取决于角速度的取值。如果 $n = 2$ ，那么当 ω_1/ω_2 是有理数时，轨迹将闭合；否则将稠密地覆盖环面。

在对可积哈密顿量进行小扰动时，环面会发生有趣的变化

$$H(I) \longrightarrow H(I) + \epsilon K(I, \phi).$$

在某些情况下，运动仍然是周期性的，大多数环面不会消失，而是会发生形变。这由柯尔莫哥洛夫–阿诺德–莫泽（KAM）定理所支配——本课程不涉及该定理。请参阅 Schuster 的通俗读物 [19], ，或阅读 Arnold [4] 撰写的完整论述。

- 例子。所有具有二维相空间的自治哈密顿系统都是可积的。考虑哈密顿量为

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2).$$

能量的不同取值 E 使 M_f 按椭圆形成叶状分解

$$\frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) = E.$$

对于 E 的固定取值，我们可以取 $\Gamma = M_f$。因此

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_{M_f} pdq = \frac{1}{2\pi} \int \int_S dpdq = \frac{E}{\omega}$$

这里我们利用斯托克斯定理，将线积分表示为由 M_f 围成的面积。

~用新变量表示的哈密顿量为 $H = \omega I$ 且

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial I} = \omega, \qquad \phi = \omega t + \phi_0.$$

为了完整地描述这一过程，我们需要用（p， q）来表示（I， ϕ）。我们已经知道

$$I = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\omega}p^2 + \omega q^2\Big).$$

因此，生成函数为

$$S(q, I) = \int p dq = \pm \int \sqrt{2I\omega - \omega^2 q^2} dq$$

并且（选取一个符号）

$$\phi = \frac{\partial S}{\partial I} = \int \frac{\omega dq}{\sqrt{2I\omega - \omega^2 q^2}} = \arcsin\left(q\sqrt{\frac{\omega}{2I}}\right) - \phi_0.$$

由此得到

$$q = \sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin(\phi + \phi_0)$$

最后，我们得到了熟悉的解

$$p = \sqrt{2E} \cos(\omega t + \phi_0), \qquad q = \sqrt{2E/\omega^2} \sin(\omega t + \phi_0).$$

- 例子。开普勒问题是另一个可解的例子。这里，四维相空间以（$q_1 = \phi$， $q_2 = r$， $p_1 = p_\phi$，$p_2 = p_r$）为坐标，哈密顿量为

$$H = \frac{{p_\phi}^2}{2r^2} + \frac{{p_r}^2}{2} - \frac{\alpha}{r}$$

其中 $\alpha > 0$ 是一个常数。容易验证，

$$\{H, p_\phi\} = 0$$

因此，该系统在定义1.2.1的意义下是可积的。第一积分的等值集 M_f 为

$$H = E, \quad p_\phi = \mu$$

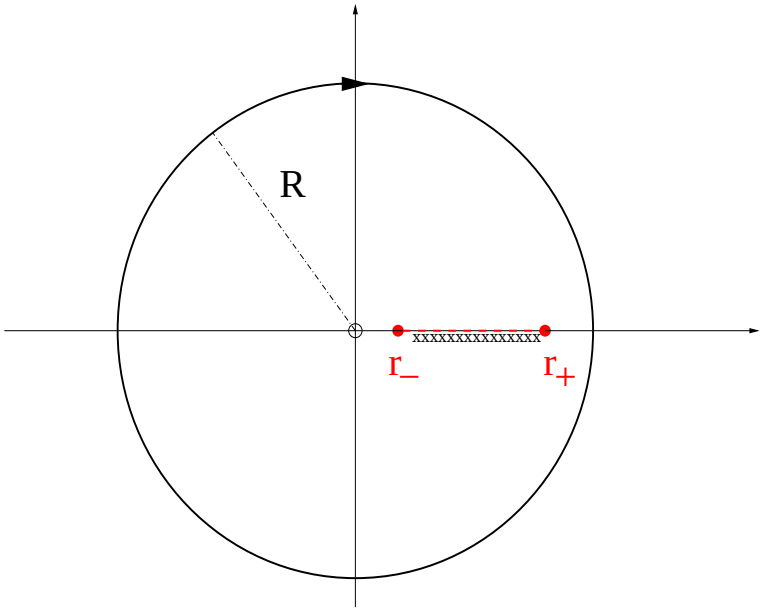
由此可得

$$p_\phi = \mu, \quad p_r = \pm\sqrt{2E - \frac{\mu^2}{r^2} + \frac{2\alpha}{r}}.$$

这使 ϕ 保持任意，并对 (r, p_r) 施加一个约束。因此， ϕ 和 (r, p_r) 的一个函数共同参数化 M_f。改变 ϕ 并固定另一个坐标，便得到一个周期 $\Gamma_\phi \subset M_f$和

$$I_\phi = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_\phi} p_\phi d\phi + p_r dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_\phi d\phi = p_\phi.$$

图 1.2：开普勒积分的分支切割。



要找到第二个作用坐标，固定 ϕ （在 H 和 p_ϕ的基础上）。这会得到另一个周期Γ_r 和

$$\begin{aligned} I_r &= \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_r} p_r dr \\ &= 2\frac{1}{2\pi}\int_{r_-}^{r_+}\sqrt{2E-\frac{\mu^2}{r^2}+\frac{2\alpha}{r}}dr \\ &= \frac{\sqrt{-2E}}{\pi}\int_{r_-}^{r_+}\frac{\sqrt{(r-r_-)(r_+-r)}}{r}dr \end{aligned}$$

其中周期轨道具有 $r_- \le r \le r_+$ 和

$$r_\pm = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2+2\mu^2 E}}{2E}.$$

可使用留数计算求出该积分，并选择一条从实轴上的 r_- 到 r_+ 的分支切割围道 [3]。考虑一个分支

$$f(z) = \sqrt{(z-r_-)(r_+-z)}$$

由从 r_- 到 r_+ 的分支切割定义，其中切割上侧为 $f(0) = i\sqrt{(r_+r_-)}$。我们在一个大型圆形围道 $|z| = R$ 上计算积分，并展开洛朗

[3]以下方法取自马克斯·玻恩于 1927 年出版的《原子》。感谢加里·吉本斯向我指出这一参考文献。

展开

$$\begin{aligned}\int_{|z|=R} z^{-1}f(z)dz &= \int_0^{2\pi}\sqrt{-1}\Big(1-\frac{r_-}{R}e^{-i\theta}\Big)^{1/2}\Big(1-\frac{r_+}{R}e^{-i\theta}\Big)^{1/2}iRe^{i\theta}d\theta\\ &= \pi(r_++r_-) \qquad \text{when} \quad R\to\infty,\end{aligned}$$

因为所有包含 exp ($i\theta$) 的幂的项都是周期性的，不会对积分产生贡献。通过计算 0 处的留数并将围道收缩至分支切割处，必须得到相同的值（计算留数时，请记住 $z=0$ 位于切割的左侧，因此 $\sqrt{-1}=-i$。沿大圆积分等价于计算 ∞ 处的留数，该点位于切割右侧，此处 $\sqrt{-1}=i$）。因此

$$\pi(r_++r_-)=2\pi\sqrt{r_+r_-}+\int_{r_-}^{r_+}\frac{\sqrt{(r-r_-)(r_+-r)}}{r}dr-\int_{r_+}^{r_-}\frac{\sqrt{(r-r_-)(r_+-r)}}{r}dr$$

一个有理数（此处等于 1）。因此，轨道是闭合的——这是一个非凡的结果，众所周知.....值必须通过计算 0 处的留数并将围道收缩至分支切割处而得到相同结果（计算留数时，请记住 $z=0$ 位于切割的左侧，因此 $\sqrt{-1}=-i$。沿大圆积分等价于计算 ∞ 处的留数，该点位于切割右侧，此处 $\sqrt{-1}=i$）。因此

$$\pi(r_++r_-)=2\pi\sqrt{r_+r_-}+\int_{r_-}^{r_+}\frac{\sqrt{(r-r_-)(r_+-r)}}{r}dr-\int_{r_+}^{r_-}\frac{\sqrt{(r-r_-)(r_+-r)}}{r}dr$$

and

$$\begin{aligned}I_r &= \frac{\sqrt{-2E}}{\pi}\,\frac{\pi}{2}(r_++r_--2\sqrt{r_+r_-})\\ &= \alpha\sqrt{\frac{1}{2|E|}}-\mu.\end{aligned}$$

哈密顿量变为

$$\widetilde{H}=-\frac{\alpha^2}{2(I_r+I_\phi)^2}$$

由此可得，频率的绝对值相等，且等于

$$\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial I_r}=\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial I_\phi}=\frac{\alpha^2}{(I_r+I_\phi)^3}=\Big(\frac{r_++r_-}{2}\Big)^{-3/2}\sqrt{\alpha}.$$

这是两个频率的比值为有理数的一种特殊情形（此处比值等于 1）。因此，轨道是闭合的——这是开普勒所知的一项非凡结果。

1.3 泊松结构

通过推广泊松括号（1.1.1）的概念，可以自然地扩展哈密顿形式体系。辛几何 [4]提供了一种几何方法。我们将采用层次较低（但稍微更一般）的观点，并引入泊松结构。相空间 M 是 m 维的，其局部坐标为（$\xi^1,\ldots,\xi^m$）。特别是，我们不区分位置和动量。

定义 1.3.1 若反对称矩阵 $\omega^{ab} = \omega^{ab}(\xi)$ 满足由其定义的泊松括号

$$\{f, g\} = \sum_{a,b=1}^{m} \omega^{ab}(\xi) \frac{\partial f}{\partial \xi^a} \frac{\partial g}{\partial \xi^b} \tag{1.3.8}$$

满足

$$\{f, g\} = -\{g, f\},$$
$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0.$$

第二个性质称为雅可比恒等式。它对 $\omega^{ab}(\xi)$ 施加了限制，观察以下内容即可看出：

$$\omega^{ab}(\xi) = \{\xi^a, \xi^b\}$$

并在坐标函数上计算雅可比恒等式。

给定一个哈密顿量 $H\colon\ M \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$，动力学由下式支配：

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

而对 (1.1.2) 进行推广的哈密顿方程变为：

$$\dot{\xi}^a = \sum_{b=1}^{m} \omega^{ab}(\xi) \frac{\partial H}{\partial \xi^b}. \tag{1.3.9}$$

- 例子。设 $M = \mathbb{R}^3$ 和 $\omega^{ab} = \sum_{c=1}^{3} \varepsilon^{abc} \xi^c$，其中 ε^{abc} 是标准的全反对称张量。因此

$$\{\xi^1, \xi^2\} = \xi^3, \quad \{\xi^3, \xi^1\} = \xi^2, \quad \{\xi^2, \xi^3\} = \xi^1.$$

该泊松结构存在一个卡西米尔——任意满足以下条件的函数 $f(r)$：

$$r = \sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2}$$

与坐标函数泊松对易

$$\{f(r), \xi^a\} = 0.$$

这与哈密顿量的选择无关。选定一个哈密顿量后

$$H = \frac{1}{2}\Big(\frac{(\xi^1)^2}{a_1} + \frac{(\xi^2)^2}{a_2} + \frac{(\xi^3)^2}{a_3}\Big)$$

其中 a_1、a_2、a_3 为常数，哈密顿方程 (1.3.9) 就变成了固定于其重心的刚体的运动方程

$$\dot{\xi}^1 = \frac{a_3 - a_2}{a_2 a_3} \xi^2 \xi^3, \qquad \dot{\xi}^2 = \frac{a_1 - a_3}{a_1 a_3} \xi^1 \xi^3, \qquad \dot{\xi}^3 = \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} \xi^1 \xi^2.$$

假设 $m=2n$ 为偶数，且矩阵 ω 可逆，满足 $W_{ab}:=(\omega^{-1})_{ab}$。雅可比恒等式表明，反对称矩阵 $W_{ab}(\xi)$ 是闭的，即

$$\partial_a W_{bc}+\partial_c W_{ab}+\partial_b W_{ca}=0,\qquad \forall a,b,c=1,\dots,m.$$

在这种情形下， W_{ab} 称为辛结构。达布定理指出，在这种情形下，局部存在一个坐标系

$$\xi^1=q_1,\cdots,\xi^n=q_n,\xi^{n+1}=p_1,\cdots,\xi^{2n}=p_n$$

使得

$$\omega=\begin{pmatrix}0 & 1_n\\ -1_n & 0\end{pmatrix}$$

且泊松括号化为标准形式 (1.1.1)。一个简单的证明见[4]。通过归纳法构造局部坐标系 (p,q)，归纳的步数为M维数的一半。取一个函数 p_1，并通过求解方程 $\{q_1,p_1\}=1$求出 q_1。然后考虑 M中 (p_1,q_1) 的一个等值集，它局部上是一个辛流形。接着寻找 (p_2,q_2)，依此类推。

- 例子。上一个例子中的泊松结构是退化的，因为矩阵 ω^{ab}不可逆。如果相空间的维数为奇数，或者存在非平凡的卡西米尔量，这种退化总会出现。考虑将 $\omega^{ab}=\sum_{c=1}^{3}\varepsilon^{abc}\xi^c$ 限制在二维球面 $r=C$上。这会在球面上给出一个辛结构，其形式为

$$\{\xi^1,\xi^2\}=\sqrt{C^2-(\xi^1)^2-(\xi^2)^2}$$

or

$$W=\frac{1}{\sqrt{C^2-(\xi^1)^2-(\xi^2)^2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

当然，除了常数之外，它没有卡西米尔函数。选择另一种球面的参数化会更方便：若

$$\xi^1=C\sin\theta\cos\phi,\quad \xi^2=C\sin\theta\sin\phi,\quad \xi^3=C\cos\theta$$

则在局部坐标（θ， ϕ）中，辛结构为 $\{\theta,\phi\}=\sin^{-1}\theta$or

$$W=\sin\theta\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

它等于二球面上的体积形式。半径 C是任意的。因此，泊松相空间 $\mathbb{R}^3$ 被辛相空间 S^2 层状分解，因为穿过 $\mathbb{R}^3$中任意一点且以原点为中心的球面恰好只有一个。这是一种普遍现象：在泊松空间上固定卡西米尔函数的值，就会得到由辛空间构成的叶状分解。在 S^2 上的局部达布坐标由 $q=-\cos\theta,p=\phi$ 给出，因为此时

$$\{q,p\}=1.$$

泊松推广有助于在无限维情形下建立哈密顿形式体系。形式上，可以认为是将轨迹 $\xi^a(t)$ 上的坐标替换为动力学变量 $u(x,t)$。因此，离散指标 a 变为连续自变量 x （可以想象弦上的 m 个点与整根弦的区别）。相空间 $M=\mathbb{R}^m$ 被替换为定义在直线上的光滑函数空间，并满足适当的边界条件（衰减或周期性）。整个形式体系可以通过进行以下替换来建立

$$\begin{aligned}
\text{ODEs} &\longrightarrow \text{PDEs}\\
\xi^a(t), a=1,\dots,m &\longrightarrow u(x,t), x\in\mathbb{R}\\
\sum_a &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}} dx\\
\text{function } f(\xi) &\longrightarrow \text{functional } F[u]\\
\frac{\partial}{\partial \xi^a} &\longrightarrow \frac{\delta}{\delta u}.
\end{aligned}$$

这些泛函由积分给出

$$F[u]=\int_{\mathbb{R}} f(u,u_x,u_{xx},\dots)dx$$

（原则上我们也可以允许含有 t 导数的情形，但出于稍后将会明了的原因，我们不会这样做。）回顾一下，泛函导数为

$$\frac{\delta F}{\delta u(x)}=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial(u_x)}+\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^2\frac{\partial f}{\partial(u_{xx})}+\dots$$

and

$$\frac{\delta u(y)}{\delta u(x)}=\delta(y-x)$$

其中，等式右边的 δ 是满足以下条件的狄拉克δ函数

$$\int_{\mathbb{R}}\delta(x)dx=1,\qquad \delta(x)=0 \text{ for } x\neq 0.$$

狄拉克δ函数的出现会不断提醒我们，从纯数学的角度来看，我们已进入一个相当棘手的领域。尽管如此，我们仍可放心，上述形式上的替换依然可以建立在坚实的泛函分析基础之上。本课程不会讲述这一点。

与有限维情形 (1.3.8) 的类比启发我们作出如下泊松括号定义

$$\{F,G\}=\int_{\mathbb{R}^2}\omega(x,y,u)\frac{\delta F}{\delta u(x)}\frac{\delta G}{\delta u(y)}dxdy$$

其中，泊松结构 $\omega(x,y,u)$ 应满足括号是反对称的，且雅可比恒等式成立。一种规范选择（但并非唯一）是

$$\omega(x,y,u)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-y)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\delta(x-y).$$

这与达布形式类似，其中 ω^{ab} 是一个常数反对称矩阵，泊松括号则化为 (1.1.1)。这是因为微分算子 $\partial/\partial x$相对于内积是反自伴的

$$< u, v >= \int_{\mathbb{R}} u(x)v(x)dx$$

这类似于矩阵的反对称性。采用这一选择后

$$\{F, G\} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta F}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta G}{\delta u(x)} dx \tag{1.3.10}$$

哈密顿方程变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \{u, H[u]\} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta u(x)}{\delta u(y)} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\delta H}{\delta u(y)} dy \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H[u]}{\delta u(x)}. \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

- 例子。前面提到的 KdV方程是一个哈密顿系统，其哈密顿量由以下泛函给出

$$H[u] = \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{2} u_x^2 + u^3 \Big) dx.$$

假设当$x \to \pm\infty$时， u 属于充分快速衰减的函数空间。

第2章

孤子方程与逆散射变换

对于偏微分方程，不存在一个普遍接受的可积性定义。相空间是无限维的，但拥有“无穷多个”第一积分可能还不够——我们可能漏掉了每隔一个第一积分。相反，我们关注解的性质和解的生成技术。我们将研究孤子——在演化过程中保持其形状（及其他特征）的孤立非线性波。这些孤子解将通过一个反问题构造：根据散射数据恢复势。

2.1 两个例子的历史

孤子方程起源于19世纪。其中一些出现在非线性波现象的研究中，另一些则出现在 $\mathbb{R}^3$曲面的微分几何研究中

- KdV方程

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \qquad \text{where} \quad u = u(x,t) \tag{2.1.1}$$

该方程由 Korteweg 和 de-Vries 于 1895年 写出，并在最简单的情形下求解，用以解释 J. Scott Russell 的以下记述。Russell 骑马沿着一条狭窄的驳船航道行进时，观察到一个孤子。以下引文选自 J. Scott Russell 的《波报告》，载于英国科学促进会第十四届年会（1844年）：“我当时正在观察一艘船的运动：一对马正沿着一条狭窄的航道快速拖着它前行，船却突然停了下来——但航道中的水并未随之停下；船所激起的水流聚集在船首周围，剧烈翻腾，随后突然脱离船身，向前滚动，速度极快，形成一个巨大的孤立隆起波：一团圆润、平滑、轮廓分明的水堆，沿着航道继续前行，似乎形状丝毫未变，速度也没有减慢。我骑马跟在它后面，并赶上了它；它仍以每小时约八九英里的速度向前滚动，保持着原来的形状，长约三十英尺，高一至一英尺半。它的高度逐渐降低；追逐了一两英里后，我便在航道的曲折处失去了它的踪影。

1834年8月，我第一次偶然遇见这种奇特而美丽的现象，并将其称为“平移波”。

- 正弦-戈登方程

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = \sin\phi \qquad \text{where} \quad \phi = \phi(x,t) \tag{2.1.2}$$

局部描述了欧几里得空间 $\mathbb{R}^3$中具有恒定负高斯曲率的曲面的等距嵌入。函数 $\phi = \phi(x, t)$ 是曲面上两条渐近方向 $\tau = (x + t)/2$ 和 $\rho = (x - t)/2$ 之间的夹角，沿着这些方向第二基本形式为零。如果以 (ρ, τ) 参数化的曲面的第一基本形式为

$$ds^2 = d\tau^2 + 2\cos\phi\, d\rho d\tau + d\rho^2, \qquad \text{where} \quad \phi = \phi(\tau, \rho)$$

那么，高斯曲率为常数，且等于 -1 ，前提是

$$\phi_{\tau\rho} = \sin\phi.$$

即为（2.1.2）。

Bianchi、B¨acklund、Lie 以及其他古典微分几何学家利用正弦-戈登方程的可积性来构造新的嵌入。

2.1.1 KdV 的物理推导

考虑线性波动方程

$$\Psi_{xx} - \frac{1}{v^2}\Psi_{tt} = 0$$

其中 $\Psi_{xx} = \partial_x^2\Psi$ 等。该方程描述以恒定速度 v传播的波。它的推导基于三个简化假设:

- 不存在耗散，即该方程在时间反演 $t \to -t$下保持不变。
- 振荡振幅很小，因此可以忽略非线性项（如 Ψ^2）。
- 不存在色散，即群速度恒定。

在推导 KdV 时，我们遵循 [16]并放宽这些假设。

波动方程的通解是两个沿相反方向传播的波的叠加

$$\Psi = f(x - vt) + g(x + vt)$$

其中， f 和 g 是单变量任意函数。这两个波各自由一个一阶线性偏微分方程刻画，例如:

$$\Psi_x + \frac{1}{v}\Psi_t = 0 \qquad \longrightarrow \quad \Psi = f(x - vt).$$

为介绍色散，考虑一个复波

$$\Psi = e^{i(kx - \omega(k)t)}$$

其中 $\omega(k) = vk$ ，因此群速度 $d\omega/dk$ 等于相速度 v。我们通过引入色散来改变这一关系

$$\omega(k) = v(k - \beta k^3 + \ldots)$$

其中，这一展开中不含偶次项，保证了色散关系为实数。假设色散较小，并截断此级数，只保留前两项。满足以下条件的方程为

$$\Psi = e^{i(kx - v(kt - \beta k^3 t))}$$

很容易得出

$$\Psi_x + \beta\Psi_{xxx} + \frac{1}{v}\Psi_t = 0.$$

这可以改写为守恒律的形式

$$\rho_t + j_x = 0,$$

其中，密度 ρ 和流 j 由下式给出

$$\rho = \frac{1}{v}\Psi, \qquad j = \Psi + \beta\Psi_{xx}.$$

为引入非线性，对流进行修正

$$j = \Psi + \beta\Psi_{xx} + \frac{\alpha}{2}\Psi^2.$$

所得方程为

$$\frac{1}{v}\Psi_t + \Psi_x + \beta\Psi_{xxx} + \alpha\Psi\Psi_x = 0.$$

非零常数（v、 β、 α）可以通过简单的变量变换 $x \to x - vt$和重新缩放 Ψ消去。这将得到标准形式的KdV方程

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Korteweg 和 de-Vries 找到的最简单的单孤子解是

$$u(x,t) = -\frac{2\chi^2}{\cosh^2 \chi(x - 4\chi^2 t - \phi_0)}. \tag{2.1.3}$$

KdV不是线性方程，因此将此解乘以一个常数不会得到另一个解。常数 ϕ_0 决定了极值点位于 $t = 0$。因此，我们应将其视为由 $\chi \in \mathbb{R}$标记的一参数解族。

单孤子 (2.1.3) 是 KdV 唯一的正则解，直到 1965 年 Gardner、Green、Kruskal 和 Miura 对 KdV 进行了数值分析，才发现 $u, u_x \to 0$ as $|x| \to \infty$。他们将两列振幅不同的波作为初始剖面。计算机模拟显示，最初彼此分离的波逐渐靠近，形状也发生了扭曲，但最终较大的波超过了较小的波，而两列波重新出现时，其大小和形状都完好无损。非线性相互作用唯一留下的结果是相对相移。这种行为让人联想到我们通常与粒子而非波联系在一起的现象。

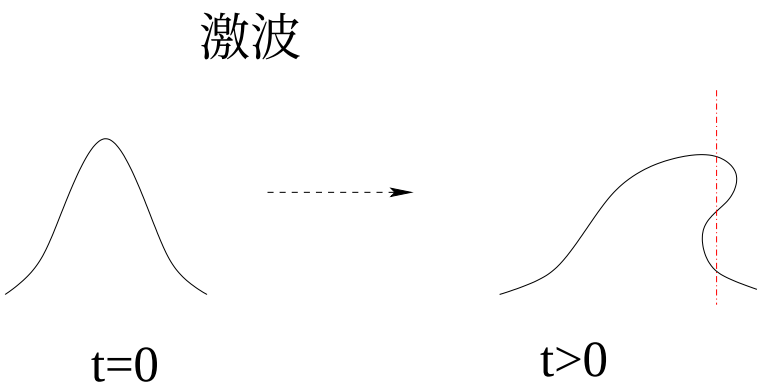
因此，Zabruski 和 Kruskal 将这些波称为“孤子”（类似于电子、质子、重子以及其他以“子”结尾的粒子）。本章将构造更一般的 N–孤子解，用以描述单孤子之间的相互作用。

为此，我们注意到，稳定孤立波的存在是非线性和色散所产生效应相互抵消的结果。

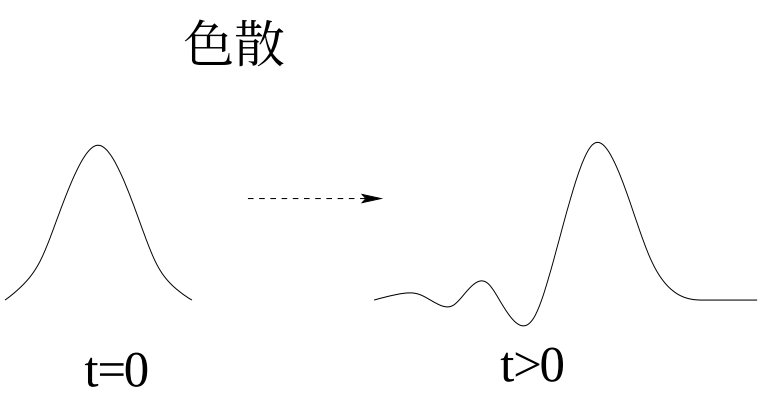
- 如果没有色散项，该方程将为

$$u_t - 6uu_x = 0$$

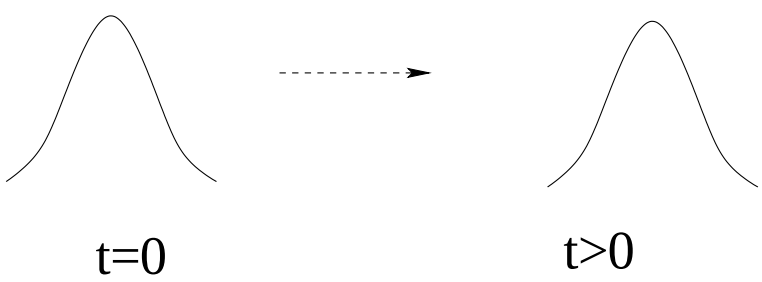
由此得到的解将在某处出现一阶导数不连续（激波，或“波破碎”）。利用特征线法可以轻易求得该解。



- 如果没有非线性项，初始波形将在演化过程中发生色散 $u_t + u_{xxx} = 0$。



- 这两项同时存在，使得平滑的局域孤子解成为可能



其中（2.1.3）就是一个例子（图中绘出了 $-u(x,t)$）。

2.1.2 Sine–Gordon 方程的 B¨acklund 变换

让我们来考虑 Sine–Gordon 方程——这是本章引言中提到的另一种孤子方程。最简单的解生成方法是 B¨acklund 变换。令 $\tau=(x+t)/2, \rho=(x-t)/2$，使方程 (2.1.2) 变为

$$\phi_{\tau\rho}=\sin\phi.$$

现在定义 B¨acklund 关系

$$\partial_\rho(\phi_1-\phi_0)=2b\sin\Big(\frac{\phi_1+\phi_0}{2}\Big),\qquad \partial_\tau(\phi_1+\phi_0)=2b^{-1}\sin\Big(\frac{\phi_1-\phi_0}{2}\Big),\qquad b=\text{const}.$$

对第一个方程关于 τ 求导，并利用第二个方程，得到

$$\begin{aligned}\partial_\tau\partial_\rho(\phi_1-\phi_0) &= 2b\,\partial_\tau\sin\Big(\frac{\phi_1+\phi_0}{2}\Big)=2\sin\Big(\frac{\phi_1-\phi_0}{2}\Big)\cos\Big(\frac{\phi_1+\phi_0}{2}\Big)\\ &= \sin\phi_1-\sin\phi_0.\end{aligned}$$

因此，若 ϕ_0 是正弦-戈登方程的解，则 ϕ_1 也是该方程的解。给定 ϕ_0，我们可以求解关于 ϕ_1 的一阶 B¨acklund 关系，并由已知解生成新解。平凡解 $\phi_0=0$ 可得正弦-戈登方程的单孤子解

$$\phi_1(x,t)=4\arctan\Big(\exp\Big(\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}-x_0\Big)\Big)$$

其中 v 是一个常数，且满足 $|v|<1$。这个解称为孤子（图 2.1）。静态孤子对应于一种特殊情形 $v=0$。

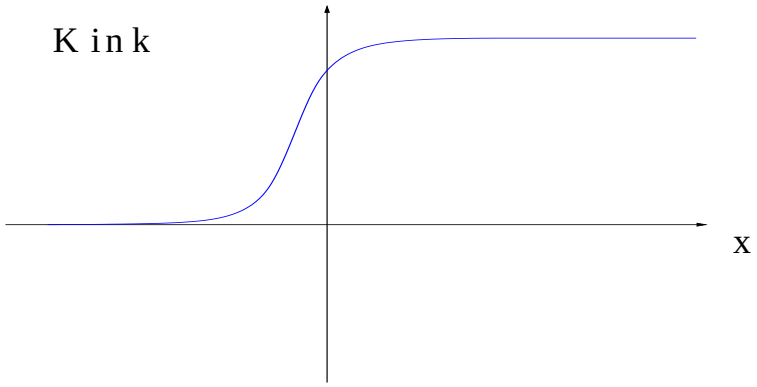
可以定义一个拓扑荷

$$N=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}d\phi=\frac{1}{2\pi}\Big(\phi(x=\infty,t)-\phi(x=-\infty,t)\Big)$$

与正弦-戈登方程的任意解相伴。它是一个全导数的积分，仅取决于边界条件。若要求能量有限，它就是守恒的

$$E=\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{1}{2}\Big(\phi_t^2+\phi_x^2\Big)+(1-\cos(\phi))\Big)dx.$$

图 2.1：正弦-戈登孤子



请注意，在这一阶段的讨论中并未用到 Sine–Gordon 方程。拓扑荷（如 N）在这个意义上不同于第一积分，例如 E，后者作为式（2.1.2）的结果满足 $E = 0$。对于给定的孤子解 $N(\phi) = 1$，孤子是稳定的，因为要将此解改变为常数解 $\phi = 0$（其中 $E = 0$），需要无穷大的能量。

还存在一些有趣的解，其中 $N = 0$ 孤子-反孤子对具有 $N = 0$，但并非平凡解

$$\phi(x,t) = 4\arctan\left(\frac{v\cosh\frac{x}{\sqrt{1-v^2}}}{\sinh\frac{vt}{\sqrt{1-v^2}}}\right).$$

在 $t \to -\infty$，该解表示一对彼此相距很远的孤子和反孤子以速度 v 相向而行。在 $t = 0$ 发生非线性相互作用，而当 $t \to \infty$ 时，孤子和反孤子重新出现，且保持原样。

2.2 KdV 的逆散射变换

求解孤子方程最引人注目的方法之一源自量子力学。这相当令人惊叹，因为我们迄今讨论过的孤子方程与量子世界几乎毫无关联。

回想一下，量子力学的数学舞台是由函数 [18] 构成的无限维复向量空间 $\mathcal{H}$。该空间的元素 Ψ 称为波函数或态矢量。在一维量子力学的情形下，我们有 $\Psi\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$，$\Psi = \Psi(x) \in \mathbb{C}$。空间 $\mathcal{H}$ 配备有酉内积

$$(\Psi, \Phi) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\Psi(x)}\Phi(x)dx. \tag{2.2.4}$$

平方可积的函数，即（Ψ、Ψ）$< \infty$ 类 $\Psi = e^{-x^2}$的函数，被称为束缚态。其他函数，如 e^{-ix}，被称为散射态。

给定一个实值函数 $u = u(x)$，称为势，定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + u\Psi = E\Psi$$

决定了波函数对 x 的依赖关系。这里 $\hbar$和 m 是我们不必考虑的常数，而 E 是量子系统的能量。束缚态的能级可以是离散的，散射态的能级则可以是连续的。这取决于势 $u(x)$。我们将把薛定谔方程视为一个特征值问题，并分别将 Ψ 和 E 称为特征向量和特征值。

根据量子力学的哥本哈根诠释，量子粒子位置的概率密度由 $|\Psi|^2$ 给出，其中 Ψ 是薛定谔方程的解。波函数的时间演化由含时薛定谔方程决定

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + u\Psi.$$

该方程意味着，对于束缚态，量子力学中的概率守恒，具体而言，

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} |\Psi|^2 dx = 0.$$

物理学家通过散射实验发现新的基本粒子。大型加速器使粒子撞击靶体，通过分析散射粒子动量的变化，可以构建出靶体的图像[1]。给定势 $u(x)$，可以利用薛定谔方程求出 Ψ、相应的能级以及以所谓反射与透射系数形式表示的散射数据。然而，实验上的需求有所不同：散射数据是在加速器中测得的，但需要反推出势（它体现了靶体的内部结构）。这归结为以下数学问题

- 根据散射数据恢复势。

这个问题由 Gelfand、Levitan 和 Marchenko 在 20 世纪 50 年代解决，他们 [9, 15] 给出了一种线性算法，用于重构 $u(x)$。Gardner、Green、Kruskal 和 Miura [8] 利用这一算法求解 KdV 方程的柯西问题。他们的杰出想法是将 KdV 解中的初始数据视为 Schr¨odinger 方程中的势。

设 $\hbar^2/(2m) = 1$ 并将一维 Schr¨odinger 方程写成特征值问题

$$\Big(-\frac{d^2}{dx^2} + u(x)\Big)\Psi = E\Psi.$$

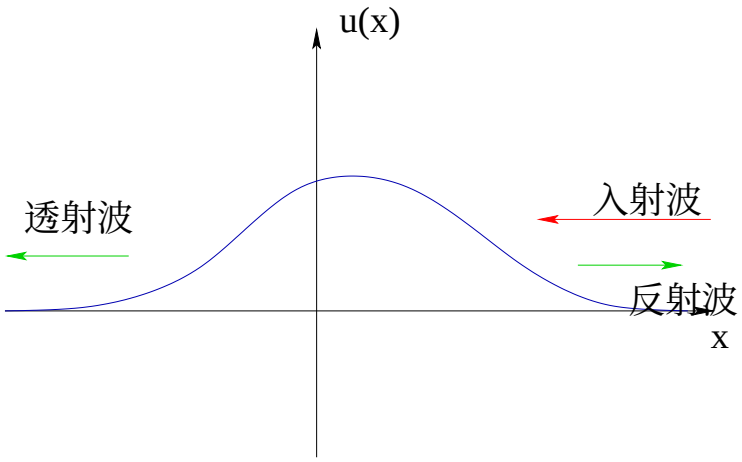
我们允许 u 依赖于 x 以及 t，此时应将后者视为一个参数。

在散射理论中，考虑从 $+\infty$入射的自由粒子束。其中一些粒子会被势反射（假设该势随 $|x| \to \infty$充分快速衰减），另一些则会透射。还可能存在若干具有离散能级的束缚态。盖尔范德–列维坦–马尔琴科理论表明，给定

- 能级 E,
- 透射概率 T,

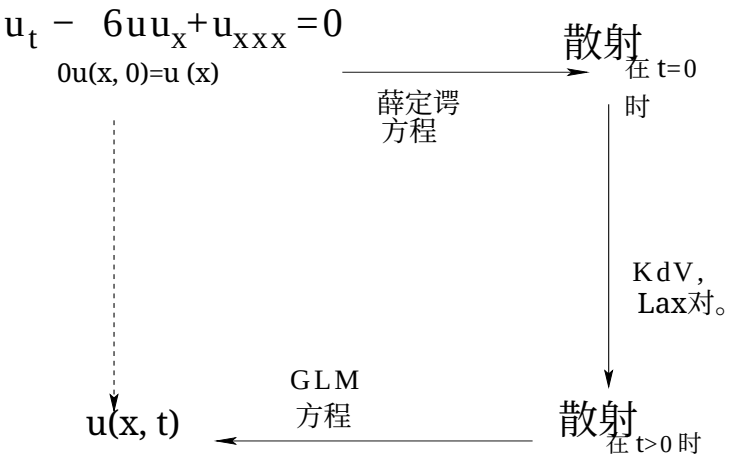
[1]这类实验将在大型强子对撞机 LHC 上进行。LHC 于 2008 年 9 月在 CERN 启用，坐落于日内瓦郊外、瑞士与法国边境下方一条长 27 公里的隧道内。人们希望能够发现难以捉摸的希格斯粒子以及一大批其他奇异形态的物质。

图 2.2：反射与透射



- 反射概率 R,

可以求出势 u：给定 $u_0(x)$，即可求出 $t = 0$处的散射数据。如果 $u(x,t)$ 是 KdV方程 (2.1.1) 的一个解，且 $u(x,0) = u_0(x)$，那么散射数据 ($E(t)$ $T(t)$ $R(t)$) 满足简单的线性常微分方程，从而确定其时间演化。特别是， E 不依赖于 t。确定该数据后，通过求解一个线性积分方程即可恢复 $u(x,t)$。用于求解 KdV 的 Gardner、Green、Kruskal和Miura方案总结如下表



我们应当强调，在这种方法中，散射数据的时间演化由 KdV 控制，¨而不是由含时薛定谔方程控制。事实上，含时¨薛定谔方程在接下来的讨论中不会起任何作用。

2.2.1 直接散射

以下讨论总结了粒子在势 [18, 16]上散射的一维量子力学基础。

- 令 $E = k^2$，并将薛定谔方程改写为

$$Lf := \Big(-\frac{d^2}{dx^2} + u(x) \Big) f = k^2 f \tag{2.2.5}$$

其中 L 称为薛定谔算子。考虑满足以下条件的势函数 $u(x)$

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|x|)|u(x)|dx < \infty$$

这当然意味着，当 $x \to \pm\infty$趋于无穷时，$|u(x)| \to 0$。这个条件保证离散能级的数量有限（因此排除了简谐振子和氢原子）。

- 在 $x \to \pm\infty$ 处，问题 (2.2.5) 化为“自由粒子”

$$f_{xx} + k^2 f = 0$$

其通解为

$$f = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}.$$

这对常数 (C_1, C_2) 在 $+\infty$ 处和 $-\infty$处通常不同。

- 对于每个 $k \neq 0$，方程 (2.2.5) 的解构成一个 2 维复向量空间G_k。$u(x)$ 为实数意味着，如果 f 满足方程 (2.2.5)，那么 $\overline{f}$ 也满足该方程。

考虑由渐近条件确定的 G_k 的两组基 $(\psi, \overline{\psi})$ 和 $(\phi, \overline{\phi})$

$$\psi(x,k) \cong e^{-ikx}, \quad \overline{\psi}(x,k) \cong e^{ikx} \qquad \text{as} \quad x \longrightarrow \infty$$

and

$$\phi(x,k) \cong e^{-ikx}, \quad \overline{\phi}(x,k) \cong e^{ikx} \qquad \text{as } x \longrightarrow -\infty.$$

任意解都可以按第一组基展开，因此特别有

$$\phi(x,k) = a(k)\psi(x,k) + b(k)\overline{\psi}(x,k).$$

因此，如果 $a \neq 0$，我们可以写成

$$\frac{\phi(x,k)}{a(k)} = \begin{cases} \frac{e^{-ikx}}{a(k)}, & \text{for } x \to -\infty \\ e^{-ikx} + \frac{b(k)}{a(k)} e^{ikx}, & \text{for } x \to \infty. \end{cases} \tag{2.2.6}$$

- 考虑一个从 ∞ 入射的粒子，其波函数为 e^{-ikx} （图 2.2）。透射系数 $t(k)$ 和反射系数 $r(k)$ 由下式给出

$$t(k) = \frac{1}{a(k)}, \quad r(k) = \frac{b(k)}{a(k)}.$$

它们满足

$$|t(k)|^2 + |r(k)|^2 = 1 \tag{2.2.7}$$

这一点直观上很清楚，因为粒子“要么发生反射，要么发生透射”。要证明这一点，回想一下，给定朗斯基行列式

$$W(f,g) = fg_x - gf_x$$

任意两个函数的

$$W_x = fg_{xx} - gf_{xx} = 0$$

若 f、g 都满足薛定谔方程 (2.2.5)。因此， $W(\phi,\overline{\phi})$ 是一个常数，可通过 $x \to -\infty$ 计算得出

$$W(\phi,\overline{\phi}) = e^{-ikx}(e^{ikx})_x - e^{ikx}(e^{-ikx})_x = 2ik.$$

在 $x \to \infty$ 处进行类似计算，得到 $W(\psi,\overline{\psi}) = 2ik$。另一方面

$$\begin{aligned} W(\phi,\overline{\phi}) &= W(a\psi + b\overline{\psi}, \overline{a}\overline{\psi} + \overline{b}\psi) \\ &= |a|^2 W(\psi,\overline{\psi}) + a\overline{b}W(\psi,\psi) + b\overline{a}W(\overline{\psi},\overline{\psi}) - |b|^2 W(\psi,\overline{\psi}) \\ &= 2ik(|a|^2 - |b|^2). \end{aligned}$$

因此， $|a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1$，或者等价地说，式 (2.2.7) 成立。

2.2.2 散射数据的性质

散射态与束缚态之间存在联系。假设 $k \in \mathbb{C}$，并通过解析延拓允许 $a(k)$ 和 $b(k)$ 取复值。令 $k = i\chi$ （当 $\chi > 0$ 时）。散射态具有

$$\phi \sim \begin{cases} a(i\chi)e^{\chi x} + b(i\chi)e^{-\chi x} & \text{for } x \to \infty \\ e^{\chi x}, & \text{for } x \to -\infty \end{cases} \tag{2.2.8}$$

这会产生能量为 $E = -\chi^2$ 的束缚态，当且仅当 $a(i\chi) = 0$。因此，束缚态能量对应于 a 在正虚轴上的零点。

在散射理论中（例如参见[16]），可以证明如下结论

- $a(k)$在上半平面 $Im(k) > 0$上是全纯的。
- $\{Im(k) \geq 0, |k| \to \infty\} \quad \longrightarrow \quad |a(k)| \to 1.$
- $a(k)$在上半平面内的零点位于虚轴上。这些零点的数量有限，当且仅当

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|x|)|u(x)| < \infty.$$

因此 $a(i\chi_1) = \cdots = a(i\chi_N) = 0$ 其中 $\chi_n \in \mathbb{R}$ 可以按如下顺序排列

$$\chi_1 > \chi_2 > \cdots > \chi_N > 0.$$

- 考察 ϕ 在这些零点处的渐近行为。公式（2.2.6）给出

$$\phi(x, i\chi_n) = \begin{cases} e^{-i(i\chi_n)x}, & \text{for } x \to -\infty \\ a(i\chi_n)e^{-i(i\chi_n)x} + b(i\chi_n)e^{i(i\chi_n)}, & \text{for } x \to \infty. \end{cases}$$

Thus

$$\phi(x, i\chi_n) = \begin{cases} e^{\chi_n x}, & \text{for } x \to -\infty \\ b_n e^{-\chi_n x}, & \text{for } x \to \infty. \end{cases} \tag{2.2.9}$$

其中 $b_n = b(i\chi_n)$。我们应强调，这些考虑适用于谱的离散部分，因此 b_n 应被视为独立于反射系数中出现的 b 。可以证明 $b_n \in \mathbb{R}$ ，并且它满足

$$b_n = (-1)^n |b_n|$$

且 $ia'(i\chi_n)$ 与 b_n同号。

此外

$$\Big(-\frac{d^2}{dx^2} + u(x) \Big)\phi(x, i\chi_n) = -\chi_n^2 \phi(x, i\chi_n)$$

因此， ϕ 是能量为 $E = -\chi_n^2$的平方可积函数。

我们来看几个例子

- 例子。考虑 $L_0 = -\partial_x{}^2 + \chi^2$ ，它使 $u = 0$ 的能级移动了 χ^2。求解$L_0 f = Ef$ 可得

$$f = \begin{cases} C_1 \sin(\sqrt{E - \chi^2}x) + C_2 \cos(\sqrt{E - \chi^2}x), & \text{for } E > \chi^2 \\ C_1 x + C_2 \quad \text{for } E = \chi^2 \\ C_1 e^{-\sqrt{\chi^2 - E}x} + C_2 e^{\sqrt{\chi^2 - E}x} & \text{for } E < \chi^2. \end{cases}$$

No其中没有一个可归一化，因此这个势只允许散射态 es.

- 例子。设 $L_1 = -\partial_x{}^2 + \chi^2 + u(x)$，其中

$$u(x) = -\frac{2\chi^2}{\cosh^2 \chi x}$$

这是所谓的 P¨oschl–Teller 势。

我们将在 §2.3.1 中看到，这个势构成了 KdV 单孤子解的初始数据。我们将证明，只有一个满足 $E = -\chi^2$ 的束缚态，且反射系数为零。

产生算符与湮灭算符

$$\alpha = \partial_x + \chi \tanh(\chi x), \quad \alpha^\dagger = -\partial_x + \chi \tanh(\chi x)$$

满足 $\alpha\alpha^\dagger = L_0$ 和 $\alpha^\dagger\alpha = L_1$。我们寻找满足 $Lf = Ef$ 且$E < 0$的 $L = -\partial_x{}^2 + u = L_1 - \chi^2$束缚态。因此

$$\alpha^\dagger \alpha f = (E + \chi^2)f$$

并且 $<\alpha f、\ \alpha f>=(E+\chi^2)\ <f$对于束缚态是有限的。因此， $\alpha f=0$或αf 可归一化，并且是 L_0 的束缚态，因为

$$\alpha\alpha^\dagger(\alpha f)=(E+\chi^2)\alpha f.$$

然而，在前面的例子中，我们已经证明 $\alpha\alpha^\dagger$ 没有任何束缚态。因此， $\alpha f=0$ 和

$$f=\sqrt{\frac{\chi}{2}}\frac{1}{\cosh\chi x},\quad E=-\chi^2.$$

现在寻找能量为 $E=k^2>0$的散射态。考虑 $-{\partial_x}^2 f=k^2 f$，并选取 $f=e^{-ikx}$，使其对应于从 ∞入射的波。现在 $\alpha\alpha^\dagger f=(k^2+\chi^2)f$，因此

$$L(\alpha^\dagger f)=k^2(\alpha^\dagger f).$$

因此， $\alpha^\dagger f$ 是 L 的散射态，所有散射态都具有这种形式。由于$x\to\infty$，这给出 $\alpha^\dagger f\sim(ik+\chi)e^{-ikx}$。其中没有 e^{ikx} 项，因此由 (2.2.6) 可知，$b(k)=r(k)=0$，且该势是无反射的。我们还得出，如果 $k=i\chi$，则 $\lim_{x\to\infty}\alpha^\dagger f=0$。因此， $k=i\chi$ 是 a的一个零点，由此我们得到能量为$E=-\chi^2$的束缚态。

2.2.3 逆散射

我们希望根据由反射系数和能级组成的散射数据，恢复势 $u(x)$

$$r(k),\{\chi_1,\ldots,\chi_N\}$$

使得 $E_n=-\chi_n^2$ 和

$$\phi(x,i\chi_n)=\begin{cases} e^{\chi_n x}, & \text{for } x\to-\infty \\ b_n e^{-\chi_n x}, & \text{for } x\to\infty. \end{cases}$$

盖尔范德–列维坦–马尔琴科逆散射变换包括以下步骤

- 设定

$$F(x)=\sum_{n=1}^{N}{b_n}^2 e^{-\chi_n x}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(k)e^{ikx}dk. \tag{2.2.10}$$

- 考虑 GLM 积分方程

$$K(x,y)+F(x+y)+\int_x^\infty K(x,z)F(z+y)dz=0 \tag{2.2.11}$$

  并求解出 $K(x,y)$。

- 然后

$$u(x)=-2\frac{d}{dx}K(x,x) \tag{2.2.12}$$

  是相应薛定谔方程中的势。

这些公式以与 t 无关的方式给出，但可以将 t 引入为参数。如果已知散射数据随时间的变化，那么 GLM 积分方程$K(x,y,t)$ 的解也会依赖于 t，势 $u(x,t)$ 也会如此。

2.2.4 Lax公式

如果 Schr¨odinger 方程中的势 $u(x)$ 依赖于参数 t，其特征值通常会随 t 变化。逆散射变换就是等谱问题的一个例子，在这种问题中，特征值不会发生变化

命题 2.2.1 若存在一个微分算子 A，使得

$$\dot{L} = [L, A] \tag{2.2.13}$$

其中

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t),$$

那么 L 的谱不依赖于 t。

证明。考虑特征值问题

$$Lf = Ef.$$

求导得

$$L_t f + Lf_t = E_t f + Ef_t.$$

注意 $ALf = EAf$，并使用表示式 (2.2.13) 求出

$$(L - E)(f_t + Af) = E_t f. \tag{2.2.14}$$

对该方程与 f 取内积 (2.2.4)，并利用 L 是自伴的这一事实

$$E_t||f||^2 =< f, (L-E)(f_t + Af) >=< (L-E)f, f_t + Af >= 0.$$

因此 $E_t = 0$。这一推导还表明，如果 $f(x,t)$ 是 L 的特征值为 $E = k^2$ 的特征函数，那么 ($f_t + Af$) 也是。

□

使该方法适用于 KdV方程 (2.1.1) 的原因是，KdV 等价于 (2.2.13)，其中

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t), \quad A = 4\frac{d^3}{dx^3} - 3\Big(u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u\Big). \tag{2.2.15}$$

要证明这一结论，只需计算（2.2.13）两边作用于一个函数时的结果，并验证that $[L, A]$ 是乘以 $6uu_x - u_{xxx}$ 的算子（也就是 $L = u_t$）。这就是 KdV [13]的 Lax表示。这类表示（对算子 L、A采用不同的选取）是偏微分方程和常微分方程可积性的基础。

2.2.5 散射数据的演化

现在我们将利用 Lax表示来确定散射数据的时间演化。

- 连续谱。假设薛定谔方程中的势 $u(x,t)$ 满足 KdV方程 (2.1.1)。设 $f(x,t)$ 是一个特征函数，其渐近行为由 $Lf = k^2 f$ 定义的薛定谔算子 ¨ 确定

$$f = \phi(x,k) \longrightarrow e^{-ikx}, \qquad \text{as } x \to -\infty.$$

方程 (2.2.14) 意味着，如果 $f(x,t)$ 是 L 的特征函数，特征值为 k^2，那么 $(f_t + Af)$ 也是特征函数。此外，当 $|x| \to \infty$ 时， $u(x) \to 0$，因此

$$\dot{\phi} + A\phi \longrightarrow 4\frac{d^3}{dx^3}e^{-ikx} = 4ik^3 e^{-ikx} \qquad \text{as } x \to -\infty.$$

˙因此， $4ik^3\phi(x,k)$ 和 $\phi + A\phi$ 是薛定谔算子的特征函数，且具有相同的渐近行为，由此可知它们必定相等：它们的差属于 $L - k^2$ 的核，因此必定是 ψ 和 $\overline{\psi}$ 的线性组合。但这个组合在 ∞ 处为零，因此利用 ψ 和 $\overline{\psi}$ 的线性无关性，可知它处处为零。因此，常微分方程

$$\dot{\phi} + A\phi = 4ik^3\phi$$

对所有 $x \in \mathbb{R}$ 均成立。我们将利用这个常微分方程以及 $+\infty$ 处的渐近行为，求出 $a(k)$ 和 $b(k)$ 满足的常微分方程。回顾一下，

$$\phi(x,k) = a(k,t)e^{-ikx} + b(k,t)e^{ikx} \quad \text{as } x \to \infty.$$

将此式代入常微分方程，得到

$$\begin{aligned} \dot{a}e^{-ikx} + \dot{b}e^{ikx} &= \Big(-4\frac{d^3}{dx^3} + 4ik^3\Big)(ae^{-ikx} + be^{ikx}) \\ &= 8ik^3 be^{ikx}. \end{aligned}$$

比较指数项，得到

$$\dot{a} = 0, \qquad \dot{b} = 8ik^3 b$$

and

$$a(k,t) = a(k,0), \qquad b(k,t) = b(k,0)e^{8ik^3 t}.$$

- 离散谱。在上一节中，我们已经证明离散能级不随时间变化，即 $E = -{\chi_n}^2, \chi_n(t) = \chi_n(0)$。由于 $x \to \infty$ 波函数为$f \sim b_n(t)e^{-\chi_n x}$。另一个具有 $E = -{\chi_n}^2$ 的能量本征态为 $f_t + Af$。一维离散能级的非简并性意味着 $f_t + Af = cf$，并且根据正交性有 $c = 0$。因此 $f_t + Af = 0$，且 $A \sim 4{\partial_x}^3$，因为 $x \to \infty$。因此 $b_n - 4{\chi_n}^3 b_n = 0$。

因此，散射数据的演化如下

$$\begin{aligned} a(k,t) &= a(k,0), \\ b(k,t) &= b(k,0)e^{8ik^3t}, \\ r(k,t) &= \frac{b(k,t)}{a(k,t)} = r(k,0)e^{8ik^3t}, \\ \chi_n(t) &= \chi_n(0), \\ b_n(t) &= b_n(0)e^{4\chi_n^3 t}, \\ \beta_n(t) &\equiv {b_n}^2 = \beta_n(0)e^{8\chi_n^3 t}. \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

2.3 无反射势与孤子

公式 (2.2.16) 表明，如果反射系数初始为零，那么它对所有t都为零。在这种情形下，可以显式地执行逆散射过程。由此得到的解称为 N-孤子，其中 N是 $a(k)$ 的零点 $i\chi_1$、……、 $i\chi_N$ 的个数。这些解描述了单孤子 (2.1.3) 之间的碰撞，且没有任何非弹性效应。碰撞后产生的单孤子与碰撞前的“相同”。这一事实于20世纪60年代通过数值计算发现，并激发了人们对整个领域的兴趣。

假设 $r(k,0) = 0$，则由 (2.2.16) 可得

$$r(k,t) = 0.$$

2.3.1 单孤子解

我们首先推导单孤子解。公式 (2.2.10) 取 $N = 1$ 时给出

$$F(x,t) = \beta(t)e^{-\chi x}.$$

这取决于 x，也取决于 t，因为根据（2.2.16），$\beta(t) = \beta(0)e^{8\chi^3 t}$。在以下计算中，我们将省略这种显式的 t 依赖关系，并将 t 视为参数。GLM方程（2.2.11）变为

$$K(x,y) + \beta e^{-\chi(x+y)} + \int_x^\infty K(x,z)\beta e^{-\chi(z+y)}dz = 0.$$

设解的形式为

$$K(x,y) = K(x)e^{-\chi y}.$$

由此得到

$$K(x) + \beta e^{-\chi x} + K(x)\beta\int_x^\infty e^{-2\chi z}dz = 0,$$

并经过简单积分

$$K(x) = -\frac{\beta e^{-\chi x}}{1 + \frac{\beta}{2\chi}e^{-2\chi x}}.$$

Thus

$$K(x,y) = -\frac{\beta e^{-\chi(x+y)}}{1+\frac{\beta}{2\chi}e^{-2\chi x}}.$$

这个函数函数也取决于 t ，因为 β 也是如此。最后，公式（2.2.12）给出 s

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -2\frac{\partial}{\partial x}K(x,x) = -\frac{4\beta\chi e^{-2\chi x}}{(1+\frac{\beta}{2\chi}e^{-2\chi x})^2} \\ &= -\frac{8\chi^2}{\hat{\beta}^{-1}e^{\chi x}+\hat{\beta}e^{-\chi x}}, \quad \text{where} \quad \hat{\beta}=\sqrt{\beta/(2\chi)} \\ &= -\frac{2\chi^2}{\cosh\left(\chi(x-4\chi^2 t-\phi_0)\right)^2}, \quad \phi_0 = \frac{1}{2\chi}\log\left(\frac{\beta_0}{2\chi}\right) \end{aligned}$$

这就是单孤子解（2.1.3）。

相应的薛定谔方程解的能量决定了孤子的振幅和速度。孤子的形式为 $u = u(x-4\chi^2 t)$, 因此它表示一个以速度 $4\chi^2$ 向右传播、相位为 ϕ_0 的波。

2.3.2 N孤子解

共有 N 个能级，我们将其排序为 $\chi_1 > \chi_2 > \ldots > \chi_N > 0$。函数（2.2.10）为

$$F(x) = \sum_{n=1}^{N} \beta_n e^{-\chi_n x}$$

而 GLM方程（2.2.11）变为

$$K(x,y) + \sum_{n=1}^{N} \beta_n e^{-\chi_n(x+y)} + \int_x^\infty K(x,z)\sum_{n=1}^{N}\beta_n e^{-\chi_n(z+y)}dz = 0.$$

这个积分方程的核在某种意义上是退化的,

$$F(z+y) = \sum_{n=1}^{N} k_n(z)h_n(y),$$

因此我们寻求如下形式的解:

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{N} K_n(x)e^{-\chi_n y}.$$

积分一次后得到

$$\sum_{n=1}^{N}(K_n(x)+\beta_n e^{-\chi_n x})e^{-\chi_n y} + \sum_{n=1}^{N}\left(\beta_n\sum_{m=1}^{N}\frac{K_m(x)}{\chi_m+\chi_n}e^{-(\chi_n+\chi_m)x}\right)e^{-\chi_n y} = 0.$$

这些函数 $e^{-\chi_n y}$ 线性无关，因此

$$K_n(x) + \beta_n e^{-\chi_n x} + \sum_{m=1}^{N} \beta_n K_m(x) \frac{1}{\chi_m + \chi_n} e^{-(\chi_n + \chi_m)x} = 0.$$

定义一个矩阵

$$A_{nm}(x) = \delta_{nm} + \frac{\beta_n e^{-(\chi_n + \chi_m)x}}{\chi_n + \chi_m}.$$

线性方程组变为

$$\sum_{m=1}^{N} A_{nm}(x) K_m(x) = -\beta_n e^{-\chi_n x},$$

or

$$AK + B = 0,$$

其中 B 是一个列向量

$$B = [\beta_1 e^{-\chi_1 x}, \beta_2 e^{-\chi_2 x}, \cdots, \beta_n e^{-\chi_n x}]^T.$$

该方程组的解为

$$K = -A^{-1} B.$$

利用关系式

$$\frac{dA_{mn}(x)}{dx} = -B_m e^{-\chi_n x}$$

我们可以写成

$$\begin{aligned} K(x,x) &= \sum_{m=1}^{N} e^{-\chi_m x} K_m(x) = -\sum_{m,n=1}^{N} e^{-\chi_m x} (A^{-1})_{mn} B_n \\ &= \sum_{m,n=1}^{N} (A^{-1})_{mn} \frac{dA_{nm}(x)}{dx} = \mathrm{Tr}\Big(A^{-1} \frac{dA}{dx}\Big) \\ &= \frac{1}{\det A} \frac{d}{dx} \det A. \end{aligned}$$

最后　我们重新引入显式的 t 依赖关系，以写出 N孤子解 a　　s

$$u(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln\left(\det A(x)\right) \qquad \text{where} \qquad A_{nm}(x) = \delta_{nm} + \frac{\beta_n e^{-(\chi_n + \chi_m)x}}{\chi_n + \chi_m}. \tag{2.3.17}$$

2.3.3 双孤子渐近行为

让我们更详细地分析一个带有 $\chi_1 > \chi_2$ 的双孤子解。设

$$\tau_k = \chi_k x - 4\chi_k^3 t, \qquad k = 1, 2$$

并考虑行列式

$$\det A = \Big(1 + \frac{\beta_1(0)}{2\chi_1} e^{-2\tau_1}\Big)\Big(1 + \frac{\beta_2(0)}{2\chi_2} e^{-2\tau_2}\Big) - \frac{\beta_1(0)\beta_2(0)}{(\chi_1+\chi_2)^2} e^{-2(\tau_1+\tau_2)}.$$

我们首先分析情形 $t \to -\infty$。在极限 $x \to -\infty$ 下，我们有 $\det A \sim e^{-2(\tau_1+\tau_2)}$，因此

$$\log(\det A) \sim \text{const} - 2(\tau_1 + \tau_2)$$

以及 $u \sim 0$，这一点我们已经知道。现在沿着 x 轴移动，并考察当 $\tau_1 = 0$ 以及当 $\tau_2 = 0$时 $\det A$ 中的主导项。我们首先到达点 $\tau_1 = 0$，或者

$$x = 4\chi_1^2 t.$$

在该点的邻域内，$\tau_2 = 4t\chi_2(\chi_1^2 - \chi_2^2) \ll 0$，并且

$$\det A \sim \frac{\beta_2(0)}{2\chi_2} e^{-2\tau_2}\Big(1 + \frac{\beta_1(0)}{2\chi_1}\Big(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\Big)^2 e^{-2\tau_1}\Big).$$

对 $\det A$ 取对数并求导，得到

$$u \sim -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(1 + \frac{\beta_1(0)}{2\chi_1}\Big(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\Big)^2 e^{-2\chi_1(x-4\chi_1^2 t^2)}\Big)$$

这看起来像是一个带有相位的单孤子解

$$(\phi_1)_- = \frac{1}{2\chi_1}\log\Big(\frac{\beta_1(0)}{2\chi_1}\Big(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\Big)^2\Big).$$

现在我们沿着 x 轴移动，直到到达 $\tau_2 = 0$。重复上述分析可知，此时 $\tau_1 = 4\chi_1(\chi_2^2 - \chi_1^2)t \gg 0$，并且在点 $x = 4\chi_2^2 t$ 附近有

$$\det A \sim 1 + \frac{\beta_2(0)}{2\chi_2} e^{-2\tau_2}.$$

因此，函数 u 看起来像一个具有某个相位的单孤子解

$$(\phi_2)_- = \frac{1}{2\chi_2}\log\Big(\frac{\beta_2(0)}{2\chi_2}\Big).$$

当 t 趋近于 0 时，两个孤子合并，具体行为取决于比值 χ_1/χ_2。

我们进行与 $t \to \infty$类似的分析。如果 $x \to \infty$，那么 $\det A \sim 1$ 且 $u \sim 0$。我们沿着 x 轴向左移动，直到到达 $\tau_1 = 0$，此时 $\tau_2 \gg 0$，而 u 的剖面由具有该相位的单孤子给出

$$(\phi_1)_+ = \frac{1}{2\chi_1}\log\Big(\frac{\beta_1(0)}{2\chi_1}\Big).$$

然后我们到达这样的时刻 $\tau_2 = 0, \tau_1 \ll 0$ 此时只有一个孤子，其相位为

$$(\phi_2)_+ = \frac{1}{2\chi_2}\log\Big(\frac{\beta_2(0)}{2\chi_1}\Big(\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}\Big)^2\Big).$$

因此，较大的孤子已经超越了较小的孤子。这种渐近分析表明，孤子保持了原有形状，但相位发生了变化

$$\begin{aligned}\Delta\phi_1 &= (\phi_1)_+ - (\phi_1)_- = -\frac{1}{\chi_1}\log\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2},\\ \Delta\phi_2 &= (\phi_2)_+ - (\phi_2)_- = -\frac{1}{\chi_2}\log\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}.\end{aligned}$$

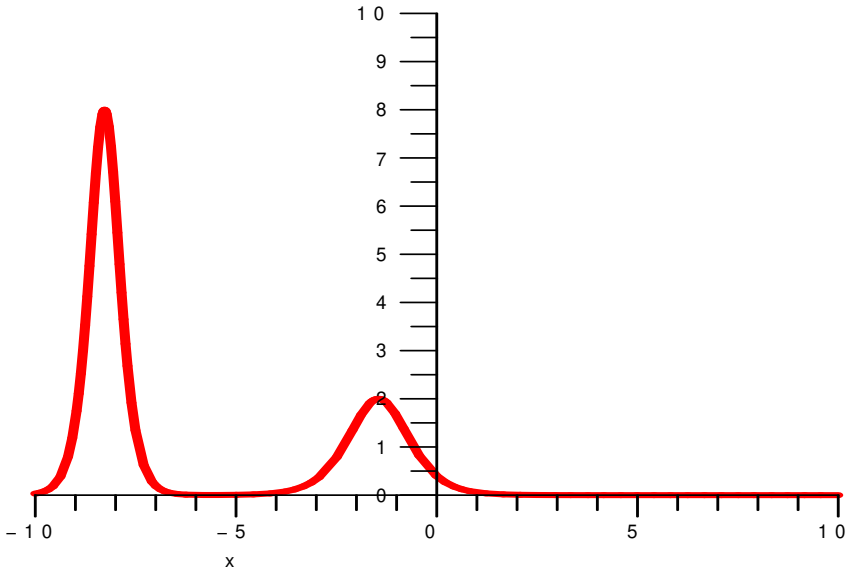
相互作用唯一产生的结果可通过

$$-\log\frac{\chi_1-\chi_2}{\chi_1+\chi_2}$$

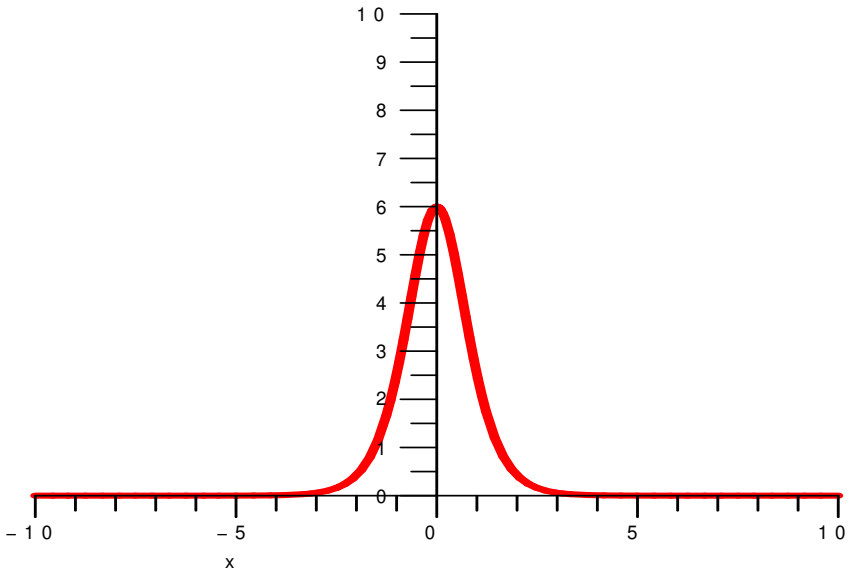
来衡量；当速度 χ_1 与 χ_2 之间的差值较小时，该值较大。

图中展示了 $t=-1$、$t=0$ 和 $t=1$ 时的双孤子解（对于所选参数，$t=-1$ 被视为一个较大的负时间，此时两个孤子彼此分离）。应将其理解为快孤子与慢孤子之间的一次穿越碰撞。较大、速度较快的孤子振幅为 8，较小、速度较慢的孤子振幅为 2。慢孤子的速度是快孤子的一半。在 $t=-1$时，两个孤子彼此分离。在 $t=0$ 时，碰撞发生。波振幅小于两列波振幅之和。在 $t=1$ 时，较大的孤子已经超过了较小的孤子。它们的振幅和形状均未改变。

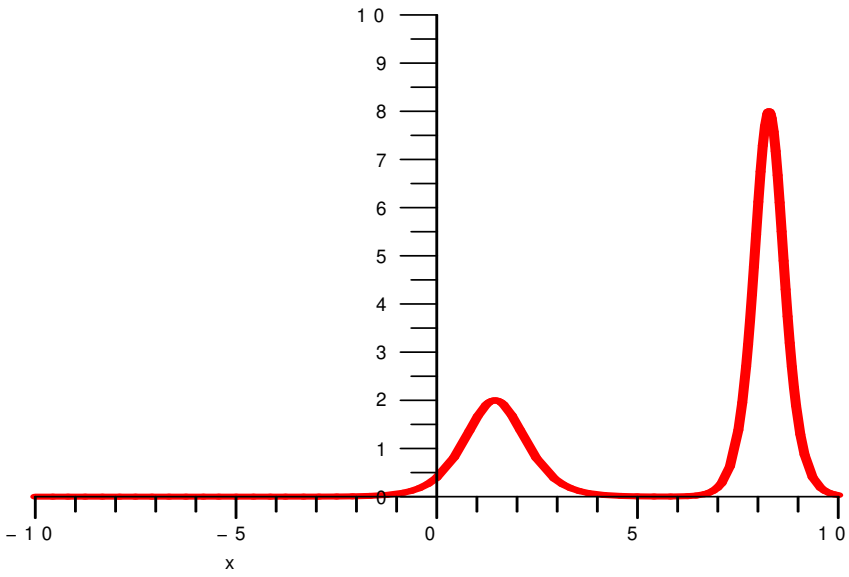
$t = -1$处的双孤子解。



$t = 0$时的双孤子解。总振幅小于两个振幅之和。



$t = 1$处的双孤子解。碰撞过程中振幅和形状保持不变。



这一图像可推广到 $N > 2$。通解 (2.3.17) 在渐近意义下表示 N个彼此分离、按速度排序的孤子。最高（因此速度最快）的孤子位于前方，其后依次是第二高的孤子，等等。在 $t = 0$处发生“相互作用”，随后各个孤子以相反的顺序重新出现，如 $t \to \infty$所示。总相位移是各对孤子的相位移 [16]之和。

2.3.4 初始数据

Schr¨odinger 算子中的离散特征值 N 的数量等于 $t \to \pm\infty$处孤子的数量。这个数量当然编码在初始条件中。要了解这一点，请考虑

$$u(x,0) = u_0(x) = -\frac{N(N+1)}{\cosh^2(x)}, \quad N \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.3.18}$$

将 $\xi = \tanh(x) \in (-1, 1)$ 代入 Schr¨odinger 方程

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} + u_0(x) f = k^2 f$$

得到缔合勒让德方程

$$\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{df}{d\xi}\right) + \left(N(N+1) + \frac{k^2}{1-\xi^2}\right) f = 0.$$

幂级数解的分析表明，当 $k^2 = -\chi^2$和 $\chi = 1, 2, \ldots, N$时，平方可积解存在。因此，GLM方程中的 $F(x)$ 为

$$F(x) = \sum_{n=1}^{N} \beta_n e^{-\chi_n x},$$

由此可应用前面的计算，得到 N 孤子解 (2.3.17) 的一个特例。关于这一点更完整的讨论，请参见 [5]

我们已经看到， $\chi = 1$ 的单孤子解的初始数据为 $u(x, 0) = -2\operatorname{cosh}^{-2}(x)$。该势具有一个束缚态。双孤子初始数据是具有两个束缚态的势 $u(x, 0) = -6\operatorname{cosh}^{-2}(x)$。现在考虑初始数据

$$u(x, 0) = -\frac{2.001}{\cosh^2(x)}.$$

这也有一个束缚态，但与（2.3.18）不同，它不是无反射的。KdV 的相应解可以通过数值方法求得。它产生一个孤子，但带有辐射尾。

第3章

哈密顿形式体系与零曲率表示

3.1 第一积分

我们将联系有限维可积系统的定义1.2.1，并说明 KdV 有无穷多个第一积分。改写表达式（2.2.6）

$$\phi(x,k)=\begin{cases} e^{-ikx}, & \text{for } x\to-\infty \\ a(k,t)e^{-ikx}+b(k,t)e^{ikx}, & \text{for } x\to\infty, \end{cases}$$

利用KdV方程确定散射数据的时间依赖关系后，公式（2.2.16）给出

$$\frac{\partial}{\partial t}a(k,t)=0,\quad \forall k$$

因此，只要散射数据对应的第一积分非平凡且相互独立，就能得到无穷多个第一积分。我们的目标是将这些第一积分表示为

$$I[u]=\int_{\mathbb{R}}P(u,u_x,u_{xx},\ldots)dx$$

其中 P 是 u 及其导数构成的多项式。

Set

$$\phi(x,t,k)=e^{-ikx+\int_{-\infty}^{x}S(y,t,k)dy}.$$

对于较大的 x ，公式（2.2.6）给出

$$e^{ikx}\phi\cong a(k)+b(k,t)e^{2ikx}.$$

如果我们假设 k 位于上半平面 $Im(k)$，则当 $x\to\infty$时，右端的第二项趋于 0。因此

$$\begin{aligned} a(k) &= \lim_{x\to\infty}e^{ikx}\phi(x,t,k)=\lim_{x\to\infty}e^{\int_{-\infty}^{x}S(y,t,k)dy} \\ &= e^{\int_{-\infty}^{\infty}S(y,t,k)dy}, \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

由于实解析性，上述公式在极限 $Im(k) \to 0$ 下也成立。现在我们将使用薛定谔方程，并将 t视为参数

$$-\frac{d^2\phi}{dx^2} + u\phi = k^2\phi$$

求出关于 S的方程。代入

$$\frac{d\phi}{dx} = (-ik + S(x,k))\phi, \quad \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dS}{dx}\phi + (-ik + S(x,k))^2\phi$$

得到黎卡提型方程

$$\frac{dS}{dx} - 2ikS + S^2 = u, \tag{3.1.2}$$

（我们强调，S 和 u 都依赖于 x 以及 t）。寻找如下形式的解

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n(x,t)}{(2ik)^n}.$$

将其代入（3.1.2）可得递推关系

$$S_1(x,t) = -u(x,t), \quad S_{n+1} = \frac{dS_n}{dx} + \sum_{m=1}^{n-1} S_m S_{n-m} \tag{3.1.3}$$

可求出前几项

$$S_2 = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad S_3 = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2, \quad S_4 = -\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2\frac{\partial}{\partial x}u^2,$$

$$S_5 = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u - 2u^3.$$

现在利用 $a(k)$ 对所有 k 都与时间无关这一性质 (2.2.16)，并将其与 (3.1.1) 结合，可得

$$\int_{\mathbb{R}} S_n(x,t)dx$$

它们是 KdV方程的第一积分。这些积分并非全部都是非平凡的。例如，上面给出的 S_2和 S_4 是全 x 导数，因此积分结果为 0（利用 u的边界条件）。所有偶数项 S_{2n}也同样如此。为此，令

$$S = S_R + iS_I$$

其中 S_R、 S_I 是实值函数，并将其代入 (3.1.2)。取虚部可得

$$\frac{dS_I}{dx} + 2S_R S_I - 2kS_R = 0$$

积分后得到

$$S_R = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\log(S_I - k).$$

偶数项

$$\frac{S_{2n}(x)}{(2ik)^{2n}}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

在 a 的展开中为实数。将其与 S_R 在 k 中的展开进行比较可知， S_{2n} 都是全导数，因此

$$\int_{\mathbb{R}} S_{2n} dx = 0.$$

现在让我们集中讨论其余的非平凡第一积分。令

$$I_{n-1}[u] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} S_{2n+1}(x,t)dx, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{3.1.4}$$

我们的分析表明

$$\frac{dI_n}{dt} = 0.$$

其中第一个就是 u 本身的积分。后两个分别称为动量和能量

$$I_0 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2 dx, \quad I_1 = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (u_x^2 + 2u^3)dx,$$

其中在最后一个积分中，我们将 {v1} 中的全导数单独提出

$$S_5 = -\frac{\partial^4}{\partial x^4}u + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u^2 + 2\frac{\partial}{\partial x}\Big(u\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - \Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 - 2u^3$$

并利用分部积分和边界条件将其消去。这两个第一积分通过诺特定理与 KdV 的平移不变性相关：如果 $u(x,t)$ 是一个解，那么 $u(x+x_0,t)$ 和 $u(x,t+t_0)$ 也都是解。构造这类对称性的系统方法将在第 4 章中介绍。

3.2 哈密顿形式体系

现在，我们可以将 KdV 写成哈密顿形式，其哈密顿泛函由能量积分 $H[u] = -I_1[u]$ 给出。首先进行计算。

$$\frac{\delta I_1[u]}{\delta u(x)} = -3u^2 + u_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_1[u]}{\delta u(x)} = -6uu_x + u_{xxx}.$$

回顾一下，偏微分方程的哈密顿正则方程具有形式 (1.3.11)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H[u]}{\delta u(x)}.$$

因此

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_1[u]}{\delta u(x)}, \tag{3.2.5}$$

就是 KdV方程。再经过一些推导（见 [16]），可以证明

$$\{I_m, I_n\} = 0$$

其中泊松括号由 (1.3.10) 给出，因此 KdV 确实在 Arnold–刘维尔意义下是可积的。例如

$$\begin{aligned}
\{I_n, I_1\} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta I_n}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta I_1}{\delta u(x)} dx = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\delta I_n}{\delta u(x)} u_t \, dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x} \Big)^k \frac{\partial S_{2n+1}}{\partial u^{(k)}} \Big) u_t \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{2n} \frac{\partial S_{2n+1}}{\partial u^{(k)}} \frac{\partial}{\partial t} u^{(k)} \, dx \\
&= \frac{d}{dt} I_n[u] = 0
\end{aligned}$$

其中我们使用了分部积分和边界条件。

3.2.1 双哈密顿系统

大多数可由逆散射变换求解的系统都具有两种不同的哈密顿结构。这意味着，对于给定的演化方程 $u_t = F(u, u_x, \ldots)$，存在两个泊松结构 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{E}$，以及两个泛函 $H_0[u]$ 和 $H_1[u]$，使得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\delta H_1}{\delta u(x)} = \mathcal{E} \frac{\delta H_0}{\delta u(x)}. \tag{3.2.6}$$

其中一个泊松结构可以写成形式 $\mathcal{D} = \partial/\partial x$，并对应于标准泊松括号 (1.3.10)，而第二个结构 $\mathcal{E}$ 则给出了一个新的泊松括号。

在第 1.2 节讨论的有限维情形中，这相当于有两个满足雅可比恒等式的反对称矩阵 ω、Ω。达布定理意味着存在一个局部坐标系 (p, q)，使其中一个矩阵（设为 ω）是常数反对称矩阵。然而，第二个结构 Ω 的矩阵分量将是 (p, q) 的非恒定函数。利用 (1.3.9)，我们将双哈密顿条件写为

$$\omega^{ab} \frac{\partial H_1}{\partial \xi^a} = \Omega^{ab} \frac{\partial H_0}{\partial \xi^a},$$

其中，ξ^a、$a = 1$、……、$2n$ 是相空间 M 上的局部坐标，而 H_0、H_1 是 M 上的两个不同函数。矩阵值函数

$$R_a{}^c = \Omega^{bc} (\omega^{-1})_{ab}$$

称为递归算子。可以将其视为作用于切空间 T_pM 上的自同态 $R = \Omega \circ \omega^{-1}$，其中 $p \in M$。这个自同态平滑地依赖于点p。在某些技术性假设下，这种递归算子的存在等价于

定理 1.2.2 意义下的 Arnold–Liouville 可积性。这是因为，给定一个第一积分 H_0，其余（$n-1$）个积分 H_1、……、H_{n-1} 可以递归地构造出来，方法是

$$\omega^{ab}\frac{\partial H_i}{\partial \xi^a} = R^i\Big(\omega^{ab}\frac{\partial H_0}{\partial \xi^a}\Big) \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

将这一形式体系推广到无限维情形，为构造第一积分提供了一种实用方法。对于 KdV，第一种哈密顿表述 (3.2.5) 具有$\mathcal{D} = \partial/\partial x$ 和

$$H_1[u] = \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{2}{u_x}^2 + u^3\Big)dx.$$

第二种表述可通过取

$$H_0[u] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2 dx, \qquad \mathcal{E} = -\partial_x^3 + 4u\partial_x + 2u_x.$$

一般而言，要求泊松结构的线性组合 $\mathcal{D} + c\mathcal{E}$ 也是泊松结构（即满足雅可比恒等式），对任意常数 $c \in \mathbb{R}$ 均成立。若满足这一条件，双哈密顿表述便能有效地构造第一积分。以下结果由 Olver 在其著作中证明 [17]

定理 3.2.1 设 (3.2.6) 是一个双哈密顿系统，其中泊松结构 $\mathcal{D}$ 非退化[1]，，并设

$$R = \mathcal{E} \circ \mathcal{D}^{-1}$$

为相应的递归算子。假设

$$R^n\Big(\mathcal{D}\frac{\delta H_0}{\delta u(x)}\Big)$$

属于　　对每个 $n = 1$、2、……，$\mathcal{D}$ 的像。于是存在守恒泛函　　ls

$$H_1[u], H_2[u], \ldots$$

它们彼此对合，即

$$\{H_m, H_n\} := \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta H_m}{\delta u(x)}\mathcal{D}\frac{\delta H_n}{\delta u(x)}dx = 0.$$

守恒泛函 $H_n[u]$ 由 H_0 递归构造，方法如下：

$$\mathcal{D}\frac{\delta H_n}{\delta u(x)} = R^n\Big(\mathcal{D}\frac{\delta H_0}{\delta u(x)}\Big), \qquad n = 1, 2, \ldots\ . \tag{3.2.7}$$

对于 KdV方程，递归算子为

$$R = -\partial_x^2 + 4u + 2u_x{\partial_x}^{-1}, \tag{3.2.8}$$

其中，$\partial_x{}^{-1}$ 在形式上定义为关于 x的积分，而公式 (3.2.7) 给出了构造第一积分 (3.1.4) 的另一种方法。

[1]微分算子 $\mathcal{D}$ 是退化的，当且仅当存在一个非零微分算子 $\hat{}\mathcal{D}$，使得 $\hat{}$算子 $\mathcal{D}\circ\mathcal{D}$ 恒等于零。

3.3 零曲率表示

我们将讨论一种更具几何意义的 Lax表示形式，其中可积系统作为矩阵偏微分方程超定系统的相容条件出现。设 $U(\lambda)$和$V(\lambda)$是关于(ρ,τ)的矩阵值函数，它们依赖于称为谱参数的辅助变量 λ。考虑如下线性偏微分方程组

$$\frac{\partial}{\partial\rho}v = U(\lambda)v, \quad \frac{\partial}{\partial\tau}v = V(\lambda)v \tag{3.3.9}$$

其中 v 是一个列向量，其分量依赖于 (ρ,τ,λ)。这是一个超定系统，因为方程的数量是未知数的两倍。通过交叉求导并交换偏导数，可以得到相容条件

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial\rho}v - \frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial\tau}v = 0$$

由此得到

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(U(\lambda)v) - \frac{\partial}{\partial\rho}(V(\lambda)v) = \Big(\frac{\partial}{\partial\tau}U(\lambda) - \frac{\partial}{\partial\rho}V(\lambda) + [U(\lambda),V(\lambda)]\Big)v = 0.$$

这必须对所有特征初始数据成立，因此线性方程组 (3.3.9) 一致，当且仅当非线性方程

$$\frac{\partial}{\partial\tau}U(\lambda) - \frac{\partial}{\partial\rho}V(\lambda) + [U(\lambda),V(\lambda)] = 0 \tag{3.3.10}$$

成立。整个方案称为零曲率表示[2]。大多数非线性可积方程都具有类似于 (3.3.10) 的零曲率表示。

- 例子。如果

$$U = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 2\lambda & \phi_\rho \\ \phi_\rho & -2\lambda \end{pmatrix}, \qquad V = \frac{1}{4i\lambda}\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -i\sin(\phi) \\ i\sin(\phi) & -\cos(\phi) \end{pmatrix} \tag{3.3.11}$$

  其中 $\phi = \phi(\rho,\tau)$，则 (3.3.10) 等价于正弦-戈登方程

$$\phi_{\rho\tau} = \sin(\phi).$$

- 例子。考虑如下零曲率表示：

$$\begin{aligned} U &= i\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & \overline{\phi} \\ \phi & 0 \end{pmatrix}, \\ V &= 2i\lambda^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2i\lambda\begin{pmatrix} 0 & \overline{\phi} \\ \phi & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \overline{\phi}_\rho \\ -\phi_\rho & 0 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} |\phi|^2 & 0 \\ 0 & -|\phi|^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

[2]这一术语源自 Zaharov 和 Shabat 的微分几何，其中 (3.3.10) 表示联络 $Ud\rho + Vd\tau$ 的曲率为零。

当复值函数 $\phi = \phi(\tau,\rho)$ 满足非线性薛定谔方程时，条件 (3.3.10) 成立

$$i\phi_\tau + \phi_{\rho\rho} + 2|\phi|^2\phi = 0.$$

这是另一个著名的孤子方程，可以通过逆散射变换求解。

矩阵 $U(\lambda)$ $V(\lambda)$ 存在一种自由度，称为规范不变性。设 $g = g(\tau,\rho)$ 是任意可逆矩阵。变换

$$\widetilde{U} = gUg^{-1} + \frac{\partial g}{\partial \rho}g^{-1}, \quad \widetilde{V} = gVg^{-1} + \frac{\partial g}{\partial \tau}g^{-1} \tag{3.3.13}$$

将零曲率方程的解映射为新的解：如果矩阵 (U,V) 满足~ ~(3.3.10)，那么矩阵 (U,V) 也满足该方程。为此，假设 $v(\rho,\tau,\lambda)$ 是线性方程组 (3.3.9) 的一个解，并要求 $\tilde{v} = g(\rho,\tau)v$ 对于某个 (U,V) 也是一个解。由此得到规范变换 (3.3.13)。

我们可以构造一种逆散射变换，从线性散射问题 (3.3.9) 中恢复 $U(\lambda)$ 和 $V(\lambda)$。如果一开始就知道线性方程组 (3.3.9) 的 n 个线性无关解 v_1、……、v_n，表示式 (3.3.10) 也可以成为求解的有效直接方法。设 $\Phi(\rho,\tau,\lambda)$ 是方程 (3.3.9) 的一个基本矩阵解。 Φ 的各列是 n 个线性无关解 v_1、……、v_n。于是，将 v 替换为 Φ 后，(3.3.9) 仍成立，我们可以写成

$$U(\lambda) = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\Phi^{-1}, \quad V(\lambda) = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}\Phi^{-1}.$$

在实际应用中，通常假设 Φ 中存在简单的 λ 依赖，其特征是具有给定重数的有限个极点。求解 (3.3.10) 的一种通用方案称为 dressing 方法，它基于黎曼–希尔伯特问题，下面我们将对此进行回顾。

3.3.1 黎曼–希尔伯特问题

设 $\lambda \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}+\{\infty\}$，并令 Γ 为扩充复平面中的一条闭合曲线。特别地，我们可以将 Γ 视为实轴 $-\infty < \lambda < \infty$，并将其看作经过 ∞ 的 $\overline{\mathbb{C}}$ 中的一个圆。设 $G = G(\lambda)$ 是围道 Γ 上的一个矩阵值函数。黎曼–希尔伯特问题是构造两个矩阵值函数 $G_+(\lambda)$ 和 $G_-(\lambda)$，使它们分别在围道内侧和外侧全纯，并且在围道上满足

$$G(\lambda) = G_+(\lambda)G_-(\lambda). \tag{3.3.14}$$

当 Γ 为实轴时，要求 G_+ 在上半平面内全纯，并要求 G_- 在下半平面内全纯。如果（G_+，G_-）是黎曼–希尔伯特问题的一个解，那么

$$\widetilde{G}_+ = G_+\, g^{-1}, \qquad \widetilde{G}_- = g\, G_-$$

对于任意可逆常矩阵 g，它也将是一个解。通过在其定义域内某一点固定 G_+ 或 G_- 的值，可以消除这种不确定性，例如令 $G_-(\infty) = I$。如果矩阵 $G_\pm$ 处处可逆，那么这种归一化可保证方程（3.3.14）的解唯一。

求解黎曼–希尔伯特问题归结为一个积分方程。选取归一化 $G_+(\lambda_0) = I$ 并令 $G_-(\lambda_0) = g$，其中 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$。假设黎曼–希尔伯特问题有如下形式的解

$$(G_+)^{-1} = h + \oint_\Gamma \frac{\Phi(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi$$

在围道 Γ内，且

$$G_- = h + \oint_\Gamma \frac{\Phi(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi$$

在 Γ外，其中 h 由归一化条件确定为

$$h = g - \oint_\Gamma \frac{\Phi(\xi)}{\xi - \lambda_0} d\xi.$$

可以利用普莱梅利公式 [3] 确定围道上的 $(G_+)^{-1}$ 和 G_-：若 $\lambda \in \Gamma$，则

$$\begin{aligned} (G_+)^{-1}(\lambda) &= h + \oint_\Gamma \frac{\Phi(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi + \pi i \Phi(\lambda) \\ G_-(\lambda) &= h + \oint_\Gamma \frac{\Phi(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi - \pi i \Phi(\lambda), \end{aligned}$$

假设这些积分按柯西主值定义。将这些表达式代入 (3.3.14)，得到关于 $\Phi = \Phi(\lambda)$的积分方程。若归一化是典范的，即 $h = g = 1$，则方程为

$$\frac{1}{\pi i}\Big(\int_\Gamma \frac{\Phi(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi + I \Big) + \Phi(\lambda)(G + I)(G - I)^{-1} = 0.$$

最简单的情形是标量黎曼-希尔伯特问题，其中 G、G_+、G_- 是普通函数。在这种情形下，解可以显式写为

$$\begin{aligned} G_+ &= \exp\Big(-\Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log G(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi \Big) \Big), \quad \mathrm{Im}(\lambda) > 0 \\ G_- &= \exp\Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log G(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi \Big), \quad \mathrm{Im}(\lambda) < 0. \end{aligned}$$

对（3.3.14）取对数即可验证这一点。

$$\log G = \log (G_-) - \log (G_+)^{-1}$$

并应用柯西积分公式。

3.3.2 dressing 方法

我们假设零曲率表示 (3.3.10) 中的矩阵 (U,V) 对谱参数 λ 呈有理依赖。这些矩阵各自的复解析数据由一组极点（包括位于 $\lambda=\infty$处的极点）及其相应重数组成。将因子定义为以下集合

$$S_U=\{\alpha_i,n_i,n_\infty\},\quad S_V=\{\beta_j,m_j,m_\infty\},\qquad i=1,\dots,n,\qquad j=1,\dots,m$$

使得

$$\begin{aligned}U(\rho,\tau,\lambda) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n_i}\frac{U_{i,r}(\rho,\tau)}{(\lambda-\alpha_i)^r}+\sum_{k=0}^{n_\infty}\lambda^k U_k(\rho,\tau)\\ V(\rho,\tau,\lambda) &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{r=1}^{m_i}\frac{V_{j,r}(\rho,\tau)}{(\lambda-\beta_j)^r}+\sum_{k=0}^{m_\infty}\lambda^k V_k(\rho,\tau).\end{aligned}\tag{3.3.15}$$

零曲率条件 (3.3.10) 是一个关于系数的非线性偏微分方程组

$$U_{i,r},\quad U_k,\quad V_{j,r},\quad V_k$$

U 和 V。考虑 (3.3.10) 的一个平凡解

$$U=U_0(\rho,\lambda),\qquad V=V_0(\tau,\lambda)$$

其中 U_0、V_0 是任意两个对易矩阵，其因子分别为 S_U 和 S_V。

设 Γ 是扩充复平面上的一条围道，不包含来自 $S_U\cup S_V$ 的任何点；设 $G(\lambda)$ 是定义在 Γ 上的光滑矩阵值函数。dressing 方法[21]是一种利用数据构造非平凡解的方法，其解析结构由因子 S_U、S_V 指定

$$(U_0,\,V_0,\,\Gamma,\,G).$$

它包含以下步骤

1. 求线性方程组的一个基本矩阵解

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\Psi_0=U_0(\lambda)\Psi_0,\quad \frac{\partial}{\partial\tau}\Psi_0=V_0(\lambda)\Psi_0.\tag{3.3.16}$$

由于 U_0、V_0 满足 (3.3.10)，该超定系统是相容的。

2. 在 Γ 上定义一个由 (ρ,τ) 参数化的光滑函数族 $G(\rho,\tau.\lambda)$

$$G(\rho,\tau,\lambda)=\Psi_0(\rho,\tau,\lambda)G(\lambda){\Psi_0}^{-1}(\rho,\tau,\lambda).\tag{3.3.17}$$

该函数族可进行分解

$$G(\rho,\tau,\lambda)=G_+(\rho,\tau,\lambda)G_-(\rho,\tau,\lambda)\tag{3.3.18}$$

其中，$G_+(\rho,\tau,\lambda)$ 和 $G_-(\rho,\tau,\lambda)$ 是上一小节所述黎曼–希尔伯特问题的解，并且分别在围道 Γ 的内部和外部全纯。

3. 对 (3.3.18) 关于 ρ 求导，并使用 (3.3.16) 和 (3.3.17)，得到

$$\frac{\partial G_+}{\partial \rho} G_- + G_+ \frac{\partial G_-}{\partial \rho} = U_0 G_+ G_- - G_+ G_- U_0.$$

因此，我们可以定义

$$U(\rho,\tau,\lambda) := \Big(\frac{\partial G_-}{\partial \rho} + G_- U_0\Big) {G_-}^{-1} = -{G_+}^{-1}\Big(\frac{\partial G_+}{\partial \rho} - U_0 G_+\Big)$$

它在 $\overline{\mathbb{C}}/S_U$ 上全纯。将刘维尔定理（即每个有界全纯函数都是常数）应用于扩充复平面，可知 $U(\rho,\tau,\lambda)$ 关于 λ 是有理函数，且与 U_0 具有相同的极点结构。

类似的论证可得

$$V(\rho,\tau,\lambda) := \Big(\frac{\partial G_-}{\partial \tau} + G_- V_0\Big) {G_-}^{-1} = -{G_+}^{-1}\Big(\frac{\partial G_+}{\partial \tau} - V_0 G_+\Big)$$

它与 V_0 具有相同的极点结构。

4. 定义两个矩阵值函数

$$\Psi_+ = {G_+}^{-1}\Psi_0, \qquad \Psi_- = {G_-}^{-1}\Psi_0.$$

方程 (3.3.16) 以及 (U,V) 的定义表明，这两个矩阵都满足超定系统

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\Psi_\pm = U(\lambda)\Psi_\pm, \quad \frac{\partial}{\partial \tau}\Psi_\pm = V(\lambda)\Psi_\pm.$$

因此，我们可以推断 $U(\rho,\tau,\lambda)$ 和 $V(\rho,\tau,\lambda)$ 具有形式 (3.3.15)，并满足零曲率关系 (3.3.10)。

这一过程称为“dressing”，因为通过将黎曼–希尔伯特问题应用于非平凡解 (U,V)，裸的平凡解 (U_0,V_0) 得到了 dressing。现在，给定围道上的另一个矩阵值函数 $G = G'(\lambda)$，我们可以重复整个过程，并将其应用于 (U,V)，而不是 (U_0,V_0)。这将得到另一个具有相同极点结构的解 (U',V')。因此，dressing 变换作用于 (3.3.10) 的解空间，并构成一个群。如果 $G = G_+G_-$ 且 $G' = {G'}_+{G'}_-$，那么

$$(G \circ G') = G_+ {G'}_+ {G'}_- G_-.$$

黎曼–希尔伯特问题 (3.3.18) 的解并不唯一。如果 $G_\pm$ 给出 $G(\rho,\tau,\lambda)$ 的一种分解，那么以下各项也同样如此

$$\widetilde{G}_+ = G_+ g^{-1}, \qquad \widetilde{G}_- = g G_-$$

其中，$g = g(\rho,\tau)$ 是一个矩阵值函数。相应的解 $(\widetilde{U},\widetilde{V})$ 与 (U,V) 通过规范变换 (3.3.13) 相关联。因此，固定规范等价于在扩充复平面上的某一点（例如 $\lambda = \infty$）固定 G_+ 或 G_- 的值。由此可得到黎曼–希尔伯特问题的唯一解，满足 $G_\pm(\infty) = G(\infty) = I$。

dressing 方法给出了具有指定奇异性的 U 和 V 的一般形式，但若要将其与具体的可积模型联系起来，还需要进一步处理，因为必须对 U 和 V 施加额外的代数约束。例如，在 Sine–Gordon 情形 (3.3.11) 中，矩阵是反厄米的。反厄米条件对围道 Γ 和函数 G 施加了某些约束。只有满足这些约束时，由达布变换过程得到的矩阵才能（在某种规范下）用正弦-戈登方程的解表示。

3.3.3 从Lax表示到零曲率表示

零曲率表示 (3.3.10) 比标量Lax表示更一般，但二者之间存在联系。首先，它们的相似之处在于，Lax方程 (2.2.13) 也可以作为两个超定偏微分方程的相容条件。为此，令 f 为 L 的特征函数，其特征值 $E=\lambda$ 是单重的，并考虑由拉克斯方程得到的关系 (2.2.14)。若 $E=\lambda$ 是单重特征值，则

$$\frac{\partial f}{\partial t}+Af=C(t)f$$

对于某个函数 C，它依赖于 t，但不依赖于 x。因此，可以利用一个积分ˆ ˆ因子，找到函数 $f=f(x,t,\lambda)$，使得

$$L\hat{f}=\lambda\hat{f},\qquad \frac{\partial\hat{f}}{\partial t}+A\hat{f}=0, \tag{3.3.19}$$

其中 L 是薛定谔算子， A 是某个微分算子（例如由 (2.2.15) 给出）。因此，Lax关系

$$\dot{L}=[L,A]$$

是超定系统 (3.3.19) 的一个相容条件。

考虑一个一般的标量 Lax对

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial^n}{\partial x^n}+u_{n-1}(x,t)\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}+\ldots+u_1(x,t)\frac{\partial}{\partial x}+u_0(x,t)\\ A &= \frac{\partial^m}{\partial x^m}+v_{m-1}(x,t)\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}+\ldots+v_1(x,t)\frac{\partial}{\partial x}+v_0(x,t) \end{aligned}$$

由系数依赖于（x,t）的微分算子给出。Lax方程

$$\dot{L}=[L,A]$$

（一般 情况下不止一个）是关于这些系数的非线性偏微分方程

$$(u_0,\ldots,u_{n-1},v_0,\ldots,v_{m-1}).$$

线性 n阶标量偏微分方程

$$L\hat{f}=\lambda\hat{f} \tag{3.3.20}$$

等价于一阶矩阵偏微分方程

$$\frac{\partial F}{\partial x}=U_LF$$

其中 $U_L = U_L(x,t,\lambda)$ 是一个 $n \times n$ 矩阵

$$U_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \lambda - u_0 & -u_1 & -u_2 & \dots & -u_{n-2} & -u_{n-1} \end{pmatrix}$$

且 F 是一个列向量

$$F = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})^T, \qquad \text{where} \quad f_k = \frac{\partial^k \hat{f}}{\partial x^k}.$$

现在考虑 (3.3.19) 中的第二个方程

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + A\hat{f} = 0$$

如果拉克斯方程成立，则该方程与 (3.3.20) 相容。我们对该方程 ˆ 关于 x 求导，并利用 (3.3.20) 将 $\partial_x^n f$ 表示为 λ 及其低阶导数的形式。重复此过程 $(n-1)$ 次，即可得到 A 作用于向量 F各分量上的结果。将其写作

$$\frac{\partial F}{\partial t} = V_A F$$

使用上述方法。这将得到一对一阶线性矩阵方程，并满足零曲率相容条件

$$\frac{\partial U_L}{\partial t} - \frac{\partial V_A}{\partial x} + [U_L, V_A] = 0.$$

˙当算子 (L, A) 满足拉克斯关系 $L = [L, A]$ 时，这些条件成立。

- 例子。让我们将这一过程应用于 KdV 拉克斯对 (2.2.15)。令

$$f_0 = \hat{f}(x,t,\lambda), \qquad f_1 = \partial_x \hat{f}(x,t,\lambda).$$

ˆ ˆ 特征值问题 $Lf = \lambda f$ 给出

$$(f_0)_x = f_1, \qquad (f_1)_x = (u - \lambda) f_0.$$

ˆ ˆ 方程 $\partial_t f + Af = 0$ 给出

$$\begin{aligned} (f_0)_t &= -4(f_0)_{xxx} + 6uf_1 + 3u_x f_0 \\ &= -u_x(f_0) + (2u + 4\lambda) f_1. \end{aligned}$$

我们对该方程关于 x 求导，并消去 ˆf 的二阶导数，得到

$$(f_1)_t = ((2u + 4\lambda)(u - \lambda) - u_{xx}) f_0 + u_x f_1.$$

现在，我们将方程整理为矩阵形式 $\partial_x F = U_L F, \partial_t F = V_A F$，其中 $F = (f_0, f_1)^T$，且

$$U_L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad V_A = \begin{pmatrix} -u_x & 2u + 4\lambda \\ 2u^2 - u_{xx} + 2u\lambda - 4\lambda^2 & u_x \end{pmatrix}. \tag{3.3.21}$$

因此，我们得到了 KdV 的零曲率表示。

3.4 层级与有限带隙解。

我们将通过介绍 KdV 层级来结束对 KdV方程的讨论。回顾一下，KdV 是一个哈密顿系统（3.2.5），其哈密顿量由第一积分$-I_1[u]$给出。现在，选择另一个第一积分 $I_n[u]$（或其常数倍）作为哈密顿量，并考虑方程

$$\frac{\partial u}{\partial t_n} = (-1)^n \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_n[u]}{\delta u(x)} \tag{3.4.22}$$

对于函数 $u = u(x, t_n)$。这导出了一组称为高阶KdV方程的无限方程组。前三个方程为

$$\begin{aligned} u_{t_0} &= u_x, \\ u_{t_1} &= 6uu_x - u_{xxx}, \\ u_{t_2} &= 10uu_{xxx} - 20u_xu_{xx} - 30u^2u_x - u_{xxxxx}. \end{aligned}$$

我们讨论过的逆散射法可以求解这些方程中的每一个；无论选择其中哪一个作为哈密顿量，泛函 I_k、$k = -1$、0、$\cdots$都是第一积分。在相应的Lax表示中，L 保持不变，但 A 被一个次数为$(2n + 1)$的微分算子取代。可以将高阶KdV方程视为关于

$$u = u(t_0 = x, t_1 = t, t_2, t_3, \cdots),$$

这里我们利用方程(3.4.22)中的第一个方程，将 t_0 与 x等同。

这个系统称为层级，坐标$(t_2, t_3, \cdots)$称为高阶时间。层级中的方程彼此相容，因为时间平移所生成的流彼此泊松对易

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_m}\frac{\partial}{\partial t_n}u - \frac{\partial}{\partial t_n}\frac{\partial}{\partial t_m}u &= (-1)^n \frac{\partial}{\partial t_m}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_n[u]}{\delta u(x)} - (-1)^m \frac{\partial}{\partial t_n}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_m[u]}{\delta u(x)} \\ &= \{u, \partial_m I_n - \partial_n I_m + \{I_m, I_n\}\} = 0 \end{aligned}$$

wh这里我们用到了雅可比恒等式以及 $I_n[u]$彼此泊松对易这一事实。

层级的概念引出了一种优美的方法，可用于求解具有周期初始数据的 KdV 方程，即

$$u(x, 0) = u(x + X_0, 0)$$

对于某个周期 X_0。该方法基于平稳（即与时间无关）解的概念，不过应用于高阶时间的某种组合。

考虑前 $n+1$ 个高阶KdV方程，并取 $n+1$ 个实常数 $c_0, \ldots, c_n$。因此

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{\partial u}{\partial t_k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_k[u]}{\delta u(x)}.$$

定常解对应于 u不依赖于左侧高阶时间的组合。这导出一个常微分方程

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k \frac{\delta I_k[u]}{\delta u(x)} = c_{n+1}, \qquad c_{n+1} = \text{const.} \tag{3.4.23}$$

S_ks 的递推关系 (3.1.3) 意味着这个常微分方程的阶数为 $2n$。其通解取决于 $2n$ 个积分常数以及 $(n+1)$ 个参数 c，因为我们总可以用 $c_n \neq 0$ 去除 (3.4.23)。总共有 $3n+1$ 个参数。这种方法的妙处在于，该常微分方程在阿诺德–刘维尔定理的意义下是可积的，其解可以用超椭圆函数构造。相应的 KdV 解称为有限带解。用谱数据来描述它们相当复杂，并会用到黎曼曲面和代数几何——参见 [16] 的第 2 章。

现在我们将介绍方程 (3.4.23) 的第一积分的构造（我们强调，(3.4.23) 是关于 x 的常微分方程，因此当 (3.4.23) 成立时，第一积分是 u 及其导数的函数，且不依赖于 x ）。高阶 KdV 方程 (3.4.22) 具有零曲率表示

$$\frac{\partial}{\partial t_n}U - \frac{\partial}{\partial x}V_n + [U, V_n] = 0$$

其中

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

是第 (3.3.3) 节中为 KdV 得到的矩阵，而 $V_n = V_n(x,t,\lambda)$ 是无迹的 2×2 矩阵，与 V_A 类似，可利用 (3.4.22) 以及 (3.1.2) 的递推关系求得。V_n 的分量取决于 (x,t)，且是关于 λ 的次数为 $(n+1)$ 的多项式。现在令

$$\Lambda = c_0 V_0 + \ldots + c_n V_n$$

其中 c_k 为常数，并考虑满足以下条件的解

$$\frac{\partial}{\partial T}U - \frac{\partial}{\partial x}\Lambda + [U, \Lambda] = 0,$$

使得

$$\frac{\partial}{\partial T}U = 0, \qquad \text{where} \qquad \frac{\partial}{\partial T} = c_0\frac{\partial}{\partial t_0} + \ldots + c_n\frac{\partial}{\partial t_n}.$$

这就得到了常微分方程

$$\frac{d}{dx}\Lambda = [U, \Lambda]$$

这就是 (3.4.23) 的 Lax表示。该表示揭示了 (3.4.23) 存在许多第一积分。我们有

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Tr}(\Lambda^p) = \mathrm{Tr}(p[U,\Lambda]\Lambda^{p-1}) = p\mathrm{Tr}(-\Lambda U\Lambda^{p-1} + U\Lambda^p) = 0, \quad p = 2, 3, \ldots$$

根据迹的循环性质。因此，对于所有 p，多项式 $\mathrm{Tr}(\Lambda(\lambda)^p)$ 的所有系数都是守恒的（这意味着 $\Lambda(\lambda)$ 的整个谱在 x 中保持不变）。事实证明 [16]，在这组积分中可以找到 n 个相互对合的独立非平凡积分，从而保证 (3.4.23) 在阿诺德–刘维尔定理 1.2.2 意义下是可积的。

KdV 的所得解称为“有限带隙”势函数。让我们说明这一术语的由来。Λ 的谱不依赖于 x，因此特征多项式的系数

$$\det\left(\mathbf{1}\mu - \Lambda(\lambda)\right) = 0$$

也不依赖于 x。利用 $\Lambda(\lambda)$ 无迹这一事实，我们可以将该多项式改写为

$$\mu^2 + R(\lambda) = 0 \tag{3.4.24}$$

其中

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= \lambda^{2n+1} + a_1\lambda^{2n} + \ldots + a_{2n}\lambda + a_{2n+1} \\ &= (\lambda - \lambda_0)\ldots(\lambda - \lambda_{2n}). \end{aligned}$$

因此，系数 a_1、.....、a_{2n+1}（或等价地，λ_0、.....、λ_{2n}）与 x 无关。然而，这些系数中的 $(n+1)$ 个可以用常数 c_k 表示，因此相应的第一积分是平凡的。这样，对于阶数为 $2n$ 的常微分方程 (3.4.23)，还剩下 n 个第一积分。

可以证明 [16],

- 所有 s 满足周期初始数据的 KdV方程解都由 (3.4.23).

对于每个 λ，薛定谔算子 $L\psi = \lambda\psi$ 的相应特征函数都可以在某个基 $\psi_\pm$ 中展开，使得 ¨

$$\psi_\pm(x + X_0) = e^{\pm ipX_0}\psi_\pm(x)$$

对于某个 $p = p(\lambda)$（$\psi_\pm$ 称为布洛赫函数）。使得 $p(\lambda) \in \mathbb{R}$ 成立的实数 λ 集合称为允许带。多项式 $R(\lambda)$ 的根是允许带的端点

$$(\lambda_0, \lambda_1), \quad (\lambda_2, \lambda_3), \quad \ldots, \quad (\lambda_{2n-2}, \lambda_{2n-1}), \quad (\lambda_{2n}, \infty).$$

方程 (3.4.24) 定义了一个亏格为 n 的黎曼曲面 Γ。因此，对于周期解，禁带（带隙）的数量是有限的，因为黎曼曲面 (3.4.24) 的亏格有限。这也说明了“有限带隙”势函数这一名称的由来。

- 例子。如果 $n = 0$ 黎曼曲面 Γ 的拓扑结构是球面，那么 KdV 的相应解为常数。如果 $n = 1$ Γ 称为椭圆曲线（其拓扑结构是二维环面），则常微分方程 (3.4.23) 可用椭圆函数求解：驻定条件

$$c_0\frac{\partial u}{\partial t_0} + c_1\frac{\partial u}{\partial t_1} = 0$$

得到

$$c_0 u_x + c_1(6uu_x - u_{xxx}) = b, \qquad b = \text{const}$$

这里我们用到了层级中的前两个方程。我们可以通过重新定义另外两个常数来令 $c_1 = 1$。这个常微分方程可以积分，其通解为魏尔斯特拉斯椭圆函数

$$\int \frac{du}{\sqrt{2u^3 + c_0u^2 - 2bu + d}} = x - x_0.$$

驻定条件意味着 $u = u(x - c_0t)$，其中我们已将 $t_0 = x$、$t_1 = t$ 认作相同。因此 $x_0 = c_0t$。这些解称为椭圆余弦波，因为相应的椭圆函数通常记作‘cn’。

如果 $n > 1$ 黎曼曲面 Γ 是超椭圆曲线，且相应的 KdV 势由黎曼 Theta 函数 [16]表示。

第 4 章

李对称性与约化

4.1 李群与李代数

“对称性在.....中的统一作用”之类的说法，在科普文献中十分常见。视主题而定，这种对称性可能是“宇宙的”“柏拉图式的”“完美的”“破缺的”，甚至是“超”的[1]。

用于定义和描述对称性的数学框架是群论。回顾一下，群是一个集合 G，并配有一个映射

$$G \times G \to G, \quad (g_1, g_2) \to g_1 g_2$$

称为群乘法，它满足以下性质：

- 结合律
$$(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3) \qquad \forall g_1, g_2, g_3 \in G.$$
- 存在一个单位元 $e \in G$，使得
$$eg = ge = g, \qquad \forall g \in G.$$
- 对于任意 $g \in G$，都存在一个逆元 $g^{-1} \in G$，使得
$$g g^{-1} = g^{-1} g = e.$$

群 G 在集合 X 上作用，是指存在一个映射 $G \times X \to X$，$(g, p) \to g(p)$，使得

$$e(p) = p, \quad g_2(g_1(p)) = (g_2 g_1)(p)$$

对所有 $p \in X$，以及 g_1、$g_2 \in G$。集合 $\mathrm{Orb}(p) = \{g(p) \ g \in G\} \subset X$ 称为 p 的轨道。在集合上作用的群通常称为变换群。

[1]超对称性是玻色子和费米子这两类基本粒子之间的一种对称性。它是当前物理理论所依据的方程的一种对称性。超对称性预言，每种基本粒子都有一个超对称伙伴。迄今为止，尚无人观测到超对称性。或许它会在 LHC 中被发现。参见第 26 页的脚注。

本章将探讨作用于微分方程解上的群。这类群作用既出现在可积系统中，也出现在不可积系统中，因此我们将要学习的方法具有广泛的适用性[2]。事实上，学生在学习过程中接触到的所有微分方程求解技巧（如变量分离法、积分因子、齐次方程等）都是对称性方法的特例。关于这一主题的完整论述，请参见 [17] ；关于本科阶段的入门介绍，请参见 [10] 。

对称性研究纲领可追溯至19世纪挪威数学家索菲斯·李，他发展出一套连续变换理论，如今称为李群。李的重要发现之一是，连续变换群 G 可以用无穷小变换来简明描述；这些无穷小变换刻画了接近单位元的群元素（这里的“接近”是按照泰勒定理的意义而言）。这些无穷小变换是李代数 $\mathfrak{g}$的元素。例如，旋转群 $G = SO(2)$ 的一般元素

$$g(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix}$$

取决于一个参数 ε。群 $SO(2)$ 是李群，因为 g、其逆元和群乘法都以连续且可微的方式依赖于 ε 。这个李群是一维的，因为只需一个参数——旋转角——就足以描述在 $\mathbb{R}^2$ 中绕原点的任意旋转。在 $\mathbb{R}^3$ 中，旋转取决于三个这样的参数——经典动力学中使用的欧拉角——因此 $SO(3)$ 是一个三维李群。现在考虑泰勒级数

$$g(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2).$$

反对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

表示无穷小旋转，其中 $A\mathbf{x} = (-y, x)^T$ 是在 $\mathbf{x}$ 处与轨道相切的向量的分量。由 A 张成的一维向量空间称为 $SO(2)$ 的李代数。

下面的定义并不完全正确（李群应定义为流形——参见附录 A 中的定义 A.0.2），但对于我们的目的来说已经足够。

定义4.1.1 一个 m 维李群是这样一个群：其元素连续地依赖于 m 个参数，并且映射 $(g_1, g_2) \to g_1 g_2$ 和 $g \to g^{-1}$ 是这些参数的光滑（无限可微）函数。

李群的无穷小描述由李代数给出。

定义4.1.2 李代数是一个向量空间 $\mathfrak{g}$ ，配备一个称为李括号的反对称双线性运算 $[\,,\,]_{\mathfrak{g}}$: $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ，该运算满足雅可比恒等式

$$[A,[B,C]] + [C,[A,B]] + [B,[C,A]] = 0, \qquad \forall A, B, C \in \mathfrak{g}.$$

[2]然而，可积系统确实具有“庞大”的对称群，而不可积系统通常没有。

如果向量 A_1、.....、 $A_{\dim \mathfrak{g}}$ 张成 $\mathfrak{g}$，则代数结构由结构常数 $f^\gamma_{\alpha\beta}$ 决定，使得

$$[A_\alpha, A_\beta]_{\mathfrak{g}} = \sum_\gamma f^\gamma_{\alpha\beta} A_\gamma, \qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g}.$$

李括号与群运算的非交换性之间的关系如下述论证所示。令 $a, b \in G$。设

$$a = I + \varepsilon A + O(\varepsilon^2), \qquad b = I + \varepsilon B + O(\varepsilon^3)$$

对于某些 A, B，计算

$$aba^{-1}b^{-1} = (I + \varepsilon A + \ldots)(I + \varepsilon B + \ldots)(I - \varepsilon A + \ldots)(I - \varepsilon B + \ldots) = I + \varepsilon^2 [A, B] + O(\varepsilon^2)$$

其中 $\ldots$ 表示关于 ε 的高阶项，我们用到了由泰勒级数推出的事实 $(1 + \varepsilon A)^{-1} = 1 - \varepsilon A + \ldots$。上述论证需要谨慎对待，因为我们忽略了群元素中的二阶项，却没有忽略答案中的二阶项。读者应当自行验证这些项确实会相互抵消。

- 例子。考虑特殊正交变换群 $SO(n)$，它由满足以下条件的 n 个 n 矩阵 a 组成：

  $$aa^T = I, \qquad \det a = 1.$$

  这些条件意味着，只有 $n(n-1)/2$ 个矩阵分量是独立的，并且 $SO(n)$ 是一个维数为 $n(n-1)/2$ 的李群。令 $a = I + \varepsilon A + O(\varepsilon^2)$，可知正交条件的无穷小形式是反对称性

  $$A + A^T = 0.$$

  给定两个反对称矩阵，它们的交换子也是反对称的，因为

  $$[A, B]^T = B^T A^T - A^T B^T = -[A, B].$$

  因此，反对称矩阵构成的向量空间是一个李代数，其李括号定义为矩阵交换子。这个李代数称为 $\mathfrak{so}(n)$，是一个维数为 $n(n-1)/2$ 的向量空间。这等于相应李群 $SO(n)$ 的维数（参数个数）。

- 例子。一个三维李群的例子是由 3×3 上三角矩阵构成的群

  $$g(m_1, m_2, m_3) = \begin{pmatrix} 1 & m_1 & m_3 \\ 0 & 1 & m_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.1.1}$$

  请注意，$g = \mathbf{1} + \sum_\alpha m_\alpha T_\alpha$，其中矩阵 T_α 均为

  $$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1.2}$$

这个李群称为 Nil，因为矩阵 T_α 均为幂零矩阵。这些矩阵张成群 Nil 的李代数，并具有如下对易关系

$$[T_1, T_2] = T_3, \quad [T_1, T_3] = 0, \quad [T_2, T_3] = 0. \tag{4.1.3}$$

这给出了结构常数 $f^3_{12} = -f^3_{21} = 1$，其他所有常数均为零。
具有这些结构常数的三维李代数称为海森堡代数，这是因为它与量子力学有关——设想 T_1 和 T_2 分别是位置算符和动量算符，而 T_3 是 $i\hbar$ 倍的恒等算符。

在上面的例子中，李群的李代数由矩阵表示。如果该群作用于 $\mathbb{R}^n$ 的子集 X，那么它的李代数就由 X 上的向量场[3] 表示。这种方法是将李群应用于微分方程的基础，因此接下来我们将对此进行研究。

4.2 向量场与变换的单参数群

设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，具有局部坐标 $x^1, \ldots, x^n$，并设 $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$ 是一条参数曲线，使得 $\gamma(\varepsilon) = (x^1(\varepsilon) \ldots, x^n(\varepsilon))$。该曲线在点 $p \in X$ 处的切向量 $V|_p$ 的分量为

$$V^a = \dot{x}^a|_p, \quad a = 1, \ldots, n, \qquad \text{where } \doteq \frac{d}{d\varepsilon}.$$

所有可能经过 p 的曲线的切向量构成一个 n维向量空间，称为切空间 T_pX。当 x 在 X 中变化时，所有切空间的集合称为切丛 $TX = \cup_{x\in M} T_xX$。切丛是一个维数为 $2n$的流形（见附录 A）。

X 上的向量场 V 为 X中的每个点指定一个切向量 $V|_p \in T_pX$。设 $X \longrightarrow \mathbb{R}$： X 上的一个函数。沿曲线的 f 变化率由导数来衡量

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} f(x(\varepsilon))|_{\varepsilon=0} &= V^a \frac{\partial f}{\partial x^a} \\ &= V(f) \end{aligned}$$

其中

$$V = V^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + V^n \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

因此，向量场可以看作一阶微分算子。点 p处的导子 $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ 表示 T_pX的一组基中的元素。

向量场 V 的积分曲线 γ 定义为 $\dot{\gamma}(\varepsilon) = V|_{\gamma(\varepsilon)}$，或等价地

$$\frac{dx^a}{d\varepsilon} = V^a(x). \tag{4.2.4}$$

[3]结构常数 $f^\gamma_{\alpha\beta}$ 与采用哪一种表示无关。

该常微分方程组对每组初始数据都有唯一解，经过坐标为 x^a 的点 p 的积分曲线称为流 $\tilde{x}^a(\varepsilon, x^b)$。向量场 V 称为该流的生成元，因为

$$\tilde{x}^a(\varepsilon, x) = x^a + \varepsilon V^a(x) + O(\varepsilon^2).$$

确定给定向量场的流，归结为求解一个常微分方程组 (4.2.4)。

- 例子。向量场的积分曲线

$$V = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

在 $\mathbb{R}^2$ 上可通过求解一对常微分方程 $\dot{x} = x, \dot{y} = 1.$ 得到。因此

$$(x(\varepsilon), y(\varepsilon)) = (x(0)e^{\varepsilon}, y(0) + \varepsilon).$$

在 $\mathbb{R}^2$ 中，每个点都有一条积分曲线经过。

该流是单参数变换群的一个例子，因为

$$\tilde{x}(\varepsilon_2, \tilde{x}(\varepsilon_1, x)) = \tilde{x}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, x), \qquad \tilde{x}(0, x) = x.$$

流的不变量是一个函数 $f(x^a)$，满足 $f(x^a) = f(\tilde{x}^a)$，或者等价地

$$V(f) = 0$$

其中 V 是生成向量场。

- 例子。平面上的旋转单参数群 $SO(2)$

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon)$$

由下式生成：

$$\begin{aligned} V &= \Big(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}\Big)\frac{\partial}{\partial y} + \Big(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}\Big)\frac{\partial}{\partial x} \\ &= x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

函数 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是 V的不变量。

两个向量场 V、W的李括号是向量场 $[V, W]$，其定义方式是它在函数上的作用：

$$[V, W](f) := V(W(f)) - W(V(f)). \tag{4.2.5}$$

李括号的分量为：

$$[V, W]^a = V^b\frac{\partial W^a}{\partial x^b} - W^b\frac{\partial V^a}{\partial x^b}.$$

根据定义，李括号是双线性的、反对称的，并且满足雅可比恒等式

$$[V, [W, U]] + [U, [V, W]] + [W, [U, V]] = 0. \tag{4.2.6}$$

李括号的一种几何解释是两个流的无穷小交换子。为了解释这一点，考虑 $\tilde{x}_1(\varepsilon_1, x)$ 和 $\tilde{x}_2(\varepsilon_2, x)$，它们分别是向量场 V_1 和 V_2 的流。对于任意 $f: X \to \mathbb{R}$ 定义

$$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, x) := f(\tilde{x}_1(\varepsilon_1, (\tilde{x}_2(\varepsilon_2, x)))) - f(\tilde{x}_2(\varepsilon_2, (\tilde{x}_1(\varepsilon_1, x)))).$$

Then

$$\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon_1\partial\varepsilon_2} F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, x)|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = [V_1, V_2](f).$$

- 例子。考虑三维 Lie 群 Nil，它由 3×3 上三角矩阵构成

  $$g(m_1, m_2, m_3) = \begin{pmatrix} 1 & m_1 & m_3 \\ 0 & 1 & m_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  通过矩阵乘法作用于 $\mathbb{R}^3$

  $$\tilde{\mathbf{x}} = g(m_1, m_2, m_3)\mathbf{x} = (x + m_1 y + m_3 z, y + m_2 z, z).$$

  对应的向量场[4] V_1, V_2, V_3 为

  $$V_\alpha = \Big(\frac{\partial\tilde{x}}{\partial m_\alpha}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial\tilde{y}}{\partial m_\alpha}\frac{\partial}{\partial\tilde{y}} + \frac{\partial\tilde{z}}{\partial m_\alpha}\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}\Big)|_{(m_1,m_2,m_3)=(0,0,0)}$$

  由此得到

  $$V_1 = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad V_2 = z\frac{\partial}{\partial y}, \quad V_3 = z\frac{\partial}{\partial x}.$$

  这些向量场的李括号为

  $$[V_1, V_2] = -V_3, \quad [V_1, V_3] = 0, \quad [V_2, V_3] = 0.$$

  因此，我们得到了 Nil 的李代数在 $\mathbb{R}^3$ 上的向量场表示。将其与矩阵 (4.1.2) 的交换子比较可知，结构常数仅相差一个整体符号。由向量场 V_α 张成的李代数与由矩阵 M_α 张成的李代数同构。

- 例子。汽车驾驶员可以使用两种变换。这些变换由向量场生成

  $$\text{STEER} = \frac{\partial}{\partial\phi}, \qquad \text{DRIVE} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{L}\tan\phi\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad L = \text{const}.$$

  其中（x, y）是后轴中心的坐标，θ 指定汽车的行驶方向，而 ϕ 是前轮与汽车行驶方向之间的夹角。这两个流不满足交换律，并且

  $$[\text{STEER}, \text{DRIVE}] = \text{ROTATE},$$

[4]注意，下标标记向量场，而上标标记分量。因此$V_\alpha = V_\alpha^a \partial/\partial x^a$

其中向量场

$$\mathrm{ROTATE} = \frac{1}{L\cos^2\phi}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

执行“转向、前进、回正、倒车”这一操作。仅靠这一操作并不能保证驾驶员能将车停进狭窄的空间。交换子

$$[\mathrm{DRIVE}, \mathrm{ROTATE}] = \frac{1}{L\cos^2\phi}\Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} - \cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\Big) = \mathrm{SLIDE}$$

是成功平行泊车的关键。需要按以下顺序操作：转向、前进、回正、前进、转向、倒车、回正、倒车！

一般而言，Lie括号是生成某个群的一组向量场上的封闭运算。生成群作用的向量场向量空间给出了相应李代数的一个表示。结构常数 $f^{\gamma}_{\alpha\beta}$ 与所采用的表示（矩阵或向量场）无关。

4.3 微分方程的对称性

设 $u = u(x,t)$ 是 KdV方程 (2.1.1) 的一个解。考虑一个向量场

$$V = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

它作用于因变量和自变量 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ 所构成的空间。该向量场生成一个单参数变换群

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x,t,u,\varepsilon), \qquad \tilde{t} = \tilde{t}(x,t,u,\varepsilon), \qquad \tilde{u} = \tilde{u}(x,t,u,\varepsilon).$$

如果满足以下条件，这个群就称为 KdV方程的对称性

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{t}} - 6\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial^3\tilde{u}}{\partial\tilde{x}^3} = 0.$$

通常，人们会滥用术语，将相应的向量场称为对称性，不过称其为无穷小对称性更为恰当。

- 例子。KdV 的一个对称性示例如下：

  $$\tilde{x} = x, \qquad \tilde{t} = t + \varepsilon, \qquad \tilde{u} = u.$$

  由于 KdV 中没有显式的时间依赖性，它是一个对称性。其生成向量场为

  $$V = \frac{\partial}{\partial t}.$$

当然，这个定义并没有什么特别针对 KdV 的地方；非对称性的概念普遍适用于偏微分方程和常微分方程。

定义 4.3.1 设 $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 为偏微分方程中自变量和因变量所构成的空间。该空间上的单参数变换群

$$\tilde{u} = \tilde{u}(x^a, u, \varepsilon), \qquad \tilde{x}^b = \tilde{x}^b(x^a, u, \varepsilon)$$

称为偏微分方程的李点对称群（简称对称群）

$$F[u, \frac{\partial u}{\partial x^a}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^a \partial x^b}, \ldots] = 0 \tag{4.3.7}$$

如果其作用将解变换为其他解，即

$$F[\tilde{u}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^a}, \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^a \partial \tilde{x}^b}, \ldots] = 0.$$

这一概念自然可以推广到多参数变换群。若李群G 的任意一个单参数子群都是符合定义 4.3.1 所述意义的对称群，则该李群是偏微分方程的对称群。

了解李点对称性有以下几方面的用途

- 它可以利用已知解构造新解。

  例子。洛伦兹群

  $$(\tilde{x}, \tilde{t}) = \Big(\frac{x - \varepsilon t}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \frac{t - \varepsilon x}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\Big), \qquad \varepsilon \in (-1, 1)$$

  是正弦-戈登方程（2.1.2）的对称群。任何与 t 无关的解$\phi_S(x)$ 都可以用来得到一个含时间的解

  $$\phi(x, t) = \phi_S\Big(\frac{x - \varepsilon t}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\Big), \qquad \varepsilon \in (-1, 1).$$

  在物理学中，这一过程称为“洛伦兹变换”。参数 ε 通常记作 v，称为速度。例如，静态孤子的洛伦兹变换就是运动孤子。

- 对于常微分方程，每个对称性都会使阶数降低 1。因此，掌握足够多的对称性，就可以构造出最一般的解。

  例子。一个常微分方程

  $$\frac{du}{dx} = F\Big(\frac{u}{x}\Big)$$

  具有尺度对称性

  $$(x, u) \longrightarrow (e^\varepsilon x, e^\varepsilon u), \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

  这个一维群由一个向量场生成

  $$V = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}.$$

引入不变量坐标

$$r = \frac{u}{x}, \qquad s = \log|x|$$

因此

$$V(r) = 0, \qquad V(s) = 1.$$

若 $F(r) = r$ 通解为 $r =$ 常数。否则

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{F(r) - r}$$

且通用隐式解为

$$\log|x| + c = \int^{\frac{u}{x}} \frac{dr}{F(r) - r}.$$

- 对于偏微分方程，仅知道对称群不足以构造最一般的解，但可以利用它寻找具有对称性的特殊解。

例子。考虑下面这个单参数变换群

$$(\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}) = (x + c\varepsilon, t + \varepsilon, u)$$

其中 $c \in \mathbb{R}$ 为常数。很容易验证，该群是 KdV方程 (2.1.1) 的李点对称。它由以下向量场生成

$$V = \frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}$$

相应的不变量为 u 和 $\xi = x - ct$。为了求出群不变解，假设 KdV方程的解具有如下形式

$$u(x, t) = f(\xi).$$

代入 入 KdV方程后，得到一个三阶常微分方程，它很容易积分得 o

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{df}{d\xi}\Big)^2 = f^3 + \frac{1}{2}cf^2 + \alpha f + \beta$$

其中 (α, β) 是任意常数。这个常微分方程可以用椭圆积分求解，从而得到所有群不变解的隐式形式

$$\int \frac{df}{\sqrt{f^3 + \frac{1}{2}cf^2 + \alpha f + \beta}} = \sqrt{2}\xi.$$

由此，我们重新得到了余弦椭圆波，它在第 3.4 节中是通过有限带积分得到的。事实上，单孤子解 (2.1.3) 也属于这一类：如果当 $|\xi| \to \infty$ 时，f 及其前两个导数趋于零，那么 α、β 均为零，椭圆积分便化为初等积分。最后，我们得到

$$u(x, t) = -\frac{2\chi^2}{\cosh^2 \chi(x - 4\chi^2 t - \phi_0)}$$

这就是KdV方程的单孤子解（2.1.3）。

4.3.1 如何求出对称性

其中一些可以猜到。例如，如果方程不显含自变量坐标，那么平移 $\tilde{x}^a = x^a + c^a$ 就是对称性。所有平移构成一个由 n 向量场 $\partial/\partial x^a$生成的 n参数阿贝尔群。

对于 (4.3.7) 的一般情形，我们可以代入

$$\tilde{u} = u + \varepsilon\eta(x^a, u) + O(\varepsilon^2), \qquad \tilde{x}^b = x^b + \varepsilon\xi^b(x^a, u) + O(\varepsilon^2)$$

到方程 (4.3.7) 中，并保留关于 ε 的线性项。向量场延拓提供了一种更系统的方法。假设自变量构成的空间以 (x, t) 为坐标，且方程 (4.3.7) 具有如下形式

$$F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_t) = 0.$$

（例如，KdV 就属于这种形式）。向量场的延拓

$$V = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

is

$$\mathbf{pr}(V) = V + \eta^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \eta^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}},$$

其中 $(\eta^t, \eta^x, \eta^{xx}, \eta^{xxx})$ 是 (u, x, t) 的某些函数，可根据 (ξ, τ, η) 及其导数通过算法确定（我们将在下一节中进行说明）。延拓 pr(V) 在以如下变量为坐标的 7 维空间上生成一个单参数变换群

$$(x, t, u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}).$$

（这是喷射空间的一个例子。符号 $(u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$ 应视为自变量坐标，而不是 u 的导数。）如果向量场 V 是偏微分方程的对称性，那么

$$\mathbf{pr}(V)(F)|_{F=0} = 0. \tag{4.3.8}$$

该条件给出了关于 $(\xi、\tau、\eta)$ 的偏微分方程线性方程组。求解该方程组即可得到给定偏微分方程的最一般对称性。重要的是，只有在满足 (4.3.7) 时才要求 (4.3.8) 成立（用物理学家的说法，即“壳上”成立）。

4.3.2 延拓公式

实施延拓过程的第一步是确定函数

$$\eta^t, \eta^x, \eta^{xx}, \dots$$

在延拓向量场中。为简便起见，我们假设要确定一个 N 阶常微分方程的对称性

$$\frac{d^N u}{dx^N} = F\Big(x, u, \frac{du}{dx}, \cdots, \frac{d^{N-1}u}{dx^{N-1}}\Big).$$

考虑一个向量场

$$V = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u}.$$

其延拓

$$\mathbf{pr}(V) = V + \sum_{k=1}^{N} \eta^{(k)} \frac{\partial}{\partial u^{(k)}}$$

生成一个单参数变换群

$$\tilde{x} = x + \varepsilon\xi + O(\varepsilon^2), \qquad \tilde{u} = u + \varepsilon\eta + O(\varepsilon^2), \qquad \tilde{u}^{(k)} = u^{(k)} + \varepsilon\eta^{(k)} + O(\varepsilon^2)$$

作用于坐标为 $(x, u, u', \ldots, u^N)$ 的 $(N+2)$ 维喷射空间。

延拓是一种计算函数 $\eta^{(k)}$ 的算法。令

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u' \frac{\partial}{\partial u} + u'' \frac{\partial}{\partial u'} + \cdots + u^{(N)} \frac{\partial}{\partial u^{(N-1)}}.$$

链式法则给出

$$\tilde{u}^{(k)} = \frac{d\tilde{u}^{(k-1)}}{d\tilde{x}} = \frac{D_x \tilde{u}^{(k-1)}}{D_x \tilde{x}},$$

so

$$\tilde{u}^{(1)} = \frac{D_x \tilde{u}}{D_x \tilde{x}} = \frac{\frac{du}{dx} + \varepsilon D_x(\eta) + \ldots}{1 + \varepsilon D_x(\xi) + \ldots} = \frac{du}{dx} + \varepsilon(D_x\eta - \frac{du}{dx} D_x\xi) + O(\varepsilon^2).$$

Thus

$$\eta^{(1)} = D_x\eta - \frac{du}{dx} D_x\xi.$$

现在可以递归地构造其余的延拓系数：关系式

$$\tilde{u}^{(k)} = \frac{u^{(k)} + \varepsilon D_x(\eta^{(k-1)})}{1 + \varepsilon D_x(\xi)}$$

得到一般的延拓公式

$$\eta^{(k)} = D_x(\eta^{(k-1)}) - \frac{d^k u}{dx^k} D_x\xi. \tag{4.3.9}$$

对于偏微分方程，过程完全类似，其中 $u = u(x^a)$，但必须跟踪用于标记自变量的指标 a。令

$$D_a = \frac{\partial}{\partial x^a} + (\partial_a u)\frac{\partial}{\partial u} + (\partial_a^2 u)\frac{\partial}{\partial(\partial_a u)} + \cdots + (\partial_a^N u)\frac{\partial}{\partial(\partial_a^{N-1} u)},$$

其中

$$\partial_a^k u = \frac{\partial^k u}{\partial (x^a)^k}.$$

一阶延拓为

$$\eta^{(a)} = D_a\eta - \sum_{b=1}^{n} (D_a\xi^b)\frac{\partial u}{\partial x^b}$$

更高阶延拓由以下公式递归给出

$$\eta^{A,a} = D_a\eta^A - \sum_{b=1}^{n}(D_a\xi^b)\frac{\partial u^A}{\partial x^b}$$

其中 $A = (a_1, \ldots, a_k)$ 是一个多重指标，并且

$$u^A = \frac{\partial^k u}{\partial x^{a_1}\partial x^{a_2}\ldots\partial x^{a_k}}.$$

- 例子。我们按照延拓过程，求出二阶常微分方程的最一般李点对称

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0.$$

我们首先需要计算二阶延拓

$$\mathbf{pr}(V) = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \eta^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

这一计算不依赖于方程的具体形式，只依赖于延拓公式 (4.3.9)。结果为

$$\eta^x = \eta_x + (\eta_u - \xi_x)u_x - \xi_u u_x^2,$$

$$\eta^{xx} = \eta_{xx} + (2\eta_{xu} - \xi_{xx})u_x + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - \xi_{uu}u_x^3 + (\eta_u - 2\xi_x)u_{xx} - 3\xi_u u_x u_{xx}.$$

现在，我们将其以及常微分方程代入对称性判据 (4.3.8)

$$\mathbf{pr}(V)(u_{xx}) = \eta^{xx} = 0.$$

Thus

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xu} - \xi_{xx})u_x + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - \xi_{uu}u_x^3 = 0$$

其中我们利用常微分方程令 $u_{xx} = 0$。对于二阶方程，在每个点处，u_x 的值都可以任意指定（初始条件）。因此， u_x、 u_x^2 和 u_x^3 的系数均为零

$$\eta_{xx} = 0, \quad 2\eta_{xu} - \xi_{xx} = 0, \quad \eta_{uu} - 2\xi_{xu} = 0, \quad \xi_{uu} = 0.$$

这些线性偏微分方程的通解为

$$\begin{aligned}\xi(x,u) &= \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 xu + \varepsilon_3 x + \varepsilon_4 u + \varepsilon_5,\\ \eta(x,u) &= \varepsilon_1 xu + \varepsilon_2 u^2 + \varepsilon_6 x + \varepsilon_7 u + \varepsilon_8.\end{aligned}$$

因此，我们例子中的平凡常微分方程具有一个八维对称群。

令 $V_\alpha, \alpha = 1, \ldots, 8$ 为通过设置 $\varepsilon_\alpha = 1$ and$\varepsilon_\beta = 0$ if $\beta \neq \alpha$ 得到的相应向量场

$$V_1 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xu\frac{\partial}{\partial u}, \quad V_2 = xu\frac{\partial}{\partial x} + u^2\frac{\partial}{\partial u}, \quad V_3 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad V_4 = u\frac{\partial}{\partial x},$$

$$V_5 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad V_6 = x\frac{\partial}{\partial u}, \quad V_7 = u\frac{\partial}{\partial u}, \quad V_8 = \frac{\partial}{\partial u}.$$

这八个向量场各自生成一个单参数变换群。计算这些向量场的李括号，可以验证它们构成一个$PGL(3,\mathbb{R})$的李代数。

可以证明，一般二阶常微分方程的李点对称群维数至多为 8。若维数为 8，则该常微分方程经坐标变换 $u \to U(u,x)$ $x \to X(u,x)$后与 $u_{xx} = 0$ 等价。

这个例子表明，对向量场进行延拓并写出刻画对称性的线性偏微分方程这一过程虽然繁琐，但可以按算法进行。亲自动手做几个例子有助于熟悉这种方法，但在实际应用中，最好使用 MAPLE 或 MATHEMATICA 等计算机程序进行符号计算。

- 例子。KdV 方程的李点对称性。向量场

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad V_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad V_3 = \frac{\partial}{\partial u} - 6t\frac{\partial}{\partial x}, \quad V_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u}$$

生成 KdV 方程的一个四参数对称群。由于该李代数的结构常数非零，这个群是非阿贝尔群：V_α 所张成的

$$[V_2, V_3] = -6V_1, \quad [V_1, V_4] = V_1, \quad [V_2, V_4] = 3V_2, \quad [V_3, V_4] = -2V_3$$

所有其他李括号均为零。

可以使用延拓过程证明，这实际上是 KdV 的最一般对称群。我们需要求出 $\mathbb{R}^3$ 上一般向量场的三阶延拓——这可以“手动”完成，但最好使用 `MAPLE` package `liesymm`，并运行命令 `determine`。输入 `help(determine);`，然后继续操作。

4.4 Painlev´e 方程

本节将讨论复数域中的常微分方程。这意味着因变量和自变量都是复数。我们先讨论如下形式的线性常微分方程

$$\frac{d^N w}{dz^N} + p_{N-1}(z)\frac{d^{N-1}w}{dz^{N-1}} + \cdots + p_1(z)\frac{dw}{dz} + p_0(z)w = 0 \tag{4.4.10}$$

其中 $w = w(z)$。如果函数 p_0、……、p_{N-1} 在 $z = z_0$ 处解析，则称 z_0 为正则点；对于给定的初始数据，存在唯一的幂级数形式的解析解

$$w(z) = \sum_k a_k (z - z_0)^k.$$

常微分方程 (4.4.10) 的奇点只能位于 p_k 的奇异性处。因此，奇异性是固定的——其位置不依赖于初始条件。非线性常微分方程不具备这一性质。

- 例子。考虑一个简单的非线性常微分方程及其通解

$$\frac{dw}{dz} + w^2 = 0, \qquad w(z) = \frac{1}{z - z_0}.$$

奇点的位置取决于积分常数 z_0。这是一个可动奇点。

非线性常微分方程的奇点可以是极点（阶数任意）、分支点或本性奇点。

- 例子。具有以下通解的常微分方程

$$\frac{dw}{dz} + w^3 = 0, \quad w(z) = \frac{1}{\sqrt{2(z - z_0)}}.$$

有一个可动奇点，它是一个分支点。另一个具有可动对数分支点的例子是

$$\frac{dw}{dz} + e^w = 0, \quad w(z) = \ln(z - z_0).$$

定义 4.4.1 常微分方程

$$\frac{d^N w}{dz^N} = F\Big(\frac{d^{N-1}w}{dz^{N-1}}, \cdots, \frac{dw}{dz}, w, z\Big)$$

如果 F 是关于 w 及其导数的有理函数，并且其可动奇异性至多为极点，则称其具有 Painlev´e 性质。

19世纪，Painlev´e、Gambier 和 Kowalewskaya 旨在通过变量变换，对所有具有 Painlev´e 性质的二阶常微分方程进行分类。

$$\tilde{w}(w, z) = \frac{a(z)w + b(z)}{c(z)w + d(z)}, \quad \tilde{z}(z) = \phi(z)$$

其中函数 a、b、c、d、ϕ 在 z 中解析。标准型共有 50 种，其中 44 种可用“已知”函数（正弦、余弦、椭圆函数，或一般而言，线性常微分方程的解） [11] 表示。其余 6 个方程则定义了新的超越函数

$$\begin{aligned}
\frac{d^2w}{dz^2} &= 6w^2 + z \quad \text{PI}, \\
\frac{d^2w}{dz^2} &= 2w^3 + wz + \alpha \quad \text{PII}, \\
\frac{d^2w}{dz^2} &= \frac{1}{w}\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2 - \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{\alpha w^2 + \beta}{z} + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w} \quad \text{PIII},
\end{aligned} \tag{4.4.11}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2w}{dz^2} &= \frac{1}{2w}\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2+\frac{3}{2}w^3+4zw^2+2(z^2-\alpha)w+\frac{\beta}{w} \quad \text{PIV},\\
\frac{d^2w}{dz^2} &= \left(\frac{1}{2w}+\frac{1}{w-1}\right)\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2-\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w+\frac{\beta}{w}\right)\\
&\quad +\frac{\gamma w}{z}+\frac{\delta w(w+1)}{w-1} \quad \text{PV},\\
\frac{d^2w}{dz^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w}+\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w-z}\right)\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{w-z}\right)\frac{dw}{dz}\\
&\quad +\frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left(\alpha+\beta\frac{z}{w^2}+\gamma\frac{z-1}{(w-1)^2}+\delta\frac{z(z-1)}{(w-z)^2}\right) \quad \text{PVI}.
\end{aligned}
$$

这里 α、β、γ、δ 是常数。因此，第六类Painlevé方程属于一个四参数常微分方程族，而第一类Painlevé方程在坐标变换下是刚性的。

如何检验给定常微分方程的 Painlev´e 性质？如果一个二阶方程具有 Painlev´e 性质，那么它要么是可线性化的，要么可以通过适当的坐标变换化为六种 Painlev´e 类型之一。展示出这样的变换，通常是确立 Painlev´e 性质最直接的方法。

否则，尤其是在我们怀疑该方程不具有 Painlev´e 性质时，可以进行奇点分析。如果一个一般的 N 阶常微分方程具有 PP，那么其通解可进行洛朗展开，并且只包含有限个负幂次项。该展开必须包含 N 个任意常数，以便能够在任意点指定由 w 及其前（$N-1$）阶导数组成的初始数据。假设解的展开式中的主导项具有如下形式

$$
w(z)\sim a(z-z_0)^p, \qquad a\neq 0, \quad a,p\in\mathbb{C}
$$

即 $z\to z_0$。将其代入常微分方程，并要求满足最大平衡条件。这意味着，当（$z-z_0$）$\to 0$ 时，必须有两个（或更多）项具有相等的最大负阶。由此应确定 a 和 p，并最终确定解在 z_0 附近的形式。如果 z_0 是一个奇点，我们还应能够确定它是可动的还是固定的。

- 例子。考虑常微分方程

$$
\frac{dw}{dz}=w^3+z.
$$

最大平衡条件给出

$$
ap(z-z_0)^{p-1}\sim a^3(z-z_0)^{3p}.
$$

因此 $p=-1/2, a=\pm i\sqrt{2}^{-1}$ 和

$$
w(z)\sim \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}(z-z_0)^{-1/2}
$$

当 z_0 取决于初始条件时，存在一个可动分支点。该常微分方程不具有 Painlev´e 性质。

- 例子。考虑第一个 Painlev´e 方程

$$\frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + z.$$

该方程中三项的阶数为

$$p-2, \qquad 2p, \qquad 0.$$

平衡最后两项可得 $p = 0$，但这不是最大平衡，因为此时第一项的阶为 -2。平衡第一项和最后一项可得 $p = 2$。这是最大平衡，相应的解在 z_0附近解析。最后，平衡前两项可得 $p = -2$，这同样是最大平衡：“平衡”的各项表现为 $(z - z_0)^{-4}$，而剩余项的阶为 0。现在我们发现 $a = a^2$，因此$a = 1$ 和

$$w(z) \sim \frac{1}{(z - z_0)^2}.$$

因此，可动奇点是一个二阶极点。

这种奇点分析有助于排除 Painlev´e 性质，但无法给出充分条件（至少无法以我们所介绍的启发式形式给出），因为有些奇异性可能被遗漏，或者洛朗级数可能发散。充分条件的分析既繁琐又复杂——我们就不展开了。

Painlev´é性质保证六个Painlev´é方程的解是单值的，因此产生了适当的函数。Painlev´é方程的重要性在于，它们以如下方式定义新的超越函数：任何足够光滑的函数都可以定义为某个微分方程的解。例如，我们可以将指数函数定义为以下方程的通解：

$$\frac{dw}{dz} = w$$

使得 $w(0) = 1$。类似地，我们从第一类Painlevé方程的通解定义函数 PI。从这个角度来看，指数函数和 PI 函数地位相同。当然，我们对指数函数了解得更多，因为它具有简单的性质，并且广泛出现在自然科学中的各种问题里。我们对 PI 知之甚少，但这主要是因为我们还没有着手揭示它的性质。

Painlev´e 方程的不可约性是一个更微妙的问题。粗略地说，它的含义如下：从有理函数 $Q[z]$ 出发，将那些作为系数属于 $Q[z]$的代数或线性微分方程的解而产生的函数添加进来，就可以定义一个经典函数域。例如，指数函数、贝塞尔函数和超几何函数都是线性微分方程的解，因此属于经典函数。如果一个函数不是经典函数，就称它为不可约（或超越）函数。Painlev´e 本人曾预见，Painlev´e 方程定义的是不可约函数，但针对 PI 和 PII 的严格证明直到最近才出现。这些证明将伽罗瓦理论从数域扩展到函数的微分域。不可约性问题类似于非代数数的存在问题（即不是任何有理系数多项式方程之根的数）。因此，伽罗瓦理论的出现并不那么令人意外。

4.4.1 Painlev´e 检验

如何判断给定的偏微分方程是否可积? 这在很大程度上仍是一个未解决问题，因为偏微分方程可积性的令人满意的定义尚付阙如。以下算法基于 Ablowitz、Ramani 和 Segur [1] 的观察（另见 [2]）：通过逆散射变换可积的偏微分方程，在要求解具有某些李对称性不变性的条件下，会化为具有 Painlev´e 性质的常微分方程。

- 例子。考虑一个李点对称

$$(\tilde{\rho}, \tilde{\tau}) = (c\rho, \frac{1}{c}\tau), \qquad c \neq 0$$

正弦-戈登方程的

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho \partial \tau} = \sin \phi.$$

群不变解的形式为 $\phi(\rho, \tau) = F(z)$，其中 $z = \rho\tau$是该对称性的不变量。将 $w(z) = \exp(iF(z))$ 代入正弦-戈登方程，得到

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{1}{w}\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2 - \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \frac{1}{2}\frac{w^2}{z} - \frac{1}{2z},$$

which 是第三类 Painlev´e 方程 PIII，其参数取特殊值 s

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0.$$

- 例子。考虑修正 KdV 方程

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0,$$

并寻找如下形式的李点对称

$$(\tilde{v}, \tilde{x}, \tilde{t}) = (c^\alpha v, c^\beta x, c^\gamma t), \qquad c \neq 0.$$

如果方程中的三个项具有相同的权重，则对称条件成立

$$\alpha - \gamma = 3\alpha - \beta = \alpha - 3\beta.$$

这给出 $\beta = -\alpha, \gamma = -3\alpha$ 其中 α 可以任意选取。相应的对称群依赖于一个参数 c^α，其生成元为

$$V = v\frac{\partial}{\partial v} - x\frac{\partial}{\partial x} - 3t\frac{\partial}{\partial t}.$$

它有两个独立的不变量

$$z = (3)^{-1/3}\, x\, t^{-1/3}, \qquad w = (3)^{1/3}\, v\, t^{1/3}$$

其中，为方便起见，加入了常数因子 $(3)^{-1/3}$。群不变解的形式为 $w = w(z)$，从而得到

$$v(x,t) = (3t)^{-1/3} w(z).$$

将其代入修正 KdV 方程，可得到关于 $w(z)$ 的三阶常微分方程

$$w_{zzz} - 6w^2 w_z - w - z w_z = 0.$$

对该常微分方程积分一次可知， $w(z)$ 满足参数 α 取一般值的第二类 Painlev´e 方程 PII。

一般的 Painlev´e 检验可归结为以下算法：给定一个偏微分方程

1. 找出其所有李点对称性。2. 构造刻画群不变解的常微分方程。
3. 检查其是否具有 Painlev´e 性质。

该过程只能给出可积性的必要条件。如果所有约化都具有 Painlev´e 性质，则该偏微分方程一般也不一定是可积的。

第5章

习题

5.1 习题单1

1. 雅可比恒等式。假设 (p_j, q_j) 满足 Hamilton方程，并证明任意函数 $f = f(p, q, t)$ 都满足

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\},$$

其中 H 是哈密顿量。

证明雅可比恒等式

$$\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} = 0 \tag{5.1.1}$$

对泊松括号成立。

推导：如果函数 f_1 和 f_2 不显含时间，且是某个哈密顿系统的第一积分，那么 $f_3 = \{f_1, f_2\}$ 也如此。

2. 正则变换。

   - 求由下式生成的正则变换

$$S = \sum_{k=1}^{n} q_k P_k.$$

   - 证明正则变换保持二维相空间中的体积不变，即

$$\frac{\partial(P, Q)}{\partial(p, q)} = 1.$$

   [这一结果对任意维数的相空间也成立。]

   - 证明变换

$$Q = \cos(\beta)q - \sin(\beta)p, \quad P = \sin(\beta)q + \cos(\beta)p$$

   对于任意常数 $\beta \in \mathbb{R}$，它都是正则变换。求相应的生成函数。它对所有 β 都有定义吗?

3. 开普勒问题的作用变量。考虑由以下坐标表示的四维相空间

$$q_1 = \phi, \quad q_2 = r, \quad p_1 = p_\phi, \quad p_2 = p_r$$

配备一个哈密顿量

$$H = \frac{{p_\phi}^2}{2r^2} + \frac{{p_r}^2}{2} - \frac{\alpha}{r}$$

其中 $\alpha > 0$ 是一个常数。利用 $\partial_\phi H = 0$ 这一事实，证明存在两个互相对合的第一积分，并据此得出该系统按照阿诺德–刘维尔定理的意义是可积的。

构造作用变量。用作用变量表示哈密顿量，以证明与相应角变量关联的频率相等。

[提示： ϕ 以及一个关于（r， p_r）的函数可参数化 M_f。改变 ϕ 并固定另一个坐标，可得到一个周期 $\Gamma_\phi \subset M_f$。要找到第二个作用坐标，固定 ϕ （在 H 和 p_ϕ 之上）。]

4. 泊松结构。 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的泊松结构是一个反对称矩阵 ω^{ab}，其分量依赖于坐标 $\xi^a \in \mathbb{R}^{2n}$、$a = 1$、$\cdots$、$2n$，并且使得泊松括号

$$\{f, g\} = \sum_{a,b=1}^{2n} \omega^{ab}(\xi) \frac{\partial f}{\partial \xi^a} \frac{\partial g}{\partial \xi^b}$$

满足雅可比恒等式（5.1.1）。

证明

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g.$$

假设矩阵 ω i 可逆，且 $W := (\omega^{-1})$，证明反对称矩阵 $W_{ab}(\xi)$ 满足

$$\partial_a W_{bc} + \partial_c W_{ab} + \partial_b W_{ca} = 0. \tag{5.1.2}$$

[提示：注意 $\omega^{ab} = \{\xi^a, \xi^b\}$。] 推导出，若 $n = 1$，则任意反对称可逆矩阵 $\omega(\xi^1, \xi^2)$ 都会导出一个泊松结构（即证明在这种情形下，雅可比恒等式自动成立）。

[在微分几何中，满足 (5.1.2) 的可逆反对称矩阵 W 称为辛结构。因此我们推导出，辛结构是泊松结构的特殊情形。]

5. KdV。验证方程

$$\frac{1}{v}\Psi_t + \Psi_x + \beta\Psi_{xxx} + \alpha\Psi\Psi_x = 0.$$

其中 $\Psi = \Psi(x, t)$ 和 (v, β, α) 是非零常数，该方程等价于 KdV方程

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \qquad u = u(x, t) \tag{5.1.3}$$

经过适当的因变量和自变量变换后。

6. 单孤子解。假设KdV方程（5.1.3）的一个解具有如下形式

$$u(x,t) = f(\xi), \qquad \text{where} \quad \xi = x - ct$$

对于某个常数 c。证明函数 $f(\xi)$ 满足常微分方程

$$\frac{1}{2}(f')^2 = f^3 + \frac{1}{2}cf^2 + \alpha f + \beta$$

其中 (α, β) 是任意常数。假设当 $|\xi| \to \infty$ 时， f 及其前两个导数趋于零，并求解常微分方程以构造 KdV方程的单孤子解。

7. 由 Backlund变换得到的正弦–戈登孤子。

正弦-戈登方程为

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = \sin(\phi), \qquad \phi = \phi(x,t).$$

Set $\tau = (x+t)/2$, $\rho = (x-t)/2$ ，并考虑 B¨acklund变换

$$\partial_\rho(\phi_1 - \phi_0) = 2b\sin\Big(\frac{\phi_1+\phi_0}{2}\Big), \qquad \partial_\tau(\phi_1+\phi_0) = 2b^{-1}\sin\Big(\frac{\phi_1-\phi_0}{2}\Big),$$

其中 $b = \text{const}$, ϕ_0、 ϕ_1 是 (τ, ρ) 的函数。取 $\phi_0 = 0$ 并构造单孤子（扭结）解 ϕ_1。

画出固定 t 时 $\phi_1(x,t)$ 的图像。 t 变化时会发生什么?

8. Miura变换。设 $v = v(x,t)$ 满足修正 KdV 方程

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0.$$

证明由下式给出的函数 $u(x,t)$

$$u = v^2 + v_x \tag{5.1.4}$$

满足 KdV方程。任何 KdV方程的解 u 是否都能通过 (5.1.4) 导出修正 KdV 方程的一个解?

5.2 习题单2

1. Lax对。考虑某个复内积空间中的一参数自伴算子族 $L(t)$，使得

$$L(t) = U(t)L(0)U(t)^{-1}$$

其中 $U(t)$ 是酉算子，即 $U(t)U(t)^* = 1$其中 U^*是 U 的伴随算子。

证明 $L(t)$和 $L(0)$具有相同的特征值。证明存在一个反自伴算子 A ，使得 $U_t = -AU$ 并且

$$L_t = [L, A].$$

2. KdV的Lax对。证明KdV方程等价于

$$L_t = [L, A]$$

其中 Lax算子为

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u, \quad A = 4\frac{d^3}{dx^3} - 3\Big(u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u\Big), \qquad u = u(x,t).$$

3. 无色散极限。设 (L, A) 为 KdV 拉克斯对。令 $u(x,t) = U(X,T)$。代入

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial X}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial T},$$

并考虑作用于如下形式函数的算子

$$\psi(x,t) = \exp\left(\varepsilon^{-1}\Psi(X,T)\right).$$

证明在 $\varepsilon \longrightarrow 0$ 的极限下，微分算子的交换子按照以下关系被泊松括号取代

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\psi \longrightarrow (\Psi_X)^k\psi, \qquad [L, A] \longrightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial p}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial p} = -\{\mathcal{L}, \mathcal{A}\},$$

其中 $p = \Psi_X$ 且

$$\mathcal{L} = -p^2 + U(X,T), \quad \mathcal{A} = 4p^3 - 6U(X,T)p.$$

推导出 Lax表示的无色散极限为

$$\mathcal{L}_T + \{\mathcal{L}, \mathcal{A}\} = 0,$$

且 $U = U(X,T)$ 满足无色散KdV方程

$$U_T = 6UU_X.$$

[函数 $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$ 被称为算子的符号 (L, A)。这种取无色散极限的方法类似于量子力学中的 WKB近似。]通过直接在 KdV方程中进行代换，得到相同的极限。

4. 无色散KdV与梯度灾变。使用链式法则验证无色散KdV的隐式解为

$$U(X,T) = F(X + 6TU(X,T)),$$

其中 F 是一个变量的任意可微函数。 [该解通过特征线法得到。如果你愿意，可以阅读相关内容，或者看看你的导师是否愿意向你解释。]

假设

$$U(X,0) = -\frac{2}{\cosh^2(X)}$$

并证明 U_X 无界，也就是说，对于任意 $M > 0$，都存在 $T > 0$，使得对于某个 X_0，$U_X(X_0, T) > M$。推导出 U_X 会在有限时间后变为无穷大。这称为梯度灾变，或激波。画出 $U(X, T)$ 的图像，以说明这种情况。将其与具有相同初始条件的 KdV方程的单孤子解进行比较。

5. 常微分方程的 Lax 表示。设 $L(t)$ $A(t)$ 是复值 $n \times n$ 矩阵，使得

$$\dot{L} = [L, A].$$

推导出 Trace(L^p) $p \in \mathbb{Z}$ 不依赖于 t。

[可以证明，按照阿诺德–刘维尔定理的意义可积的系统都能写成这种形式，其中泊松对易第一积分由 L]的幂的迹给出。

假设

$$\begin{aligned} L &= (\Phi_1 + i\Phi_2) + 2\Phi_3\lambda - (\Phi_1 - i\Phi_2)\lambda^2, \\ A &= -i\Phi_3 + i(\Phi_1 - i\Phi_2)\lambda \end{aligned}$$

其中 λ 是一个 parameter，并求矩阵 $\Phi_j(t)$ $j = 1$、2、3 所满足的常微分方程组 .

[对于参数 λ 的任意取值，拉克斯关系都应成立。你需要求解的系统称为 Nahm 方程。它是构造非阿贝尔磁单极子的基础。]

现在取 $\Phi_j(t) = -i\sigma_j w_j(t)$（不求和），其中 σ_j 是矩阵

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

它们满足 $[\sigma_j, \sigma_k] = i\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{jkl}\sigma_l$. 证明该系统可化为欧拉方程

$$\dot{w}_1 = w_2 w_3, \qquad \dot{w}_2 = w_1 w_3, \qquad \dot{w}_3 = w_1 w_2.$$

利用 Trace(L^p) 构造该系统的第一积分。

6. 双孤子解。假设散射数据由两个能级 $E_1 = -\chi_1^2, E_2 = -\chi_2^2$ 组成，其中 $\chi_1 > \chi_2$，且反射系数为零。求解 Gelfand– Levitan–Marchenko 方程，求出双孤子解。

[按照笔记中单孤子的推导过程进行，但尽量不要看 N孤子的内容，除非你真的卡住了。]

7. 双孤子解的渐近行为。考虑具有 $\chi_1 > \chi_2$ 和$t \to -\infty$的双孤子解。令

$$\tau_k = (x - 4\chi_k^2 t)\chi_k, \qquad k = 1, 2$$

并证明当 $x \to -\infty$ 时， $u \to 0$ $x \to -\infty$。现在沿着 x 轴移动：考察 $\det A$ 中的主导项（见注释），分别考虑 $\tau_1 = 0$ 时和 $\tau_2 = 0$ 时的情况。推导出在 $t = -\infty$ 时，双孤子解是两个单孤子的叠加。当 $t \to \infty$ 时会发生什么？ [固定解中的参数值，并用计算机制作两个碰撞的孤子的动画。]

8. 积分方程。令 $L\psi = k^2\psi$，其中 $L = -\partial_x^2 + u$。考虑形式为 ψ 的

$$\psi(x) = e^{ikx} + \int_x^\infty K(x,z)e^{ikz}dz$$

其中 $K(x,z)$, $\partial_z K(x,z) \to 0$ 作为 $z \to \infty$，对任意固定的 x。使用分部积分证明

$$\psi = e^{ikx}\Big(1 + \frac{i\hat{K}}{k} - \frac{\hat{K}_z}{k^2}\Big) - \frac{1}{k^2}\int_x^\infty K_{zz}e^{ikz}dz,$$

^^其中 $K = K(x,x)$ 和 $K_z = (\partial_z K)|_{z=x}$。推导出，当满足以下条件时，薛定谔方程成立：

$$u(x) = -2(\hat{K}_x + \hat{K}_z), \qquad \text{and}$$
$$K_{xx} - K_{zz} - uK = 0 \quad \text{for} \quad z > x.$$

9. KdV 的第一积分。考虑黎卡提方程

$$\frac{dS}{dx} - 2ikS + S^2 = u.$$

关于 KdV 的第一积分。假设

$$S = \sum_{n=1}^\infty \frac{S_n(x)}{(2ik)^n}.$$

并求出递推关系

$$S_1(x,t) = -u(x,t), \quad S_{n+1} = \frac{dS_n}{dx} + \sum_{m=1}^{n-1} S_m S_{n-m}.$$

解出前几个关系，证明

$$S_2 = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad S_3 = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2, \quad S_4 = -\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2\frac{\partial}{\partial x}u^2$$

并求出 S_5。使用 KdV方程直接验证

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} S_3 dx = 0, \quad \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} S_5 dx = 0.$$

5.3 习题单3

1. 零曲率方程的规范不变性。设 $g = g(\tau,\rho)$ 是任意可逆矩阵。证明变换

$$\widetilde{U} = gUg^{-1} + \frac{\partial g}{\partial \rho}g^{-1}, \quad \widetilde{V} = gVg^{-1} + \frac{\partial g}{\partial \tau}g^{-1}$$

将零曲率方程的解映射为新的解：如果矩阵 (U,V) 满足

$$\frac{\partial}{\partial \tau}U(\lambda) - \frac{\partial}{\partial \rho}V(\lambda) + [U(\lambda), V(\lambda)] = 0$$

~ ~那么，$U(\lambda)$ $V(\lambda)$也如此。相关线性问题的解之间有什么关系?

2. 有限带积分。考虑相对于.....处于静止状态的 KdV 层级解

$$c_0\frac{\partial}{\partial t_0}+c_1\frac{\partial}{\partial t_1}$$

其中，第 k 个 KdV 流由哈密顿量 (-1) 生成，${}^kI_k[u]$ 而 $I_k[u]$ 是在讲座中构造的第一积分。

证明由此得到的 KdV 解为

$$F(u)=c_1x-c_0t,$$

其中， $F(u)$ 由一个待确定的积分给出，且 $t_0=x,t_1=t$。
求刻画稳态解的常微分方程的零曲率表示。

3. 非线性　　薛定谔方程。考虑零曲率表示 wit　　h

$$\begin{aligned}U &= i\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0&\overline{\phi}\\\phi&0\end{pmatrix},\\ V &= 2i\lambda^2\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+2i\lambda\begin{pmatrix}0&\overline{\phi}\\\phi&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\overline{\phi}_\rho\\-\phi_\rho&0\end{pmatrix}-i\begin{pmatrix}|\phi|^2&0\\0&-|\phi|^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

并证明复值函数 $\phi=\phi(\tau,\rho)$ 满足非线性薛定谔方程

$$i\phi_\tau+\phi_{\rho\rho}+2|\phi|^2\phi=0.$$

[这是另一个著名的孤子方程，可以通过逆散射变换求解。]

4. 从群作用到向量场。考虑 $\mathbb{R}$ 的三个单参数变换群

$$x\to x+\varepsilon_1,\quad x\to e^{\varepsilon_2}x,\quad x\to\frac{x}{1-\varepsilon_3x},$$

并求出生成这些群的向量场 V_1,V_2,V_3 。推导出这些向量场生成一个三参数变换群

$$x\to\frac{ax+b}{cx+d},\qquad ad-bc=1.$$

证明

$$[V_\alpha,V_\beta]=\sum_{\gamma=1}^{3}f_{\alpha\beta}^{\gamma}V_\gamma,\qquad \alpha,\beta=1,2,3$$

其中 $f_{\alpha\beta}^{\gamma}$ 为待确定的常数。

5. 具有对称性的常微分方程。考虑一个向量场

$$V=x\frac{\partial}{\partial x}-u\frac{\partial}{\partial u}$$

并求出 $\mathbb{R}^2$对应的单参数变换群。画出该向量场的积分曲线。

求不变量坐标，即函数 $s(x,u)$ $g(x,u)$，使得

$$V(s)=1, \qquad V(g)=0$$

[这些坐标并不唯一。请确保 s,g 在你指定的 $\mathbb{R}^2$ 定义域内函数独立。]

利用你的结果求解常微分方程

$$x^2\frac{du}{dx}=F(xu)$$

其中 F 是一个任意单变量函数。

6. KdV 方程的李点对称性。考虑向量场

$$V_1=\frac{\partial}{\partial x}, \quad V_2=\frac{\partial}{\partial t}, \quad V_3=\frac{\partial}{\partial u}+\alpha t\frac{\partial}{\partial x}, \quad V_4=\beta x\frac{\partial}{\partial x}+\gamma t\frac{\partial}{\partial t}+\delta u\frac{\partial}{\partial u}$$

其中 $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ 为常数，并求相应的 $\mathbb{R}^3$ 变换单参数群，其坐标为 (x,t,u)。

求出 $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$，使它们成为 KdV 的对称群，并推导出四参数对称群的存在性。

确　　定相应向量场李代数的结构常数　　.

7. 从修正 KdV 方程得到 Painlev´e II。考虑修正 KdV 方程

$$v_t-6v^2v_x+v_{xxx}=0.$$

求该方程的一个李点对称，其形式为

$$(\tilde{v},\tilde{x},\tilde{t})=(c^\alpha v,c^\beta x,c^\gamma t), \qquad c\neq 0$$

其中 (α,β,γ) 为待求参数，并求生成该群的相应向量场。

考虑如下形式的群不变解

$$v(x,t)=(3t)^{-1/3}w(z), \quad \text{where} \quad z=x(3t)^{-1/3}$$

并求得关于 $w(z)$的三阶常微分方程。对该常微分方程积分一次，证明 $w(z)$满足第二类 Painlev´ 方程。

8. Sine–Gordon 方程的对称性约化。证明变换

$$(\tilde{\rho},\tilde{\tau})=(c\rho,\frac{1}{c}\tau), \qquad c\neq 0$$

是 Sine–Gordon 方程的单参数对称性，并求出其生成向量场。

考虑形如 $\phi(\rho,\tau)=F(z)$ 的群不变解，其中 $z=\rho\tau$。代入 $w(z)=\exp(iF(z))$，并证明由对称性约化得到的常微分方程是 Painlev´e 方程之一。

附录 A

流形

本课程旨在对该主题作基础介绍，学生只需熟悉本科课程中涉及的基本实分析与复分析、代数和动力学。尤其不要求具备微分几何知识。这种方法的一个显著优点是，本课程适合高年级本科生。

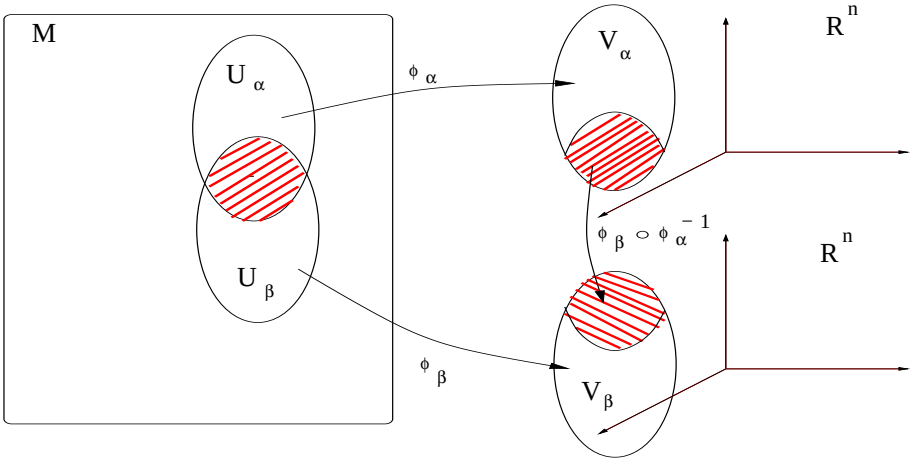
其不足之处在于，前面各章讨论哈密顿形式体系和连续变换群时，使用了诸如“由 (p,q) 坐标化的空间”、“ $\mathbb{R}^n$ 中的开集”或“元素随参数平滑变化的群”这样的说法，而没有用它们的真正名称——流形。本附录旨在弥补这一不足。

定义 A.0.1 n 维光滑流形是一个集合 M，连同一组称为坐标图的开集 U_α，满足

- 由可数指标 α 标记的开集 U_α 覆盖 M。
- 存在一一映射 $\phi_\alpha:\ U_\alpha \to V_\alpha$ 到 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，使得对于任意一对相交的坐标图，这些映射

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$的光滑（即无限次可微）函数。



因此，流形是一个附加了额外结构的拓扑空间，这些结构使局部微分演算成为可能。空间 $\mathbb{R}^n$ 本身当然是一个流形，可以用一个坐标图覆盖。

- 例子。一个不那么平凡的例子是单位球面

$$S^n = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{n+1}, |\mathbf{r}| = 1\}.$$

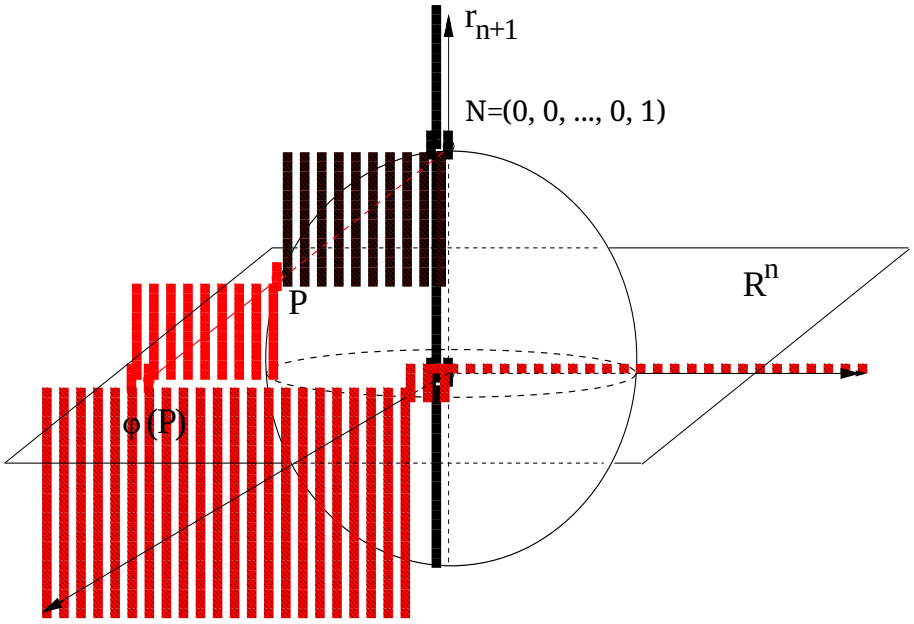
~为了验证它确实是一个流形，用两个开集 $U_1 = U$ 和 $U_2 = U$覆盖 S^n

$$U = S^n/\{0, \ldots, 0, 1\}, \quad \widetilde{U} = S^n/\{0, \ldots, 0, -1\}$$

并通过立体投影定义局部坐标

$$\phi(r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}) = \left(\frac{r_1}{1 - r_{n+1}}, \ldots, \frac{r_n}{1 - r_{n+1}}\right) = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$\tilde{\phi}(r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}) = \left(\frac{r_1}{1 + r_{n+1}}, \ldots, \frac{r_n}{1 + r_{n+1}}\right) = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$



利用

$$\frac{r_k}{1 + r_{n+1}} = \left(\frac{1 - r_{n+1}}{1 + r_{n+1}}\right)\frac{r_k}{1 - r_{n+1}}, \qquad k = 1, \ldots, n$$

~其中 $r_{n+1} \neq \pm 1$ 表明，在交叠部分 $U \cap U$，过渡函数

$$\phi \circ \tilde{\phi}^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, \ldots, \frac{x_n}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right),$$

是光滑的。

流形的笛卡尔积也是流形。例如，阿诺德–刘维尔定理 1.2.2 中出现的 n–环面是由 n 个一维球面构成的笛卡尔积。

另一种构造有趣流形的方法，是将它们定义为 $\mathbb{R}^n$ 中满足一组函数的消失条件的曲面。若 $f_1, \ldots, f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，则集合

$$M_f := (x \in \mathbb{R}^n, \quad f_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, k) \tag{A1}$$

若梯度的 $k \times n$ 矩阵 ∇f_i 在 $\mathbb{R}^n$ 中 M_f 的某个邻域内秩恒定，则它是一个流形。若该秩达到最大值且等于 k，那么 $\dim M_f = n - k$。流形公理可借助隐函数定理来验证。例如，球面 S^{n-1} 可通过这种方式得到，其中 $k = 1$ 且 $f_1 = 1 - |\mathbf{x}|^2$。有一个定理指出，每个流形都可以表示为维数足够大的 $\mathbb{R}^n$ 中的某个曲面。若该流形是 m 维的，那么 n 至多为 $2m + 1$。这个有用的定理如今几乎已被遗忘——微分几何学家喜欢把流形视为抽象对象，认为它们由一组图册定义，如定义 A.0.1 所述。

李群

现在我们可以给出李群的正式定义

定义 A.0.2 李群 G 是一个群，同时也是一个光滑流形，并且群运算

$$G \times G \to G, \quad (g_1, g_2) \to g_1 g_2, \qquad and \qquad G \to G, \quad g \to g^{-1}$$

是流形之间的光滑映射。

- 例子。一般线性群 $G = GL(n, \mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}^{n^2}$ 中的一个开集，由条件 $\det g \neq 0, g \in G$定义。因此它是一个维数为 n^2的李群。特殊正交群 $SO(n)$由 (A1) 定义，其中 $\mathbb{R}^{n^2}$ 中的 $n(n+1)/2$ 个条件为

$$gg^T - \mathbf{1} = 0, \quad \det g = 1.$$

  行列式条件只是在正交矩阵集合中选取一个连通分支，因此不算作一个独立条件。可以证明，相应的梯度矩阵具有恒定的秩，因此 $SO(n)$ 是一个 $n(n-1)/2$维李群。

在第 4 章中，李代数 $\mathfrak{g}$ 被定义为一个向量空间，其上配有满足雅可比恒等式 (4.2.6) 的反对称双线性运算。

李群 G 的李代数是 G 在单位元 $\mathfrak{g} = T_e G$处的切空间，其李括号由向量场在 e处的交换子定义。

阿诺德–刘维尔定理 1.2.2 第一部分的证明。

梯度 ∇f_k 线性无关，因此该集合

$$M_f := \{(p, q) \in M; f_k(p, q) = c_k\}$$

其中 c_1、c_2、…、c_n 为常数，定义了一个维数为 n的流形。设 $\xi^a = (p, q)$ 为 M 上的局部坐标，使得泊松括号为

$$\{f, g\} = \omega^{ab} \frac{\partial f}{\partial \xi^a} \frac{\partial g}{\partial \xi^b}, \qquad a, b = 1, 2, \ldots, 2n$$

其中 ω 是一个常数反对称矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}.$$

泊松括号 $\{f_j, f_k\} = 0$ 的消失意味着每个哈密顿向量场

$$X_{f_k} = \omega^{ab} \frac{\partial f_k}{\partial \xi^b} \frac{\partial}{\partial \xi^a}$$

在欧几里得意义下与任意梯度 $\partial_a f_j$、$a = 1$、……、$2n$、j、……、n正交。梯度垂直于 M_f，因此哈密顿向量场与 M_f相切。它们还彼此对易，因为

$$[X_{f_j}, X_{f_k}] = -X_{\{f_j, f_k\}} = 0,$$

因此，这些向量生成阿贝尔群 $\mathbb{R}^n$ 在 M上的作用。此作用限制为在 M_f上的一个$\mathbb{R}^n$ 作用。令 $p_0 \in M_f$，并令 Γ 为由 $\mathbb{R}^n$ 中所有在群作用下固定 p_0 的向量组成的格。于是 Γ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个有限子群，并且（通过对轨道-稳定子定理作一个直观上显然的修正）我们有

$$M_f = \mathbb{R}^n / \Gamma.$$

假设 M_f 是紧致的，则这个商空间与环面 T^n微分同胚。

□

事实上，这一论证表明，对于任意选取的常数 c_k，我们都能得到一个环面。因此，改变这些常数，我们发现相空间 M 被 n维环面层状分解。

参考文献

[1] Ablowitz, M. J., Ramani, A., & Segur, H. (1980) 非线性演化方程与 P型常微分方程之间的联系。I、II。《数学物理杂志》21 715–721 和 1006–1015。[2] Ablowitz, M.J. & Clarkson, P.A. (1992) 孤子、非线性演化方程与逆散射，伦敦数学会讲义系列，149，剑桥大学出版社。[3] Ablowitz, M. J. & Fokas, A. S. (2003) 复变量导论与应用，剑桥大学出版社，第二版。[4] Arnold, V. I. (1989) 经典力学的数学方法，第二版。数学研究生教材，60，Springer。[5] Drazin, P. G., & Johnson, R. S. (1989) 孤子：导论。剑桥应用数学教材。剑桥大学出版社，剑桥。[6] Dunajski, M. (2009) 孤子、瞬子与扭量，牛津数学研究生教材 19，牛津大学出版社，牛津。[7] Dunajski, M. (2024) 孤子、瞬子与扭量，牛津数学研究生教材 31，牛津大学出版社，牛津。[8]Gardner, C. Green, J., Kruskal, M. & Miura, R. (1967) 求解科尔特韦格-德弗里斯方程的方法。《物理评论快报》19, 1095。[9] Gelfand, I. M & Levitan, B. M. (1951) 根据谱函数确定微分方程。《苏联科学院通报》，数学辑 15, 309。[10] Hydon P. E. (2000) 微分方程的对称性方法：初学者指南，剑桥大学出版社。[11] Ince, E. L. (1956) 常微分方程，Dover。[12]Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1995) 理论物理学教程，第一、二卷。Butterworth-Heinemann。[13] Lax, P. (1968), 非线性演化方程的积分与孤立波，《纯粹与应用数学通讯》21 467-490。

[14] Magri, F.（1978年）可积哈密顿方程的一个简单模型，《数学物理杂志》，19，1156-1162。[15] Marchenko, V. A.（1955年）由散射波的相位重构势能，《苏联科学院院报》104。[16] Novikov, S.、Manakov, S. V.、Pitaevskii, L. P. 和 Zakharov V. E.（1984年）《孤子理论：逆散射法》，Consultants Bureau，纽约。[17] Olver, P. J.（1993年）《李群在微分方程中的应用》。施普林格出版社，纽约。[18] Schiff, L, I（1969年）《量子力学》，第3版。麦格劳-希尔[19] Schuster, H.G.（1988年）《决定性混沌：导论》，第二版，VCH出版社，纽约。[20] Woodhouse, N. M. J.（1987年）《分析动力学导论》牛津大学出版社。[21] Zaharov, V. E. 和 Shabat, A. B.（1979年）用逆散射问题方法求解数理物理非线性方程。II。《泛函分析及其应用》13，13–22。