arXiv:2601.04084v1 [math.CO] 7 Jan 2026

禁配构型的精确上界与极值矩阵

R.P. Anstee*、Oakley Edens†、Arvin Sahami‡、Jaehwan Seok§英属哥伦比亚大学数学系，加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华，V6T 1Z2

anstee@math.ubc.ca, oedens@math.harvard.edu, sahamiarvin52@gmail.com,jseok627@student.ubc.ca

Attila Sali¶匈牙利研究网络阿尔弗´雷德·雷´尼数学研究所，布达佩斯，匈牙利；以及布达佩斯科技与经济大学计算机科学系sali.attila@renyi.hu

2026年1月8日

摘要

令 F 为一个 $k \times \ell$ (0,1) 矩阵。若一个矩阵是没有重复列的 (0,1) 矩阵，则称其为简单 矩阵。若存在 A 的一个子矩阵，它经过行和

*本研究部分得到加拿大自然科学与工程研究委员会的资助

†本研究部分得到加拿大自然科学与工程研究委员会本科生研究奖的资助

‡本研究部分得到加拿大自然科学与工程研究委员会本科生研究奖的资助§本研究部分得到加拿大自然科学与工程研究委员会本科生研究奖的资助

¶本研究部分得到国家研究、发展与创新办公室（NKFIH）K–132696 和 SNN-135643 号项目的资助。

列置换后与 F 相同，则称 (0,1) 矩阵含有构型 。用集合语言来说，构型就是迹。令 Avoid(m, F) 表示所有不含构型 F 的简单 m 行矩阵 A。定义 forb(m, F) 为 Avoid(m, F) 中任意矩阵的最大列数。$2 \times (p+1)$ (0,1) 矩阵$F(0, p, 1, 0)$ 由一行 p 1 和另一行（除剩余列外仅有一个 1）组成。本文确定了 $1 \leq p \leq 9$ 的 forb$(m, F(0, p, 1, 0))$，并刻画了极值矩阵。一个构造可能对所有 p 都是极值构造。

关键词：极值集合论、(0,1) 矩阵、禁用构型、迹

1 引言

本文研究 $F(0, p, 1, 0)$ 的上界，其中

$$F(0,p,1,0) = \begin{bmatrix} \overbrace{1\ 1\cdots 1}^{p}\ 0 \\ 0\ 0\cdots 0\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

若 A 是没有重复列的 (0,1) 矩阵，则称 $m \times n$ 矩阵 A 为简单矩阵。A 的列与 $[m]$ 的子集之间存在自然对应。我们使用如下矩阵术语。设 $\|A\|$ 为 A 的列数。对于给定矩阵 F，如果 A 的某个子矩阵是 F 的行置换和列置换，则称 F 是 A 中的一个构型，记作 $F \prec A$。定义

$$\mathrm{Avoid}(m,F) = \{A \mid A \text{ is } m\text{-rowed and simple}, F \not\prec A\},$$

$$\mathrm{forb}(m,F) = \max_{A \in \mathrm{Avoid}(m,F)} \|A\|.$$

矩阵 $A \in$ Avoid(m, F) 若满足 $\|A\| =$ forb(m, F)，则称为极值矩阵，并令

$$\mathrm{Ext}(m,F) = \{A \in \mathrm{Avoid}(m,F) \mid \|A\| = \mathrm{forb}(m,F)\}.$$

许多结果收录于综述 [AS25]，其中包括关于 2 行 F 的结果。

对于行的子集 S，将由这些行构成的 A 的子矩阵定义为 A_S。一些重要的矩阵包括 K_k，即包含 k 行上所有可能的 (0,1)-列的 $k \times 2^k$ 矩阵。我们将 F 的 (0,1)-补矩阵记作 F^c，使得

I_k^c 是恒等矩阵的补矩阵。将列和为 s 的 $k \times \binom{k}{s}$ 矩阵定义为 K_k^s。我们将全为 1 的 $k \times 1$ 列定义为 $\mathbf{1}_k$，将全为 0 的 $k \times 1$ 列定义为 $\mathbf{0}_k$。

极值组合学中的问题首先关注上界，但也会探讨达到上界时的情形。本文确定了 m，F(0，p，1，0) 的 forb 上界，并为 Ext(m，F) 中的矩阵提供了刻画（第 5 节和第 6 节）。关于 Avoid(m，F(0，p，1，0)) 的一般引理见第 2 节。构造 (3) 似乎是确定 Ext(m，F) 的关键。我们用带有有向边和无向边的图论来描述 Avoid(m，F) (2) 中的矩阵。第 3 节和第 4 节给出了重要引理的证明。最重要的结果是引理 4.1，它断言由无向边诱导的连通分量是由无向边构成的团。这由此给出了 Ext(m，F) 的上界和刻画。随着 p 增大，引理 4.1 的论证会变得更加复杂。除非另有明确说明，我们均不考虑矩阵的行置换和列置换。

Ext(m，F(0，3，1，0)) 的详细刻画见第 5 节。F(0，4，1，0)、F(0，5，1，0) 的上界见 [AS25]。第 6 节中，我们为 $p \in \{6,7,8,9\}$ 给出了新的精确上界，这也得出了 Ext(m，F(0，p，1，0)) 的刻画，尤其见引理 6.1。

定理 1.1 forb(0 5 m m F $0,6,1,0$ $= \lfloor \frac{21}{5} m \rfloor$ $m \equiv 1$ 5 $m \equiv$ $m \geq 6$, F (0，6，1，0)) $\leq \lfloor \frac{21}{5} m \rfloor + 1$，且只有 (（模)) 时取等号。此外，对于 (（模)) 以及 。

我们刻画了当 $m \equiv 0 \equiv 1$（mod 5）时，
Ext($m, F(0,6,1,0)$) 中的矩阵。

定理 1.2 $\mathrm{forb}(m, F(0,7,1,0)) \leq \lfloor \frac{24}{5} m \rfloor + 1$，当 $m \equiv \equiv 0 \pmod 5$ 时取等号。

定理 1.3 $\mathrm{forb}(m, F(0,8,1,0)) \leq \lfloor \frac{27}{5} m \rfloor + 1$，当 $m \equiv \equiv 0 \pmod 5$ 时取等号。

定理 1.4 $\mathrm{forb}(m, F(0,9,1,0)) \leq \lfloor \frac{31}{5} m \rfloor + 1$ 在 $m \equiv 0 \pmod 5$ 时取等号。

2 个关于 $\mathrm{Avoid}(m, F(0,p,1,0))$ 的思路

我们沿用 [AK07] 的证明思路。对于 $A \in \mathsf{Avoid}(m, F(0,p,1,0))$，那么对于任意行对 i,j，有以下三种情形之一：

$$\begin{pmatrix} \leq p-1 & & \leq p-1 \\ i & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \text{and} \quad i & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\ j & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} & j & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{matrix} \text{no} \\ i \\ j \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{matrix} \text{no} \\ i \\ j \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

这是 [AS25] 中的"缺失什么"思路。注意行排序。我们在 A 的行上构造一个图 $G(A)$，其边包括无向边和有向边，定义如下：

- 无向边 $i-j$，如果至多有 $p-1$ 个 $\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 且至多有 $p-1$ 个 $\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 子矩阵位于行 $\{i,j\}$ 上
- 有向边 $i \to j$，如果行 $\{i,j\}$ 上不存在子矩阵 $\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$G(A)$ 中的每一行对都必须由有向边或无向边连接，以避免 $F(0,\ p,\ 1,\ 0)$。假设同时存在 $i-j$ 和 $i \to j$ 时，我们将忽略 $i-j$。

令无向边所诱导的连通分量为 C_1、C_2、.....、C_t。这给出了一个有希望的 $A \in \mathsf{Avoid}(m、\ F(0、\ p、1、0))$ 构造。条目**0** 表示一个全为 0 的块或列，而**1** 表示一个全为 1 的块或列。令 B_i 为定义在连通分量 C_i 的各行上的子矩阵，其非恒定列对应于行 C_i，并且可能还包含全为 0 的列。

引理 2.1 设 B_i 是一个有 k_i 行的简单矩阵，满足 $B_i \in \mathrm{Avoid}(k_i, F(0,p,1,0))$，并假设 B_i 没有全为 *1* 的列，但可以有全为 *0* 的列。令

$$A = \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_t \end{array} \begin{bmatrix} B_1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & & \cdots & & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & B_2 & \mathbf{1} & & \cdots & & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_3 & & \cdots & & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \cdots & & \mathbf{1} & B_t & \mathbf{1} \end{bmatrix} \tag{3}$$

其中 $A \in \mathrm{Avoid}(m, F(0、\ p、\ 1、\ 0))$ 与 $m = \sum_{i=1}^{t} k_i$ 和 $\|A\| = 1 + \sum_{i=1}^{t} \|B_i\|$.

证明： 取行 $r \in C_i$、 $s \in C_j$对于 $i < j$，我们没有子矩阵 $\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。由于 $B_i \in$ Avoid(k_i， F(0， p， 1， 0))，我们推得 $A \in$Avoid(m， F(0， p， 1， 0))。

■

如果 $G(A)$ 的有向边对于 $A \in$ Ext($m, F(0, p, 1, 0)$) 具有传递性，那么可以对（由无向边诱导的）连通分量进行排序，使得对于 $i < j$，有向边从 B_i 指向 B_j。这就得到了构造（3）。我们希望证明，在 A 中，由无向边形成的连通分量是团。引理 4.1 处理了这一点。确定（3）中 B_i 的最佳选择，在某种程度上类似于引理 3.3 上界引理中所展示的设计问题。最佳选择似乎是使 B_i 的行在 $G(A)$ 中构成一个团，正如引理 4.1 所证明的那样，从而得到上界 forb($m, F(0, p, 1, 0)$) $\leq \lfloor c_p m \rfloor + 1$，其中 c_p 在（6）中给出。

对于 $p = 2$，我们可以取 $B_i = [K_2 \backslash \mathbf{1}_2]$，从而得到 $\frac{3}{2}m + 1$列，使其对于 $m \equiv 0$（模 2）成立，这很容易推出 $\lfloor \frac{3}{2}m \rfloor + 1$。对于 $p = 3$，取 $B_i = [K_3^2 K_3^1 K_3^0]$，从而得到 $\frac{7}{3}m + 1$列，使其对于 $m \equiv 0$（模 3）成立。对于 $p = 4$，取 $B_i = [K_4^3 D K_4^1 K_4^0]$，其中 D 是由 2 个和为 2 的互补列组成的 4×2 矩阵，从而得到 $\frac{11}{4}m + 1$列，使其对于 $m \equiv 0$（模 4）成立。对于 $p = 5$，取 $B_i = [K_4^3 K_4^2 K_4^1 K_4^0]$，从而得到 $\frac{15}{4}m + 1$列，使其对于 $m \equiv 0$（模 4）成立。对于 $p = 6$，取 (3) 中的 $B_i = [K_5^4 K_5^2 K_5^1 K_5^0]$，从而得到 $\frac{21}{5}m + 1$列，使其对于 $m \equiv 0$（模 5）成立。我们也可以取 $[K_5^4 K_5^3 K_5^1 K_5^0]$（本质上是其补构型），或者事实上取 $[K_5^4 G_5$（G_5'）$^c K_5^0]$，其中 G_5 是 5 个顶点上的一个环的关联矩阵，而 G_5' 是 G_5的图的补图所对应的环的关联矩阵。这三种可能性 K_5^2、 K_5^3 和 $[G_5$（G_5'）$^c]$对于每一对可能的有序行对 i、 j恰好都有 3 个构型 $\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。定理 1.1 表明，对于 $m \equiv 0$（模 5），forb(m， F(0, 6, 1, 0)) $= \frac{21}{5}m + 1$，因此对于 $m \equiv 0$（模 5），我们有 Ext(m， F(0, 6, 1, 0)) 的构造，对于每个 5×21 B_i都有三种选择；此外，这是构造一个 $A \in$Ext(m， F(0, 6, 1, 0)) 的唯一方式。

对于 $p = 7$，计算机搜索得出 forb($5, F(0, 7, 1, 0)$) $= 25$，并给出一个构造：

$$\left[\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} & \\ K_5^0\, K_5^1 & & K_5^4\, K_5^5 \end{array}\right]. \tag{4}$$

这达到了团的上界引理给出的上界。此外，它还得出 forb(m， F(0， 7， 1， 0)) $\geq \frac{24}{5}m + 1$ 当 $m \equiv 0$（模 5）时的结果，因此也支持了我们的猜想

$c_7 = \frac{24}{5}$。

对于 $p = 8$，计算机搜索得出 forb(5，F(0，8，1，0)) $= 28$，其构造如下：

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\ K_5^0\, K_5^1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & K_5^4\, K_5^5 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \end{array}\right]. \quad (5)$$

这达到了团的上界引理给出的上界。此外，它还得出 forb(m，F(0，8，1，0)) $\geq \frac{27}{5}m+1$ 对于 $m \equiv 0$(模 5) 的结果，从而支持我们的猜想 $c_8 = \frac{27}{5}$。

对于 $p = 9$，构造 K_5 得出 forb(5，F(0，9，1，0)) $= 32$。这达到了团的上界引理给出的上界。此外，它还得出 forb(m，F(0，9，1，0)) $\geq \frac{31}{5}m + 1$ 对于 $m \equiv 0$(模 5) 的结果，从而支持我们的猜想 $c_9 = \frac{31}{5}$。

根据我们的构造，定义

$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$p=7$	$p=8$	$p=9$
$c_3 = \frac{7}{3}$	$c_4 = \frac{11}{4}$	$c_5 = \frac{15}{4}$	$c_6 = \frac{21}{5}$	$c_7 = \frac{24}{5}$	$c_8 = \frac{27}{5}$	$c_9 = \frac{31}{5}$

(6)

矩阵 K_t 达到了上界引理 引理 3.3 对含有 $2^{t-2}+1$ 个顶点的团给出的上界，并且 $B_i = K_t \backslash \mathbf{1}_t$ 可用于 (3)。我们提出以下猜想：

猜想 2.2 给定 t。$\mathrm{forb}(m, F(0, 2^{t-2}+1, 1, 0)) \leq \frac{2^t-1}{t}m + 1$，当 $m \equiv 0$(模 t)时取等号。

3 关于 $F(0, p, 1, 0)$的引理

我们将在此处及第 4 节中使用引理来证明，对于 $p = 3, 4, \ldots, 9$，有 forb(m, F(0, p, 1, 0)) $\leq c_p m + 1$。要证明 forb(m, F(0, p, 1, 0)) $= \lfloor c_p m \rfloor + 1$，那么$\|B_i\|$ 需要接近 $c_p|B_i|$。以下内容有助于归纳证明。

定义 3.1 令 $A \in \mathrm{Avoid}(m, F(0, p, 1, 0))$。如果我们删除 s 行和 t列后得到的矩阵 A_{m-s} 是简单的，则为此次删除指定一个代价

$$cost = c_p s \; - t \, .$$

给定一个由无向边诱导的分量 C_i *of* $G(A)$，令 B_i 为由 A_{C_i} 的非恒定列以及（如果存在）全 *0* 列构成的矩阵。我们可以删除 B_i的 $s = |C_i|$ 行 C_i 和 $\|B_i\|$ 列，从而得到一个简单矩阵

$$cost\ of\ component\ C_i = c_p|C_i| - \|B_i\|. \tag{7}$$

证明 forb$(m, F(0, p, 1, 0)) \leq \lfloor c_p m \rfloor + 1$ 通过归纳法证明 forb$(m, F(0, p, 1, 0)) \leq c_p m + 1$。其思路是，在应用归纳法时，如果代价为正或零，我们就能证明 forb$(m, F(0, p, 1, 0)) \leq c_p m + 1$。证明可以忽略代价至少为 1 的连通分量，因为此时我们要证明（通过归纳法）$\|A\| \leq (c_p m + 1) - 1$，因此$\|A\| \leq \lfloor c_p m \rfloor$。

引理 3.2 删除引理。假设我们要对 m 进行归纳，以证明 $\mathrm{forb}(m, F(0, p, 1, 0)) \leq c_p m + 1$。那么，只要存在一个代价至少为 *0* 的删除，我们就完成了证明。

证明： 设 $A \in$ Avoid(m, F)。设我们删除了 k 行和 A 及 t 列，使所得矩阵 A_{m-k} 为简单矩阵： $A_{m-k} \in$Avoid$(m-k, F)$。如果删除代价至少为 0，则 $c_p k > t$。于是根据归纳法 $\|A_{m-k}\| \leq c_p(m-k)+1$，因此 $\|A\| \leq \|A'\| + c_p k \leq c_p(m-k)+1+c_p k = c_p m + 1.$ ■

如果存在删除代价或分量代价至少为 1，则根据归纳法，该矩阵不会是极值矩阵。对极值矩阵的分析可以假设不存在删除代价至少为 1 的分量。

以下内容将被广泛使用，尤其适用于由无向边在 $G(A)$ 中诱导出的团。

引理 3.3 上界引理。设 B 是一个 $k \times n$ *(0,1)* 矩阵，其中没有全为 *1* 的列，也没有全为 *0* 的列。假设 B 不存在相差超过 t 列的行对，即 B 在同一行对上至多有 t 个不相交构型 $\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$。那么

$$n \leq \frac{tk}{2}. \tag{8}$$

如果 B 是简单的且 $t \geq 4$，那么

$$n \leq \left\lfloor 2k + \frac{(t-4)k(k-1)}{4(k-2)} \right\rfloor. \tag{9}$$

证明： 每一列在 k行中至少贡献 $k-1$ 个构型 $\binom{0}{1}$。此类列若超过 $tk/2$ 个，则会使 B 中 $k(k-1)/2$ 个行对所含构型总数超过 $tk(k-1)/2$ 。因此某一行对将包含超过 t 个构型，这与（8）矛盾。

如果 B 是简单的，那么我们注意到，至多有 $2k$ 列各自只含有 $k-1$ 种构型，即至多含有一个 1 的列和至多含有一个 0 的列。其他所有列至少有 $2(k-2)$ 种构型 $\binom{0}{1}$，且当列和为 2 或 $k-2$时取等号。由此可得$2k(k-1) + (n-2k)2(k-2) \leq tk(k-1)/2$ ，从而得到 (9)。

■

将此引理应用于 B 简单情形时，需要针对 $t > 2(\binom{k}{2}+\binom{k}{1})$ 进行调整：此时列和为 2 和 $k-2$ 的列已用尽，因此要考虑列和为 3、 $k-3$等的列。这对于 $p > 9$ 是必要的。

令 $D(A)$表示 $G(A)$的有向边所构成的子图。

引理 3.4 传递性引理。设 $A \in \mathrm{Avoid}(m, F(0, p, 1, 0))$。假设 $2c_p \geq p$，这对 $p = 3$、4、. . .、9 均成立。每一行对之间恰有一条 $G(A)$ 的有向边，否则可以进行代价至少为 *1* 的删除。如果 $D(A)$不是传递的，那么可以进行代价至少为 *1* 的删除。因此，我们可以假设有向边 $D(A)$ 构成的图是传递的。

证明： 显然，在 (2) 中，每一行对 i, j 之间都有某条边相连： $i \to j$、$i - j$ 或 $j \to i$。根据 $i - j$ 的定义，不会出现 $i \to j$ 或 $j \to i$。如果 $i \to j$ 且 $j \to i$，那么我们可以删除第 i 行，且结果仍然是简单的。删除引理 3.2 可以按代价 $c_p \geq 1$ 使用。

为证明 $D(A)$ 具有传递性且不包含环，考虑以下情形： $i \to j$和 $j \to k$。我们有三种可能性:

$$(a) \quad \begin{array}{ccc} & & j \\ & \nearrow & \downarrow \\ i & & \\ & \searrow & \\ & & k \end{array}, \quad (b) \quad \begin{array}{ccc} & \nearrow & j \\ & & \downarrow \\ i & & \\ & \searrow & \\ & & k \end{array}, \text{ and } (c) \quad \begin{array}{ccc} & \nearrow & j \\ & & \downarrow \\ i & & \\ & \searrow & \\ & & k \end{array}.$$

对于情形 (a) 和 (b)，我们考察这三行中可能出现的元素。行 i、 j、 k 上方的元素表示这几类列可能的数量。

$$\begin{array}{c|cccccccc} & \text{none} & \text{none} & \text{none} & \text{none} & s & t & & \\ i & 0\cdots0 & 0\cdots0 & 0\cdots0 & 1\cdots1 & 1\cdots1 & 1\cdots1 & 0\cdots0 & 1\cdots1 \\ j & 1\cdots1 & 1\cdots1 & 0\cdots0 & 0\cdots0 & 0\cdots0 & 1\cdots1 & 0\cdots0 & 1\cdots1 \\ k & 0\cdots0 & 1\cdots1 & 1\cdots1 & 1\cdots1 & 0\cdots0 & 0\cdots0 & 0\cdots0 & 1\cdots1 \end{array}.$$

在情形 (a) 中，$s+t \le p-1$。我们可以删除两行 i 和 j，以及 $s+t$ 列，从而得到一个简单矩阵。由删除引理 3.2，代价为 $c_p \cdot 2 - (p-1)$，因此代价至少为 1，结论成立。在情形 (b) 中，行 i、j、k 必须相同，因此我们可以删除两行 i 和 j，且不删除任何列，从而得到一个简单矩阵。由删除引理 3.2，代价为 $c_p \cdot 2$，因此代价至少为 1，结论成立。因此，我们可以假设 A 只能满足 (c)。因此，$i \to j$ 和 $j \to k$ 推出 $i \to k$。

■

鉴于任意两行之间至多有一条有向边，根据传递性可知不存在有向环。此外，我们可以将传递性引理应用于 $A \in \text{Avoid}(m,\ F(0,\ p,\ 1,\ 0))$，并推得由无向边诱导的连通分量可以按传递关系排序，并形成 (3) 的结构。

引理 3.5 设 $p \in \{3,4,\dots,9\}$。设 $A \in \text{Avoid}(m, F(0,p,1,0))$，使得由无向边诱导的每个分量都是一个团。则 $\|A\| \le c_p m + 1.$

证明： 这只是在每个分量上应用上界引理。(6) 中 c_p 的值，是通过在 (9) 中取 n/k、n 和 k 使函数最大化而确定的。

■

4 团连通分量

下面的引理（其证明较长）利用引理 3.5 和上界引理，得出我们所需的上界。证明 $\text{Ext}(m,\ F(0,\ p,\ 1,\ 0))$ 的连通分量是团，可以得到一个有用的刻画。从某种意义上说，由于上界引理表明较大的团并无帮助，对于固定的 p，该引理将问题简化为一次「有限」计算。

引理 4.1 设给定 $p \in \{3,4,5,6,7,8,9\}$ 和 m。假设 $A \in \text{Avoid}(m, F(0,p,1,0))$。那么，由无向边诱导的 $G(A$<style21'>) 的所有连通分量都是团，或者存在代价至少为 *1* 的删除。此外 $\|A\| \le c_p m + 1$。

证明： 该证明对 m使用归纳法。假设对于 $m' < m$ 和 $A' \in$, $\text{Avoid}(m', F(0,p,1,0))$ 满足以下条件：$G(A')$ 的连通分量要么全都是团，要么存在代价至少为 1 的删除。此外，假设 $\|A'\| \le c_p m' + 1$。

令 $C_1, C_2, \ldots$ 为由无向边诱导的 $G(A)$ 的连通分量。将每个 C_i 收缩为单个顶点后，连通分量 C_i可按所得有向图的传递排序排列。对 A 的行重新排序，使其符合这一顺序。给定排序中满足 $x \in C_i$ 的两行 x, y 以及满足 $i < j$ 的 $y \in C_j$，则 $x \to y$，因此不存在子矩阵$\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。

对于一个包含 k 个顶点的分量 C_i，令 B_i 表示 A_{C_i} 的 k 行子矩阵，其中 B_i 是 A_{C_i} 的所有非恒定列，再加上 A_{C_i} 中若存在的一个全 0 列。注意，如果 B_i 中存在非恒定列，那么该列在具有 $\ell < i$ 的分量 C_ℓ 对应的行上必定全为 1，在具有 $\ell > i$ 的分量 C_ℓ 对应的行上必定全为 0。这说明一列不可能在两个分量上都非恒定。因此， A 具有 (3) 的结构。这也迫使 B_i 为简单矩阵。

我们首先证明， $G(A)$ 中不会出现小分量，否则就存在代价为 1 的删除。由于 B_i 是简单的且有 k 行， B_i 中的非恒定列数至多为 $2^k - 2$。大小为 k 的分量至多有 $2^k - 2$ 个非恒定列。因此，根据 (7)，大小为 k 的分量的代价至少为 $c_p k - (2^k - 1)$。对于 $p = 3$， $k \leq 2$、 $p = 4$、5， $k \leq 3$ 以及 $p = 6$，7、8、9 和 $k \leq 4$，代价至少为 1。

上界引理表明，对于 $p = 3$、 $k = 3$，以及 $p = 5$、 $k = 4$ 和 $p = 9$、 $k = 5$，存在唯一的代价为 0 的解 $K_k \backslash \mathbf{1}_k$，且它们都是团。因此，在情形 $p = 3$、 $k = 3$，以及 $p = 5$、 $k = 4$ 和 $p = 9$、 $k = 5$ 中，任何代价为 0 的分量都是团。

对于 $p = 4$、 $k = 4$，和为 1、2、3 且不含 $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$的列恰有 10 列，所得矩阵为 $F(0, 4, 1, 0)$。因此，对于 $p = 4$，代价为 0 的分量必定是团。

对于 $p = 6$,7, 8 和 $k = 5$，在 5 行上，和为 2 或 3 的列会产生 6 种构型$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，而和为 1 或 4 的列会产生 4 种构型$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。考虑 $p = 6$ 和 $A \in \mathsf{Avoid}(5, F(0, 6, 1, 0))$。若 I_5 或 I_5^c 在 A 中，则会得到一个团，因此假设和为 1 或 4 的列至多有 8 列。构型 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 至多有 100 种。设 a 为和为 1 或 4 的列数，设 b 为和为 2 或 3 的列数。那么$4a + 6b \leq 100$。由 $a \leq 8$ 可得 $a + b \leq 19$。由此得到 $\|A\| \leq 21$，因此可知该分量的代价至少为 1。

现在，对于 $p = 7$，8, $k = 5$，我们可以如下论证。假设$A \in \mathsf{Avoid}(5, F(0, p, 1, 0))$，但 $G(A)$ 不是一个团。假设有向边 $1 \to 2$ 属于 $G(A)$。在 5 行上不含

子矩阵 $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 的列数为 24。根据我们的构造 (4) 和 (5)，我们可以推知，这种情形会产生一个代价至少为 1 的分量。

因此，我们可以假设不存在这些规模较小的非团连通分量，从而验证这些情形下的引理。此外，如果这类分量的代价为 0，那么它就是一个团。

如果有一个包含 C_i 个顶点、且有 h 列在 B_i 上非恒定的分量，那么我们可以删除 k 行和 $\leq h+1$ 列（即在 B_i 上非恒定的 h 列，以及可能还有一列全为 0 的列）。这些列在上方的 C_i 个分量中全为 1，在下方的 C_i 个分量中全为 0。这样便得到一个有 $m-k$ 行的简单矩阵。如前所述，在 (3) 中，B_i 由非恒定列以及（通常还有）全为 0 的列组成，因此 $h+1$ 是 B_i 中列数的一个上界。如果只有一个分量，那么就有非恒定列、全为 0 的列以及全为 1 的列，因此共有 $h+2$ 列。请注意，h，$h+1$，$h+2$ 都是相关内容，这可能会使读者感到困惑。

根据删除引理，只要

$$h+2 \leq c_p \cdot k, \tag{10}$$

删除的代价为 $c_p \cdot k$ –(h + 1)，因此至少为 1；或者，如果只有一个分量，则我们得到正确的上界。如果分量 C 是一个团，那么我们可以使用上界引理，并验证该分量的代价至少为 1，除了上面所述的小情形（$p=3$，4，5）($p=4$，5,$k=4$) 和 ($p=6$，7，8，9, $k=5$)；这些情形中的分量全都是团。我们可以使用上界引理构造表 (12)。下面的情形 1 中也进行了同样的处理，尽管C 不是一个团，上界引理仍然成立。

证明的其余部分考察一个不是团的分量 C （由无向边诱导）。显然 F(0，p，1，0) $\not\prec A_C$，并且 (2) 适用。回顾一下，A_C 没有全为 1 的列，但可以有全为 0 的列。论证分为两种情形。

情形 1. $F(0, 2p-1, 0, 0) \not\prec A_C$.

假设该分量有 k 个顶点，并考虑由这 k 行上可能出现的非恒定列构成的 k 行矩阵。那么，对于任意行对 i，j，要避免 F(0，p，1，0)，要么属于情形 (2) 的第一种情形，且至多有 $p-1$个子矩阵 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$和 $p-1$个子矩阵 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$；要么属于情形 (2) 的第二种或第三种情形，且两种类型之一至多有 $2p-2$ 个子矩阵。因此，行 i，j至多有 $2p-2$种构型 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$。现在可以应用上界引理，即使该分量不一定是一个

团，且 $t = 2p-2$。因此，在 C 上非恒定的列的最大数量为

$$h \leq \lfloor 2k + \frac{(2p-6)k(k-1)}{4(k-2)} \rfloor. \tag{11}$$

注意，由 (10) 可知， $h+1$、 $h+2$ 很重要。在 (3) 中，我们的分量 B_i大小为 $h+1$，而如果只有一个分量，构造会得到 $h+2$ 列。

现在我们考虑 p 的各种取值。对 $p=3$、 $k=4$ 使用 (11)，分量 C 具有 $h \leq \lfloor 2 \cdot 4 \rfloor$ 和 $h+1 \leq 9$，因此代价至少为 $\frac{7}{3} \cdot 4 - 9 = \frac{1}{3}$，且可以达到 ($[K_4^3 K_4^1 K_4^0]$)。类似地，对于 $p=3$、 $k=5$，根据上界引理，分量 C 具有 $h \leq \lfloor 2 \cdot 5 \rfloor$ 和 $h+1 \leq 11$，因此代价至少为 $\frac{7}{3} \cdot 5 - 11 = \frac{2}{3}$，且可以达到 ($[K_5^3 K_5^1 K_5^0]$)。注意，对于 $p=3$、 $k \geq 6$，上界引理推出分量 C 具有 $h \leq \lfloor 2 \cdot k \rfloor$和 $h+1 \leq 2k+1$，因此代价至少为 $\frac{7}{3} \cdot k - (2k+1) \geq 1$。所以情形 1 可在 $k=4$，5 时出现，但只有当分量是团时，代价才是给定值。可以验证，如果分量不是团，代价会大于 1。对于 $k \geq 6$，代价大于 1。极值矩阵 Ext(m， F(0， 3， 1， 0)) 在定理 5.1 中有描述。

对于 $p=4$，我们无法达到 $k=4$,5 的上界引理上界。Miguel Raggi 编写了一个程序进行计算机搜索 [R11]，这是他于 2011 年在英属哥伦比亚大学攻读博士学位期间编写的。该程序经过多次测试。对于这些问题，尝试处理带有 $m=6$ 的情形并未奏效。我们得到 forb(4, F(0,4,1,0)) $=12$（使用 $c_4 = \frac{11}{4}$ 的代价为 $=0$）、forb(5, F(0,4,1,0)) $=14$（代价为 $=\frac{3}{4}$），且这两种情况仅在由团构成、其他分量的代价至少为 1 时才能达到。现在，在 (11) 中使用 $p=4$，对于 $k \geq 6$, 各分量的代价至少为 1。因此，情形 1 不会出现在 $p=4$ 中。

对于 $p=5$，计算机搜索 [R11] 得出 forb(4， F(0， 5， 1， 0)) $=16$ ($h=14$, 代价 $=0$)，forb(5， F(0， 5， 1， 0)) $=18$ ($h=16$, 代价$=1\frac{3}{4}$)。使用 (11) 可得 $k=4$，5 的相同上界。根据 (11)， $k \geq 6$ 的连通分量代价至少为 1。因此，情形 1 不会出现在 $p=5$中。

对于 $p \in \{6,7,8,9\}$，根据 (11)，一个分量的代价至少为

$$c_p \cdot k - (h+1) = c_p \cdot k - \left(\left\lfloor 2k + \frac{(2p-6)}{4} \frac{k(k-1)}{(k-2)} \right\rfloor + 1 \right),$$

它随 k 增大，并在 $k=5$ 处取最小值。我们已经处理了上文中大小为 $k=5$ 的连通分量。下表表明，我们有

大小为 $k \geq 6$ 的连通分量的代价至少为 1，但 $p = 7$ 和 $k = 6$ 除外；它们需要更仔细的分析。回顾一下，代价为 $c_p \cdot k - (h+1)$。

p	c_p	h $(k=6)$	代价 $(k=6)$	h $(k=7)$	代价 $(k=7)$
6	$\frac{21}{5}$	23	$1\frac{1}{5}$	26	$2\frac{1}{5}$
7	$\frac{24}{5}$	27	$\frac{4}{5}$	30	$2\frac{3}{5}$
8	$\frac{27}{5}$	30	$1\frac{2}{5}$	35	$2\frac{2}{5}$
9	$\frac{31}{5}$	34	$2\frac{1}{5}$	39	$3\frac{2}{5}$

(12)

对于 $p = 7$，大小为 k 的分量的代价为 $\frac{24}{5} \cdot k - \lfloor 2k + \frac{8k}{4(k-1)} \rfloor - 1$，而对于 $k = 6$，其仅为 $4\frac{5}{5}$，但对于 $k = 7$，已达到 $2\frac{3}{5}$。我们需要针对 $k = 6$ 给出一些特殊论证。通过取 $[K_6^5 K_6^5 K_6^1]$，我们可以得到 $h = 27$。然而，这是一个团。另一方面，如果在 6 行中有一列包含 3 个 1 和 3 个 0，那么上界引理中的上界变为 $2 \cdot 6 \cdot 5 + (n-13) \cdot 8 + 9 \leq 6 \cdot 6 \cdot 5$，这意味着 $n \leq 26$，且代价为 > 1。类似地，如果我们只有来自 $[K_6^5 K_6^4 K_6^2 K_6^5]$ 的列，但至少有一对 $i,\ j$，且 $\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ 的构型不超过 11 个，那么上界引理中的上界变为 $2 \cdot 6 \cdot 5 + (n-12) \cdot 8 \leq 6 \cdot 6 \cdot 5 - 1$，这意味着 $n \leq 26$，且代价为 > 1。因此，要在 6 行上有 27 个非恒定列，且构成的不是团，我们必须只有来自 $[K_6^5 K_6^4 K_6^2 K_6^1]$ 的列，并且至少有一对 $i,\ j$，其中有 12 列属于 $\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$。然而，对于给定的一对，在 $[K_6^5 K_6^4 K_6^2 K_6^1]$ 中满足 $\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} [\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}]$ 的列只有 10 列。因此，非团分量的代价对于 $k = 6$ 至少为 1；如前所述，对于所有 $k \geq 7$ 也至少为 1。因此，我们可以假设情形 1 对于 $p = 7$ 不成立。

这就完成了 $3 \leq p \leq 9$ 的情形 1。

情形 2。 $F(0, 2p-1, 0, 0) \prec A_C$。

考虑两行 $i, j \in C$，其对应元素为 $F(0, 2p-1, 0, 0) \prec A_{\{i,j\}}$。那么我们没有无向边 $i - j$。不妨设我们有子矩阵 $(2p-1) \cdot \begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} [\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}]$ 和 $i \to j$。对于 C 的其他每一行 s，我们都有 $i \to s$ 或 $s \to j$，因为在与 $1's$ 相同的列中，行 s 里要么会有 p 0，从而得到 $i \to s$（使用 (2)）；要么行 s 里会有 p 1，这些元素与 0 位于相同的列中，从而得到 $s \to j$（根据 (2)）。

设连接 C 和 i、j 的无向边最短路径记为 $i = v_1 v_2 \dots v_r = j$。由于对于所有 $2 \leq a \leq r-1$，要么 $v_1 \to v_a$，要么 $v_a \to v_r$，因此

$i-s$、 $s-j$ 不可能，因此 $r \geq 4$。根据路径v_1 的最短性， v_{r-1} 之间不能由无向边连接，所以要么 $v_1 \to v_{r-1}$ ，要么$v_{r-1} \to v_1$。根据传递性，后一种情况不可能。通过归纳法继续推导可知，若 $s+1<t$，则 $v_s \to v_t$。

令 $R=\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$，并令 A_R表示 A_C在行 R上的子矩阵。在式 (13) 给出的 r行 v_1、.....、 v_r上，非恒定列有 $2r-2$ 种可能类型，恒定列有 2 列。请记住， A_C可能不止包含这些 r 行，因此 A_R 中的列具有如 A_R 中所标注的重数。

$$
A_R \quad \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \vdots \\ v_{r-1} \\ v_r \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} a_1^1 & a_2^0 & a_2^1 & a_3^0 & a_3^1 & \cdots & a_{r-1}^0 & a_{r-1}^1 & a_r^0 & b_0 & b_1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \tag{13}
$$

令 a_k^d 表示 A 中第 v_k 行元素为 0，且第 v_{k+1}行为 d 的列数，这些列上方为 1、下方为 0，如式 (13) 所示。我们将这些列称为“列 a_s^d”。利用边 $v_s - v_{s+1}$，可得

$$
\begin{gathered} 1 \leq a_{s-1}^1 + a_{s+1}^0 + a_{s+1}^1 \leq p-1 \text{ for } 2 \leq s \leq r-2 \\ 1 \leq a_2^0 + a_2^1 \leq p-1 \text{ and } 1 \leq a_{r-2}^1 + a_r^0 \leq p-1 \end{gathered}
$$

将这些不等式相加，得到

$$
a_1^1 + 2a_2^1 + \ldots + 2a_{r-2}^1 + a_{r-1}^1 + a_2^0 + \ldots + a_r^0 \leq (p-1)(r-1).
$$

利用对所有 $s=1$均有 $a_s^1 \geq 1$这一事实，2，.....， $r-1$（使用 $v_s - v_{s+1}$），我们得出

$$
\sum_{s,d} a_s^d = a_1^1 + a_2^1 + \ldots + a_{r-2}^1 + a_{r-1}^1 + a_2^0 + \ldots + a_r^0 \leq (p-2)r - p + 4. \tag{14}
$$

在满足（$2p-1$）$\cdot \begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$的行对 u， v 中，选择行对 i， j，因为连接它们的无向边路径最短。因此我们

不能有满足（$\cdot \begin{smallmatrix} v_1 \\ v_{r-1} \end{smallmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$）$2p-1$、由无向边路径连接的 v_1，v_{r-1}，也不能有满足（$\cdot \begin{smallmatrix} v_2 \\ v_r \end{smallmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$）$2p-1$、由无向边路径连接的 v_2，v_r。现在，A有 $t \cdot \begin{smallmatrix} v_1 \\ v_{r-1} \end{smallmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，其中 $t = \sum a_s^d - (a_1^1 + a_r^0)$，并且有 $t \cdot \begin{smallmatrix} v_2 \\ v_r \end{smallmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，其中 $t = \sum a_s^d - (a_2^0 + a_2^1 + a_{r-1}^1)$。前者给出 $\sum a_s^d - (a_1^1 + a_r^0) \leq 2p-2$。给定 $a_1^1 \leq p-1$ 和 $a_r^0 \leq p-1$，我们得到

$$\sum a_s^d \leq 4p-4. \tag{15}$$

后者给出 $\sum a_s^d - (a_2^0 + a_2^1 + a_{r-1}^1) \leq 2p-2$。给定 $a_2^0 + a_2^1 \leq p-1$和 $a_{r-1}^1 \leq p-1$，我们再次得到 (15)。对 $a_1^1 + a_r^0$、a_r^0、a_{r-1}^1 和 $a_2^0 + a_2^1$ 给出更精确的估计，可以改进上界 (15)。这个上界不依赖于 r，因此对较大的 r很有帮助。

有一种分解方法可以提供帮助。令 D 表示非恒定列 A_R（带重数）的 $r \times \sum_{s,\ d} a_s^d$子矩阵。根据我们在情形 2 开始时的观察，$C \backslash R$ 的每一行 s 要么是 $i \to s$，要么是 $s \to j$。定义 V 为满足 $i \to s$ 的那些 $s \in C \backslash R$，并定义 U 为满足 $s \to j$ 但具有 $s \notin V$的那些$s \in C \backslash R$。因此 $R \cup U \cup V = C$。结合 (13) 中的 b_0、b_1 列，并依据行 R，U，V以及在 R上非恒定的列、在行 R 上为 0 的列和在行 R上为 1 的列，对 A_C进行如下分解。使用 $s \to v_r$ 可知，列 b_0 在行 $s \in V$ 上全为 0；使用 $v_1 \to s$可知，列 b_1 在行 $s \in U$ 上全为 1。这给出了 A_C 的如下分解，其中 **0** 和 **1** 分别表示由 0 和 1 组成的块。

$$A_C = \begin{array}{c} R \\ U \\ V \end{array} \left[\begin{array}{c|c|c} D & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline E & B_0 & \mathbf{1} \\ \hline F & \mathbf{0} & B_1 \end{array} \right], \tag{16}$$

我们假设 B_1 不含全为 1 的列，因此 A_C 不含全为 1 的列。在此分解中，令 u 为 B_0 中的行数，v 为 B_1 中的行数。于是 $r+u+v=k$。

由（16），$\|A_C\| = \|D\| + \|B_0\| + \|B_1\|$。由（14），

$$\|D\| = \sum_{s,d} a_s^d \leq (p-2)r - p + 4. \tag{17}$$

由于 $B_0 \in$Avoid(u，F(0，p，1，0)) 和 $B_1 \in$Avoid(v，F(0，p，1，0)) 是简单的，因此根据归纳法，$\|B_0\| \leq$forb(u，F(0，p，1，0)) $= \lfloor c_p u \rfloor + 1$ 和 $\|B_1\| \leq$forb(v，F(0，p，1，0)) $- 1 = \lfloor c_p v \rfloor$（$B_1$ 不含全为 1 的列）。

我们可以删除 $|C|$ 行和 $\|D\| + \|B_0\| + \|B_1\|$ 列。此次删除的代价至少为:

$$(r+u+v)c_p - ((p-2)r - p + 4) - \lfloor c_p u + 1 \rfloor - \lfloor c_p v \rfloor. \tag{18}$$

对于 $p \in \{3,4,5,6\}$，该值至少为 1，因此情形 2 不会出现在$p = 3$、4、5、6 中。

删除 r 行 R 以及为保持简单性而删除的相应列，其代价应至少为 2，从而根据 (18)，分量 C 的代价至少为 1。注意，在$A_{U\cup V}$中，在 U 上为 0、在 V 上为 1 的列可能会出现两次。我们的论证同时使用了 (17) 和 (15)。

对于 $p = 7$，当 $c_7 = \frac{24}{5}$时，$\sum a_s^d \le (p-2)r - p + 4 = 5r - 3$，且 $c_p r - ((p-2)r - p + 4) = \frac{24}{5}r - 5r + 3 = -\frac{1}{5}r + 3 \ge 2$对于 $r \le 5$成立。如上所述，我们的论证要求 R的代价至少为 2。利用 (15)，我们有 $c_p r - (4p-4) = \frac{24}{5}r - 24 \ge 2$对于 $r \ge 6$成立。至此，关于 $p = 7$的论证完成。

对于 $p = 8$和 $c_8 = \frac{27}{5}$，则 $\sum a_s^d \le (p-2)r - p + 4 = 6r - 4$以及 $c_p r - ((p-2)r - p + 4) = \frac{27}{5}r - 6r + 4 = -\frac{3}{5}r + 4 \ge 2$对于 $r = 4$。利用 (15)，我们有 $c_p r - (4p-4) = \frac{27}{5}r - 28 \ge 2$对于 $r \ge 6$。还需要进一步说明$r = 5$。

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a_1^1 & a_2^0 & a_2^1 & a_3^0 & a_3^1 & a_4^0 & a_4^1 & a_5^0 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

我们对 i，j的选择对于情形 2 不会在行对v_2，v_5上产生 $F(0,\ 2p-1,\ 0,\ 0)$，而 v_1，v_4产生 $a_1^1 + a_3^0 + a_3^1 + a_4^0 + a_5^0 \le 2p-2$和 $a_2^0 + a_2^1 + a_3^0 + a_4^0 + a_4^1 \le 2p-2$。相加得到:

$$\sum a_s^d + (a_3^0 + a_4^0) \le 4p - 4. \tag{19}$$

如果 $a_3^0 + a_4^0 \ge 3$，则利用 (19)，(15) 化简为 $4p - 7 = 25$，这处理了情形 $r = 5$、$p = 8$。现在 $a_2^1 = a_3^1 = 1$ 是必然的，否则我们可以将 (17) 从 $6r - 4$ 化简为 $6r - 5$，这处理了 $p = 8$ 的情形 $r = 5$。但如果 $a_3^0 + a_4^0 \le 2$ 且 $a_2^1 = a_3^1 = 1$，我们可以采用一种不同于求上界的方法，即对 (13) 使用删除引理。我们可以删除 A_C 中的行 v_3 以及至多 4 列

a_2^1、 a_3^1 和 $a_3^0 + a_4^0$，由于 $c_8 = \frac{27}{5} \geq 5$，从而产生至少为 1 的删除代价。这就完成了关于 $p = 8$ 的论证。

对于 $p = 9$ 且 $c_9 = \frac{31}{5}$，由 (15) 可得 $c_9 r - (4p - 4) = \frac{31}{5} r - 32 \geq 2$，对于 $r \geq 6$。注意，该上界距离排除 $p = 9, r = 5$ 仅差 1。现在 (17) 为 $\sum a_s^d \leq 7r - 5$，遗憾的是 $\frac{31}{5} r - (7r - 5) = -\frac{4}{5} r + 5 < 2$，对于 $r \geq 4$，但上界再次距离排除 $p = 9$, $r = 4$, 5 仅差 1。对于 $r = 5$，我们利用上述分析，并注意到 $a_2^1 \geq 2$ 或 $a_3^1 \geq 2$ 会使上界降至 $7r - 6$，从而得到 $\frac{31}{5} r - (7r - 6) = -\frac{4}{5} r + 6 \geq 2$，对于 $r = 4$，5。因此我们可以假设 $a_2^1 = a_3^1 = 1$。若 $a_3^0 + a_4^0 \geq 3$，则 (15) 利用 (19) 化简为 $4p - 7 = 29$，这便处理了情形 $r = 5, p = 9$。因此假设 $a_3^0 + a_4^0 \leq 2$，与上述情形相同，删除 A_R 中的行 v_3 以及至多 4 列 a_2^1, a_3^1 和 $a_3^0 + a_4^0$ 的代价至少为 1，因为 $c_9 = \frac{31}{5} \geq 5$。

情形 $p = 9, r = 4$ 还需要进一步处理。我们需要 $\sum a_s^d \leq 7r - 6 = 22$。由于上界非常接近，我们可以假设 $\|B_0\| = \lfloor c_p u + 1 \rfloor$ and $\|B_1\| = \lfloor c_p v \rfloor$，其中 B_1 缺少全为 1 的列。B_0 和 B_1 都是“极值的”，因此我们可以使用归纳法（因为 $u, v < m$）断言，图 $G(B_0)$ 和 $G(B_1)$ 中由无向边诱导的连通分量都是团，因为代价至少为 1 的删除会与 $\|B_0\| = \lfloor c_p u + 1 \rfloor$ and $\|B_1\| = \lfloor c_p v \rfloor$ 矛盾。现在，B_0 具有所有团分量且满足 $\|B_0\| = \lfloor c_p u + 1 \rfloor$，根据 (6.1) 可知，$B_0$ 必须全部由大小为 5 的团组成，并且每个分量的行上还必须有 $K_5 \backslash \mathbf{1}_5$，如下所示：

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
D & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline
* & K_5 \backslash \mathbf{1}_5 & & & \mathbf{1} \\ \hline
* & & K_5 \backslash \mathbf{1}_5 & & \mathbf{1} \\ \hline
* & & & K_5 \backslash \mathbf{1}_5 & \mathbf{1} \\ \hline
* & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & B_1 \\ \hline
\end{array} \\
\begin{array}{c} R \\ \\ U \\ \\ V \end{array} &
\end{array}
$$

注意到，$K_5 \backslash \mathbf{1}_5$ 中的任意一行都有 15 个 1（以及 16 个 0）。因此，D 下初始列中，U 各行的所有元素都必须是 1：如果 $s \in U$ 行中有一个 0，那么该列在 D 中某行 $t \in R$ 上就有一个 1（例如在 v_1 行或 v_2 行），这会在 s、t 各行中产生 $F(0, 9, 1, 0)$。同样的论证也适用于 B_1 以及 V 的各行，只需互换 0 和 1 的角色。因此，D 下初始列中，V 各行的所有元素都必须是 0。但这样一来，A_R 中非恒定列的所有列重数至多为 1。这就得到 $\sum a_s^d = 2r - 2 = 8$，因此删除 R 行的代价至少为 2。

因此，情形 1 和情形 2 均不成立，从而各连通分量要么是团，要么存在代价至少为 1 的删除。

现在验证 $\|A\| \leq c_p m + 1$。如果所有连通分量都是团，那么由引理 3.5 可得该上界。如果存在代价至少为 1 的删除，那么我们可以删除 k_1 行和 t_1 列，其中 $c_p k_1 - t_1 \geq 1$。删除后，我们得到一个满足 $\|A^{(1)}\| = \|A\| - t_1$ 的 $A^{(1)} \in \text{Avoid}(m - k_1,\ F(0,\ p,\ 1,\ 0))$。我们应用归纳法，并利用 $m - k_1 < m$ 推出 $\|A^{(1)}\| \leq c_p(m - k_1) + 1$, ■由此得到 $\|A\| \leq c_p m < c_p m + 1$。

5 $F(0,\ 3,\ 1,\ 0)$的极值矩阵

我们对 Ext($m,\ F$(0，3，1，0)) 作详细描述。

T定理 5.1 假设 $m \geq 3$。则 $\text{forb}(m, F(0,\ 3,\ 1,\ 0)) = \lfloor \frac{7}{3} m \rfloor + 1$。

证明： 结合引理 3.3，利用引理 4.1 可得上界。基例为 forb(3，F(0，3，1，0)) $= 8$，其构造为 K_3；forb(4，F(0，3，1，0)) $= 10$，其构造为 $[K_4^0 K_4^1 K_4^3 K_4^4]$；以及 forb(5，$F$(0，3，1，0)) $= 12$，其构造为 $[K_5^0 K_5^1 K_5^4 K_5^5]$。团的上界引理迫使这些构造唯一。当 $m \equiv$0(mod 3) 时，取所有分量为大小为 3 的团，并令 $B_i = [K_3^0 K_3^1 K_3^2]$ 属于 (3)。当 $m \equiv 1$(mod 3) 时，使用构造 $[K_4^0 K_4^1 K_4^3]$，其有 4 行，其余分量均为大小为 3 的团。当 $m \equiv 2$(mod 3) 时，使用构造 $[K_5^0 K_5^1 K_5^4]$，其有 5 行，其余分量均为大小为 3 的团。因此，对 $m \geq 3$，forb($m,\ F$(0，3，1，0)) $\geq \lfloor \frac{7}{3} m \rfloor + 1$。 ■

定理 5.2 令 $A \in \text{Ext}(m, F(0, 3, 1, 0))$ 采用记号 *(3)*。当 $m \equiv 0$(模 3)时，$G(A)$ 的连通分量都是大小为 *3* 的团。当 $m \equiv 1$(模 3)时，$G(A)$ 的连通分量由一个大小为 *4* 的团和其余大小为 *3* 的团组成。当 $m \equiv 2$(模 3)时，$G(A)$ 的连通分量由一个大小为 *5* 的团和其余大小为 *3* 的团组成，或者由两个大小为 *4* 的团和其余大小为 *3* 的团组成。大小为 *3* 的团有 $B_i = [K_3 \backslash \mathbf{1}_3]$，大小为 *4* 的团有 $B_i = [K_4^0 K_4^1 K_4^3 K_4^4]$，大小为 *5* 的团有 $B_i = [K_5^0 K_5^1 K_5^4]$。

证明： 由定理 5.1，forb(m, F(0,3,1,0)) $= \lfloor \frac{7}{3} m \rfloor + 1$。我们采用成本思想。可能的分量大小只有 3,4, 5；所有其他分量的代价至少为 1，因此不会出现。大小为 3 的分量代价为 0，大小为 4 的分量代价为 1/3，大小为 5 的分量代价为 2/3。

我们推得，当 $m \equiv 0$(mod 3) 时，每个分量的代价都必须为 0，因此所有分量的大小均为 3。我们推得，当 $m \equiv 1$(mod 3) 时，

各分量的代价和为 1/3，因此有一个大小为 4 的分量，其余分量的大小均为 3。我们推得，当 $m \equiv 2 \pmod 3$ 时，各分量的代价和为 2/3，因此有一个大小为 5 的分量，其余分量的大小均为 3；或者有两个大小为 4 的分量（总代价为 2/3），其余分量的大小均为 3。上文给出了每种分量大小对应的唯一构造。分量的不同排序意味着这些例子可以产生许多极值矩阵。

■

6 $F(0,\ 6,\ 1,\ 0)$的极值矩阵

确定极值矩阵时，以下结论至关重要。

引理 6.1 设 $p \in \{6,7,8,9\}$ 和 $A \in \mathrm{Ext}(m, F(0,\ p,\ 1,\ 0))$。假设所有连通分量都是团。那么，要么存在一个删除代价至少为 *1* 的团，要么所有团的大小均为 *5*。

证明： 根据上界引理，大小小于 5 或大于 5 的团连通分量，其代价均至少为 1。 ■

定理 1.1 的证明。对于 $p = 6$，在这些情形下，大小为 $k \neq 5$ 的团分量代价至少为 1，从而得到定理 1.1 的上界。若一个含有 $k \geq 6$ 个顶点的分量是团，则可应用上界引理，其中 $t = 10$：任意行对 $i,\ j$中至多有 $t = 5$ 个构型 $\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix} \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$，因此行 $i,\ j$ 中至多有 10 个构型$\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$（两种排序各 5 个）。根据 (9)，该团上的非恒定列最大数量为 $\lfloor 2k + \frac{6k}{(k-1)\ 4(k-2)} \rfloor$。使用

$$\max_{k:\, k \geq 6} \left\lfloor 2k + \frac{6k(k-1)}{4(k-2)} + 1 \right\rfloor < \frac{21}{5} \cdot k,$$

结合式 (10)，即可确立该上界。 ■

所有大小不为 5 的分量，其代价至少为 1。注意，对于$m \equiv 0$(模 5)，矩阵 $A \in \mathrm{Ext}(m,\ F(0,\ 6,\ 1,\ 0))$ 必须由大小均为 5 的连通分量组成，且这些分量必须选自 $\mathrm{Ext}(5,\ F(0,\ 6,\ 1,\ 0))$ 中的三个矩阵之一，才能使 $\|A\| = \lfloor \frac{21}{5} m \rfloor + 1$ 能够通过构造 (3) 得到，其中每个 $B_{\bar{i}}$ 都是 $\mathrm{Ext}(5,\ F(0,\ 6,\ 1,\ 0))$ 中去掉全 1 列后的一个矩阵。这还表明，对于 $m \not\equiv 0$(模 5)，$\mathrm{forb}(m,\ F(0,\ 6,\ 1,\ 0)) < \lfloor \frac{21}{5} m \rfloor + 1$。

对于 $k=6$，代价为 $\geq \frac{6}{5}$。一个具有 $\lfloor \frac{21}{5} \cdot 6 \rfloor = 25$列的 $m=6$构造为

$$\left[\begin{array}{c|cccccccccc|c} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ K_6^6 K_6^5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & K_6^1 K_6^0 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]. \tag{20}$$

对于 $m \equiv 1$(模 5) 和 $m > 6$，该构造会有一个大小为 6 的分量（移除上方全为 1 的列），其余分量大小为 5，来自 Ext(5，F(0，6，1，0))。∎

虽然仿照定理 5.2，确定所有 $m \geq 7$ 的 Ext(m，F(0，6，1，0)) 可能很有意义，但要精确确定 forb(m，F(0，6，1，0))，我们还需要求出 forb(7，F(0，6，1，0))、forb(8，F(0，6，1，0)) 和 forb(9，F(0，6，1，0))。这项计算看起来十分艰巨。

对于 $p=7$、8、9，定理 1.2、1.3 和 1.4 可由引理 4.1 得出。注意，对于 $p=9$，我们使用引理 3.5，而代价为 0、含 5 行的团分量只有 $K_5 \backslash \mathbf{1}_5$。因此，对于 $m \equiv 0$(模 5)，Ext(m，F(0，9，1，0)) 是唯一的：

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} K_5 \backslash \mathbf{1}_5 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}_5 \\ \hline \mathbf{0} & K_5 \backslash \mathbf{1}_5 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}_5 \\ \hline \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & K_5 \backslash \mathbf{1}_5 & \mathbf{1}_5 \end{array}\right]$$

参考文献

[AS25] Anstee, R.P.、Sali, Attila，《禁构型结果综述》，组合学电子期刊，**20**（2025），DS20，共64页。

[AFS01] Anstee, R.P.、Ferguson, R、Sali, Attila，《小型禁构型 II》，组合学电子期刊**8**（2001），R4。

[AK07] R.P. Anstee 与 N. Kamoosi，《小型禁配置 III》，组合学电子期刊 **14**（2007），R7934pp。

[AKL+]R.P. Anstee、Benjamin Kreiswirth、Bowen Li、Attila Sali 与 Jaehwan Seok，禁配构型的稳定性定理，arXiv:2411.07697

[R11] Miguel Raggi，《禁配构型》，博士论文，不列颠哥伦比亚大学，2011。