arXiv:2601.04096v1 [q-fin.MF] 7 Jan 2026

# 稀疏金融网络中的尖锐转变与系统性风险

Riley James Bendel 独立研究
者rileyjbendel@protonmail.com

2026

**摘要**

我们研究有向随机图上存在资产负债表相互作用的稀疏金融网络中的传染与系统性风险。每家机构的负债和权益均为同质，沿出边的风险敞口由各交易对手均分。在稀疏有向图中，有线性比例的机构出度为零；我们采用外部负债约定，使风险敞口映射定义良好，同时不改变传播过程。我们单独考察单次冲击传导机制，并用发送端截断子图 $G_{sh}$对其进行编码。我们定义冲击规模为$k_n = \lceil c\log\ n\rceil$、系统性比例为 $\varepsilon n$的对抗性和随机系统性事件。在次临界状态$\rho_{out} < 1$下，我们证明 $G_{sh}$ 中的最大前向可达范围以高概率为 $O(\log n)$，因此，规模为 $k_n$的冲击会引发 $O((\log n)^2)$次级联。对于随机冲击，我们给出一个明确的扇入（多重冲击）累积界，表明当所探索的违约集合为多对数规模时，多重冲击违约以高概率可忽略。在超临界状态下，我们给出 $G_{sh}$ 的精确分布表示：它是一个目的节点均匀随机选取的独立同分布出度随机有向图，因此直接适用 Penrose（2014）的强巨型分量／蝴蝶结定理。我们推导出该结果对随机冲击系统性事件的影响。最后，我们说明尖锐阈值理论工具为何不能直接适用：系统性事件性质未必关于边集单调，因为增加出边会降低单边风险敞口。

**证明路线图**。本文分四步展开。首先，确定资产负债表模型和级联动力学，并采用一种约定，使出度为零的机构也能明确界定其风险敞口，同时不影响传播。其次，提炼出单次冲击传导机制，并

通过发送方截断图 $G_{sh}$对其进行编码，从而可以通过正向可达性研究传染。第三，在次临界状态 $\rho_{out} < 1$下，通过次临界分枝过程控制 $G_{sh}$ 中的正向探索，并利用延迟决策论证表明，当探索集合的规模为多对数级时，多次冲击累积可以忽略不计。最后，在超临界状态$\rho_{out} > 1$下，将 $G_{sh}$ 的分布识别为独立同分布出度随机有向图，从而可应用现有的强巨型分量结果，并得出随机冲击系统性阈值。

# 1 模型与定义

## 1.1 网络

设 $[n] := \{1, \dots, n\}$。设 $G \sim G(n, \lambda/n)$ 为有向Erdős–Rényi图：对于每个有序对（$u, v$）（其中 $u \neq v$），边（$u \to v$）以概率 $\lambda/n$ 独立存在。

## 1.2 资产负债表基本要素

**负债**。 每家机构的名义负债总额为 $L > 0$。

**杠杆与权益**。固定 $C > 1$ 并定义

$$E := \frac{L}{C-1}. \tag{1}$$

**回收率**。 我们假设零回收。

## 1.3 零度闭包

**假设 1 (** $d^{out} = 0$**的外部负债)**。 如果 $d_G^{out}(u) = 0$，那么 $u$ 没有银行间对外敞口；其负债由外部部门承担。

**引理 1 (** $d^{out} = 0$**的发生率)**。 对于每个固定的 $u$， $d_G^{out}(u) \Rightarrow \mathrm{Pois}(\lambda)$ 且

$$\mathbb{P}(d_G^{out}(u) = 0) \to e^{-\lambda}.$$

## 1.4 银行间敞口

如果 $d_G^{out}(u) \geq 1$，则每条出边都携带敞口

$$w_{u \to v} := \frac{L}{d_G^{out}(u)}. \tag{2}$$

### 1.5 级联动力学

给定 $S_0 \subset [n]$，定义 $D_0 := S_0$ 并迭代

$$D_{t+1} := D_t \cup \left\{ v \notin D_t : \sum_{u \in D_t : (u \to v) \in E(G)} w_{u \to v} \geq E \right\}. \tag{3}$$

**定义 1 (**终端违约集合**)**。 $D_\infty(S_0) := \bigcup_{t \geq 0} D_t$。

## 2 单次命中机制及 $G_{sh}$

**定义 2 (**单次命中阈值**)**。 定义

$$d^\star(C) := \max \left\{ d \in \mathbb{N} : \ d \geq 1, \ \frac{L}{d} \geq E \right\} = \left\lfloor \frac{L}{E} \right\rfloor. \tag{4}$$

若满足 $d_G^{out}(u) \leq d^\star(C)$，则该节点为活跃。

**定义 3 (**单次命中图**)**。 $(u \to v) \in E(G_{sh})$ 当且仅当 $(u \to v) \in E(G)$ 且 $u$ 为活跃状态。

**直观理解（单次命中约简）**。发送方截断图 $G_{sh}$ 将可能由单个交易对手违约引发的违约区分出来。当发送方有足够多的对外债务时，每笔单独的敞口都太小，无法单独触发违约，因此这些边不会参与单次冲击传染。因此，仅保留来自活跃发送方的边，便能准确捕捉网络中可能发生一步传播的部分，同时不改变底层的资产负债表动力学。

## 3 分支参数

令 $D \sim$Pois($\lambda$)，并定义

$$X := D\,\mathbf{1}\{D \leq d^\star(C)\}.$$

**定义 4** （分支均值）。

$$\rho_{out} := \mathbb{E}[X] = \lambda\,\mathbb{P}(D \leq d^\star(C) - 1).$$

## 4 系统性事件

取定 $\varepsilon \in (0,1)$ 和 $k_n = \lceil c\log\, n \rceil$。

**定义 5** (随机冲击系统性事件)。 令 $S_0$ 在 $[n]$的所有大小为 $k_n$ 的子集中均匀选取，且与 $G$独立。定义

$$\mathcal{F}_n^{rand} := \{|D_\infty(S_0)| \geq \varepsilon n\}.$$

## 5 次临界状态

**引理 2** (次临界前向可达性为多对数级)。 假设$\rho_{out} < 1$。固定 $c > 0$ ，并令 $S_0$ 在 $[n]$ 的所有大小为$k_n = \lceil c\log\, n \rceil$的子集中均匀选取，且与 $G$独立。则对每个固定的 $M > 0$，当 $s := M(\log\, n)^2$,

$$\mathbb{P}\Big(|\mathrm{Reach}^+(S_0; G_{sh})| > s\Big) \to 0.$$

证明。 固定 $M > 0$，并设 $s := M(\log\, n)^2$。在 $G_{sh}$中通过广度优先搜索（BFS）探索 $\mathrm{Reach}^+(S_0; G_{sh})$，逐一揭示新发现顶点的出边，并在已发现集合的大小达到 $s$时停止探索。对于每个尾端点 $u$，出边指示变量 $\{\mathbf{1}\{(u \to v) \in E(G)\}: v \neq u\}$ 相互独立，且服从参数为 $\lambda/n$ 的伯努利分布；不同尾端点对应的变量也相互独立。此外，在 $G_{sh}$ 中，来自 $u$ 的所有出边当且仅当 $d_G^{out}(u) \leq d^\star(C)$ 时保留，否则一条也不保留。因此，在 $G_{sh}$ 中，从一个新探索的顶点揭示出的出边数量服从 $K$ ，其中

$$K \overset{d}{=} \mathrm{Bin}(n-1, \lambda/n)\mathbf{1}\{\mathrm{Bin}(n-1, \lambda/n) \leq d^\star(C)\},$$

而这些 $K$在已探索的尾端点之间相互独立。当已发现集合的大小至多为 $s$ 时，每条揭示的出边都从 $[n] \setminus \{u\}$ 中均匀选择一个目标；发现的新顶点数至多等于揭示的出边数。因此，BFS 已发现集合的大小在随机意义上受一个后代分布为 $K$的 Galton–Watson 过程的总人口数支配。由于一旦固定 $C$ ， $d^\star(C)$也随之确定， $K$ 可由 $d^\star(C)$一致地界定，并且

$$\mathbb{E}[K] \to \mathbb{E}[X] = \rho_{out} < 1.$$

因此，相应的 Galton–Watson 过程的总后代数具有指数尾：存在 $a > 0$ 和 $n_0$ ，使得对所有 $n \geq n_0$ 和所有 $m \geq 1$,

$$\mathbb{P}（从一个粒子开始的 \text{GW 总后代数 } \geq m） \leq e^{-am}.$$

从 $|S_0| = k_n = \lceil c\log\ n \rceil$ 个初始粒子开始，并对 $k_n$ 棵独立的 GW 树应用并集界，得到

$$\mathbb{P}(\text{GW total progeny started from } k_n \text{ particles} \geq s) \leq k_n\, e^{-as}.$$

由 $s = M$（对数 $n$）$^2$, 右侧趋于 0。由于 BFS 已发现集合受该 GW 总后代数支配，因此同样的界也适用于$|\mathrm{Reach}^+(S_0; G_{sh})|$，从而证明了该结论。 □

**定理 1**（随机冲击次临界性）。 假设 $\rho_{out} < 1$。则

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_n^{rand}) \to 0.$$

此外，以概率 $1 - o$（1），该级联不包含多重冲击违约，并且

$$D_\infty(S_0) = \mathrm{Reach}^+(S_0; G_{sh}).$$

证明（延迟决策滤过）。固定 $M > 0$ 并令 $s :\ = M$（对数 $n$）$^2$。由引理 2,

$$\mathbb{P}\Big(|\mathrm{Reach}^+(S_0; G_{sh})| \leq s\Big) \to 1. \tag{5}$$

设 $(D_t)_{t\geq 0}$ 为该级联，且 $\Delta_t := D_t \setminus D_{t-1}$。定义 $\mathcal{F}_t$ 为由 $(D_0, \ldots, D_t)$ 以及尾端点位于 $D_{t-1}$ 中的所有边指示变量生成的 σ-代数。特别地，在时间 $t$ 之前，尾端点位于 $\Delta_t$ 中的边指示变量均未被揭示。在给定$\mathcal{F}_t$的条件下，这些指示变量

$$\{\mathbf{1}\{(u \to v) \in E(G)\} : u \in \Delta_t,\ v \notin D_t\}$$

相互独立，且服从伯努利分布$(\lambda/n)$。对于 $v \notin D_t$，令

$$Y_{t,v} := \#\{u \in \Delta_t : (u \to v) \in E(G)\}.$$

然后有条件地服从 $Y_{t,v} \sim \mathrm{Bin}(|\Delta_t|, \lambda/n)$，并且

$$\mathbb{P}(Y_{t,v} \geq 2 \mid \mathcal{F}_t) \leq \binom{|\Delta_t|}{2} (\lambda/n)^2.$$

对 $v \notin D_t$ 求和可得

$$\mathbb{P}(\exists v \notin D_t :\ Y_{t,v} \geq 2 \mid \mathcal{F}_t) \leq \frac{\lambda^2 |\Delta_t|^2}{n}.$$

在$\{|D_\infty(S_0)| \leq s\}$上，$\sum_t |\Delta_t|^2 \leq s^2$，因此并集界给出任意多重命中默认值的概率为$O(s^2/n) = o(1)$。在事件

同时满足式 (5) 和无多重命中事件时，传染仅通过活跃发送者沿边进行单次命中传播，因此级联与单次命中传播一致：

$$D_\infty(S_0) = \mathrm{Reach}^+(S_0; G_{sh}).$$

特别地，$|D_\infty(S_0)| \le s = o(n)$以高概率成立，因此

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_n^{rand}) \to 0.$$

□

# 6 超临界状态

**引理 3** (分布识别 $G_{sh}$)。 $G_{sh}$ 与出度独立同分布的有向图同分布，其中

$$K \overset{d}{=} \mathrm{Bin}(n-1, \lambda/n)\mathbf{1}\{\mathrm{Bin}(n-1,\lambda/n) \le d^\star(C)\}.$$

证明。 $G(n,\ \lambda/n)$中的出边族在各尾端点之间相互独立。给定 $d_G^{out}(u) = k$ 后，$u$ 的出邻点均匀分布。发送方截断会在 $k \le d^\star(C)$成立时保留全部 $k$ 条边，否则一条也不保留；这一过程在各 $u$之间相互独立。

□

**定理 2** （ $G_{sh}$的蝴蝶结／强巨型结构）。 假设 $\rho_{out} > 1$ .
那么存在常数

$$\alpha_{in}, \alpha_{out}, \alpha_{scc} \in (0,1)$$

以及随机顶点集

$$\mathcal{I}_n,\ \mathcal{O}_n,\ \mathcal{C}_n \subset [n]$$

使得以概率 $1 - o(1)$：

*(i)* $|\mathcal{I}_n| \ge \alpha_{in} n$、$|\mathcal{O}_n| \ge \alpha_{out} n$ 和 $|\mathcal{C}_n| \ge \alpha_{scc} n$；

*(ii)* $\mathcal{C}_n$ 在 $G_{sh}$ 中是强连通的；

*(iii)* 每个 $v \in \mathcal{I}_n$ 都有一条通往 $G_{sh}$ 中 $\mathcal{C}_n$ 的有向路径；

*(iv)* 每个 $u \in \mathcal{C}_n$ 都有通往 $\mathcal{O}_n$ 中所有顶点的有向路径。

特别地，对于每个 $v \in \mathcal{I}_n$，

$$\mathrm{Reach}^+(v; G_{sh}) \supseteq \mathcal{O}_n.$$

**推论1** （随机冲击引发系统性事件）。 假设 $\rho_{out} > 1$。固定 $\varepsilon \in (0,\ \alpha_{out})$ 以及任意 $c > 0$。则

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_n^{rand}) \to 1.$$

**关于非单调性的说明**。 尽管这些结果呈现出尖锐转变，标准的单调锐阈值方法并不直接适用。向一个节点添加出边会提高分散化程度，但同时会降低单边风险敞口，因此系统性事件的发生并非边集的单调函数。因此，分析通过分离出一个单调子结构（$G_{sh}$）来展开，而非诉诸全局单调性。

## 范围与局限性

研究结果基于一个具有均质负债、权益和零回收的稀疏有向 Erdős–Rényi 网络，并采用第 2 节定义的特定敞口拆分规则。本文分析了单次冲击传染，并刻画了由对数规模的冲击引发的系统性事件。本文未涉及异质资产负债表、其他回收规则、相关风险敞口、时变网络，或需要在宏观尺度上协调多次冲击累积的级联机制。因此，结论应严格限定在所述模型和假设范围内进行理解。

## 参考文献

[1] M. D. Penrose。随机有向图中的强巨型分量。*Random Struc-tures & Algorithms*，45(1):1–31，2014。