arXiv:2601.04099v1 [physics.comp-ph] 7 Jan 2026

一种用于可压缩电阻磁流体力学的约束输运嵌入边界方法

Samuel W. Jones[1]，Colin P.McNally [2]，和 Meritt Reynolds [3]

[1]洛斯阿拉莫斯国家实验室理论部，美国新墨西哥州 87544[2]Orchard Numerical，加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华[3]General Fusion，加拿大不列颠哥伦比亚省里士满RussBaker Way 6020号，V7B 1B4

《计算物理学杂志》https://doi.org/10.1016/j.jcp.2025.114641 收稿日期：2025年1月22日；修订稿收稿日期：2025年10月6日；录用日期：2025年12月26日

摘要

近年来，脉冲功率磁惯性聚变装置日益受到关注。受此推动，我们提出一种方法，在求解可压缩电阻磁流体力学方程的同时，在笛卡尔网格上实现任意形状的嵌入边界。该方法以方程的有限体积公式为基础，利用黎曼求解器计算网格单元之间各面上的通量，并采用面中心的感应方程约束输运公式。通过始终在笛卡尔网格的面和边上计算通量，避免了切割单元带来的小时间步问题。我们进一步采用虚拟单元方法，将该方法扩展到模拟具有不同属性的两种材料之间的移动界面，并展示了一些初步结果，包括冲击波驱动和磁驱动的磁流体静力平衡态动力学压缩。我们对该方法进行了全面验证，结果表明，在没有间断时，该方法以二阶精度收敛；当材料属性存在间断时，则以一阶精度收敛。

1 引言

尽管基于笛卡尔网格的有限体积约束输运方法在可压缩磁流体动力学方面取得了广泛成功，但要模拟几何形状复杂的物理装置，该格式必须能够处理与笛卡尔网格不共形的边界。几何形状复杂的等离子体装置包括磁化同轴等离子体炮（Marshall，1960年，也称Marshall炮），这类装置能够形成并加速等离子体，广泛用于磁聚变能源装置（例如General Fusion运营的装置：Howard等，2024；Tancetti等，2025）、托卡马克、仿星器、实验室等离子体实验以及等离子体蚀刻制造工艺（Schoenberg等，1998；Subramaniam等，2018）。此外，将磁流体动力学理论应用于同时包含等离子体和液态金属的多材料问题时，数值方法必须能够求解相关动力学方程，且适用于各材料之间差异很大的参数。MagLIF和磁化靶聚变等磁惯性聚变方案的数值模拟也受益于此类能力（Wurden等，2016）。在采用液态金属等离子体面向部件的聚变装置中，流动中等离子体相与液态金属相之间巨大的密度差（高达 $\sim 10^{15}$），给基于两相连续混合物的方法带来了挑战，例如采用Deshpande等（2012）的弥散两相格式来模拟自由表面磁流体流动的方法，包括Suponitsky等（2022）和Sun等（2023）提出的方法。理想的磁流体动力学方法应能保持并追踪分隔两相的清晰界面。解决这一问题大致有两类方法：一是采用变形网格，使其与界面共形；二是采用嵌入边界方法，使边界穿过网格单元。嵌入式（或浸入式）边界方法的优势在于能够为流体采用静态结构网格。这样便可将网格生成与分辨率控制同界面追踪分开考虑，从而简化所得方法的高效实现。

在本工作中，我们在有限体积框架内研究一种可压缩磁流体动力学方法，其创新之处在于采用包含嵌入边界的受约束输运方法求解感应方程。对于感应方程，磁场形式的解通过受约束输运格式获得，从而局部守恒磁通量，并在构造上保证无散磁场，避免因有限散度以及对磁场进行散度清理而产生的任何额外复杂性。在材料界面处同样如此；但在嵌入边界处，磁通量并不守恒。然而，正如我们在第4节中所解释的那样，并不会引入磁单极子。

本文提出的方法在笛卡尔网格的嵌入边界处，针对感应方程采用交错网格约束输运方法。交错网格约束输运是一种经过验证、准确且高效的磁流体力学方法，近年来持续取得诸多成功（Stone & Gardiner, 2009；Stone 等人, 2024, 及其中的参考文献）。该方法建立在用于嵌入边界的切割单元法之上。文献中已有多种此类格式。Noh 最早在这一领域提出了方法之一，将单元合并与通量再分配结合起来（Noh, 1963）。Chern & Colella

LA-UR-24-33097

（1987）提出了通量重分配格式，以提高部分单元各面的稳定性并确保守恒；另一种相关技术则通过重新分配底层界面状态来实现相同目的（Berger & Giuliani, 2021）。Clarke 等（1986）提出了单元合并方法，通过生成更大的单元来缓解切割单元带来的过小时间步问题。本文采用 Forrer & Jeltsch (1998) 提出的方法。值得注意的是，该方法简单且稳定，原因在于它不将切割边界单元视为小于其完整体积的单元，但代价是这些单元会产生局部守恒误差。然而，本文中用于更新连续性方程、动量方程和能量方程的方法，与用于更新感应方程的方法在很大程度上彼此独立。Forrer & Jeltsch (1998) 格式此前已用于求解可压缩磁流体动力学及嵌入边界问题，并采用单元中心磁场和投影法进行散度清理，而非采用无散约束输运（Garc´ıa-Mart´ınez & Farengo, 2009；Lampugnani 等, 2017, 2018）。总体而言，我们旨在构建一种方法，将单相切割单元移动嵌入边界方法、界面追踪方法和用于耦合各相的幽灵流体方法结合起来。本文介绍了二维中针对双曲型和抛物型物理算子的嵌入边界切割单元法，并将其扩展到移动的单侧和双侧界面问题以及双材料问题。

此前已有多种方法用于求解具有材料界面的磁流体动力学方程。对于低磁雷诺数流动，采用无感应近似时，Samulyak 等（2007）使用了界面追踪，而 Zhang 与 Ni（2014）和 Al Salami（2022）则采用弥散界面方法求解两相流。这种近似常用于研究金属铸造过程中的气泡，例如 Jin 等（2016）、Corrado 与 Sato（2022）等人采用的界面重构流体体积法。然而，这些研究均未求解感应方程。本文提出的方法在材料界面处采用嵌入边界条件，与弥散界面方法相比，其优点在于不必显式使用混合单元闭合模型（这种模型计算代价可能很高，有时定义也不明确）（例如 Baer 与 Nunziato，1986；Allaire 等，2002）。

本文其余部分安排如下：第2节介绍本文采用的控制方程以及用于磁流体力学的基础有限体积法，第5节介绍表示嵌入边界的方法。第3节回顾如何为双曲守恒律系统（无约束）的有限体积解添加嵌入边界。第4节介绍利用约束输运为磁流体力学感应方程实现嵌入边界的方法。第5节讨论界面的表示细节，第6节总结整个算法。第7节给出一系列单材料和双材料测试问题的结果。最后，第8节总结结果，并探讨进一步可能的扩展。

2 基本格式

我们希望在有限体积框架下求解电阻磁流体动力学方程，并在网格边缘以常规方式施加边界条件，同时在嵌入的、可能移动的边界处施加边界条件。对于多材料流动，嵌入的移动边界也是材料界面，但这仅涉及边界条件的施加问题，因为各区域中的磁流体动力学方程解彼此独立。本节首先介绍多材料流动格式的时间半离散，然后介绍本文所用单材料磁流体动力学格式的细节。

2.1 时间离散

我们考虑一种由磁流体动力学方程支配的材料，它占据由嵌入边界围成的区域。该边界可以是静止的，也可以是移动的。此外，还可以存在由第二种同样受磁流体动力学方程支配的材料占据的互补子区域；在这种情况下，界面的运动可能由材料的速度决定。为描述这一点，需要定义在时刻 t由材料 l 占据的区域 D_ℓ^t，以及该区域上的流动状态 $\mathbf{U}|_{D_\ell^t}$。该方法在单个时间步 Δt 上全局更新所有量，使得 $t^{n+1} = t^n + \Delta t$。将状态 $\mathbf{U}^n|_{D_\ell^n}$完整更新至下一时间层 $\mathbf{U}^{n+1}|_{D_\ell^{n+1}}$分为两部分：流动变量的时间更新（$\mathbf{U}_\ell$），以及在嵌入边界移动时，对材料所占子区域的更新（D_ℓ）：

$$\mathbf{U}^n|_{D_\ell^n} \rightarrow \mathbf{U}^{n+1}|_{D_\ell^n} \tag{1}$$

$$\mathbf{U}^{n+1}|_{D_\ell^n} \rightarrow \mathbf{U}^{n+1}|_{D_\ell^{n+1}}\,. \tag{2}$$

第一部分需要对磁流体动力学方程进行时间积分。第二部分的具体内容取决于问题中所考虑的边界类型及其演化方式。

磁流体动力学方程在分裂更新方程（1）第一部分中的时间离散采用线法，并使用二阶强稳定保持龙格–库塔（RK）时间积分。该方法通过低存储算法实现（Gottlieb 等人，2009）。对于每种材料，使用单个全局时间步长 Δt 将磁流体动力学方程的状态（$\mathbf{U}$）从时间 t^n 推进到时间$t^n + \Delta t$，更新过程如下：

$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^n + \Delta t\,(\partial_t \mathbf{U}^n) \tag{3}$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \frac{1}{2}\mathbf{U}^n + \frac{1}{2}\mathbf{U}^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t\left(\partial_t \mathbf{U}^{(1)}\right) \tag{4}$$

这称为 SSPRK(2,2) 或 Heun方法。每个 Runge–Kutta 阶段都会在所有区域 D_ℓ 上计算完成后，再计算下一阶段。从时间 t^n 推进到时间 $t^n + \Delta t$期间，材料 l 对应的区域保持不变。

在分裂更新（2）的第二部分中，定义区域 D_ℓ 的界面必须移动到下一个时间层，并且必须在新区域 D_ℓ^{n+1} 上定义 $\mathbf{U}_\ell$。当边界静止或其随时间的演化已知时，这很简单。如果使用水平集来演化材料界面，并在该界面上施加嵌入边界条件，则必须对水平集场 ϕ 进行时间积分，以将 ϕ^n 更新为 ϕ^{n+1}。在这种情况下，使用磁流体动力学更新方程（1）中已计算出的中间态$\mathbf{U}^{(1)}$，采用相同的龙格–库塔格式方程（3）–（4）：

$$\phi^{(1)} = \phi^n + \Delta t\left(\partial_t \phi\left(\mathbf{U}^n\right)\right) \tag{5}$$

$$\phi^{n+1} = \frac{1}{2}\phi^n + \frac{1}{2}\phi^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t\left(\partial_t \phi\left(\mathbf{U}^{(1)}\right)\right) \tag{6}$$

其中，$\mathbf{U}$ 是合并为单一场的$\mathbf{U}_\ell$（将在第5.2节进一步讨论）。对于移动嵌入边界内含有材料的情况，将$\mathbf{U}$ 从区域 D_ℓ^n 限制到D_ℓ^{n+1}很简单，因为我们只考虑嵌套区域，因此 $D_\ell^{n+1} \subset D_\ell^n$。对于嵌入边界为双侧材料界面的情况，幽灵流体方法（将在第3.2节和第4.2节讨论）决定了D_ℓ^{n+1}中任何新切割单元的状态（即补集 $\complement_{D_\ell^{n+1}} D_\ell^n$ 中的单元）。

因此，本质上，该方法归结为磁流体动力学方程的标准方法，并在计算各材料的时间导数 $\partial_t \mathbf{U}_\ell$ 项时，增加了处理嵌入边界条件的方法。在接下来的大部分论述中，我们将省略下标l，并默认给出的表达式分别适用于任意一种材料；在需要讨论多材料算法时，再重新引入该下标。

2.2 磁流体动力学方程的空间离散化

电阻磁流体动力学所要求解的方程为（例如，参见 Stone & Gardiner, 2009）：

$$\partial_t \rho \quad +\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{7}$$

$$\partial_t(\rho\mathbf{v}) \quad +\nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\mathbf{v} - \mathbf{B}\mathbf{B} + P_{\rm total}) = 0 \tag{8}$$

$$\partial_t e \quad +\nabla\cdot[(e + P_{\rm total})\mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{v})] = 0 \tag{9}$$

$$\partial_t \mathbf{B} \quad -\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B} - \eta\mathbf{J}) = 0, \tag{10}$$

其中，$P_{\rm total} = P_{\rm gas} + P_{\rm mag}$ 为总压力，$P_{\rm gas} = \epsilon(\gamma-1)$为热气体压力，$\epsilon$ 为内能密度，γ 为比热比，$P_{\rm mag} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})$为磁压力，$e = \epsilon + \frac{1}{2}\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) + \frac{1}{2}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})$为总能量密度，$\eta$ 为此处以扩散率表示的电阻率，而 $\mathbf{J} = \nabla\times\mathbf{B}$ 为电流密度。请注意，这些方程采用常规的磁流体动力学代码单位；但将$\mathbf{J}$ 的定义代入方程（10）后，该方程在这些单位和 CGS高斯单位下具有相同形式。只有当边界运动是流动的函数时，才需要扩展此方法，以纳入水平集场的积分（见第5.2节）。因此，磁流体动力学方程的离散化几乎可以沿用常规且成熟的方法；本文采用了 Stone & Gardiner (2009) 提出的方案。

我们首先考虑理想 磁流体力学，其中电阻率为 $\eta = 0$。采用通量形式，二维空间中的方程为 re

$$\partial_t \mathbf{U} = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{G}, \tag{11}$$

其中 $\mathbf{U}$、$\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{G}$ 分别为

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ e \\ B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + P_{\rm total} - B_x^2 \\ \rho v_x v_y - B_x B_y \\ \rho v_x v_z - B_x B_z \\ (e + P_{\rm total})v_x - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{v})B_x \\ 0 \\ B_y v_x - B_x v_y \\ B_z v_x - B_x v_z \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y - B_y B_x \\ \rho v_y^2 + P_{\rm total} - B_y^2 \\ \rho v_y v_z - B_y B_z \\ (e + P_{\rm total})v_y - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{v})B_y \\ B_x v_y - B_y v_x \\ 0 \\ B_z v_y - B_y v_z \end{pmatrix}. \tag{12}$$

散度算子的离散化 并应用散度定理后，均匀笛卡尔网格上的方程组变为

$$\partial_t \mathbf{U}_{i,j} = \frac{\Delta y}{V_{i,j}}\left(\mathbf{F}_{i-\frac{1}{2},j} - \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2},j}\right) + \frac{\Delta x}{V_{i,j}}\left(\mathbf{G}_{i,j-\frac{1}{2}} - \mathbf{G}_{i,j+\frac{1}{2}}\right) + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2), \tag{13}$$

其中 $V_{i,j}$ 是单元体积。值得注意的是，在我们采用的交错网格约束输运算法中，磁场以面面积平均量的形式离散地表示在网格上，而 ρ、$\mathbf{v}$、$P_{\rm gas}$ 和 e 则以单元体积平均量的形式表示。为完整起见，我们还指出，电场 $\mathbf{E}$ 和电流密度 $\mathbf{J}$ 的分量以单元边缘平均量的形式表示。Stone & Gardiner (2009) 对此作了说明。按照 Stone & Gardiner (2009) 的方法，采用 Mignone (2014) 提出的修正 van Leer 限制器对斜率进行限制，并以分段线性方式将单元平均量重构到各个面上。

为近似计算流体动力学通量和波之间的中间态，我们已成功在本文提出的方案中实现了 HLL（见 Toro, 1997 及其中的参考文献）和 HLLD（Miyoshi & Kusano, 2005）黎曼求解器。我们采用了 Stone & Gardiner (2009) 所述的约束输运公式，并在此重述其中的一些细节，因为它们与嵌入边界条件的实现直接相关。

在我们的算法中，对于单元平均变量，$\partial_t \mathbf{U}$ 由方程（13）给出，其中$\mathbf{F}$ 和$\mathbf{G}$ 通过在单元面处求解黎曼问题获得，方法与常规 Godunov代码中的方法相同。对于状态向量的面平均分量（磁场），我们采用约束输运公式，其中 $\partial_t \mathbf{B}$ 由下式给出

$$\frac{1}{A}\partial_t \int \mathbf{B}\cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{1}{A}\int (\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{1}{A}\oint \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}, \tag{14}$$

其中使用了斯托克斯定理将曲面积分转换为线积分；A 是面所在的面积，$d\boldsymbol{s}$ 是微分面积，$\mathbf{E}$ 是电场（在理想磁流体力学中$\mathbf{E} = -\mathbf{v}\times\mathbf{B}$）1，$d\boldsymbol{\ell}$ 是围成该面的线元。对于均匀二维笛卡尔网格，其离散形式为

$$\begin{aligned}\partial_t B_{x,i-\frac{1}{2},j} &= -\frac{1}{\Delta y\Delta z}\left(E_{z,i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\Delta z - E_{z,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}\Delta z\right)\\ &= \frac{1}{\Delta y}\left(E_{z,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - E_{z,i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\partial_t B_{y,i,j-\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{\Delta x\Delta z}\left(E_{z,i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\Delta z - E_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\Delta z\right)\\ &= \frac{1}{\Delta x}\left(E_{z,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - E_{z,i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right)\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\partial_t B_{z,i,j} &= -\frac{1}{\Delta x\Delta y}\left(E_{y,i+\frac{1}{2},j}\Delta y - E_{y,i-\frac{1}{2},j}\Delta y + E_{x,i,j+\frac{1}{2}}\Delta x - E_{x,i,j-\frac{1}{2}}\Delta x\right)\\ &= \frac{1}{\Delta x}\left(E_{y,i-\frac{1}{2},j} - E_{y,i+\frac{1}{2},j}\right) + \frac{1}{\Delta y}\left(E_{x,i,j-\frac{1}{2}} - E_{x,i,j+\frac{1}{2}}\right).\end{aligned} \tag{17}$$

将感应方程表述为电场的离散旋度，是受约束输运方法的核心，并确保$\mathbf{B}$ 的离散增量保持初始无散场的无散特性。我们遵循 Stone & Gardiner (2009) 的方法，以迎风方式计算 E 在单元边处的值，从而得到一种稳定的格式。[2]

从 $\eta = 0$ 极限推广到电阻磁流体动力学时，我们使用电场 $\mathbf{E} = -\mathbf{v}\times\mathbf{B} + \eta\mathbf{J}$，其中电流密度 $\mathbf{J}$ 的计算方式为

$$J_{x,i,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta y}\left(B_{z,i,j} - B_{z,i,j-1}\right) \tag{18}$$

$$J_{y,i-\frac{1}{2},j} = \frac{1}{\Delta x}\left(B_{z,i-1,j} - B_{z,i,j}\right) \tag{19}$$

$$\begin{aligned}J_{z,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x\Delta y}\Big(&\Delta x B_{x,i-\frac{1}{2},j-1} - \Delta x B_{x,i-\frac{1}{2},j}\\ &+\Delta y B_{y,i,j-\frac{1}{2}} - \Delta y B_{y,i-1,j-\frac{1}{2}}\Big).\end{aligned} \tag{20}$$

我们假设 η 在时间和空间上均为常数，但若存在多种材料，则其在不同材料中可以取不同值。将其推广到随空间变化的电阻率也很直接。由于$\mathbf{J}$ 的分量位于单元边上，我们计算与感应电场 $-\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ 同位的电阻电场分量 $\eta\mathbf{J}$，并根据感应方程 (15)–(17) 的同一离散形式，计算磁场时间导数中的相应贡献。

全局 时间步长（即耦合理想磁流体动力学方程和电阻性磁流体动力学方程的时间步长）选择为 b e

$$\Delta t = \left(\frac{1}{\Delta t_{\text{ideal}}} + \frac{1}{\Delta t_{\text{res}}}\right)^{-1} \tag{21}$$

其中

$$\Delta t_{\text{res}} = \frac{1}{4}\frac{\Delta x^2}{\eta} \tag{22}$$

[1]一些作者在描述约束输运磁流体力学格式时，例如 Stone & Gardiner (2009)，只使用电动势这一概念；它在数学上等同于$\mathbf{E}$。[2]请注意，Stone & Gardiner (2009) 的方程 (22) 存在一个排印错误，第二项和第三项（耗散项）前应为负号。

为受 CFL 限制的电阻时间步长，Δt_{ideal} 为理想磁流体动力学方程受 CFL 限制的时间步

$$\Delta t_{\text{ideal}} = \frac{\text{CFL}}{n} \min\left(\frac{\Delta x}{\max(|\boldsymbol{\lambda}_x|)}, \frac{\Delta y}{\max(|\boldsymbol{\lambda}_y|)}\right), \tag{23}$$

其中，$n = 2$是维数，$\boldsymbol{\lambda}_x$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_y$ 分别是理想磁流体动力学系统在 x方向和 y方向上的特征值。最大值在局部对特征值取值，而最小值则在整个区域内取值；若问题中存在多个相，则这些相也包括在内。

至此，便完成了对单材料或双材料流动中磁流体动力学方程时间积分的描述。尽管本文仅讨论二维情形，但这里介绍的各个要素并非新内容，且此前已在三维情形中有所记载和演示（Stone & Gardiner，2009）。接下来需要说明的是，在方程（3）和（4）的每个 Runge–Kutta 阶段，如何计算磁流体动力学状态$\mathbf{U}$ 的边界条件，以及如何实现（可选的）水平集场。

3 嵌入边界条件——流体动力学

在第 2 节中，我们考虑了具有某些区域边界条件的笛卡尔网格上单一连续介质的磁流体动力学流动方程。本节介绍在没有磁场的情况下，如何使用笛卡尔网格上的嵌入边界切割单元法求解方程 (13)。本节假定嵌入边界的位置已简化为一系列穿过单元的线段，并且这些线段的速度已知。因此，我们可以将用于追踪嵌入界面的具体成熟方法留到第 5 节讨论，届时将介绍折线和水平集的实现。浸入边界方法最令人担忧的问题之一，是可能产生体积任意小的网格单元 Δx 或 Δy，这会相应缩短能够维持数值稳定性的最大时间步长（方程 21）。在本研究中，我们采用了 Forrer & Jeltsch (1998) 提出的切割单元法，避免了所谓的小单元问题，因为守恒通量仍在笛卡尔单元面上计算，而常规单元和边界单元的时间积分则针对整个笛卡尔单元体积的体积平均状态进行。事实上，该算法的重构—求解—平均这一 Godunov类结构保持不变，唯一的例外是在重构步骤之前，需根据某个边界条件为被清空的（虚）单元设置体积平均状态向量。

3.1 具有静止和移动嵌入边界的单侧问题

为了确定虚单元中的状态，通常需要知道活动区域中一个单元的状态，该单元关于边界与虚单元对称。我们将变换 $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}'$ 定义为关于最接近 $\boldsymbol{r}$ 的折线线段对 $\boldsymbol{r}$ 的反射。如果该线段由节点 A 和 B 界定，其位置向量分别为 $\boldsymbol{r}_A$ 和 $\boldsymbol{r}_B$，则

$$q = \frac{\boldsymbol{t}_y(r_{Bx} - r_{Ax}) - \boldsymbol{t}_x(r_{By} - r_{Ay})}{(\boldsymbol{t}_x n_y - \boldsymbol{t}_y n_x)} \tag{24}$$

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + 2q\boldsymbol{n}. \tag{25}$$

相对于浸入边界或界面，约束或运算通常在切向或法向上最为自然。我们经常需要将边界上的点 $\boldsymbol{r}$ 进行反射，以获得其像点 $\boldsymbol{r}'$ 的位置向量，并以某种阶数获得像点位置处的状态向量 $\mathbf{U}(\boldsymbol{r}')$。对于嵌入边界，可以利用方程（24）将虚单元的顶点关于边界反射到活动区域中，从而定义本文所称的虚拟单元。确定该虚拟单元数值的自然方法，是随后对重叠单元中的状态在虚拟单元体积上进行积分。然而，将单元平均状态双线性插值到虚拟单元的质心处即可达到二阶精度，Forrer & Jeltsch (1998) 也采用了这种方法。将离散的单元平均标量场 $q(x,\ y)$ 插值到点 $\boldsymbol{r}' = (x',\ y')$，首先要确定包含点 r' 的单元（$i',\ j'$），以及将在插值模板中作为左下单元的单元（$i,\ j$）：

$$i' = \text{floor}(x'/\Delta x) + 1, \tag{26}$$

$$j' = \text{floor}(y'/\Delta y) + 1, \tag{27}$$

$$i = \text{nint}(x'/\Delta x), \tag{28}$$

$$j = \text{nint}(y'/\Delta y). \tag{29}$$

插值权重 w 给出如下

$$w_{11} = \frac{(x_{i+1} - x')(y_{j+1} - y')}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}, \quad w_{12} = \frac{(x_{i+1} - x')(y' - y_j)}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}, \tag{30}$$

$$w_{21} = \frac{(x' - x_i)(y_{j+1} - y')}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}, \quad w_{22} = \frac{(x' - x_i)(y' - y_j)}{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)}, \tag{31}$$

然后根据权重和模板计算插值后的值 q^*

$$q^* = w_{11}q_{i,j} + w_{21}q_{i+1,j} + w_{12}q_{i,j+1} + w_{22}q_{i+1,j+1} + O(\Delta x^2) + O(\Delta y^2), \tag{32}$$

并通过函数 $\sigma_{i,\ j}$进行限制：如果模板中的任意单元为空单元，则该函数值为 0（因此降为一阶插值）；否则为 1。由此得到最终的限制值：

$$q' = \sigma_{i,j} q^* + (1 - \sigma_{i,j}) q_{i',j'}. \tag{33}$$

沿界面覆盖该时间步影响域的虚单元窄带中，状态向量按如下方式设置，具体取决于所选的边界条件。通常，我们希望对物理状态变量采用狄利克雷和诺伊曼条件的某种组合。对于某些向量场，边界的局部曲率应影响边界条件的计算，进而影响相邻虚单元、面或边中所采用的状态。对于质心位于 $\boldsymbol{r}$ 的虚单元（其像点位于 $\boldsymbol{r}'$），对 $\mathbf{U}(\boldsymbol{r}_\mathrm{b})$（即 $(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r})$ 与边界交点处的状态向量）施加狄利克雷条件，可通过如下设置实现二阶精度：

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{r}) = 2\mathbf{U}(\boldsymbol{r}_\mathrm{b}) - \mathbf{U}(\boldsymbol{r}')\,. \tag{34}$$

当需要保持沿界面的切向角速度时（刚体旋转、无滑移、无应力），就会出现含有重要曲率项的边界条件。此时，若界面的局部曲率半径为 R，且单元质心到界面的法向距离为 ΔR，

$$\frac{\mathbf{v}(\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{t}}{R - \Delta R} = \frac{\mathbf{v}(\boldsymbol{r}_\mathrm{b}) \cdot \boldsymbol{t}}{R} = \frac{\mathbf{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{t}}{R + \Delta R}\,,$$

其中 $\boldsymbol{t}$ 是表面切向单位向量。随后，虚单元的切向速度可设为

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{r}) = (R + \Delta R)\left[2\frac{\mathbf{U}(\boldsymbol{r}_\mathrm{b})}{R} - \frac{\mathbf{U}(\boldsymbol{r}')}{R - \Delta R}\right]. \tag{35}$$

诺伊曼边界条件中，在 $\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$ 与边界的交点处指定状态向量沿边界法向方向的梯度，通常可通过设置

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{U}(\boldsymbol{r}') + ((\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{n}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n})}\,, \tag{36}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是表面法向单位向量。这些方法足以在网格中实现嵌入边界，并支持多种边界条件，适用于

可压缩流体力学方程

对于移动嵌入边界的情况，如果我们仍然只关注边界一侧的动力学，则仅假设定义该边界的所有线段节点的速度由数值模拟外部指定，可以是零、恒定值或随时间变化的值。也就是说，我们不处理真正的自由表面单侧边界条件。边界位置的时间推进通过算子分裂与电阻磁流体动力学相耦合；即在完成磁流体动力学方程的完整龙格－库塔积分后，再更新边界位置。每当边界移动时，都必须重新计算切割单元体积和质心、切割面面积和质心、切割边长度和质心以及单元类型。虽然使用折线（第 5.1 节）可使该操作的计算成本约为 O(n)，但根据具体实现方式，它仍可能带来显著的计算开销。由于我们的方法（即 Forrer & Jeltsch，1998年）保留了底层网格在单元面上计算通量的过程，因此，为实现边界移动所需的修改相当有限。只需改变界面处的边界条件即可。显然，速度的边界条件必须来自指定的边界速度。

3.2 双侧材料界面边界

在下文及本文其余部分中，我们经常将此情形中的嵌入边界称为（材料）界面。对于具有移动界面的双材料问题，我们采用虚拟流体方法（Fedkiw 等，1999 年），为每种材料的磁流体动力学方程求解设置边界条件，并耦合界面两侧的状态。对于无磁流流动，我们使用$\mathbf{B} = 0$，并采用第 2 节所述的基础方法，分别求解每种材料的方程（7–9）。在本讨论中，我们将正在求解方程的材料称为活动材料，将另一种材料称为非活动材料；但需要指出的是，在一个时间步内，我们确实会同时求解两种材料（材料 1 和材料 2）的方程。每种材料都需要为其虚拟流体（即界面另一侧空单元中的状态）填充具有物理意义的状态向量，从而使活动材料能够对非活动材料的存在作出正确响应。

每种材料的幽灵流体中的状态向量，是通过考虑接触间断处的跃迁条件来设定的。压力和界面法向速度应保持连续，因此直接取自同一单元中非活动材料的状态。我们假设材料之间满足无滑移条件，因此切向速度也应保持连续，这意味着整个速度向量均取自非活动材料。接触间断处的密度和能量可以不连续，且允许不同材料具有不同的状态方程。在本研究中，我们仅考虑伽马律状态方程，每种材料各自具有其绝热指数 γ。现在考虑材料 1 的幽灵流体中的状态，我们对类熵量进行分片常数外推

$$a_1 = \frac{P_1}{\rho_1^{\gamma_1}} \tag{37}$$

至幽灵流体单元中。接下来，我们计算幽灵流体中的密度，得到

$$\rho_1 = \left(\frac{P_2}{a_1}\right)^{1/\gamma_1} . \tag{38}$$

总能量密度为

$$e_1 = \frac{P_2}{\gamma_1 - 1} + \frac{1}{2}\rho_1 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 . \tag{39}$$

至此，关于流体动力学部分各类嵌入边界所用既有方法的描述已完整，下一节将介绍如何将这些既有方法扩展到磁流体力学。

4 磁流体力学的扩展

本节介绍将该方法直接扩展到具有浸入边界和交错网格约束输运的磁流体动力学流动模拟。单元中动量通量和能量通量的散度包含$\mathbf{B}$三个分量中的各项。在我们采用的有限体积 Godunov 方法中，遵循 Stone & Gardiner (2009)，黎曼求解器使用$\mathbf{B}^*$计算穿过面的通量；*是时间步内界定该面的两个波之间的中间态磁场。面上的$\mathbf{B}$ 纵向分量直接取自与该面共置的面平均状态，而两个垂直分量则根据其单元平均值进行空间重构。在二维情形中，B_z 可视为有效的单元平均量，因为 $\partial_z B_z = 0$，因此其重构方式与任何体积平均量相同。

4.1 具有单侧静止或移动嵌入边界的磁流体力学

感应方程中理想磁流体力学算子的基本边界条件可描述为理想导电壁。这意味着边界上的边界切向磁场为零，且只有指定的非零边界法向磁场存在。壁面处的速度也已给定，且等于边界的速度，因此穿过边界的磁力线被固定在边界物质点上。感应方程中需要计算的项为 $\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (-\mathbf{v} \times \mathbf{B})$。对此，可对速度施加狄利克雷条件$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\mathrm{b}$，其中$\mathbf{v}_\mathrm{b}$ 为边界（可能静止）的速度；对于磁场的切向分量和法向分量，则分别施加两个独立的狄利克雷边界条件：边界切向分量为$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{t} = 0$，边界法向分量为$\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{n} = B_n$，其中 B_n 为指定值。在 Forrer & Jeltsch 切割单元方法中，可像处理流体动力学算子那样，通过使用方程（34）或其扩展形式来施加这些条件，例如下面将说明的一种用于保持边界处无电流条件的扩展形式。随后，可在活动单元、非活动（虚）单元和切割单元，以及面和边中，以完全相同的方式计算电场并执行磁场的约束输运更新。

对于磁场，如果我们使用方程 (34) 对磁场的切向分量施加边界条件，那么将此条件应用于区域内具有 $1/R$ 依赖关系的无电流磁场时，对虚拟面进行外推仍会产生虚假的非零电流。我们希望以一种能够保留无电流稳态解的方式施加狄利克雷边界条件。考虑柱坐标 $(r,\ \phi,\ z)$ 下 x-y 平面内的电流密度，并要求其为零，可得

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\partial B_z}{\partial r}\hat{\phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r B_\phi)}{\partial r}\hat{z} = 0 . \tag{40}$$

因此，为确保方位角（切向）分量的边界条件能够满足

$$\frac{\partial (r B_\phi)}{\partial r} = 0 , \tag{41}$$

并以离散方式重现稳态解，我们用以下方程替换方程 (34)：

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{R + \Delta R}\left[2R\mathbf{U}(\boldsymbol{r}_b) - (R - \Delta R)\mathbf{U}(\boldsymbol{r}')\right] , \tag{42}$$

对于磁场，其中界面的局部曲率半径仍为 R，单元质心到界面的法向距离为 ΔR。这与方程 (35) 中的恒定角速度（刚体旋转）情形类似。

采用这种方法时，尽管对$\mathbf{B}$ 的外推会导致边界处虚单元中的局部磁场不满足无散条件，但由于我们仍通过对$\mathbf{E}$取离散旋度来计算活动网格面磁场的更新，因此物理区域中的$\mathbf{B}$ 不会引入此类误差，并由此利用了 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$，这与我们所采用的约束输运方法一致。

推广而言，包含欧姆电阻率 η 的感应方程为

$$\partial_t \mathbf{B} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{J}) = 0, \tag{43}$$

其中 $\eta\mathbf{J}$ 是由欧姆定律得到的电场。现在我们转而计算方程的抛物型部分$\nabla \times \eta\mathbf{J} = \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B})$。再次说明，电流密度是一个边中心变量，在

均匀笛卡尔网格上按照式（18–20）进行离散计算。需要在浸入边界非活动侧的窄带幽灵边上计算欧姆电场，进而得到$\mathbf{J}\ (=\nabla\times\mathbf{B})$，以便对其进行离散旋度运算，方法与前文描述的理想项相同。

由于我们的约束输运公式采用交错网格，因此在某些边界条件下，需要将 **(B)** 的分量插值到虚拟面中心或单元中心。我们按照第 3.1 节所述，将 B_z 插值到虚拟单元中心，方法与其他单元平均量相同。对于面中心的 B_x，选取一个模板，其中包含 x法向的面，这些面的中心将虚拟点$\boldsymbol{r}'=(x',\ y')$夹在中间：

$$i-\frac{1}{2}=\mathrm{nint}\left(\left((x'+\frac{1}{2}\Delta x\right)/\Delta x\right), \tag{44}$$

$$j=\mathrm{nint}(y'/\Delta y), \tag{45}$$

而包含 $\boldsymbol{r}'\ (i',\ j')$ 的单元由方程 (26-27) 定义。插值权重 w 为

$$w_{11}=\frac{(x_{i+\frac{1}{2}}-x')(y_{j+1}-y')}{(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i-\frac{1}{2}})(y_{j+1}-y_j)},\quad w_{12}=\frac{(x_{i+\frac{1}{2}}-x')(y'-y_j)}{(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i-\frac{1}{2}})(y_{j+1}-y_j)}, \tag{46}$$

$$w_{21}=\frac{(x'-x_{i-\frac{1}{2}})(y_{j+1}-y')}{(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i-\frac{1}{2}})(y_{j+1}-y_j)},\quad w_{22}=\frac{(x'-x_{i-\frac{1}{2}})(y'-y_j)}{(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i-\frac{1}{2}})(y_{j+1}-y_j)}, \tag{47}$$

从而得到插值后的值

$$B_x^*=w_{11}B_{x,i-\frac{1}{2},j}+w_{21}B_{x,i+\frac{1}{2},j}+w_{12}B_{x,i-\frac{1}{2},j+1}+w_{22}B_{x,i+\frac{1}{2},j+1}+O(\Delta x^2)+O(\Delta y^2). \tag{48}$$

这里同样通过函数 $\sigma_{i-\frac{1}{2},\ j}$进行限制；若模板中任一面为空面，则该函数取值为 0（因此降为一阶插值），否则取值为 1：

$$B_x'=\sigma_{i-\frac{1}{2},j}B_x^*+(1-\sigma_{i-\frac{1}{2},j})B_{x,i'-\frac{1}{2},j'}. \tag{49}$$

采用类似的过程，从 y法向面插值得到 B_y 至 $\boldsymbol{r}'$。在虚单元和面上定义$\mathbf{B}$ 后，在单元边上计算$\mathbf{J}$，其中包括浸入边界非活动侧窄带内单元的单元边（幽灵边）。

至此，我们完成了对单侧边界的说明：如何分别施加理想磁流体力学项和电场欧姆贡献的边界条件。第5节将讨论界面表示处理的细节，随后在第6.1节中完整总结该算法，以便于理解。

4.2 双侧嵌入边界的磁流体力学幽灵流体方法扩展

对于一部分问题，我们需要演化嵌入边界两侧的状态，例如等离子体和液态金属的情形。这种情况需要扩展第3.2节介绍的幽灵流体算法。除了具有不同的状态方程（或者在我们的情形中，不同的 γ值）之外，这些材料也允许具有不同的电阻率 η。在材料界面处，电场 $-\mathbf{v}\times\mathbf{B}+\eta\mathbf{J}$ 可能因$\mathbf{B}$ 的切向分量发生跃变，或材料电阻率 η发生跃变而不连续。在界面两侧分别演化$\mathbf{B}$ 场存在问题，因为将磁场分解为法向分量和切向分量只能达到截断误差精度，导致 $\nabla\cdot\mathbf{B}$ 的误差显著大于舍入误差，并引入磁单极子。因此，我们演化一个统一的全局$\mathbf{B}$ 场，同时通过计算逐材料边中心电场并采用边占据分数加权平均将部分不连续特性纳入计算。需要指出的是，这种做法存在局限：尽管像幽灵流体方法这样的锐界面方法能够消除质量的数值耗散，但当前的多材料处理无法以同样的方式消除界面处的数值电阻率。然而，这种方法仍然值得采用，若能将其扩展到当前工作中将很有价值。另一种方法是对速度场和电阻率计算体积分数和面积分数加权平均，并据此计算全局电场。但实践中我们发现，分别计算电场再取平均能得到更好的结果。第6.2节将完整总结该算法，以便于理解。

5 嵌入边界的表示

为了追踪不同问题中嵌入边界的位置，我们采用折线（辅助拉格朗日网格）或水平集。具体而言，对于静态或运动已指定的单侧嵌入边界问题，我们采用折线表示，因为在这些情况下折线表示较为简单。然而，对于双侧（材料界面）问题，界面运动可能由速度场驱动，因此我们采用水平集方法来追踪嵌入边界。这两种方法在文献中都已得到充分发展，但我们仍将在此介绍本研究中采用的具体实现方式。这也说明，所采用的切割单元方法和幽灵流体方法独立于边界位置的确定方式。

5.1 辅助拉格朗日网格——折线

折线将边界定义为一个闭合多边形，其节点按逆时针顺序排列，且节点可能位于计算域内部或外部。补充拉格朗日表示的优点是存储需求很低，能够直接提供局部边界切向量和法向量；对于边界可能移动的浸入界面应用，边界也不会受到数值扩散的影响。

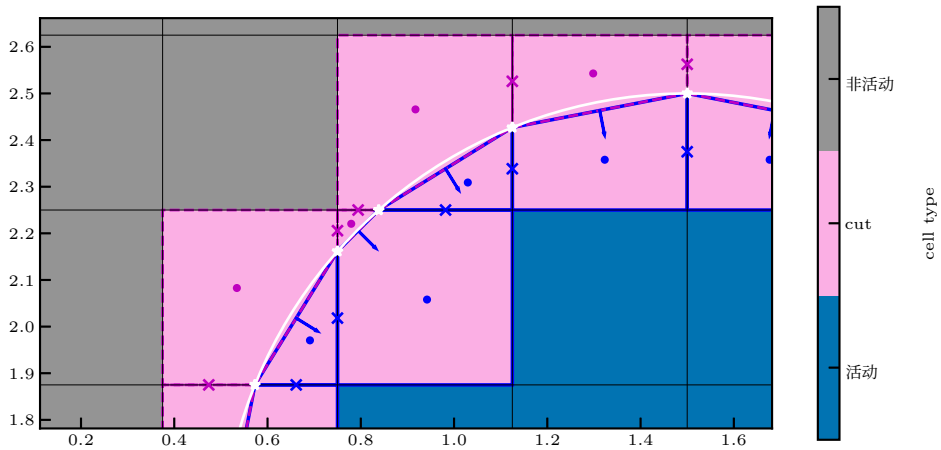


图1： 图示了在我们的切割单元算法实现中对单元进行划分的过程。单元类型用单元颜色表示（参见色彩图）。嵌入边界的折线表示以白色绘制，白色星号标出其与单元面的交点。切割单元的外侧和内侧面（线）及质心（点）分别以品红色和蓝色表示。切割面质心以相应颜色的叉号标出。离散分段线性边界的边界法向量以蓝色箭头表示。

然而，由于节点位置任意，因此应谨慎确定拉格朗日网格的分辨率及其与欧拉网格分辨率之间的关系。在进行分辨率研究时，这一点尤为明显。一种做法是确保拉格朗日网格的节点间距远小于所用最精细欧拉网格中单元的宽度。尽管由于拉格朗日网格的维度较低，这种做法看起来计算成本不高，但由于每次拉格朗日网格移动时都必须执行诸如搜索距离某个欧拉网格单元最近的节点等操作，该方法的开销可能会迅速增加。

指定描述边界的折线后，我们必须找出所有被该折线切割的边界单元。具体做法是沿折线以小步长 $\delta\vec{p}$ 遍历，并检查是否穿过了单元面。如果穿过，则将该面两侧的单元标记为边界单元。实际上，每个步长 $\delta\vec{p}$ 分为两步进行：$(\delta\vec{p}\cdot\hat{i})\,\hat{i}$ 和 $(\delta\vec{p}\cdot\hat{j})\,\hat{j}$，其中 $\hat{i}$ 和 $\hat{j}$ 分别是 x 和 y 方向上的单位向量。这样做是为了避免边界恰好穿过单元角点的情况，因为这可能导致后续出现未定义且不理想的结果。有时，折线的分辨率可能高于笛卡尔网格，此时多个节点可能位于同一个网格单元中。对此，我们在每个单元内将边界表示为线性函数，连接折线穿过单元边缘时进入和离开该单元的点。这样，每个边界单元都包含边界的完整局部表示，其中包括界面法向单位向量以及界面在单元内的中点。对于其余单元，可通过计算所有折线段的方向向量与单元质心相对于该折线段尾端的位置向量的叉积来确定单元类型。例如，对于连接位置向量为 $\boldsymbol{r}_A$ 和 $\boldsymbol{r}_B$ 的节点的线段 AB，质心位置向量为 $\boldsymbol{r}$ 的单元类型按如下方式确定

$$\text{cell type} = \begin{cases} \text{empty} & \text{if } ((\boldsymbol{r}_{Bi}-\boldsymbol{r}_{Ai})\times(\boldsymbol{r}_{Bi}-\boldsymbol{r}))\cdot\hat{k} > 0 \quad \forall\, 1 \le i \le N \\ \text{regular} & \text{if } ((\boldsymbol{r}_{Bi}-\boldsymbol{r}_{Ai})\times(\boldsymbol{r}_{Bi}-\boldsymbol{r}))\cdot\hat{k} < 0 \quad \forall\, 1 \le i \le N \end{cases} \tag{50}$$

其中，N 是闭合折线中的节点数，k 是沿 z 方向的单位向量。需要注意的是，这仅适用于描述凸多边形的闭合折线。

在图1中，我们展示了给定一条折线时划分单元的过程。颜色刻度表示单元类型，其中蓝色表示常规单元，粉色表示边界单元。灰色单元为空，并且完全浸没在非活动边界区域中。白色曲线是用于初始化边界的折线，其离散表示以每个边界单元内的蓝色虚线绘制。每个边界单元内活动多边形和非活动多边形的质心分别以蓝色（活动）或洋红色（非活动）点表示。对于被折线切割的每个面，非活动面质心和活动面质心分别用对应颜色的叉号表示。

在本研究中，对于界面具有指定运动的问题，我们还使用嵌入边界的折线表示，此时需要边界线段的速度来处理各种边界条件。在这种情况下，折线段的速度通过其端点节点速度的算术平均值计算得到，其精度为二阶。

5.2 水平集方法

对于具有运动材料界面的问题，我们选择采用水平集表示，因为它能够轻松表示材料界面几何形状的大幅变形，并避免在涉及复杂流动的问题中拉格朗日网格不可避免的网格缠结。对于静态浸入边界，采用这种方法也同样简单直接。水平集方法目前已相当成熟，且文献中对此已有详尽记述。因此，我们建议有兴趣的读者参阅

Osher 等人（2004）编写的综述性著作；本文仅在必要时介绍基本概念，并说明我们具体实现中的细节。

我们定义并存储一个以单元为中心的标量函数 ϕ，其值为到材料界面的有符号距离（下文常简称为“界面”）。界面一侧的函数值为正，另一侧为负。因此，可以轻易判断某点位于界面内侧还是外侧，而界面的位置由该标量函数的零水平集给出。因此，使用水平集时，无需像使用折线那样识别边界单元。在单元层面，界面被视为平面；不过，只要根据水平集计算局部曲率半径，匹配条件和边界条件中仍可考虑曲率效应。标量场 ϕ 被插值到单元边上，并在边上识别零交点[3]。随后，可用连接这些零交点的直线（在三维中为平面）近似界面。这确保界面在相邻单元之间保持连续。任何与存在 ϕ 零交点的边相连的单元/面，都会被标记为切割单元/面。体积分数根据所得多边形（二维情况下）的面积计算。界面法向量用于在边界处反射虚单元，并将各种量分解为沿界面切向和法向的分量；其计算方式为 $\hat{\boldsymbol{n}} = \nabla\phi/|\nabla\phi|$。所有单元中的该向量均通过对 ϕ 进行按维分裂的修正 van Leer 限制重构来计算；在均匀笛卡尔网格极限下，这恰好就是 van Leer 斜率限制器（φ）Mignone (2014)：

$$\varphi(v) = \frac{v + |v|}{1 + |v|}; \quad v = \frac{U_{i+1} - U_i}{U_i - U_{i-1}}. \tag{51}$$

界面的运动由水平集方程描述

$$\partial_t \phi + \nabla \cdot (\mathbf{v}\phi) = \phi(\nabla \cdot \mathbf{v}) \,. \tag{52}$$

如第 2.1 节所述，在磁流体动力学更新的每个 Runge–Kutta 阶段（方程 3 和 4），都会将两种材料中的速度进行体积分数加权平均，构造出全局单元平均速度向量，并将其存储起来，以便使用低存储 Runge–Kutta 格式（方程 5 和 6）对方程 (52) 进行时间积分。方程 (52) 使用有限体积离散

$$\begin{aligned}\partial_t \phi_{i,j} = \frac{1}{V_{i,j}} \Bigg[&-\Delta y \left(F^{\phi}_{i+\frac{1}{2}} - F^{\phi}_{i-\frac{1}{2}} \right) - \Delta x \left(G^{\phi}_{j+\frac{1}{2}} - G^{\phi}_{j-\frac{1}{2}} \right) \\ &+\Delta y \left(v^{up}_{x,i+\frac{1}{2}} - v^{up}_{x,i-\frac{1}{2}} \right) + \Delta x \left(v^{up}_{y,j+\frac{1}{2}} - v^{up}_{y,j-\frac{1}{2}} \right) \Bigg]\end{aligned} \tag{53}$$

进行空间离散。v^{up} 为迎风速度，其定义如下：

$$v^{up}_{x,i-\frac{1}{2}} = \begin{cases} v^{-}_{x,i-\frac{1}{2}}, & F^{\phi}_{i-\frac{1}{2}} \geq 0 \\ v^{+}_{x,i-\frac{1}{2}}, & F^{\phi}_{i-\frac{1}{2}} < 0 \end{cases}, \tag{54}$$

$$v^{up}_{y,j-\frac{1}{2}} = \begin{cases} v^{-}_{y,j-\frac{1}{2}}, & G^{\phi}_{j-\frac{1}{2}} \geq 0 \\ v^{+}_{y,j-\frac{1}{2}}, & G^{\phi}_{j-\frac{1}{2}} < 0 \end{cases}, \tag{55}$$

其中，上标 $\pm$ 表示面下侧或上侧的值。通量 F^{ϕ} 和 G^{ϕ} 使用简单的局部 Lax–Friedrichs 通量近似：

$$F^{\phi}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(v^{-}_{x,i-\frac{1}{2}} \phi^{-}_{i-\frac{1}{2}} + v^{+}_{x,i-\frac{1}{2}} \phi^{+}_{i-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} \left(\phi^{+}_{i-\frac{1}{2}} - \phi^{-}_{i-\frac{1}{2}} \right) \right) \tag{56}$$

面相邻变量本身则通过 5th 阶 WENO 重构（Shu, 2009;Borges et al., 2008），基于单元平均值模板进行重构和限制。我们发现，这对提高数值模拟的精度和鲁棒性大有裨益。

众所周知，ϕ 会因数值耗散而偏离有符号距离函数，因此必须定期通过一种称为重新初始化的过程进行修正。我们采用 Sussman 和 Fatemi（1999）所述的方法，该方法基于对程函方程进行积分

$$\partial_\tau \phi = S(\phi_0)(1 - |\nabla\phi|), \tag{57}$$

在伪时间 τ 中向前推进，其中 $S(\phi)$ 是一个符号函数。ϕ_0 是伪时间 $\tau = 0$ 下的水平集被动标量场。这是一个哈密顿-雅可比方程，它以速度 1 将信息从界面向外传播。由于 ϕ 只需在靠近界面的窄带单元中为有符号距离函数，而在其他位置则只需根据单元位于界面的哪一侧取正值或负值，因此所需的伪时间步数约等于该窄带中所需的单元数量。

[3]需要注意的是，在二维情况下，xy 边与单元角点重合，而 xz 边和 yz 边则分别与法向为 y 和 x 的面重合

$S(\phi)$ 的实现使用海维赛德函数：

$$S(\phi) = 2\left(H(\phi,\Delta x) - \tfrac{1}{2}\right), \tag{58}$$

$$H(\phi,\Delta x) = \max\left(0, \min\left(1, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\phi}{\Delta x} + \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi\phi}{\Delta x}\right)\right)\right)\right), \tag{59}$$

并且我们对 $\nabla\phi$ 使用二阶 Godunov/MUSCL 迎风差分近似，这在离散化 Hamilton-Jacobi 方程中很常见（Sethian，1999）。首先考虑 x 方向，使用宽度为 5 个单元的模板，计算二阶后向和前向差分近似，以及左侧（a）和右侧（b）的面：

$$s_l^a = U_{i,j} - 2U_{i-1,j} + U_{i-2,j}, \quad s_r^a = U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}, \tag{60}$$

$$s_l^b = U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}, \quad s_r^b = U_{i+2,j} - 2U_{i+1,j} + U_{i,j}. \tag{61}$$

并采用 MUSCL 型限制方法，得到左侧和右侧面的斜率（分别为 a 和 b）：

$$s^a = \text{minmod}(s_l^a, s_r^a), \quad s^b = \text{minmod}(s_l^b, s_r^b), \tag{62}$$

$$a = U_{i,j} - U_{i-1,j} + \frac{1}{2}s^a, \quad b = U_{i+1,j} - U_{i,j} - \frac{1}{2}s^b. \tag{63}$$

采用相同的步骤计算 y 方向上底面和顶面的斜率（分别为 c 和 d）。对斜率应用 Godunov 分裂：

$$a^\pm = \frac{1}{2}(a \pm |a|), \quad b^\pm = \frac{1}{2}(b \pm |b|), \quad c^\pm = \frac{1}{2}(c \pm |c|), \quad d^\pm = \frac{1}{2}(d \pm |d|). \tag{64}$$

程函哈密顿量（$H(\nabla\phi) = |\nabla\phi|$）的 Godunov 二维规则给出两个梯度模，一个对应速度 $S(\phi)$ 为正的情况：

$$|\nabla^+\phi| = \frac{1}{\Delta x}\sqrt{\max((a^+)^2,(b^-)^2) + \max((c^+)^2,(d^-)^2)}, \tag{65}$$

（其中，$1/\Delta x$ 这一因子源于我们使用了均匀模板，并且处理的是差分而非梯度）；另一个表达式适用于速度为负的情况：

$$|\nabla^-\phi| = \frac{1}{\Delta x}\sqrt{\max((a^+)^2,(b^-)^2) + \max((c^+)^2,(d^-)^2)}. \tag{66}$$

因此，式（57）的离散形式为

$$\partial_\tau\phi_{i,j} = \begin{cases} S(\phi_{0,i,j})(1 - |\nabla^+\phi_{i,j}|), & S(\phi_{0,i,j}) \geq 0, \\ S(\phi_{0,i,j})(1 - |\nabla^-\phi_{i,j}|), & S(\phi_{0,i,j}) < 0. \end{cases} \tag{67}$$

采用线法对其进行离散，并使用第 2.1 节所述的相同低存储RK2算法，在伪时间中向前积分，伪时间步长为 $\Delta t = 0$。$25\Delta x$。我们发现，实际中无需在伪时间中积分，直至 ϕ 达到稳态，重新初始化便已足够理想。在本研究中，我们选择在重新初始化水平集时仅执行 10 个伪时间步，因为（1）ϕ 只需在界面周围的窄带（~ 5 个单元）内为有符号距离函数；（2）在一个对流步期间，ϕ 偏离有符号距离函数的程度通常很小。然而，在数值模拟开始时初始化 ϕ，我们会执行 400 个伪时间步，以确保 ϕ 在更大范围内定义良好。伪时间积分期间，切割单元中的 ϕ 值保持不变，因此在重新初始化过程中界面移动极小。

6 算法总结

6.1 单侧静止或运动嵌入边界下磁流体力学的算法

为清晰起见，下面列出演化算法。为简洁起见，省略程序控制和输出的细节。步骤 1 使用折线，将单元标记为活动、切割或非活动，并记录每个单元最近的折线段（第 5.1 节）。步骤 2 在活动和切割单元以及围绕活动和切割单元的面上，以原始变量初始化整个状态 $\mathbf{U}_0$。步骤 3 $\mathbf{U}^n|_{D_\ell^n} \rightarrow \mathbf{U}^{n+1}|_{D_\ell^{n+1}}$（第 2.1 节）

步骤 3(a) 根据方程 (21) 确定 Δt
步骤 3(b) 根据所选边界条件，为虚拟区域中不与切割或活动单元相邻的空单元和空面填充$\mathbf{U}_0$ 状态（距离嵌入边界不超过 $5\Delta x$）；重新计算活动、切割和虚单元中的单元平均值$\mathbf{B}$ （第 3 节）。

步骤 3(c) 复制$\mathbf{U}_0 \rightarrow \mathbf{U}_1$ 并将$\mathbf{U}_0$ 转换为守恒形式。
步骤 3(d) $\mathbf{U}^n|_{D_\ell^n} \rightarrow \mathbf{U}^{n+1}|_{D_\ell^n}$（Runge–Kutta阶段方程 3–4）

步骤 3(d)i 在$\mathbf{U}_1$ 中设置区域边界条件（如果活跃区域邻接区域边界）。步骤 3(d)ii 根据活跃面、切割面和虚拟面上的$\mathbf{U}_1$，计算通量以及单元面处的$\mathbf{E}$，省略最后一个虚拟面，因为其边界状态未定义。步骤 3(d)iii 计算 $\partial_t \mathbf{U}_1$的单元平均分量。步骤 3(d)iv 计算活跃单元、切割单元和虚单元的单元边上的$\mathbf{E}$ 理想分量，包括迎风耗散项（第 2.2 节）。步骤 3(d)v 计算单元边上的$\mathbf{J}$ 和欧姆$\mathbf{E}$，并将其加到理想$\mathbf{E}$中。步骤 3(d)vi 计算面平均的 $\partial_t B_x$、 $\partial_t B_y$以及单元平均的 $\partial_t B_z$。步骤 3(d)vii 将$\mathbf{U}_1$ 转换为守恒形式，以进行低存储RK更新。步骤 3(d)viii 在$\mathbf{U}_1$ 中更新活跃单元和切割单元平均值，以及活跃单元和切割单元边界面上的面平均值，使其进入下一个Runge–Kutta阶段。步骤 3(d)ix 在更新后的$\mathbf{U}_1$ 中设置虚拟面上的$\mathbf{B}$ （第 3 节），并在$\mathbf{U}_1$中更新单元平均$\mathbf{B}$。步骤 3(d)x 将$\mathbf{U}_1$ 转换回材料网格上的原始变量。步骤 3(d)xi 填充虚单元中的单元平均状态（第 3 节）。步骤 3(d)xii 如果不是最后一个Runge–Kutta阶段，则转到步骤 3(d)i。步骤 3(e) $\mathbf{U}^{n+1}|_{D_\ell^n} \rightarrow \mathbf{U}^{n+1}|_{D_\ell^{n+1}}$：更新折线节点位置，并重新定义单元和面类型（方程2）。[4]步骤 3(f) 更新至t^{n+1} 完成，复制$\mathbf{U}_1 \rightarrow \mathbf{U}_0$。

6.2 双侧静止或移动嵌入边界的磁流体力学算法

下面清晰地列出双侧虚拟流体磁流体力学方法的算法。这些步骤与上一小节大体相同，但增加了对多种材料的处理。共有三个网格对象 M_ℓ，每个对象都有自己的状态场 $\mathbf{U}^n|_{D_\ell^n}$：每种材料对应一个网格；另有一个主网格（M_0），负责管理$\mathbf{B}$ 和水平集场，并在所有材料构成的整个区域上定义状态（$D_0 = \cup_{\ell>0} D_\ell$）。

步骤 1 在 M_0 上将水平集标量场初始化为 $\pm\Delta x$，并通过求解程函方程进行传播（第5.2节）。步骤 2 在 $M_{\ell>0}$上，利用水平集场将单元标记为活动、切割或非活动，并记录界面的单位法向量和切向量。步骤 3 在 $M_{\ell>0}$上，为每种材料在活动和切割单元以及包围活动和切割单元的面上，以原始变量形式初始化完整状态 U_0。在 M_0 上初始化 B。步骤 4 $\mathrm{U}^n|_{D_\ell^n} \rightarrow \mathrm{U}^{n+1}|_{D_\ell^{n+1}}$（第2.1节）步骤 4(a) 根据方程 (21) 确定 Δt。步骤 4(b) 在 $M_{\ell>0}$ 上，根据另一种材料中的状态和跃迁条件（第3.2节），在虚拟区域内为不包围切割或活动单元的空单元和空面填充 U_0 状态（距嵌入边界最多$5\Delta x$）；从 M_0 复制 B。步骤 4(c) 在 $M_{\ell>0}$ 上，复制 $\mathrm{U}_0 \rightarrow \mathrm{U}_1$，并将 U_0 转换为守恒形式。步骤 4(d) $\mathrm{U}^n|_{D_\ell^n} \rightarrow \mathrm{U}^{n+1}|_{D_\ell^n}$（Runge–Kutta 阶段，方程 3–4）步骤 4(d)i $\forall M$ 设置区域（网格边）边界条件。步骤 4(d)ii 在 $M_{\ell>0}$上，根据活动、切割和虚拟面上的 U_1，计算单元面上的通量以及 E、v；忽略状态未定义的最后一个虚拟面。步骤 4(d)iii 在 $M_{\ell>0}$上，计算 $\partial_t \mathrm{U}_1$ 的单元平均分量（方程 7–9）。步骤 4(d)iv 在 $M_{\ell>0}$上，计算活动、切割和虚拟单元的单元边上的理想电场 E，包括迎风耗散项（第2.2节）。步骤 4(d)v 在 M_0上，计算主网格上的 J 并复制到材料网格。步骤 4(d)vi 在 $M_{\ell>0}$上，计算每种材料单元边上的欧姆贡献并将欧姆电场加到理想电场上。步骤 4(d)vii 使用边缘分数加权和，将 $M_{\ell>0}$ 上的 E 合并为 M_0 上的单一 E 场。步骤 4(d)viii 在 M_0上，计算主网格上包围活动或切割单元的面上的 $\partial_t B_x$、 $\partial_t B_y$ 的面平均值，以及 $\partial_t \mathrm{U}_1$ 的 $\partial_t B_z$ 单元平均分量（方程 10）。步骤 4(d)ix $\forall M$，将 U_1 转换为守恒形式，以进行低存储RK更新。步骤 4(d)x 在 $M_{\ell>0}$上，将所有材料的 U_1 中的活动单元和切割单元平均值更新至下一 Runge–Kutta 阶段（方程 3 和 4）。步骤 4(d)xi 在 M_0 上，将所有面平均和单元中心（B_z）B 场更新至下一 Runge–Kutta 阶段。步骤 4(d)xii 将更新后的 B 从 M_0 复制到 $M_{\ell>0}$ 材料网格，并重新计算单元平均 B。步骤 4(d)xiii 在 $M_{\ell>0}$ 上，根据另一种材料中的状态和跃迁条件，在虚拟区域内为不包围切割或活动单元的空单元和空面填充 U_1 状态（距嵌入边界最多 $5\Delta x$）

[4]给定界面运动后，也可以简单地在步骤 6.1 的积分阶段内执行这次更新，以减少分裂误差。

（第3.2节）。步骤 4(d)xiv 在 M_0 上，通过体积分数和面积分数加权求和，从 $M_{\ell>0}$在整个网格上设置完整的单元平均状态和面平均$\mathbf{v}$ 。步骤 4(d)xv 在 $M_{\ell>0}$ 上，将 $\mathbf{U}_1$ 转换为原始变量形式。步骤 4(d)xvi 如果不是最后一个 Runge–Kutta 阶段，则转到步骤 4(d)i。步骤 4(e) $\mathbf{U}^{n+1}|_{D_\ell^n} \to \mathbf{U}^{n+1}|_{D_\ell^{n+1}}$：在 M_0 上，使用面平均$\mathbf{v}$进行水平集标量场平流的 Runge–Kutta 时间积分，以计算黎曼解通量。如有需要，重新初始化水平集。（按照第5.2节求解方程 2）步骤 4(f) 根据更新后的水平集，在 $M_{\ell>0}$ 上重新定义单元类型以及单位法向量和切向量。步骤 4(g) 更新至 t^{n+1} 完成后，将 $\mathbf{U}_1 \to \mathbf{U}_0$复制。

7 结果

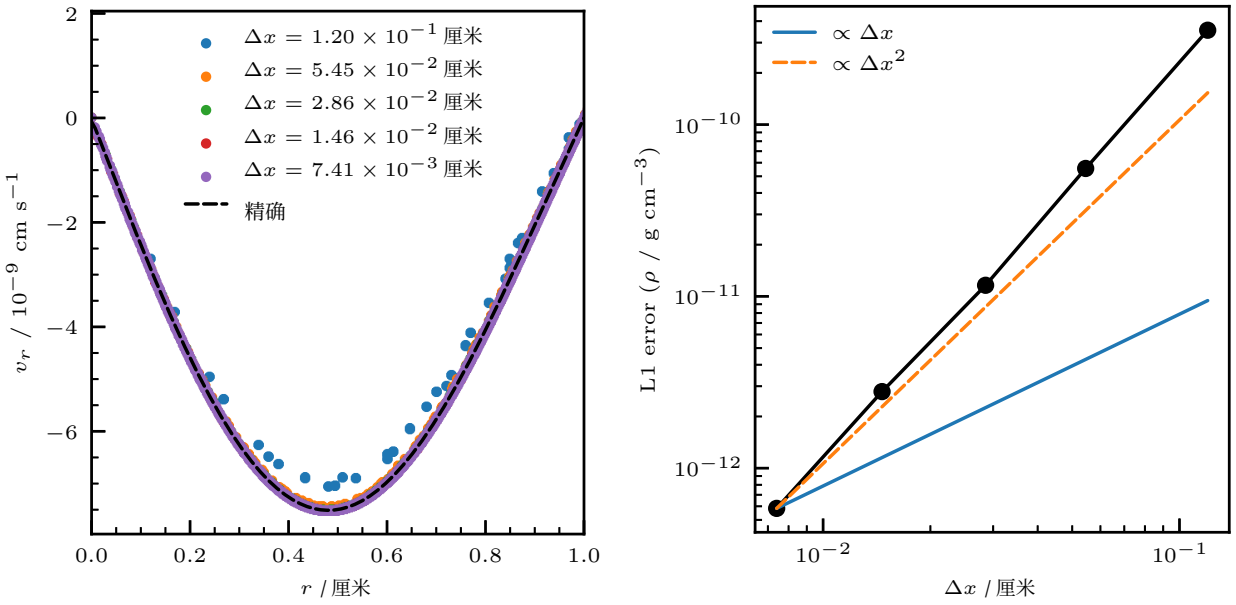
本节展示该方法的应用及验证测试，涵盖纯流体动力学、磁流体力学、电阻磁流体动力学、浸入边界两侧材料属性不同的两相问题，以及具有移动嵌入边界的问题。此处所示结果均使用 HLLD黎曼求解器 得出。除非各问题的具体描述另有说明，均采用 $\gamma = 5/3$ 的材料。

7.1 圆柱中的驻声波

在半径为 $a = 1$ 厘米的圆柱形嵌入边界内初始化一个驻声波。背景密度和压力分别为 $\rho_0 = 1\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$ 和 $P_0 = 1$ Ba，并在此基础上施加扰动，从而得到如下解析解：

$$\rho_1 = f\rho_0 J_0(kr)\sin(\omega t)\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$$
$$P_1 = \gamma P_0 \frac{\rho_1}{\rho_0},$$
$$\rho = \rho_0 + \rho_1$$
$$P = P_0 + P_1$$
$$v_r = -\frac{f\omega}{k} J_1(kr)\cos(\omega t)\ \mathrm{cm\ s^{-1}},$$

其中，$\gamma = 5/3$、$k = J_{11}/a$ 为波数，$\omega = c_s k$ 为频率，$c_s = (\gamma P/\rho)^{1/2}$ 为声速，J_i 为 i^{th}阶贝塞尔函数，$J_{11} = 3.8317$ 是一阶贝塞尔函数的第一个零点。扰动幅度为 $f = 10^{-8}$。嵌入边界采用静态折线表示。当 $t = 0$时，可得到用于初始化该问题的初始状态。图2展示了一个波周期后的结果，且解以二阶精度收敛。

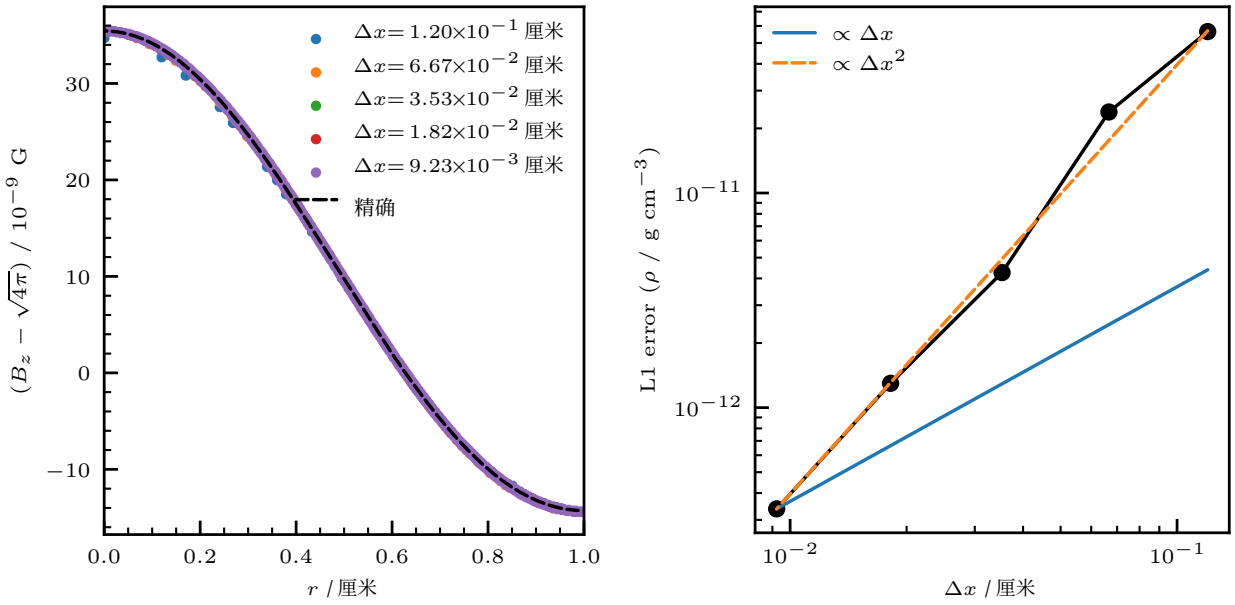


(a) 径向速度 **(b)** 密度的 L1误差

图2： 采用浸入边界技术施加于圆柱中的驻声波。

7.2 圆柱中的驻立磁声波——扰动的 θ-箍缩

在该测试中，我们通过添加磁场来扩展圆柱声波问题：$B_{z,\,0} = \sqrt{4\pi}$ G（代码单位为 1），方向为z方向；其解析解为 B_z（t）$= B_{z,\,0}$（$1+\rho_1$（t）$/\rho_0$）。使用快磁声波速度$c_p = (c_A^2 + c_s^2)^{1/2}$代替声速来计算频率 $\omega = c_p k$，其中 $c_A = (B_z^2/\rho)^{1/2}$为阿尔芬速度。扰动幅度仍为 $f = 10^{-8}$。嵌入边界采用折线表示。图3展示了 7 个振荡周期后的结果，且解以二阶精度收敛至解析解。



(a)轴向磁场 **(b)** 密度误差

图3： 采用浸入边界的圆柱驻磁声波测试。数值模拟结果以二阶精度收敛至精确解析解。该设置为受扰动的 θ 箍缩。

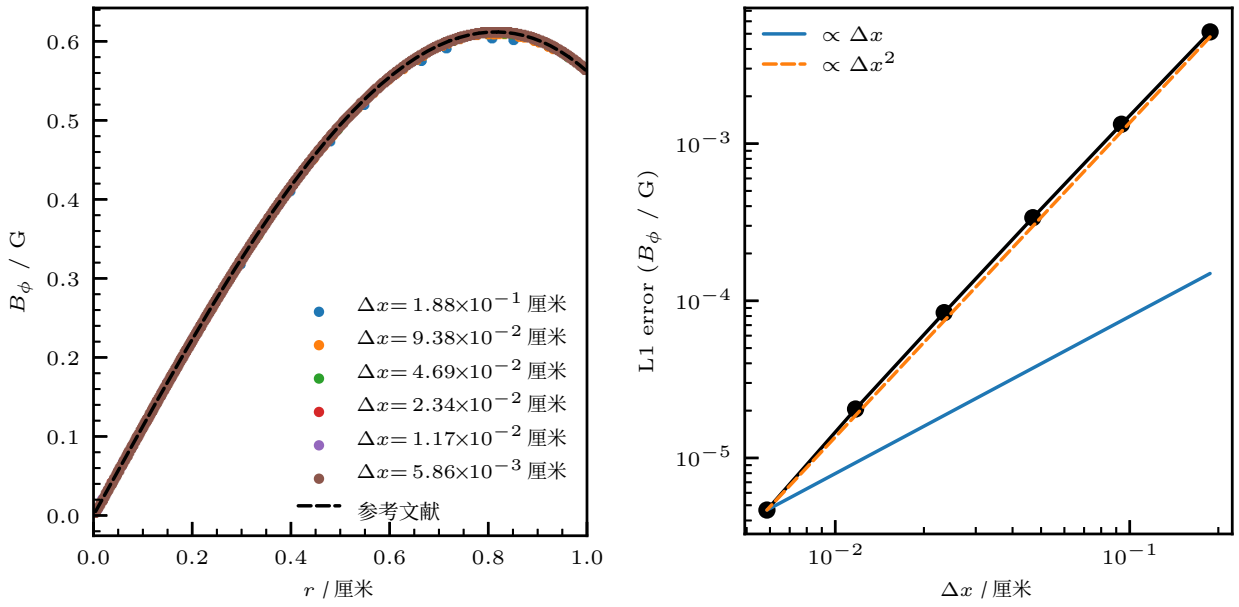
7.3 圆柱中的驻立磁声波——扰动平行箍缩

该测试同样是在圆柱中的驻定磁声波，但这次的构型是扰动平行箍缩，而不是单纯的 θ-箍缩。平行箍缩磁场遵循 Freidberg（2014，式 5.33）给出的形式。我们使用矢势的 z 分量来初始化 x 和 y 方向的磁场，并直接初始化 z 磁场。在半径为 a 的圆柱中，这些量是径向坐标 r 的函数：

$$A_z(r) = B_\phi(a)(a/4)\left(2-(r/a)^2\right) \tag{68}$$

$$B_z(r) = \frac{\sqrt{4\pi}}{\alpha}\left[1+(2\alpha^2/3)(1-(r/a)^2)^2(5-2(r/a)^2)\right]^{1/2}\ \mathrm{G} \tag{69}$$

其中给定了 $\alpha = B_\phi(a)/B_z(a)$ 和 $B_\phi(a)$、$B_z(a)$。对于该测试，密度为 $\rho_0 = 1$，热压为 $P_0 = 6\,\mathrm{Ba}$，$a = 1$ 厘米，$B_\phi(a) = \sqrt{\pi}/a\,\mathrm{G}$，且 $B_z(a) = \sqrt{4\pi}\,\mathrm{G}$。嵌入边界用折线表示，整体网格为 3 厘米见方。$t = 0$。1 s 时的结果如图 4 所示，展示了解在网格 16^2 至 512^2 上的自收敛性，并以2048^2 参考解作为对照。



(a) 方位磁场　　**(b)** B_ϕ 收敛

图4： 使用浸入边界的圆柱驻磁声波测试。该设置为扰动平行箍缩。用于计算误差的基准解来自一次高分辨率模拟。

7.4 理想导体物体周围的磁力线拖曳

尽管这一性质测试没有可用的解析解，但其设计目的是检验数值方法处理流动与理想导体相互作用时产生的复杂流动结构的能力。流体初始状态为均匀密度（$\rho = 1\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$）和压力（$P_{\rm gas} = 50\ \mathrm{Ba}$），并在 x 方向上设置了一个具有平滑剖面的矩形水平磁场带，其形式为

$$B_x(y) = \frac{\sqrt{4\pi}}{10}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\exp(-75(y-0.2))\right)^{-1}\left[1-\left(1+\exp(-75(y-0.6))\right)^{-1}\right]\ \mathrm{G}. \tag{70}$$

整个流体在 y 方向上具有初始均匀速度（$v_y = 0.75$ 厘米 $\mathrm{s^{-1}}$），区域在 x, y 方向上的范围为$[0,1], [0,2]$厘米，包含 32×64 个单元，且区域的所有边界均为周期边界。随着设置的演化，流动应绕过物体，而由于我们假设为理想磁流体力学，磁场也应绕过物体。理想情况下，磁通线在绕过物体时不应穿透理想导体边界，而约束输运格式保持散度的特性能够在活动网格中保持磁通线。然而，在切割单元中，磁通线可能会被平流输运，从而通过切割单元演化后的面穿过边界。尽管如此，该格式保持散度的特性确保每一条进入边界的磁通线仍会在其他位置从边界离开，因此，由于边界格式的截断误差，边界表现出类似具有有限“数值”电阻率的边界，同时活动区域中的磁场不会出现散度。我们分别采用球形物体和带圆角的直线边物体来设置问题，并将二者相对于网格旋转任意角度；二者均由折线表示。二者都以（0.5,1.0）厘米为中心，圆柱半径为0.25厘米，圆角正方形的边长为0.5厘米，圆角半径为0.15厘米。我们展示了圆角正方形旋转π/2和 π/16时的结果。在所有情况下，对于一系列数值分辨率，都观察到了相同的定性行为。时间为 $t = 0.8$秒时的结果如图5所示。

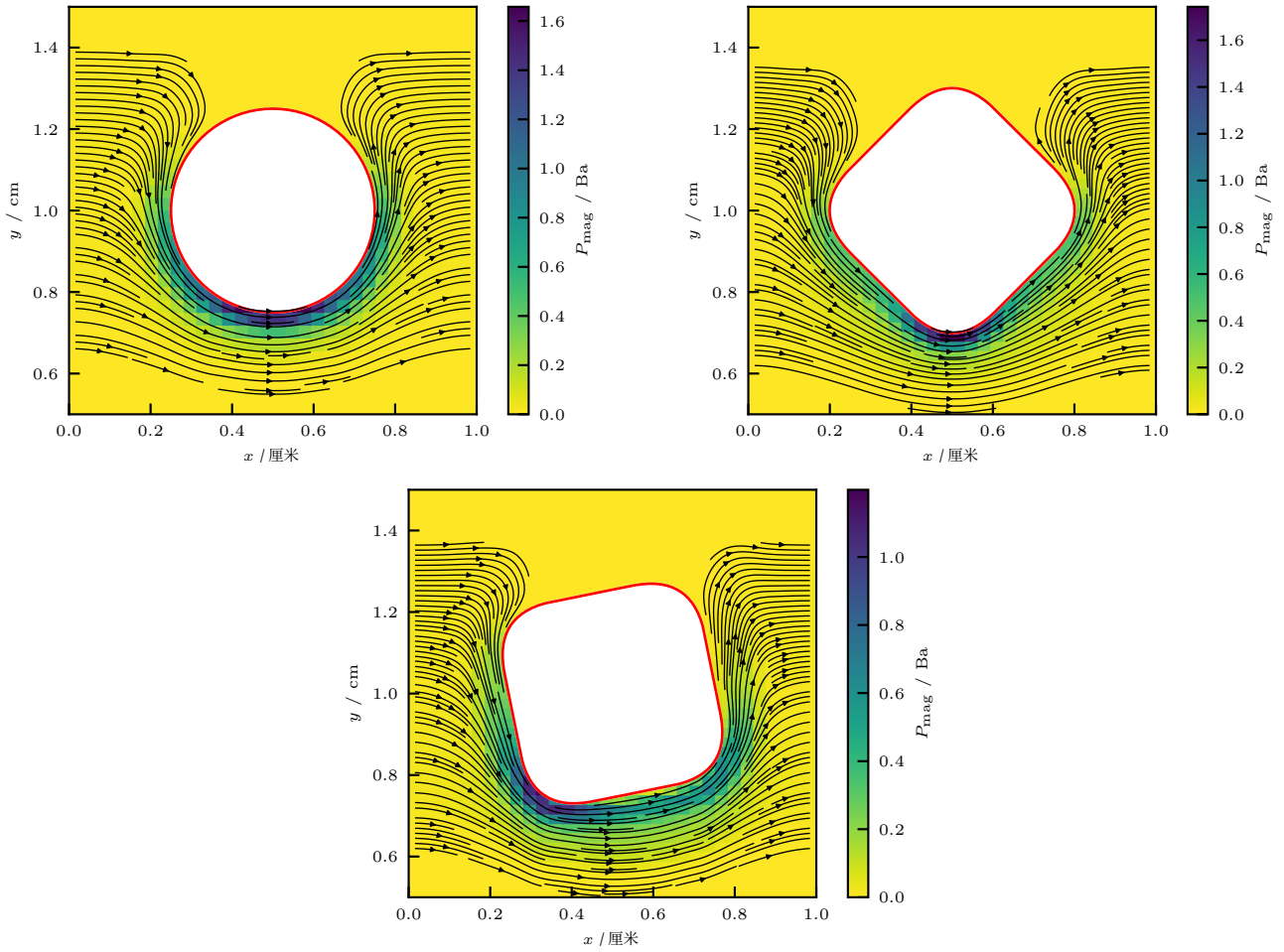


图5： 采用理想磁流体力学进行的数值模拟：磁场沿切向拖曳浸入边界，展示了三种不同形状的浸入边界。所示区域大小为 32×32 个单元。速度与磁场初始时相互垂直，其中速度沿 $+\hat{y}$ 方向，磁场沿 $+\hat{x}$ 方向。

7.5 切向场渗入导电平板

为验证电阻算子，我们构造了一个局部上基本呈一维行为的测试，并将其与解析解进行比较。在一个1.2厘米的区域中，放置一个电阻率为 10^3 厘米^2 秒$^{-1}$ 的导电正方形（边长1厘米）；该区域初始不含磁通密度，并在其边界处施加外部场，满足$\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{t} = \sqrt{4\pi}$ G、$\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{n} = B_z = 0$，通过嵌入边界的狄利克雷条件施加，该嵌入边界由折线表示。对于某些周期域，在远离角点的位置（例如边的中点），沿界面法向方向的切向场可以得到精确的半解析解；在短时间 $0 < y < L$ 时，该解是误差函数之和：

$$\frac{B(y,t)}{\sqrt{4\pi}} = 1 - (-1)^N - \sum_{n=-(N-1)}^{N} (-1)^n \,\mathrm{erf}\left(\frac{y - nL}{\sqrt{4\eta t}}\right) \text{ G}. \tag{71}$$

只要扩散长度 $(\eta t)^{1/2} < L/2$，这种近似就效果良好，而且此时只需 $N = 6$ 即可达到机器精度。时间更长时，精度会下降，因此最好使用傅里叶级数

$$\frac{B(y,t)}{\sqrt{4\pi}} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) e^{-(n\pi/L)^2 \eta t} \text{ G} \tag{72}$$

其收敛速度很快（在这些较长的时间下，取两项即可达到机器精度）。我们使用前一个级数求和得到的解，计算数值结果在 $t = 3\times10^{-6}$ s 时的 L1误差；如图6所示，该误差呈二阶收敛。

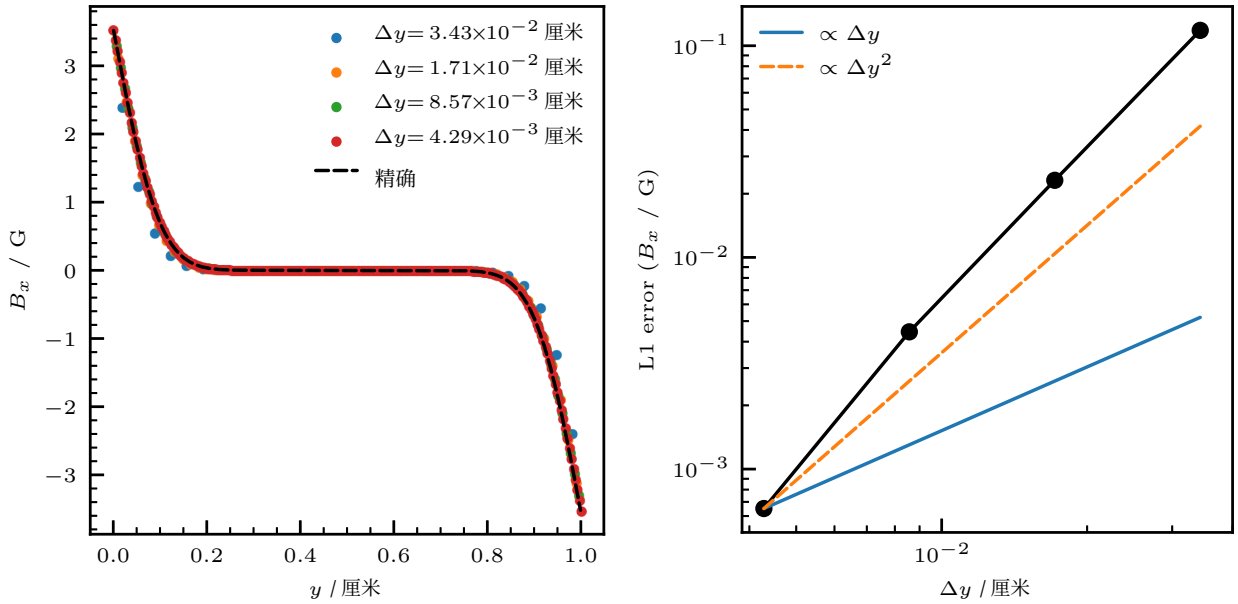


图6： 来自 $y = 0$ 和 $y = 1$ 处浸入边界的切向场渗入导电平板。初始时，区域 $0 < y < 1$ 内没有通量密度。左图：显示计算在时间 $t = 3\times10^{-6}$ s 结束时的 B_x。右图：结果显示其向半解析解呈二阶收敛。

7.6 圆柱形导体中的轴向场弛豫

该问题模拟轴向磁通从圆柱形导体的外边界向其中心进行电阻输运的过程。初始时，导体内部没有磁场，边界上的磁场为 $B_z = \sqrt{4\pi}10^{-3}$ G。假设磁扩散率在空间上均匀，取值为 $\eta = 10^{-3}$ cm^{2}s^{-1}；导体半径为 $a = 0.4$，并在最终时间 1 s 时比较结果。半解析解用傅里叶-贝塞尔级数表示：

$$B_z(r,t) = B_z(a)\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(k_n r) e^{-\eta k_n^2 t}\right] \tag{73}$$

这里，k_n 是 $J_0(k_n a) = 0$ 的正根，其中 a 是圆柱的半径。系数 $c_n = 2/k_n a J_1(k_n a)$ 的取值满足初始条件 $B_z(r, 0) = 0$，其中 $r < a$。嵌入边界用折线表示。图7所示的解具有二阶收敛性。

7.7 圆柱导体中方位磁场的弛豫

与问题 7.6 类似，我们将圆柱形导体初始化为磁通密度为零，并通过浸入边界条件施加大小为 $B_\phi = \sqrt{4\pi}10^{-3}$ G 的环向场。电阻率为 $\eta = 1$ cm^{2}s^{-1} 时，在 $t = 0.03$ s 得到的结果以及一个

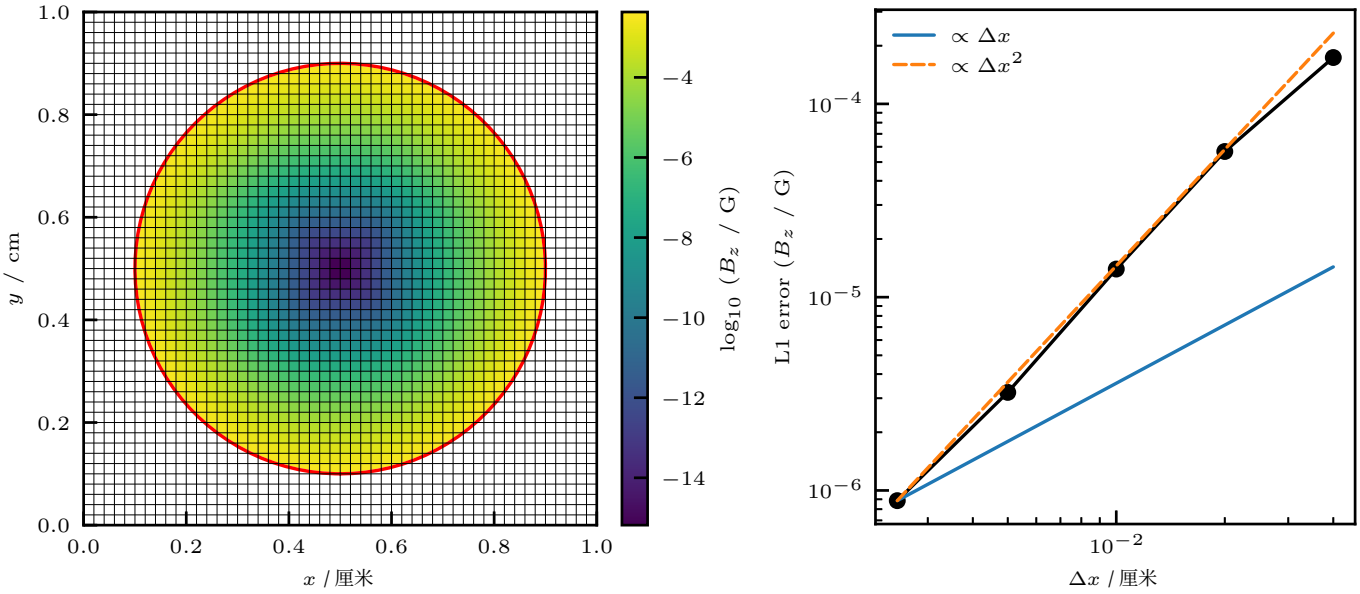


图7： 轴向磁通从圆柱形导体边缘向内的电阻输运。左： 50×50 数值模拟。右：轴向磁场浸润问题中解的收敛性。误差通过与解析解比较计算得出。提供实线蓝色（O(Δx)）和虚线橙色（O(Δx^2)）作为参考线以供比较。

半径为 $a = 0.4$ cm 的导体在一系列分辨率下的结果如图 8 所示。半解析解用 J_1 中的傅里叶-贝塞尔级数表示解相对于渐近解析解 $B_\phi(a)r/a$ 的偏差：

$$B_\phi(r,t) = B_\phi(a)\left[r/a - \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_1(k_n r) e^{-\eta k_n^2 t}\right] \tag{74}$$

这里， k_n 是 $J_1(k_n a) = 0$的非平凡正根，其中 a 是圆柱的半径。系数 $c_n = 2/k_n a J_2(k_n a)$经过选择，以满足初始条件 $B_\phi(r, 0) = 0$ （ $r < a$）。嵌入边界由折线表示。图 8 显示，通过与解析解比较计算得到的 L1误差范数呈二阶收敛。

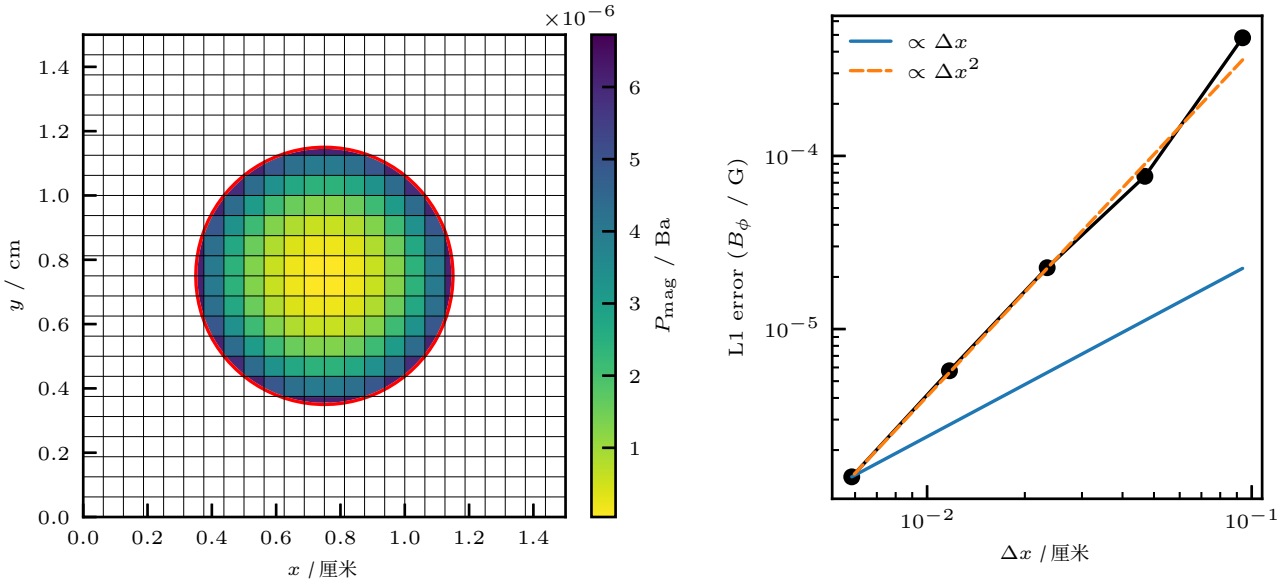


图8： 环向磁通从圆柱形导体边缘向内的电阻输运。左： 24×24 数值模拟。右：环向场浸润问题中解的收敛性。误差通过与解析解比较计算得出。提供实线蓝色（O(Δx)）和虚线橙色（O(Δx^2)）作为参考线以供比较。

7.8 电阻性磁场从一种材料板向另一种材料板浸润

初始化一个密度和压力均匀的平板，其中包含两种相邻材料，它们的密度相同，为 $\rho = 10^3\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$，并在压力 $P = 6\times10^6$ Ba下处于力学平衡。一种材料具有初始均匀磁场 $B_x = \sqrt{4\pi}10^3$ G，磁扩散率为 $1\times10^7\,\mathrm{cm^2 s^{-1}}$；另一种材料的磁扩散率为 $4\times10^6\,\mathrm{cm^2 s^{-1}}$，且初始磁场为零。区域范围为 0.125 厘米 × 1 厘米，采用零梯度（诺伊曼）边界条件，界面由静态水平集描述。为检验切割单元法，在分辨率研究中，特意将材料界面相对于单元面偏移一个单元宽度的分数，通过将其设在 $y = 1 + sin(1)\Delta x$处来实现。为便于解读，以下将结果平移，使界面位于 $y = 1$ 厘米处。图 9 显示了 $t = 2\times10^{-9}$ s时的结果。由于电阻率存在不连续性，单元平均值的 L1误差预期呈一阶收敛，这一点也反映在数值结果中。

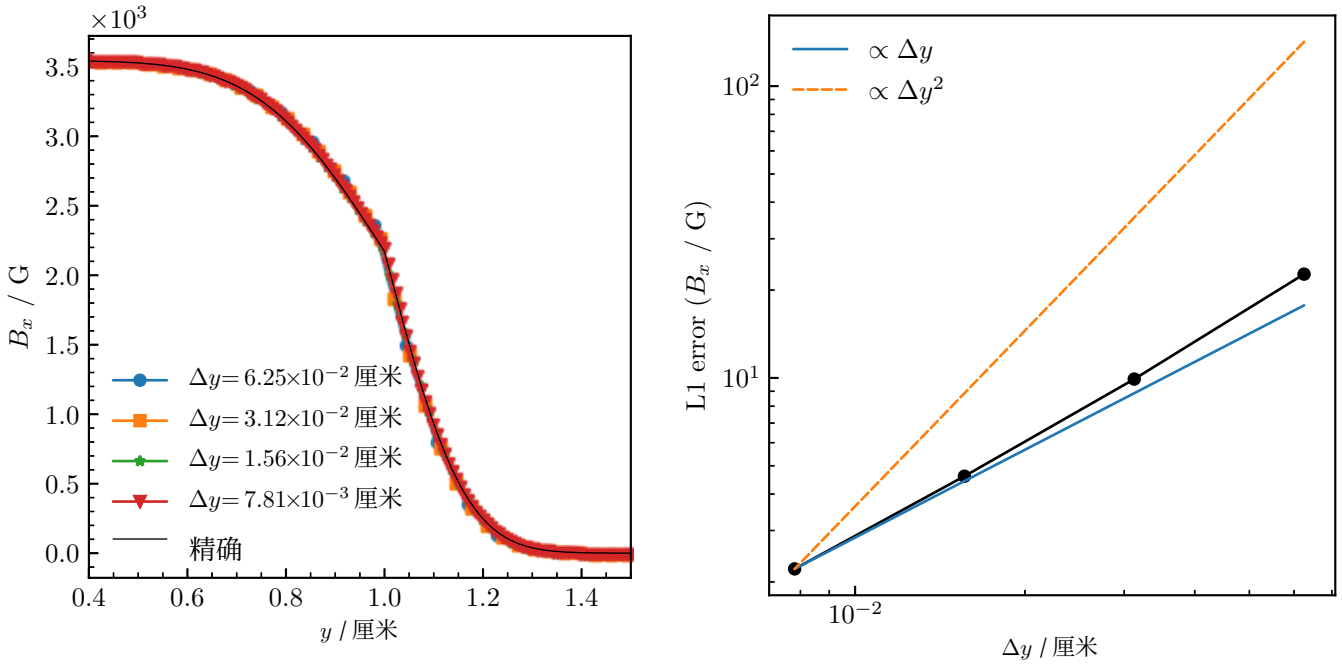
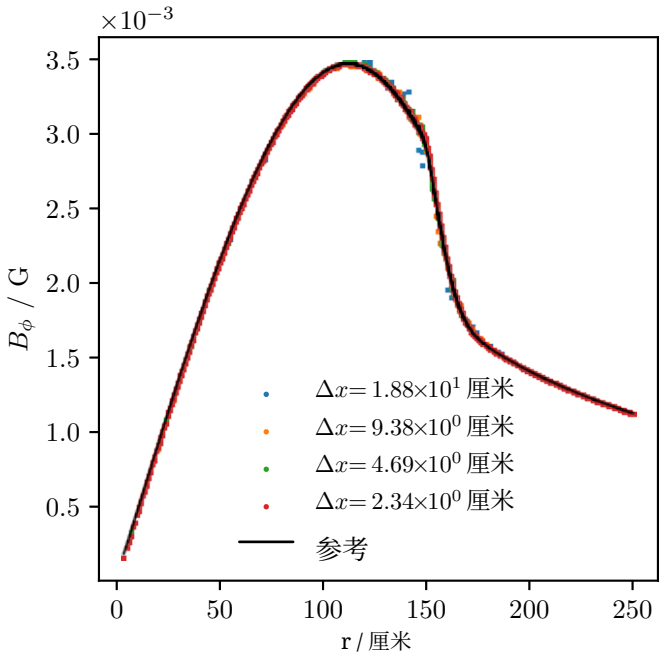


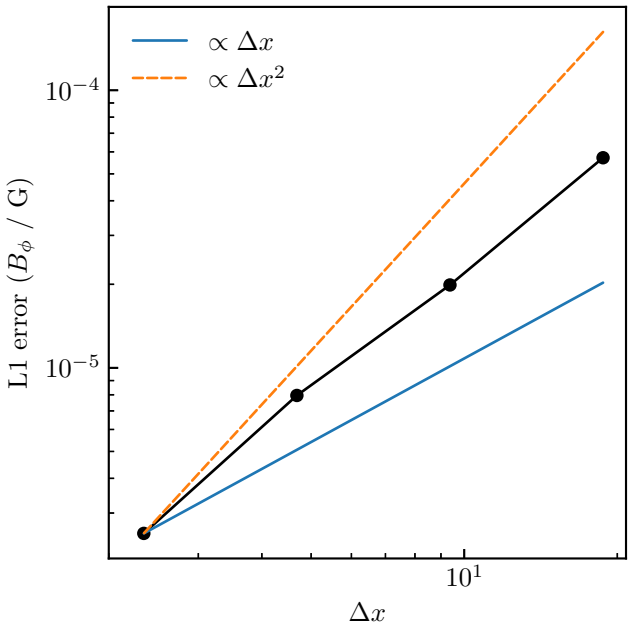
图 9： 双材料板磁场浸润问题的解的收敛性。通过与解析解（标记为“精确解”）比较来计算误差。给出了 O(Δy) 和 O(Δy²) 参考线以供比较。

7.9 电阻性磁场浸润穿过圆柱形材料界面

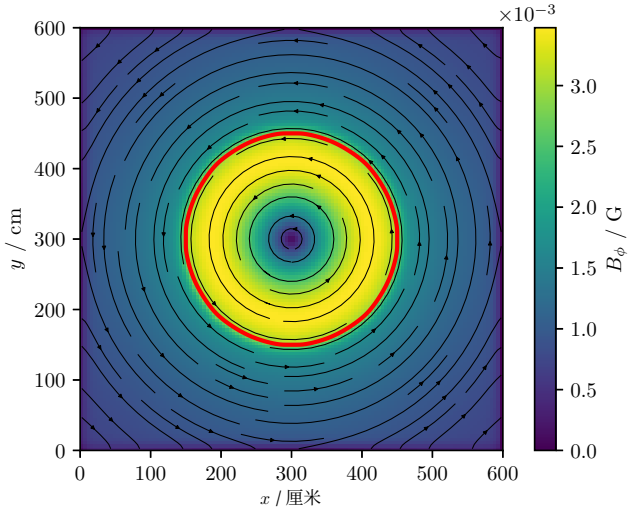
此问题展示了磁场如何扩散穿过具有不同属性的两个相之间的曲面界面。为在界面处形成陡峭梯度，我们采用第 7.3 节中的平行箍缩场，但将箍缩半径 a 以内的矢势 (68) 和 z-场 (69) 缩放为原来的 1/2；而在半径大于 a处，则使用载流导体的真空场，该电流与未缩放解相对应。因此，将材料界面置于相同位置，即可在此圆柱形材料界面处产生具有陡峭不连续性的初始条件。如图 10 所示，我们将箍缩半径和界面半径设为 $a = 150$ 厘米。圆柱形界面内的磁扩散率设为 10^4 厘米² 秒⁻¹，界面外则设为 10^3 厘米²秒⁻¹。正方形计算域的边界均采用周期性边界条件。外部区域电阻率的数值较小，因此在所分析的时间尺度内，磁场不会在这些边界处发生显著重联。此处的界面静止，并以水平集表示。该设置演化 5×10^{-2} 秒。与平板几何测试（第7.8节）类似，电阻率的不连续预计会导致一阶收敛。图 10（面板 b）所示的自收敛率（以512² 的结果为参考计算）介于一阶和二阶之间，这表明在所分析的时刻，方案在不连续处的一阶特性尚未主导总 L1误差。最后，如图 10（面板 d）所示，此测试表明，在具有非网格对齐界面的双侧界面问题中，磁散度误差仍保持在机器精度以内。



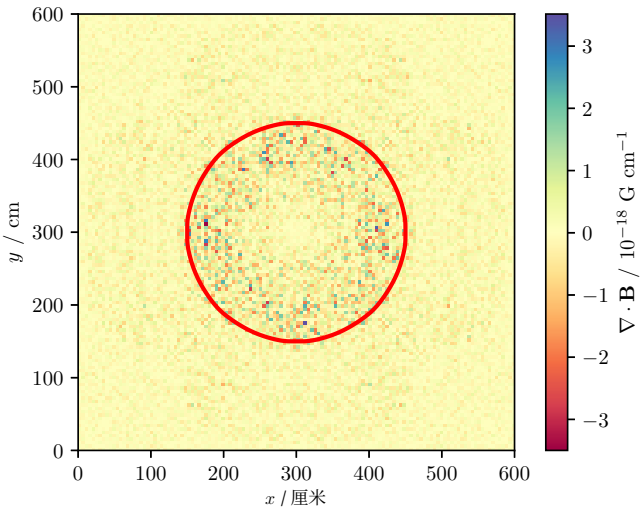
(a) B_ϕ 结果



(b) 自收敛



(c) B_ϕ 在 $t = 5 \times 10^{-2}$ 秒时 128^2

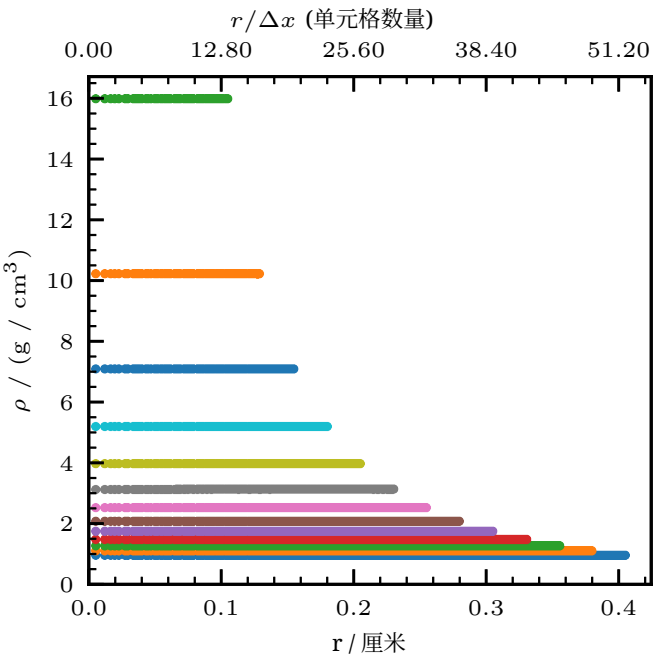


(d) $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 在 128^2

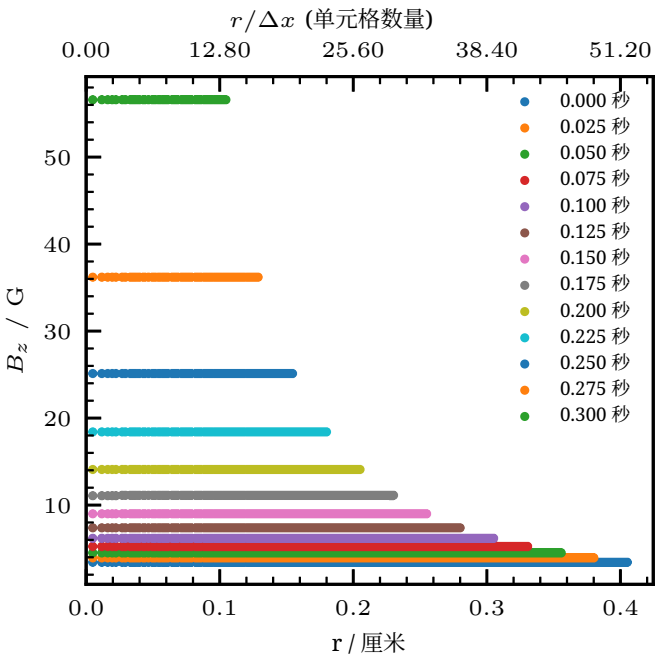
图 10： 双材料圆柱问题的结果（左上）和自收敛分析（右上）。同时展示了 128^2 网格上的最终 B_ϕ（左下）和 $\nabla \cdot \mathbf{B}$（右下）。

7.10 θ箍缩的压缩

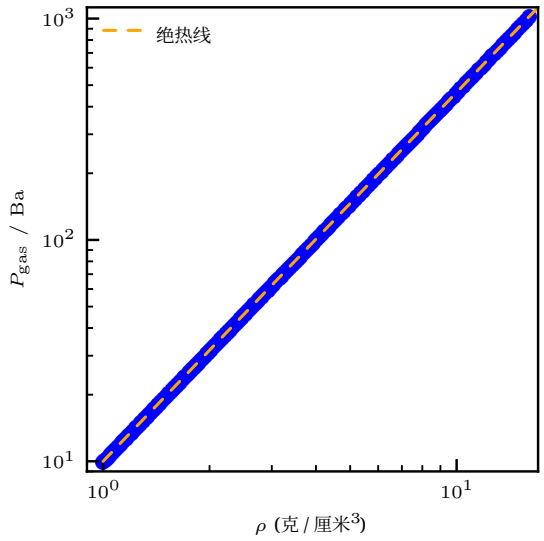
为展示该方法在具有移动边界问题中的应用，我们在此介绍两种简单的设置，用以模拟压缩导电壁对等离子体的绝热加热。第一种是 θ箍缩的压缩：等离子体中的磁场沿 z 方向均匀分布。在边长为 1 的正方形区域内，使用分辨率为 128^2，的笛卡尔网格，初始化了一个半径为 $a = 0.4$ 厘米的圆柱形嵌入边界。这样，圆柱形区域的初始半径内有 51.2 个单元，且该分辨率随时间推移而降低；磁流体动力学方程仅在此边界内部求解。磁场设为均匀的 $B_z = \sqrt{4\pi}$ G，速度则设为朝向圆柱形区域中心汇聚的流动，径向速度为 $v_\mathrm{r} = -r/a$。密度均匀设为 $\rho = 1\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$，热压设为 $P_\mathrm{gas} = 10\mathrm{Ba}$。圆柱形边界为反射性理想导体，并以与初始等离子体相同的速度分布向内移动。嵌入边界由移动折线表示，其运动按 $v_\mathrm{r} = -r/a$指定。流体磁压力处于次要地位，因此壁面运动具有很强的亚阿尔芬特性，从而形成平滑、均匀的汇聚流，密度近似均匀。由于压缩边界上没有通量，压缩过程中密度和磁场会绝热升高。图11展示了此次 θ箍缩压缩的结果。请注意，图中每个点表示整个网格单元几何中心处的数值，切割单元也不例外，即使单元只有部分区域处于激活状态。圆柱形区域内的中心压力和密度以绝热方式演化，密度、压力和温度均有所升高（图11，面板 c）。磁场 B_z 也随压缩而增强。不过，总磁通量和压缩边界内的总质量都存在一定的守恒误差。两者的相对误差几乎相同（图11，面板 d），因为在这种二维实现中，两者基本上以非常相似的方式求解。磁场的面内分量则以不同方式演化，因此，下一小节中对平行箍缩进行的类似测试将呈现不同的行为。



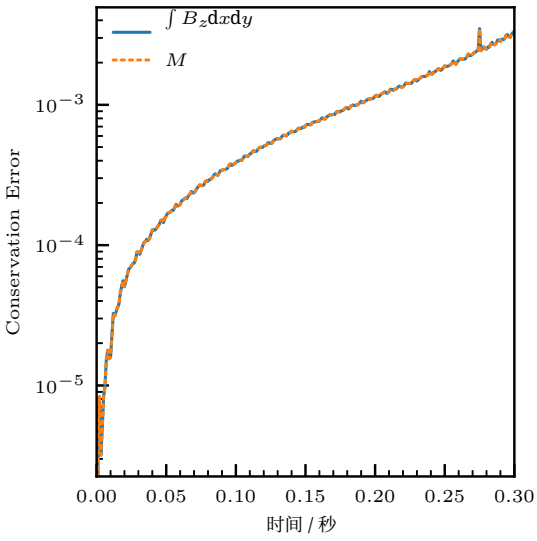
(a) 密度



(b) 轴向磁场



(c) 中心压力和密度

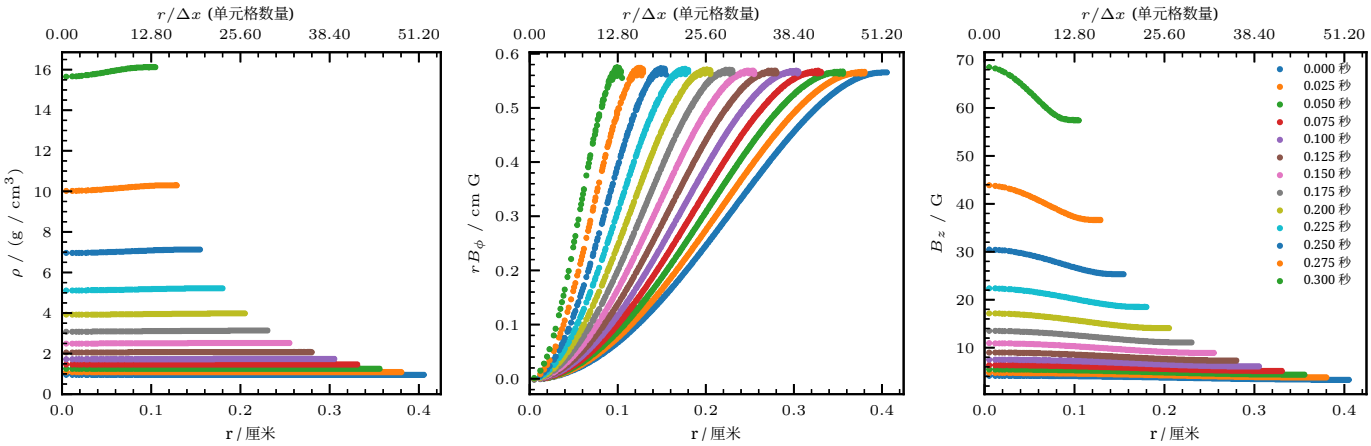


(d) 守恒误差

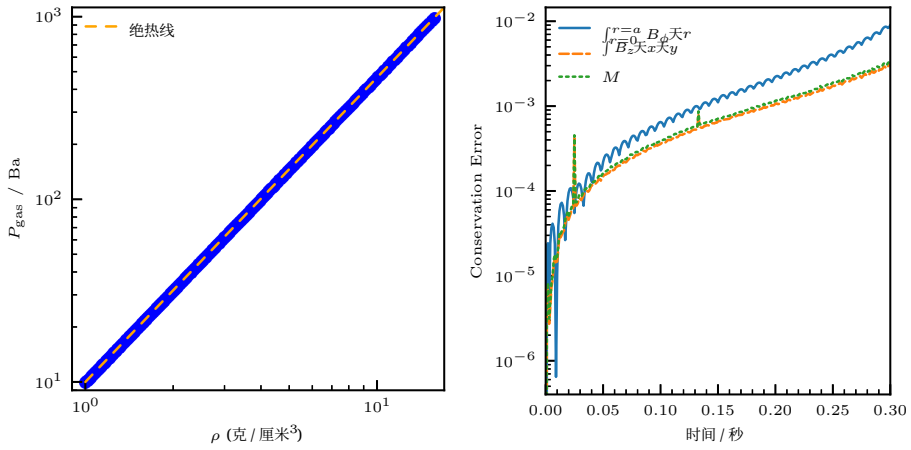
图11： 使用移动边界对 θ 箍缩构型进行亚阿尔芬压缩。初始时，圆柱半径上有 24 个网格单元，并在压缩模拟过程中逐渐减少。

7.11 平行箍缩压缩

圆柱压缩测试的第二个版本采用平行箍缩磁场构型，即第 7.3 节中此前描述的平衡解，其中 $B_\theta(a) = \sqrt{\pi/a}\,\mathrm{G}$，$B_z(a) = \sqrt{4\pi}\,\mathrm{G}$。除此之外，所有参数和边界条件均与第 7.10 节的 θ-箍缩测试相同，并且嵌入边界同样用折线表示。该压缩测试的结果如图 12 所示。同样，强烈的亚阿尔芬压缩导致初始条件发生平滑且近似绝热的压缩。然而，平衡态的内部结构在压缩过程中发生变化，从而导致密度和磁场径向分布的演化。同样，总质量和z方向磁通量的全局非守恒误差在早期（例如高分辨率下）非常相似，但在后期（例如低分辨率下）出现分歧。现在，它们在幅值上也呈现非单调性。由于该构型中的面内（B_θ）磁场不为零，因此由边界条件导致的该磁通量分量的守恒误差再次出现。



(a) 密度 **(b)** 方位磁场 **(c)** 轴向磁场



(d)中心压力和密度 **(e)** 守恒误差

图 12: 使用移动边界对平行箍缩构型进行亚阿尔芬压缩。初始时，圆柱半径方向约有 48 个网格单元，在压缩模拟过程中逐渐减少。

7.12 平行箍缩中流体动力学激波对带材料界面的压缩

该问题包含一个无限延伸的外圆柱，其中充满了具有 $\gamma_1 = 5/3$ 和初始密度 $\rho_1 = 1.4\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$的材料；外圆柱包围着另一个半径为 $r_2 = 0.3\ \mathrm{cm}$ 的内圆柱，内圆柱中含有具有 $\gamma_2 = 4$ 和 $\rho_2 = 0.5\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$的第二种材料。内圆柱中的密度在 ϕ 方向上包含一个振幅为 0.1 的正弦扰动，并且该扰动向$r = 0\ \mathrm{cm}$ 方向衰减。内层材料密度的完整表达式为

$$\rho_2 = \frac{1}{2} + 0.1 \sin\left(6\phi + \frac{3\pi}{2}\right)\left[1 - \cos\left(\frac{\pi r}{r_2}\right)\right]\ \mathrm{g\ cm^{-3}}.$$

两种材料均以材料界面处的 $P_{\mathrm{gas}} = 1\ \mathrm{Ba}$ 初始化为力学平衡状态，并通过将材料 1 中一个区域初始化为 $P = 50\ \mathrm{Ba}$，在半径为 $r > 0$。45 厘米处向内驱动汇聚激波。在数值模拟区域边界处采用零梯度诺伊曼边界条件。我们进行了两种版本的测试：一种不含磁场，另一种含有磁场。在含磁场的情况下，两种材料的磁扩散率分别为 $\eta_1 = 1$ 厘米^2 秒$^{-1}$ 和 $\eta_2 = 0$。1 厘米^2 秒$^{-1}$。磁场根据方程（68–69）中给出的平行箍缩矢势和轴向磁场进行初始化，其中 $a = r_2$, $B_\phi(a) = 5\sqrt{\pi}/a$ G, 且$B_z(a) = 0$。$\overline{1}\sqrt{4\pi}$ G。界面通过水平集进行追踪。图13展示了两种数值模拟在三个时刻的快照。在两种情况下，流体动力学激波都会压缩内部材料，使其升温。激波在圆柱轴线上反射，反向激波再次冲击界面。在不含磁场的情况下，Richtmyer-Meshkov不稳定性从密度扰动种子中发展起来；而在含磁场的情况下，这种不稳定性受到抑制。

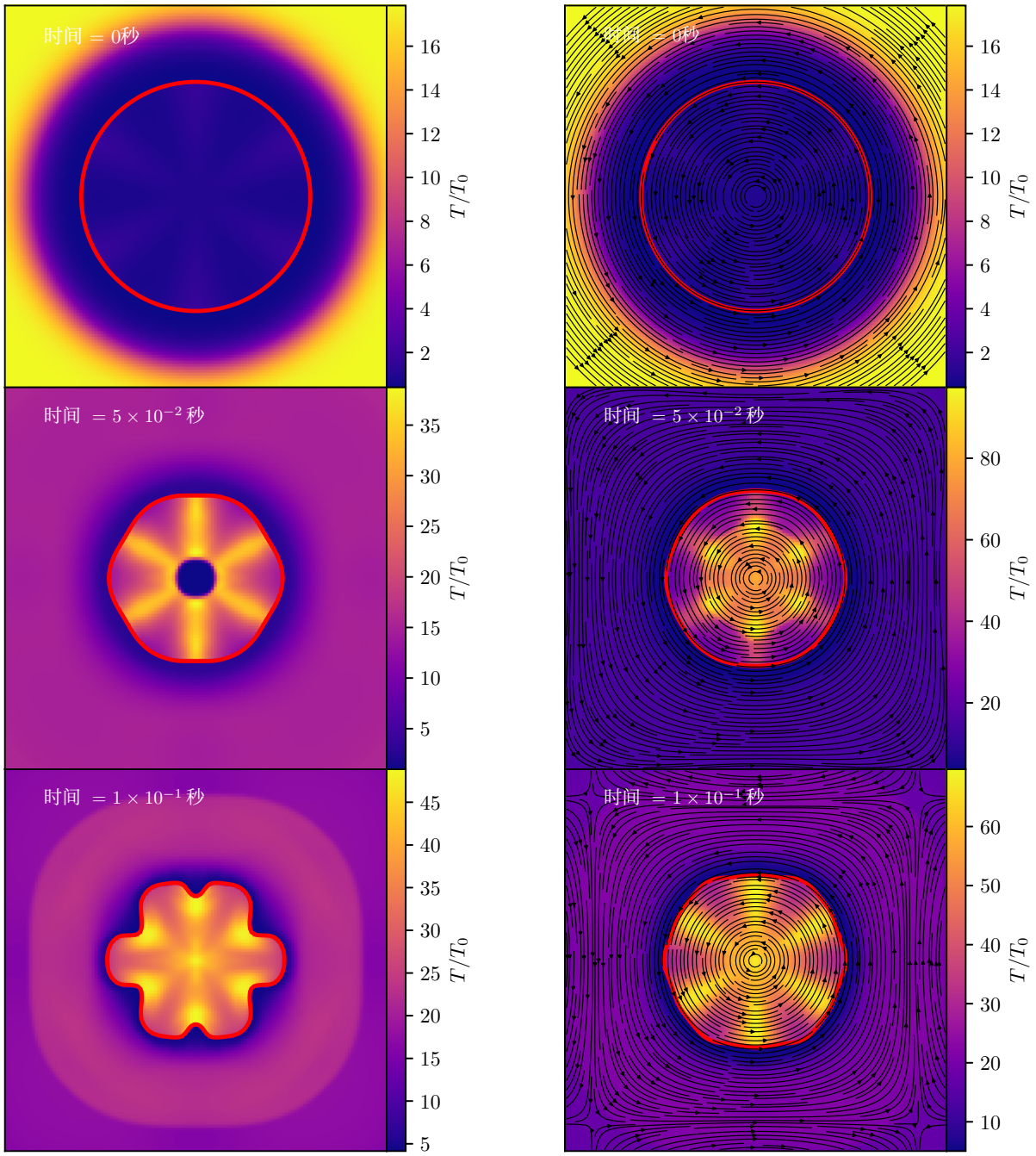


图13： 汇聚激波压缩平行箍缩。左侧： 无磁场右侧： 有磁场。区域为 1 厘米 × 1 厘米的正方形。

7.13 受激波作用的含材料界面气泡

此设置基于经典的受激波作用氦气泡问题（例如 Quirk & Karni，1996年），但这里进行了不受物理实验约束的变体，以展示该数值格式的能力。一个密度为 $\rho_2 = 0.5\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$、半径为 $r_2 = 0.25\ \mathrm{cm}$、绝热指数为 $\gamma_2 = 5$ 的圆柱形气泡，其中心位于 $(x, y) = (0.75, 0.75)\ \mathrm{cm}$，并与背景材料处于压力平衡；背景材料的参数为 $\rho_1 = 2\mathrm{g\ cm^{-3}}$、$\gamma_1 = 5/3$ 和 $P = 1\ \mathrm{Ba}$。在 $x = 0.4\ \mathrm{cm}$ 处设置平面激波，其状态满足马赫数1.5激波的流体动力学跃迁条件；初始流动参考系选取为激波后流速为零，使气泡大体保持在计算区域内。为保持一致性，该测试在有磁场和无磁场的不同变体中采用相同的初始化方式。激波从 $x = 0.1\ \mathrm{cm}$ 处出发，在背景材料中向右传播，冲击气泡并使其从静止状态向右加速。在此问题的有磁场版本中，磁场的初始化方式与第7.12节所述的汇聚激波问题相同，其中 $a = r_2 = 0.25\ \mathrm{cm}$、$B_\phi(a) = \sqrt{\pi}/a\ \mathrm{G}$ 和 $B_z(a) = 0.1\sqrt{4\pi}\ \mathrm{G}$。在具有有限电阻率的非理想磁流体动力学变体中，材料的磁扩散率分别为 $\eta_1 = 1\ \mathrm{cm^2\ s^{-1}}$ 和 $\eta_2 = 0.1\ \mathrm{cm^2\ s^{-1}}$。界面采用水平集进行追踪。无磁场版本中，流体动力学激波使气泡发生变形，其定性形态与上述文献中的实验和数值模拟结果一致。在有磁场的情况下，箍缩平衡会产生反作用力，阻止气泡轻易变形，如图14所示。理想磁流体动力学和电阻磁流体动力学变体展示了该数值格式捕捉多种物理效应复杂相互作用的能力。

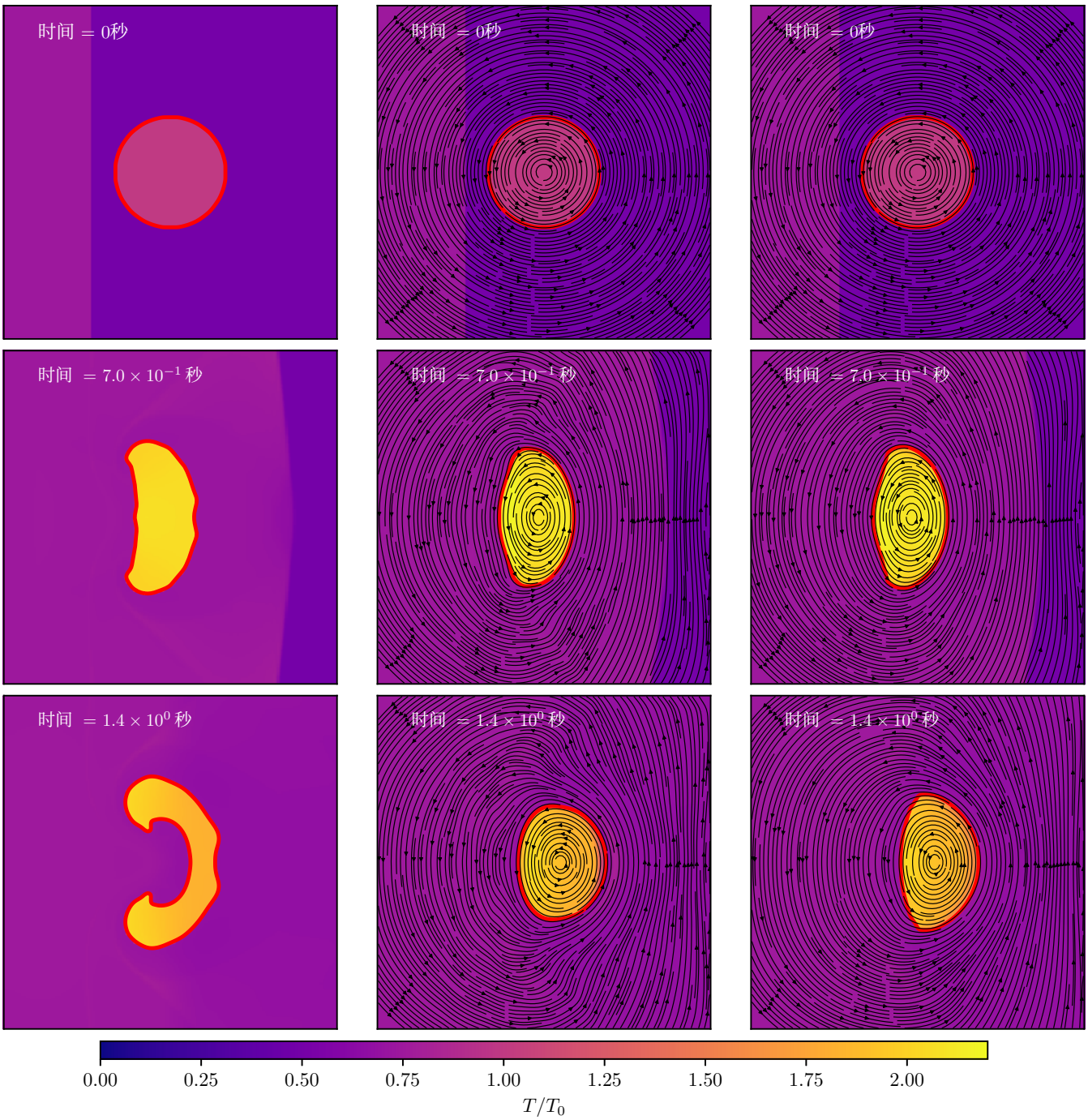


图14： 带材料界面的受激波冲击的气泡问题。左：无磁场。中：有磁场、理想磁流体力学。右：有磁场、有限电阻率。区域为 1.5 厘米 $\times$ 1.5 厘米，采用 200×200 单元网格 T_0 为气泡中的初始温度。

7.14 Z箍缩的磁压缩与材料界面

磁场压缩圆柱衬套是本方法的一项实用应用。在此测试中，我们展示了将算法应用于此类问题。衬套内的材料为 $\gamma_1 = 2$, $\eta_1 = 0.1$ 厘米^2 s^{-1}，其密度扰动初始化为

$$\rho_1 = \frac{1}{2} + 0.05\sin(6\phi)\left[1 - \cos\left(\frac{\pi r}{r_1}\right)\right] \text{ g cm}^{-3}.$$

其中衬套内半径为 $r_1 = 4$ 厘米，这也是材料界面的初始位置。衬套材料（位于 $r > r_1$处）的参数为$\gamma_2 = 1.3$, $\eta_2 = 0.05$ 厘米^2 s^{-1}，且 $\rho_2 = 1.4$ 克 厘米$^{-3}$，但在 $r > 3r_1$ 处，我们设置密度 $100\rho_2$，以在为计算便利而施加于区域正方形边缘的周期边界条件与发生圆形箍缩压缩的内部区域之间提供缓冲区。[5] 两种材料均以 $P_{\text{gas}} = 1$ Ba 初始化。 $B_z = 0$ 处处如此，且方位磁场初始为

$$B_\phi = -100\sqrt{4\pi}\left(1 + \text{双曲正切}\left[\frac{r-a}{2}\right]\right)\text{G},$$

从而产生指向外侧的磁压力梯度，并使用矢势进行初始化

$$A_z = -200\sqrt{4\pi}\left(\frac{r}{2} + \log\left[\cosh\left(\frac{a-r}{2}\right)\right]\right) \text{ G cm}.$$

我们使用 $a = 5$厘米。界面采用水平集进行跟踪，所有区域边界条件均为零梯度。图15展示了模拟所得磁驱动压缩的时间序列。

[5]将实现扩展为同时支持此处的单侧静态边界和同一计算中的移动材料界面，也是解决这一问题设置的另一种有效方法。

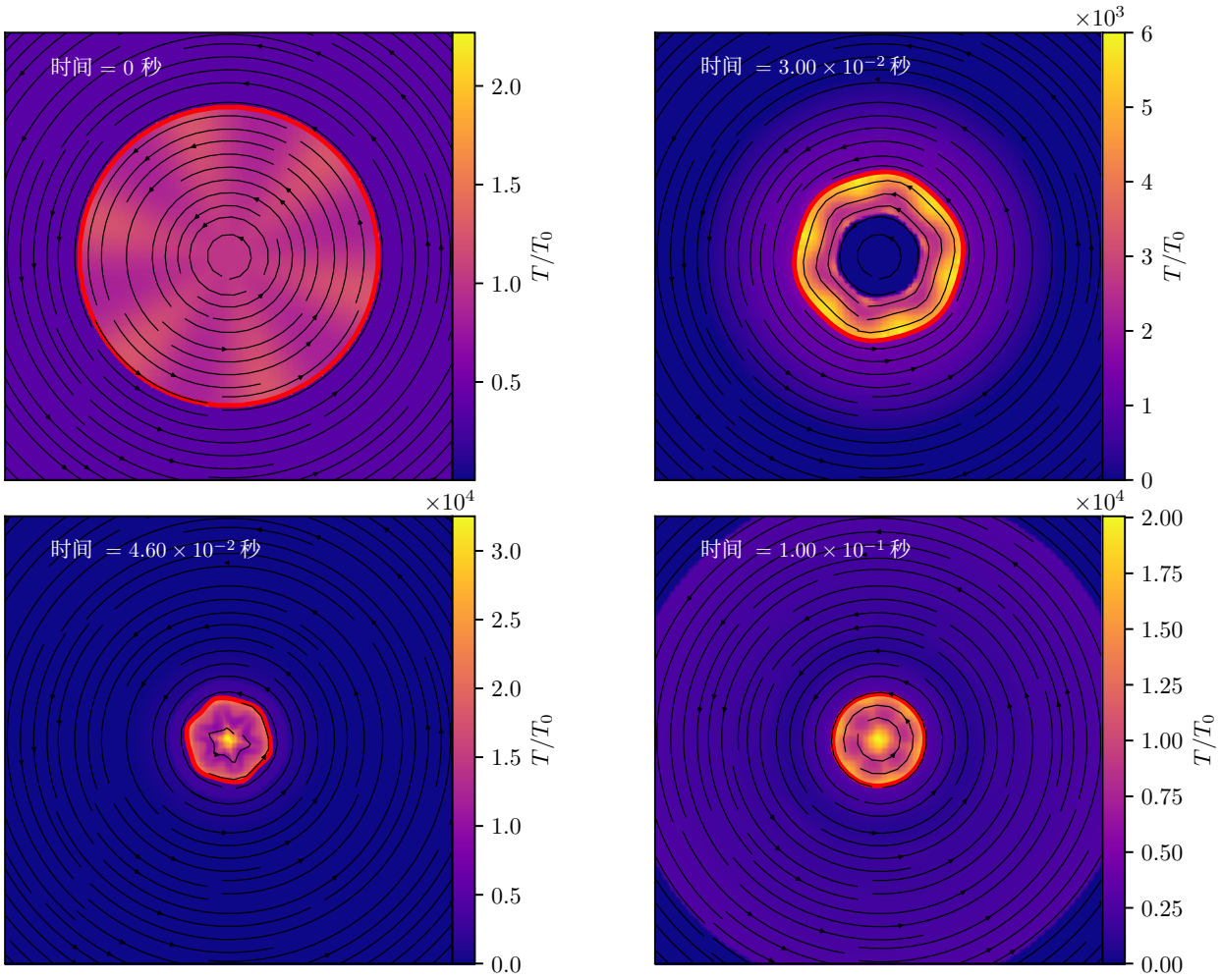


图15： 平行箍缩的磁压缩。数值模拟区域总面积为 32 厘米 × 32 厘米，采用 512 × 512 网格，但此处仅展示中央 12 厘米的区域，以突出压缩过程。

8 结论

我们提出了一种将移动嵌入边界引入电阻性磁流体力学方程有限体积约束输运解的方法。本文给出了单侧移动边界和固定边界，以及双侧固定边界和移动边界的结果。此外，我们目前仅介绍了适用于二维空间的方法。进一步扩展到三维应当较为直接，并将显著拓展这些技术的应用范围。令人欣慰的是，该方案的构建模块此前已在三维中得到开发：Forrer & Jeltsch (1998) 的切割单元法此前已结合非约束输运方法应用于三维感应方程（Lampugnani 等，2017，2018），而鬼流体法和水平集方法也已在三维中得到广泛发展（Osher 等人，2004）。第4节所述针对约束输运磁流体力学的扩展只需进行新的适配，主要是移除对 B_z 分量的特殊处理，并将其与磁场的 x 和 y 分量等同处理。对于具有显著轴对称性的系统，逻辑上为笛卡尔网格但几何上为非笛卡尔网格的网格（例如柱坐标网格）具有重要意义。

此处用于处理边界处连续性方程、动量方程和能量方程的底层方法，是 Forrer & Jeltsch (1998) 的切割单元法，该方法并非完全守恒。其他切割单元方法，例如通量重分配格式（Chern & Colella，1987），可以避免非守恒问题，但代价是增加了复杂性。

我们求解感应方程的方法是，使用界面两侧的电场来更新一个全局的 **B** 场，该场以底层网格中各面的平均值表示。这意味着磁场会跨界面发生一定的数值扩散；在某些情况下，如果所模拟的物理情形受到两相间电阻率巨大跃变的显著影响，这可能会造成问题。在实验中，我们还发现，可以在边界切割单元处应用约束输运更新，使每一相内部解的无散性质得以保持，但无法守恒两相界面处的磁通量。这样可以最大限度地减少数值扩散，但代价是界面两侧不匹配。能够同时实现这两个目标的切割单元法，将是对本项工作的重大推进

。具有与界面共形的面的移动非结构网格也能绕过这一难题，不过这会带来其他几项复杂因素和数值耗散来源。

要求边界处由虚单元反射得到的虚拟单元位于活动区域内，这限制了边界的曲率。不过，由于这一尺度与基础格式的模板长度相当，足以在这方面造成问题的边界特征很可能无法得到良好分辨，因此我们认为，这在实践中并非该方法的严重限制。

在聚变等离子体装置中，实践表明，本文所述格式的主要局限出现在以下问题中：一是界面运动处于强亚阿尔芬状态，但磁场会塑造材料界面；二是低等离子体贝塔值下的强激波流（强磁化流）。对于前一种情况，基础磁流体动力学格式在亚阿尔芬状态下的扩散率会使磁场平滑，其时间尺度短于磁场迫使界面改变形状所需的时间。对于后一种情况，磁流体动力学格式无法保证热能为正。这两项局限均源于所采用的基础磁流体动力学格式，是长期存在且广为人知的问题，在考虑多相流或含材料界面的流动之前便已出现。作为一种显式 Godunov 型格式，Stone & Gardiner (2009) 格式最适用于高马赫数流；然而，众所周知，这类格式在流动马赫数降低时表现不佳（例如 Dellacherie，2010）。为解决纯流体动力学问题中的低马赫数流动问题，已有研究提出了采用欧拉方程低马赫数修正的格式（Almgren 等，2006；Viallet 等，2011）以及低马赫数黎曼求解器格式（Miczek 等，2015；Barsukow 等，2017），而谱差分格式也展现出良好的前景（Velasco-Romero 与 Teyssier，2025）。Dematt´e 等（2024）以及 Boscheri 与 Thomann（2024）近期提出了适用于强磁化流的全马赫数格式；若将其用作类似本文所述方法的基础磁流体动力学格式，便可显著拓展该方法在亚阿尔芬流和强磁化流范围内的适用能力。已知幽灵流体方法（GFM；Fedkiw 等，1999）在界面处材料属性跃变过大时会产生非物理行为（例如参见 Bigdelou 等，2022）。因此，我们的约束输运-GFM耦合实现也继承了这一局限，但这并非我们提出的磁流体动力学方程求解新方法本身的局限。

致谢

本研究由美国能源部通过洛斯阿拉莫斯国家实验室提供支持。洛斯阿拉莫斯国家实验室由 Triad National Security, LLC 代表美国能源部下属的国家核安全管理局运营（合同编号：89233218CNA000001）。本研究获得加拿大政府通过其战略创新基金提供的资金支持（协议编号：811-811346）。资助方未参与研究设计、数据收集、分析与解释、报告撰写，也未参与决定是否提交本文发表。

参考文献

Al Salami, J. S. S. 2022年，博士论文，九州大学 Allaire, G., Clerc, S., & Kokh, S. 2002，《计算物理学杂志》，181，577，doi: 10.1006/jcph.2002.7143 Almgren, A. S., Bell, J. B., Rendleman, C. A., & Zingale, M. 2006，《天体物理学杂志》，637，922，doi: 10.1086/498426 Baer, M. R., & Nunziato, J. W. 1986，《国际多相流杂志》，12，861，doi: 10.1016/0301-9322(86)90033-9 Barsukow, W., Edelmann, P. V., Klingenberg, C., Miczek, F., & R¨opke, F. K. 2017，《科学计算杂志》，72，623–646，doi: 10.1007/ s10915-017-0372-4 Berger, M., & Giuliani, A. 2021，《计算物理学杂志》，428，109820，doi: 10.1016/j.jcp.2020.109820 Bigdelou, P., Liu, C., Tarey, P., & Ramaprabhu, P. 2022，《计算机与流体》，233，105250，doi: https://doi.org/10.1016/j.compfluid. 2021.105250 Borges, R., Carmona, M., Costa, B., & Don, W. S. 2008，《计算物理学杂志》，227，3191，doi: doi.org/10.1016/j.jcp.2007. 11.038 Boscheri, W., & Thomann, A. 2024，《科学计算杂志》，100，arXiv:2403.04517，doi: 10.1007/s10915-024-02606-1 Chern, I.-L., & Colella, P. 1987，《双曲守恒律的守恒前沿追踪方法》，技术报告 UCRL-97200，劳伦斯利弗莫尔国家实验室 Clarke, D. K., Salas, M. D., & Hassan, H. A. 1986，《美国航空航天学会杂志》，24，353，doi: 10.2514/3.9273 Corrado, M., & Sato, Y. 2022，Fluidika，7，349，doi: 10.3390/fluids7110349 Dellacherie, S. 2010，《计算物理学杂志》，229，978，doi: 10.1016/j.jcp.2009.09.044 Dematt´e, R., Farmakalides, A. A., Millmore, S., & Nikiforakis, N. 2024，《计算物理学杂志》，514，113229，doi: 10.1016/j.jcp. 2024.113229 Deshpande, S.S., Anumolu, L., & Trujillo, M. F. 2012，《计算科学与发现》，5，014016，doi: 10.1088/1749-4699/5/1/014016 Fedkiw, R. P., Aslam, T., & Xu, S. 1999，《计算物理学杂志》，154，393，doi: 10.1006/jcph.1999.6320 Forrer, H., & Jeltsch, R. 1998，《计算物理学杂志》，140，259，doi: 10.1006/jcph.1998.5891 Freidberg, J. P. 2014，《理想磁流体力学》（剑桥） Garc´ıa-Mart´ınez, P. L., & Farengo, R. 2009，《等离子体物理学》，16，082507，doi: 10.1063/1.3204639 Gottlieb, S., Ketcheson, D. I., & Shu, C.-W. 2009，《科学计算杂志》，38，251，doi: 10.1007/s10915-008-9239-z Howard, S., Reynolds, M., Froese, A., et al. 2024，《核聚变》，65，016029，doi: 10.1088/1741-4326/ad9033 Jin, K., Kumar, P., Vanka, S. P., & Thomas, B. G. 2016，《流体物理学》，28，093301，doi: 10.1063/1.4961561 Lampugnani, L. G., Garcia-Martinez, P. L., & Farengo, R. 2017，《等离子体物理学》，24，022501，doi: 10.1063/1.4975018 —. 2018，《等离子体物理学》，25，122513，doi: 10.1063/1.5066221 Marshall, J. 1960，《流体物理学》，3，134，doi: 10.1063/1.1705989

Miczek, F., R¨opke, F. K., & Edelmann, P. V. F. 2015，《天文学与天体物理学》，576，A50，doi: 10.1051/0004-6361/201425059 Mignone, A. 2014，《计算物理学杂志》，270，784，doi: 10.1016/j.jcp.2014.04.001 Miyoshi, T., & Kusano, K. 2005，《计算物理学杂志》，208，315，doi: 10.1016/j.jcp.2005.02.017 Noh, W. F. 1963，CEL：一种时变二维耦合欧拉-拉格朗日代码，技术报告 UCRL-7463，doi: 10.2172/4621975 Osher, S., Fedkiw, R., & Piechor, K. 2004，《应用力学评论》，57，B15，doi: 10.1115/1.1760520 Quirk, J. J., & Karni, S. 1996，《流体力学杂志》，318，129，doi: 10.1017/S0022112096007069 Samulyak, R., Du, J., Glimm, J., & Xu, Z. 2007，《计算物理学杂志》，226，1532，doi: 10.1016/j.jcp.2007.06.005 Schoenberg, K. F., Gerwin, R. A., Moses, R. W., Scheuer, J. T., & Wagner, H. P. 1998，《等离子体物理学》，5，2090，doi: 10.1063/1.872880 Sethian, J. A. 1999，《水平集方法与快速行进方法》（剑桥） Shu, C.-W. 2009，《SIAM评论》，51，82，doi: 10.1137/070679065 Stone, J. M., & Gardiner, T. 2009，《新天文学》，14，139，doi: 10.1016/j.newast.2008.06.003 Stone, J. M., Mullen, P. D., Fielding, D., et al. 2024，arXiv电子印本，arXiv:2409.16053，doi: 10.48550/arXiv.2409.16053 Subramaniam, V., Underwood, T. C., Raja, L. L., & Cappelli, M. A. 2018，《等离子体源科学与技术》，27，025016，doi: 10.1088/ 1361-6595/aaabec Sun, Z., Al Salami, J., Khodak, A., et al. 2023，《核聚变》，63，076022，doi: 10.1088/1741-4326/acd864 Suponitsky, V., Khalzov, I. V., & Avital, E. J. 2022，Fluidika，7，210，doi: 10.3390/fluids7070210 Sussman, M., & Fatemi, E. 1999，《SIAM科学计算杂志》，20，1165，doi: 10.1137/S1064827596298245 Tancetti, A., Ribeiro, C., Howard, S. J., et al. 2025，《核聚变》，65，036043，doi: 10.1088/1741-4326/adb8fb Toro, E. F. 1997，《黎曼求解器与流体动力学数值方法》（柏林，海德堡：施普林格·柏林·海德堡），doi: 10.1007/ 978-3-662-03490-3 Velasco-Romero, D. A., & Teyssier, R. 2025，《皇家天文学会月报》，537，2387，doi: 10.1093/mnras/staf133 Viallet, M., Baraffe, I., & Walder, R. 2011，《天文学与天体物理学》，531，A86，doi: 10.1051/0004-6361/201016374 Wurden, G. A., Hsu, S. C., Intrator, T. P., et al. 2016，《聚变能源杂志》，35，69，doi: 10.1007/s10894-015-0038-x Zhang, J., & Ni, M.-J. 2014，《计算物理学杂志》，270，345，doi: 10.1016/j.jcp.2014.03.030