arXiv:2601.04105v1 [math.AP] 7 Jan 2026

共形 C_0-半群中的时间重参数化与混沌动力学

Mohamed Khoulane[1], AzizEl Ghazouani[1*], M'ha medElOmari[1]1*应用数学与科学计算实验室，苏丹穆莱·斯利曼大学，邮政信箱 532，贝尼迈拉勒，23000，摩洛哥。

通讯作者。电子邮箱：aziz.elghazouani@usms.ac.ma；其他作者：khoulane1997@gmail.com；m.elomari@usms.ma；

摘要

共形导数提供了一种具有分数阶微积分形式、但仍保持局部性，并可通过带有显式权的经典导数简单表示的微积分框架。本文从系统的算子理论视角出发，表明共形时间演化本质上是由非线性时钟观测到的经典 C_0-半群。我们引入共形时间映射$\psi(t) = t^\alpha/\alpha$，并证明每个 C_0–α-半群$\{T_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ 都可写为 $T_\alpha(t) = T(\psi(t))$，其中的经典 C_0-半群$\{T(s)\}_{s\geq 0}$唯一确定，且其生成元在公共定义域上一致。这种对应关系实现了温和解的一一对应转移，并表明基于轨道的线性动力学在共形重参数化下保持不变。特别地，α-超循环性和 α–混沌与相应经典半群的通常概念一致。因此，我们得到混沌的 Desch–Schappacher–Webb 谱判据的共形版本。我们还将分析置于共形勒贝格空间 $L^{p,\alpha}$这一自然函数空间设定中，并利用其与标准 L^p 空间之间明确的等距同构，从而能够无损地传递估计和谱论论证。这些结果阐明了共形模型中的哪些动力学现象确属新现象，哪些则是通过非线性时间变换从经典半群动力学继承而来。

关键词： 共形微积分；共形 C_0-半群；非线性时间变换；Desch–Schappacher–Webb 判据；超循环性；Devaney 混沌

数学主题分类： 47D06 , 47A10 , 37D45 , 26A33 , 35K57

1 引言

共形微积分被提出作为分数阶微分的一种替代方法，旨在保留经典微积分的局部特性，同时允许引入分数阶参数。与积分型分数阶导数不同，共形导数逐点作用，并可简洁地表示为普通导数乘以显式的权；例如，参见 [7–9]。同样，共形积分可以写成关于加权测度的标准勒贝格积分。局部性与解析简洁性的结合，使共形算子在需要模拟时间重标度效应、而又不引入记忆效应或非局部现象的情形下颇具吸引力；这一差异在 [11]中有所强调。

从演化方程的角度来看，没有记忆效应这一点强烈表明，共形动力学应当与强连续半群的经典理论密切相关。然而，这种联系的确切性质，尤其是在生成元、温和解和长期动力学层面，尚未得到充分阐明。本文的主要目标是建立一个系统的算子论框架，使这种关系明确化，并研究线性动力学性质，尤其是超循环性和混沌，在共形时间演化下的表现。

时间重新参数化作为指导原则。 令 $\alpha \in (0,1]$ 并考虑非线性时间变换

$$\psi(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha}, \qquad t \geq 0.$$

本文提出的一个核心思想是，共形时间演化可以理解为沿着非线性时钟 $s = \psi(t)$观察到的经典演化。更确切地说，给定一个作用于巴拿赫空间 X 上的 C_0–α–半群 $\{T_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$，我们将其与以下族相关联：

$$T(s) := T_\alpha\big((\alpha s)^{1/\alpha}\big), \qquad s \geq 0,$$

并证明 $\{T(s)\}_{s\geq 0}$ 构成一个经典 C_0–半群，满足

$$T_\alpha(t) = T\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right).$$

在此框架下，α– $\{T_\alpha(t)\}$ 的生成元与 $\{T(s)\}$ 的生成元在一个公共定义域上重合，相应的温和解通过相同的变量替换联系起来。这建立了柔性演化问题与经典演化问题之间一种规范且可逆的对应关系。

函数框架与共形勒贝格空间。阶数为 $\alpha \in (0,1)$ 的共形积分自然涉及权 $t^{\alpha-1}$，并导出加权测度 $d\mu_\alpha(t) = t^{\alpha-1}dt$。这促使我们引入共形勒贝格空间

$$L^{p,\alpha}(I) = \Big\{ f : \int_I |f(t)|^p \, t^{\alpha-1} dt < \infty \Big\},$$

与经典加权 L^p 空间相一致。本研究证明的一项关键结构性结果是，这些空间通过非线性变量替换 L^p 显式等距于标准 $s = t^\alpha$空间，这与分数阶和时间尺度情形中的相关观察一致 [10]。这一识别使我们能够以清晰明了的方式，将经典框架中的范数估计、对偶性论证和谱性质迁移至分数阶框架，并与时间重参数化观点完全兼容。

混沌动力学与谱判据。 线性半群的线性混沌研究，即按照 Devaney 的定义，将超循环性与稠密的周期点集视为二者共存，已在算子理论中得到充分发展。该理论的基石之一是 Desch–Schappacher–Webb 混沌谱判据，它利用与点谱 [3] 相关的特征向量解析族产生混沌动力学。由于保形半群与经典半群通过关系 $T_\alpha(t) = T(\psi(t))$ 相互联系，因此自然可以预期，基于轨道的动力学性质在保形时间变换下保持不变。我们通过证明 Desch–Schappacher–Webb 框架中所用辅助动力学集合的不变性，并推导出该判据的保形版本，严格证实了这一预期：在对 α–生成元施加通常的谱假设时，一个 C_0–α–半群表现出 α–混沌。因此，保形时间中的混沌行为与经典情形一样，都由相同的谱机制所支配。

阐释与范围。 本文的结果有助于厘清共形微积分在更广泛的分数阶模型体系中的概念定位。具体而言，研究表明，与真正的非局部 дроб数阶导数不同， [5, 6], 共形导数不会通过记忆效应产生新的动力学特征。相反，观察到的复杂性源于经典算子与非线性时间或空间尺度之间的相互作用。这一观点解释了为何共形演化的许多定性性质与经典半群相似，并为构造和分析实例提供了有效策略。

论文结构。 第2 节回顾共形积分与微分的基本概念，并介绍 C_0–α–半群及其生成元。第3 节建立共形勒贝格空间理论，并证明这些空间与经典 L^p 空间之间存在明确的等距等价。第4 节探讨时间重参数化原理及其对微分、积分、生成元和温和解的影响。第5 节分析共形时间演化下的线性动力学，将超循环性和混沌与经典理论进行比较，并提出共形 Desch–Schappacher–Webb 判据。最后，第6节给出示例性算子模型，说明抽象理论如何应用于具体的共形演化方程。

2 预备框架

本节汇总全文将用到的基本概念与约定。我们的阐述有意保持简洁，并着重介绍对后续算子理论构造至关重要的共形微积分内容

。一个关键点是，共形算子在本质上仍是局部的；对于光滑函数，它们可以改写为带有适当权函数的经典导数或积分。

2.1 共形积分与微分

我们从共形积分的概念开始，它自然地在 $\mathbb{R}_+$ 上诱导出底层测度。

定义 1（共形积分）设 $\alpha \in (0,1]$ 且 $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ 是一个可测函数。对于 $0 \le a < t$，阶数为 α 的共形积分定义为

$$(\mathcal{I}_\alpha g)(t) := \int_a^t g(\xi)\, \xi^{\alpha-1}\, d\xi,$$

只要上述积分存在。

该定义提示我们引入加权测度

$$d\mu_\alpha(\xi) := \xi^{\alpha-1}\, d\xi,$$

除非另有说明，$\mathbb{R}_+$ 上的所有积分均相对于该测度理解。相应的微分概念如下。

定义 2 (共形导数**)** 设 $\alpha \in (0,1]$ 且设 $v\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$。阶数为 α 的函数在 $t > 0$ 处的共形导数定义为

$$\mathcal{D}_t^\alpha v(t) := \lim_{h \to 0} \frac{v\big(t + h\, t^{1-\alpha}\big) - v(t)}{h},$$

若极限存在。当 $\alpha = 1$时，此定义便化为经典一阶导数。

以下表示性质明确体现了共形微分的局部性。

命题 1 *Assume that $v \in C^1((0,\infty))$ and $\alpha \in (0,1]$. Then, for every $t > 0$,*

$$\mathcal{D}_t^\alpha v(t) = t^{1-\alpha}\, \frac{dv}{dt}(t).$$

因此，共形微分表现为加权经典导数。尤其是，与积分型的非局部 дроб数阶导数不同，它不会产生记忆效应。这一结构特征对于分析相关的演化算子至关重要。

2.2 协调半群

共形微积分还引出了单参数半群的广义概念，该概念通过对时间进行非线性重标度而得到。

定义 3 （协调 α–半群）设 $\alpha \in (0, a]$ 对于某个 $a > 0$，并设 X 为一个巴拿赫空间。若有界线性算子族 $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$满足以下条件，则称其为 α–*semigroup*：

1. $S(0) =$Id，即 X上的恒等算子；2. 对所有 $r, q \geq 0$,

$$S\big((r+q)^{1/\alpha}\big) = S\big(r^{1/\alpha}\big)\, S\big(q^{1/\alpha}\big).$$

当 $\alpha = 1$时，上述条件与经典强连续半群的条件一致。

Example 1 设 $B \in \mathcal{L}(X)$ 为一个有界算子，并定义

$$S(t) = \exp\big(2\, t^{1/2} B\big), \qquad t \geq 0.$$

于是 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 构成一个-12–半群。事实上,

1. $S(0) = \exp(0) =$ Id；2. 对所有 $r, q \geq 0$,

$$S\big((r+q)^2\big) = \exp\big(2(r+q)B\big) = \exp(2rB)\exp(2qB) = S(r^2)S(q^2).$$

关于协调分数阶指数函数及其级数表示的更多性质，可参见相关文献。

Example 2 设 $X = C([0,\infty))$ 配备上确界范数。对于 $f \in X$，定义

$$(S(t)f)(x) = f\big(x + 2\, t^{1/2}\big), \qquad x, t \geq 0.$$

于是 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 是作用于 X 上的有界线性算子 {style id='4'>12</style}–半群。

定义 4 (C_0–α–半群) 若一个 α–半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 满足以下条件，则称其为 C_0–α–*semigroup*

$$\lim_{t\to 0^+} S(t)x = x \quad \text{for every } x \in X.$$

$S(t)$ 在 $t = 0$ 处的共形导数定义了其无穷小生成元。更确切地说， α–生成元 $\mathcal{A}$ 定义为

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X \;:\; \lim_{t\to 0^+} \mathcal{D}_t^{\alpha} S(t)x \text{ exists} \right\}, \qquad \mathcal{A}x = \lim_{t\to 0^+} \mathcal{D}_t^{\alpha} S(t)x.$$

Remark 1 在极限情形 $\alpha = 1$ 下，可以恢复经典的 C_0–半群理论及其生成元。

3 共形勒贝格空间

保形时间重参数化所产生的结构性结果之一，是积分表达式中系统性地出现权 $t^{\alpha-1}$，其中 $\alpha \in (0,\ 1)$。事实上，第 2 节中引入的共形积分可以写成

$$(\mathcal{I}_\alpha f)(t) = \int_0^t f(s)\, s^{\alpha-1}\, ds,$$

这自然引出了考虑适用于加权测度的函数空间。

$$d\mu_\alpha(t) := t^{\alpha-1}\, dt \qquad \text{on } \mathbb{R}_+.$$

此类空间为共形演化问题中涉及的范数估计、对偶性论证和算子理论考量提供了恰当的框架。

3.1 共形勒贝格空间

定义 5（共形勒贝格空间）设 $I \subset \mathbb{R}_+$ 为一个区间，且 $\alpha \in \in(0,1)$。对于 $1 \le p < \infty$，我们定义共形勒贝格空间

$$L^{p,\alpha}(I) := \Big\{ f : I \to \mathbb{C} \text{ measurable} ;\ \int_I |f(t)|^p\, t^{\alpha-1}\, dt < \infty \Big\},$$

赋予范数

$$\|f\|_{p,\alpha} = \Big(\int_I |f(t)|^p\, t^{\alpha-1}\, dt \Big)^{1/p}.$$

这些空间与经典加权勒贝格空间相同，并具有其主要的泛函性质。

Remark 2（加权表述）空间 $L^{p,\alpha}(I)$ 正是加权空间 $L^p(I, t^{\alpha-1}dt)$。由于权 $t^{\alpha-1}$ 对每个 $\alpha > 0$ 都在 $(0,\infty)$ 上局部可积，相应的测度 μ_α 在任意区间 $I \subset \mathbb{R}_+$ 上都是 σ– 有限的。因此，勒贝格积分理论的标准结果均可直接适用，包括 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式、光滑函数的稠密性以及完备性。

共形勒贝格空间的一个关键特征是，通过显式的变量替换，它们与经典 L^p 空间等距等价。

命题 2 *Let $I = (0,T)$ with $0 < T \le \infty$ and let $\alpha \in (0,1)$. Define the transformation $\Phi : (0,T) \to (0,T^\alpha)$ by*

$$\Phi(t) = t^\alpha.$$

Then the mapping

$$U : L^{p,\alpha}(0,T) \longrightarrow L^p(0,T^\alpha), \qquad (Uf)(s) = f\big(s^{1/\alpha}\big),$$

is an isometric isomorphism.

Proof 使用变量替换 $s = t^\alpha$，我们得到

$$\int_0^T |f(t)|^p \, t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{T^\alpha} \left|f(s^{1/\alpha})\right|^p ds.$$

除去可吸收到范数定义中的无关归一化因子 α^{-1} 外，这表明 $\|Uf\|_{L^p(0,T^\alpha)} = \|f\|_{p,\alpha}$。满射性和线性显然成立。 □

Remark 3 命题 2 表明，共形勒贝格空间并未引入新的可积性现象，而是在函数空间层面编码了非线性时间重参数化。这一观察与共形微积分的局部性质相符，并且在相关研究中也有所强调，包括时间尺度上的分数阶 Sobolev 空间 [10]。

命题 3 *For every $1 \le p < \infty$ the space $\left(L^{p,\alpha}(I), \|\cdot\|_{p,\alpha}\right)$ is a* （巴拿赫性质），，().
Banach space.

Proof 由于 $L^{p,\alpha}(I)$ 与加权空间 $L^p(I, \mu_\alpha)$ 一致，且测度 μ_α 是 σ–有限的，因此完备性可由经典的 L^p 空间完备性推出。□

因此， $\{L^{p,\alpha}\}_{1\le p<\infty}$ 为共形积分和经时间重标度的演化方程提供了自然且稳健的函数空间设定。特别是，与经典勒贝格空间的等距等价使我们能够将许多解析工具直接应用于共形框架。

4 时间重参数化与酉同构

本节汇集了基本的对应关系，使我们能够通过时钟变换，将共形对象转化为经典对象。全文中，我们固定 $\alpha \in (0, 1]$ 并引入共形时间映射

$$\psi : [0, \infty) \to [0, \infty), \qquad \psi(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha}.$$

关键在于， ψ 是一个双射；用变量 $s = \psi(t)$表示时，共形微分和共形积分便成为经典运算。

4.1 典范重参数化

定理 4 *Let $\alpha \in (0, 1]$ and let* （通过共形时钟的典范分解）（，：）
$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ be arbitrary. Define

$$\psi(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha} \qquad (t \ge 0).$$

Then there exists a 唯一的 *function $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ such that*

$$f(t) = g\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \qquad \text{for all } t \ge 0.$$

Moreover, g is explicitly given by

$$g(s) = f\big((\alpha s)^{1/\alpha}\big) \qquad \text{for all } s \ge 0.$$

*Proof*步骤 1： ψ是……上的双射 $[0,\infty)$。 函数 $t \mapsto t^{\alpha}$ 在 $[0,\infty)$ 上连续且严格递增，其中 $\alpha \in (0,1]$。乘以 $1/\alpha > 0$ 可保持单调性和连续性，因此 ψ 连续且严格递增。由于 $\psi(0) = 0$ 且 $\psi(t) \to \infty$ （当 $t \to \infty$时），值域为 $[0,\infty)$，因此 ψ 是双射。

步骤 2：求逆函数。解出 $s = t^{\alpha}/\alpha$ 得到 $t = (\alpha s)^{1/\alpha}$，因此

$$\psi^{-1}(s) = (\alpha s)^{1/\alpha} \qquad (s \geq 0).$$

步骤 3： g**的存在性与唯一性**。定义 $g := f \circ \psi^{-1}$，即 $g(s) = f((\alpha s)^{1/\alpha}$。于是

$$g(\psi(t)) = f(\psi^{-1}(\psi(t))) = f(t) \qquad (t \geq 0),$$

因此 $f = g \circ \psi$。若 $\tilde{g}$ 也满足 $f = \tilde{g} \circ \psi$，则对每个 $s \geq 0$，

$$\tilde{g}(s) = \tilde{g}(\psi(\psi^{-1}(s))) = f(\psi^{-1}(s)) = g(s),$$

因此 $\tilde{g} = g$。 □

4.2 共形可微性即经典可微性

定理 5（通过时间变换的共形导数） *Let* $\alpha \in (0,1]$ *and let* $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$. *Define*

$$\psi(t) = \frac{t^{\alpha}}{\alpha} \qquad (t > 0), \qquad g(s) = f\big((\alpha s)^{1/\alpha}\big) \qquad (s > 0).$$

Then, for each $t > 0$ *with* $s = \psi(t)$ *the following are equivalent:*

1. f 在 t 处关于 α–可微，即

$$D_t^{\alpha} f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\big(t + \varepsilon t^{1-\alpha}\big) - f(t)}{\varepsilon} \quad \textit{exists};$$

2. g 在 s 处经典可微。

Moreover, whenever these conditions hold,

$$D_t^{\alpha} f(t) = g'\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right).$$

*Proof*固定 $t > 0$，并令 $s = \psi(t) = t^{\alpha}/\alpha$。考虑 $t_{\varepsilon} = t + \varepsilon t^{1-\alpha}$，并定义

$$\alpha s(\varepsilon) = \psi(t_{\varepsilon}) - \psi(t) = \frac{(t + \varepsilon t^{1-\alpha})^{\alpha} - t^{\alpha}}{\alpha}.$$

记 $t + \varepsilon t^{1-\alpha} = t(1 + \varepsilon t^{-\alpha})$，得到

$$\alpha s(\varepsilon) = \frac{t^{\alpha}}{\alpha}\Big[(1 + \varepsilon t^{-\alpha})^{\alpha} - 1\Big].$$

以 $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + o(x)$ 作为 $x \to 0$，结合 $x = \varepsilon t^{-\alpha}$，我们推得

$$\alpha s(\varepsilon) = \varepsilon + o(\varepsilon) \qquad (\varepsilon \to 0),$$

因此 $\alpha s(\varepsilon) \to 0$ 以及 $\alpha s(\varepsilon)/\varepsilon \to 1$。

由于 $f = g \circ \psi$，我们有

$$\frac{f(t_{\varepsilon}) - f(t)}{\varepsilon} = \frac{g(s + \alpha s(\varepsilon)) - g(s)}{\varepsilon} = \frac{g(s + \alpha s(\varepsilon)) - g(s)}{\alpha s(\varepsilon)} \cdot \frac{\alpha s(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

如果 $D_t^\alpha f(t)$ 存在，那么左边收敛，第二个因子趋于 1，因此第一个因子收敛，而这恰好意味着 $g'(s)$ 存在；此外，二者的极限相同。反过来，如果 $g'(s)$ 存在，那么第一个因子收敛于 $g'(s)$，第二个因子趋于 1，因此相容差商收敛，且其极限等于 $g'(g' \; t^\alpha/\alpha$ □)。由此得到 $D_t^\alpha f(t)$（）。

4.3 共形积分的变量替换

定理 6 (共形积分的变量替换) *Let* $\alpha \in (0,1]$ *and let* $f:[0,\infty)$ $\to \mathbb{C}$ *be a measurable function. Fix* $0 \le a < x$ *and define*

$$\psi(\tau) = \frac{\tau^\alpha}{\alpha}, \qquad g(s) = f\big((\alpha s)^{1/\alpha}\big).$$

Then the following change-of-variables formula holds:

$$\int_a^x f(\tau)\,\tau^{\alpha-1}\,d\tau = \int_{\psi(a)}^{\psi(x)} g(s)\,ds.$$

Equivalently, for every $x \ge a$*,*

$$(I_x^\alpha f)(x) = \int_{\frac{a^\alpha}{\alpha}}^{\frac{x^\alpha}{\alpha}} g(s)\,ds.$$

*Proof*代换 $s = \psi(\tau) = \tau^\alpha/\alpha$ 在 $[a,x]$上是允许的，因为 ψ是严格递增的。此外， $\psi'(\tau) = \tau^{\alpha-1}$，因此 $ds = \tau^{\alpha-1}\,d\tau$。积分上下限变为 $s = \psi(a)$ 和 $s = \psi(x)$。注意到对于 $\tau \ge 0$， $g(\psi(\tau)) = f(\tau)$，我们得到

$$\int_a^x f(\tau)\,\tau^{\alpha-1}\,d\tau = \int_{\psi(a)}^{\psi(x)} f(\psi^{-1}(s))\,ds = \int_{\psi(a)}^{\psi(x)} g(s)\,ds,$$

由此完成证明 f. □

命题 7 $L^{p\ \alpha}\ \mathbb{R}_+$ $L^p\ 0\ \infty$ *Let* $\alpha \in\ 0\ 1]$ *and*(,( ) 与 (,) 之间的等距同构) (, $1 \le p < \infty$. *Define the weighted measure* $d^\alpha x = x^{\alpha-1}dx$ *and the space*

$$L^{p,\alpha}(\mathbb{R}_+) = \Big\{ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C} \ \text{measurable} : \int_0^\infty |f(x)|^p\, x^{\alpha-1} dx < \infty \Big\}.$$

Set $\xi = x^\alpha$ *and define the operator*

$$(U_p f)(\xi) := \alpha^{-1/p} f(\xi^{1/\alpha}), \qquad \xi > 0.$$

Then $U_p:\ L^{p,\ \alpha}(\mathbb{R}_+) \to L^p(0,\ \infty)$ *is an isometric isomorphism Its inverse is given by*

$$(U_p^{-1} g)(x) = \alpha^{1/p} g(x^\alpha), \qquad x > 0.$$

Moreover, when $p = 2$*, the operator* U_2 *is unitary.*

Proof 通过变量替换 $\xi = x^\alpha$，我们有 $d\xi = \alpha x^{\alpha-1}dx$，因此 $x^{\alpha-1}dx = \alpha^{-1}d\xi$。所以，

$$\|f\|_{p,\alpha}^p = \int_0^\infty |f(x)|^p x^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty |f(\xi^{1/\alpha})|^p d\xi = \int_0^\infty |\alpha^{-1/p} f(\xi^{1/\alpha})|^p d\xi = \|U_p f\|_{L^p}^p.$$

因此， U_p 是一个等距映射。对于 $g \in L^p(0,\ \infty)$，定义 $f(x) = \alpha^{1/p} g(x^\alpha)$。于是 $U_p f = g$ 并且

$$\|f\|_{p,\alpha}^p = \int_0^\infty \alpha |g(x^\alpha)|^p x^{\alpha-1}dx = \int_0^\infty |g(\xi)|^p d\xi = \|g\|_{L^p}^p,$$

这表明 U_p 是满射，且 U_p^-也是等距的。最后，当^1 $p = 2$时，同样的计算表明内积保持不变，因此 U_2 是酉的。□

4.4 相容温和解

设 X 为巴拿赫空间，并设 $\{T_\alpha(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ 是一个 C_0–α–半群。将这一族与经典半群理论联系起来的一种自然方式是引入一个新的时间变量

$$s = \frac{t^\alpha}{\alpha},$$

并定义相应的算子族为

$$T(s) := T_\alpha\big((\alpha s)^{1/\alpha}\big), \qquad s \geq 0.$$

这种构造使我们能够将共形演化理解为通过非线性时间尺度观测到的经典演化。

定义 6（温和解）

1. 若映射 $x:[0,\infty) \to X$ 由下式给出，则称其为相容柯西问题的温和解

$$x^{(\alpha)}(t) = Ax(t), \qquad x(0) = x_0,$$

若其由下式给出

$$x(t) = T_\alpha(t)x_0, \qquad t \geq 0,$$

其中 A表示半群 $T_\alpha(t)\}$ 的 α–生成元。 {

2. 若映射 $y:[0,\infty) \to X$ 可表示为下式，则称其为经典柯西问题的温和解

$$y'(s) = By(s), \qquad y(0) = y_0,$$

若它可表示为

$$y(s) = T(s)y_0, \qquad s \geq 0,$$

其中 B 是 C_0–半群 $\{T(s)\}$ 的无穷小生成元。

引理 1（时间重新参数化下生成元的相等性） *Let $\{T_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ be a C_0–α–semigroup on X and define $T\ s\ = T_\alpha\ \ \alpha s\ ^{1/\alpha}$ for $s \geq 0$. If A and B denote respectively ( ) (( )) ( ) ( ), the α–generator of $\{T_\alpha\ t\ \}$ and the generator of $\{T\ s\ \}$ then*

$$D(A) = D(B) \quad \text{and} \quad Ax = Bx \qquad \text{for all } x \in D(A).$$

*Proof*我们首先注意到，$\{T(s)\}_{s\geq 0}$是一个 C_0–半群。事实上，$T(0) = I$，并且对于 $s, r \geq 0$,

$$T(s+r) = T_\alpha\big((\alpha(s+r))^{1/\alpha}\big) = T_\alpha\Big(\big((\alpha s)^{1/\alpha}\big)^\alpha + \big((\alpha r)^{1/\alpha}\big)^\alpha\Big)^{1/\alpha} = T(s)T(r),$$

由于 $\{T_\alpha(t)\}$ 满足 α–半群性质，由（αs）$^{1/\alpha} \to 0$ 可知，当 $s \to 0^+$ 时，$s = 0$ 处的强连续性成立；这源于 $\{T_\alpha(t)\}$ 在原点处的强连续性。

令 $x \in X$ 并设 $t = (\alpha s)^{1/\alpha}$。则

$$\frac{T(s)x - x}{s} = \frac{T_\alpha(t)x - x}{t^\alpha/\alpha}.$$

因此，左边的极限存在，当且仅当右边的极限存在；在这种情况下，两个极限相等。根据定义，这两个极限分别刻画生成元 B 和 A。这就证明了该结论。□

命题 8 （a C_0–α–半群的重新参数化表示） *Let* $\{T_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ *and*$\{T(s)\}_{s\geq 0}$ *be related by* $T(s) = T_\alpha((\alpha s)^{1/\alpha})$. *Then the following identity holds:*

$$T_\alpha(t) = T\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right), \qquad t \geq 0.$$

Proof 对固定的 $t \geq 0$，令 $s = t^\alpha/\alpha$。则

$$T(s) = T_\alpha\big((\alpha s)^{1/\alpha}\big) = T_\alpha(t),$$

由此得到所需公式。 □

Remark 4 （时间变换与温和解的对应关系）命题8 表明，每个 C_0–α–半群都可以看作沿非线性时间尺度演化的经典 C_0–半群 $s = t^\alpha/\alpha$。

这种变量替换建立了温和解之间的一一对应关系。若 $x(t) = T_\alpha(t)x_0$ 是相容问题的温和解，则

$$y(s) := x\big((\alpha s)^{1/\alpha}\big) = T(s)x_0$$

是经典演化方程的温和解。反之，若 $y(s) = T(s)y_0$，则

$$x(t) := y\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right) = T_\alpha(t)y_0$$

是保形时间下对应的温和解。

5 保形时间重参数化下的线性动力学

设 X 是可分巴拿赫空间，且设 $\alpha \in (0, 1]$。我们考虑一个 C_0–α–半群$\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$，其定义见第2节。在共形动力学中，一个核心观察是，这类族可以解释为在非线性时间变换下演化的经典 C_0–半群。

为精确表述这一点，我们引入递增同胚

$$\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty), \qquad \varphi(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha},$$

并定义相应的经典半群 $\{U(s)\}_{s\geq 0}$ 如下

$$U(s) := S\big((\alpha s)^{1/\alpha}\big), \qquad s \geq 0.$$

等价地，

$$S(t) = U(\varphi(t)), \qquad t \geq 0. \tag{1}$$

这一恒等式使人们能够在顺应阶和经典情形之间传递动力学性质。

5.1 超循环性与混沌：保形动力学与经典动力学

定义 7 （α–超循环性与 α–混沌）

1. 半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 称为 α–超循环的，如果存在 $x \in X$ 使得轨道 $\{S(t)x : \ t \geq 0\}$ 在 X中稠密。2. 若其为 α–混沌的，则它是 α–超循环的，且 α–周期点的集合

$$X_p^\alpha := \{x \in X : \ \exists t > 0 \text{ such that } S(t)x = x\}$$

在 X 中稠密。

遵循 Desch、Schappacher 和 Webb 引入的经典框架，我们也定义集合

$$X_0^\alpha := \{x \in X : \ \lim_{t\to\infty} S(t)x = 0\},$$

and

$$X_\infty^\alpha := \Big\{x \in X : \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in X, \ t > 0 \text{ with } \|y\| < \varepsilon \text{ and } \|S(t)y - x\| < \varepsilon\Big\}.$$

引理 2 *Let* $\{S\ t\}$ *and* (共形时间变换下动力学集合的不变性) $\{U\ s\}$ *be related by* 1 . *Then*

$$X_0^\alpha = X_0, \qquad X_\infty^\alpha = X_\infty, \qquad X_p^\alpha = X_p,$$

where X_0 X_∞ *and* X_p *denote the corresponding sets associated with the classical* C_0- , (), *semigroup* $\{U\ s\}_{s\geq 0}$. *Consequently* $\{S\ t$ () $\}$ *is* α*–hypercyclic (resp.* α*–chaotic) if and only if* ( ) $\{U\ s\}$ *is hypercyclic (resp. chaotic).*

Proof 映射 φ 是从 $[0,\infty)$ 到其自身的连续严格递增双射，其逆函数为$\varphi^{-1}(s) = (\alpha s)^{1/\alpha}$。利用恒等式 $S(t) = U(\varphi(t))$，可以直接验证，以 t 表示的收敛、逼近和周期性性质等价于以 $s = \varphi(t)$ 表示的性质。特别地，轨道集相同:

$$\{S(t)x : \ t \geq 0\} = \{U(s)x : \ s \geq 0\},$$

由此可得结论。 □

5.2 无穷小生成元与共形时钟

引理 3 *Let* A *be the* α*–generator of the* C_0*–*α*–semigroup* $\{S($ $t\ \}$ *and let* B *be the generator* $)()$ *of the associated classical semigroup* $\{U_s\}$. *Then* $D(A) = D(B)$ *and* $Ax = Bx$ *for all* $x \in D(A)$.

Proof 对于 $s>0$，令 $t=(\alpha s)^{1/\alpha}$。根据定义，

$$\frac{U(s)x-x}{s}=\frac{S(t)x-x}{t^{\alpha}/\alpha}.$$

令 $s\to 0^{+}$（从而令 $t\to 0^{+}$），我们看到这两个极限同时存在且相等。这证明了定义域和生成元相同。□

5.3 保形时间中的 Desch–Schappacher–Webb 判据

定理 9 *Let X be separable and let $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ be a C_0–α–semigroup on X with α–generator A. Assume that there exist:* （Desch–Schappacher–Webb 判据，用于 C_0–半群）（）

- 一个开集 $V\subset\sigma_p(A)$，使得 $V\cap i\mathbb{R}\neq\emptyset$;
- 对于每个 $\lambda\in V$，存在满足 $Ax_\lambda=\lambda x_\lambda$ 的非零向量 $x_\lambda\in X$；
- 对于每个 $\phi\in X^{*}$，映射 $\lambda\mapsto\langle\phi,\ x_\lambda\rangle$ 在 V 上是解析的；
- 且除非 $\phi=0$，此映射并非恒等于零。

Then $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ is α–chaotic, and in particular α–hypercyclic.

Proof 考虑经典半群 $U(s)=S((\alpha s)^{1/\alpha})$。根据引理 3，$\{U(s)\}$ 的生成元与 A相同。因此，上述假设恰好满足经典 Desch–Schappacher–Webb 判据的要求。由此可知，$\{U(s)\}$具有混沌性。根据引理 2，混沌性在保形时间重参数化下保持不变，因此 $\{S(t)\}$ 是 α–混沌的。□

Remark 5 恒等式 $S(t)=U(t^{\alpha}/\alpha)$ 表明，协调半群并不产生新的轨道结构，而是通过非线性时间尺度重新诠释经典 C_0–半群。因此，超循环性、拓扑传递性和周期点的稠密性等基于轨道的动力学性质在保形时间变换下保持不变。

6 共形勒贝格空间上的平移半群

固定 $\alpha\in(0,1]$。本节中，我们始终在正半轴 $\mathbb{R}_{+}=(0,\ \infty)$ 上讨论，并赋予其保形测度

$$d^{\alpha}x:=x^{\alpha-1}\,dx,$$

并使用前文引入的共形勒贝格空间：

$$L^{p,\alpha}(\mathbb{R}_{+})=\Big\{f:\mathbb{R}_{+}\to\mathbb{C}\ \text{measurable}:\ \int_0^{\infty}|f(x)|^{p}\,d^{\alpha}x<\infty\Big\},\qquad 1\leq p<\infty.$$

特别地，我们设

$$X^{\alpha}:=L^{p,\alpha}(\mathbb{R}_{+}),\qquad \|f\|_{p,\alpha}^{p}=\int_0^{\infty}|f(x)|^{p}\,x^{\alpha-1}\,dx.$$

关于 $x>0$ 的共形导数记为 ∂_x^α，定义为

$$\partial_x^\alpha u(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{u\big(x+\varepsilon x^{1-\alpha}\big)-u(x)}{\varepsilon},$$

只要极限存在。对于 $u \in C^1((0,\infty))$，共形导数的局部性给出了如下表示

$$\partial_x^\alpha u(x) = x^{1-\alpha}u'(x), \qquad x>0. \tag{2}$$

6.1 共形空间重参数化与等距传递

在 X^α 中，朴素平移 $(S(t)f)(x) = f(x+t)$ 并不自然适用于 0 附近的共形几何。相反，共形框架突出了乘法平移 $x\mapsto (x^\alpha+t)^{1/\alpha}$，它恰好是在 $\xi = x^\alpha$下通常平移 $\xi\mapsto \xi+t$ 的拉回。

定义 8 (α–平移半群 on $L^{p,\alpha}(\mathbb{R}_+)$) 对于 $t\ge 0$ 和 $f\in X^\alpha$，定义

$$(\mathcal{T}_\alpha(t)f)(x) := f\Big((x^\alpha+t)^{1/\alpha}\Big), \qquad x>0.$$

族 $\{\mathcal{T}_\alpha(t)\}_{t\ge 0}$ 称为 $L^{p,\alpha}(\mathbb{R}_+)$ 上的 *conformable translation semigroup*。

命题 10 （半群与等距） *Let $1\le p<\infty$. Then $\{\mathcal{T}_\alpha(t)\}_{t\ge0}$ is a semigroup of linear operators on X^α, and for every $t\ge 0$,*

$$\|\mathcal{T}_\alpha(t)f\|_{p,\alpha} = \|f\|_{p,\alpha}, \qquad f\in X^\alpha.$$

In particular, $\{\mathcal{T}_\alpha(t)\}_{t\ge0}$ is a C_0–α–semigroup in the sense of Section 2.

Proof **半群律**。对于 $s,\ t\ge 0$,

$$(\mathcal{T}_\alpha(s)\mathcal{T}_\alpha(t)f)(x) = (\mathcal{T}_\alpha(t)f)\Big((x^\alpha+s)^{1/\alpha}\Big) = f\Big(\big((x^\alpha+s)+t\big)^{1/\alpha}\Big) = (\mathcal{T}_\alpha(s+t)f)(x),$$

以及 $\mathcal{T}_\alpha(0)=I$。

等距。通过变量替换 $\xi = x^\alpha$ （因此 $x^{\alpha-1}dx = \alpha^{-1}d\xi$），

$$\|\mathcal{T}_\alpha(t)f\|_{p,\alpha}^p = \int_0^\infty \Big|f\big((x^\alpha+t)^{1/\alpha}\big)\Big|^p x^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty |f((\xi+t)^{1/\alpha})|^p d\xi.$$

现在令 $\eta=\xi+t$，于是 $d\eta = d\xi$，积分变为

$$\frac{1}{\alpha}\int_t^\infty |f(\eta^{1/\alpha})|^p d\eta \le \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty |f(\eta^{1/\alpha})|^p d\eta = \|f\|_{p,\alpha}^p.$$

此外，等号成立是因为 $\eta\mapsto\eta-t$ 是从（$t,\ \infty$）到（$0,\ \infty$）的双射，而缺失的区间（$0,\ t$）在按照标准方式将平移解释为在 $\mathbb{R}_+$ 上作用于 L^p（$0,\ \infty$）时，其贡献为 0（等价地，$U_p\mathcal{T}_\alpha(t)U_p^{-1}$是 L^p（$0,\ \infty$）上的经典平移）。因此 $\|\mathcal{T}_\alpha(t)f\|_{p,\alpha} = \|f\|_{p,\alpha}$。

强连续性。由于 $U_p\mathcal{T}_\alpha(t)U_p^{-1}$ 是 $L^p(0,\infty)$ 上的经典平移半群，因此由经典情形以及 $U_p^{\pm1}$ 的连续性可知其具有强连续性。□

Remark 6（与经典平移半群共轭）设 $\{\tau(t)\}_{t\ge 0}$ 是 $L^p(0,\infty)$ 上的经典平移半群：

$$(\tau(t)g)(\xi) = g(\xi + t).$$

于是，根据构造，

$$\tau(t) = U_p\, \mathcal{T}_\alpha(t)\, U_p^{-1}, \qquad t \ge 0.$$

因此，$\mathcal{T}_\alpha(t)$ 恰好是经典平移在保形重新参数化 $\xi = x^\alpha$ 下的拉回。

6.2 保形平移半群的生成元

命题 11（生成元作为共形导数） *Let $1 \le p < \infty$. The infinitesimal generator $\mathcal{G}_\alpha$ of $\{\mathcal{T}_\alpha(t)\}_{t\ge 0}$ on X^α is given by*

$$D(\mathcal{G}_\alpha) = \big\{ f \in X^\alpha : \ \partial_x^\alpha f \in X^\alpha \big\}, \qquad \mathcal{G}_\alpha f = \partial_x^\alpha f,$$

where $\partial_x^\alpha f$ is understood in the distributional sense and coincides with $x^{1-\alpha} f'(x)$ for smooth f.

Proof 根据命题 2 和注记 6，$\{\mathcal{T}_\alpha(t)\}$ 的生成元可通过 U_p 将 $\{\tau(t)\}$ 的生成元传递而得。由于经典生成元为 $\frac{d}{d\xi}$，其定义域为 $W^{1,p}(0,\infty)$（并在需要时满足通常的 0-处迹条件），引理 **??** 表明，共轭变换得到 ∂_x^α 于 X^α。□

6.3 保形 $L^{p,\alpha}$ 空间中的超循环性

$L^p(0,\infty)$上的纯平移不是超循环的。与经典文献中的情况一样，沿轨道引入额外的权/放大因子后，就会出现超循环行为。在保形框架中，自然的做法是考虑与映射 $x \mapsto (x^\alpha + t)^{1/\alpha}$ 相容的乘法余循环。

定义 9（加权保形平移半群）设 $\gamma : \mathbb{R}_+ \to (0,\infty)$ 可测。定义

$$(\mathcal{T}_{\alpha,\gamma}(t) f)(x) := \gamma(t)\, f\Big((x^\alpha + t)^{1/\alpha} \Big), \qquad t \ge 0,\ x > 0.$$

那么，只要对所有 $s, t \ge 0$，$\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s)$ 成立，$\{\mathcal{T}_{\alpha,\gamma}(t)\}_{t\ge 0}$ 就是一个半群（因此，对某个 $\kappa \in \mathbb{R}$，$\gamma(t) = e^{\kappa t}$）。

Remark 7 在等距映射 U_p 下，有

$$U_p\, \mathcal{T}_{\alpha,\gamma}(t)\, U_p^{-1} = \gamma(t)\, \tau(t),$$

即，$L^p(0,\infty)$ 上的经典加权平移半群。因此，以轨道（超循环性、混沌、周期点的稠密性）表示的动力学性质，可以像第 5 节中那样，在经典图景与保形图景之间准确地传递。

命题 12 (共形转移下的轨道不变性) *Let $t \mapsto \gamma(t)$ satisfy $\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s)$ and let $f \in X^\alpha$. Then the orbit $\{\mathcal{T}_{\alpha,\gamma}(t) f : t \ge 0\}$ is dense in X^α if and only if the orbit $\{\gamma(t)\tau(t) g : t \ge 0\}$ is dense in $L^p(0,\infty)$ where $g = U_p f$.*

*Proof*这直接来自共轭关系 $U_p \mathcal{T}_{\alpha,\gamma}(t) = \gamma(t)\tau(t)\ U_p$ 以及 U_p 是一个同胚这一事实。 □

Remark 8 (如何获得超循环例子) 一旦确定了作用于 $L^p(0,\infty)$ 上加权平移的超循环性判据（例如，通过经典意义下的可容许权重），命题 12 便可通过简单的传输 $f = U_p^{-1} g$ 和共形平移 $x \mapsto (x^\alpha + t)^{1/\alpha}$，在共形空间 $L^{p,\alpha}(\mathbb{R}_+)$中构造超循环和混沌例子。这样，在保留自然共形测度 $d^\alpha x$的同时，共形动力学便可置于同一轨道理论框架中加以研究。

7 结论

本文从算子理论的角度探讨共形演化，而其完全由非线性时间变换驱动。出发点是共形时钟

$$\psi(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha},$$

它使我们能够将一个 C_0–α–半群解释为沿时间尺度 $s = \psi(t)$ 读取的经典 C_0–半群。在这一框架下，我们证明每个 C_0–α–半群$\{T_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ 都具有如下表示

$$T_\alpha(t) = T\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right),$$

对应一个唯一确定的经典半群 $\{T(s)\}_{s\geq 0}$，且相应的无穷小生成元在一个公共定义域上相同。因此，通过显式的重新参数化 $t \leftrightarrow s$，保形与经典柯西问题在温和解层面上是等价的。

第二项贡献涉及此类问题的自然函数空间设定。我们在由测度 $d^\alpha x = x^{\alpha-1}dx$诱导的共形勒贝格空间 $L^{p,\alpha}$ 中开展研究，并通过变量替换 $\xi = x^\alpha$，建立了这些空间与标准 L^p 空间之间显式的等距（在希尔伯特空间情形下为酉）对应关系。这一传递原理使我们能够将经典估计和谱信息无失真地引入共形情形。

主要的动力学结论是，基于轨道的性质在共形时间变换下保持不变。特别是，对于 C_0–α–半群， α–超循环性和 α–混沌与相应经典半群的通常概念一致。这种不变性给出了 Desch–Schappacher–Webb 判据的共形版本：只要 α–生成元的点谱满足标准的解析特征向量假设并与虚轴相交，该共形半群就是 α–混沌的。我们还说明了同样的思路如何应用于共形勒贝格空间中的平移模型；其中，共形平移 $x \mapsto (x^\alpha + t)^{1/\alpha}$ 自然地表现为经典平移的拉回。

总体而言，这些结果阐明了共形动力学的结构含义：分数阶参数本身并不会创造新的轨道几何，而是重新塑造

经典演化，使其通过非线性时钟和相容的测度变换来实现。这一视角为分析共形演化方程提供了一条简单而稳健的途径，也可通过迁移已知的经典例子来构造混沌或超循环例子。后续可能的研究方向包括非自治共形问题、扰动与控制问题，以及系统比较共形模型和真正存在记忆效应的非局部分数阶演化。

参考文献

[1] A. Pazy，线性算子半群及其在偏微分方程中的应用，Springer，纽约，1983 年。[2] J. Pr¨uss，演化积分方程及其应用，Birkh¨auser，巴塞尔，1993 年。[3] W. Desch、W. Schappacher 和 G. F. Webb，线性算子超循环与混沌半群，*Ergodic Theory Dynam. Systems* **17** （1997），793–819。[4]K.-J. Engel 和 R. Nagel，线性演化方程的单参数半群，Springer，纽约，2000 年。[5] A. A. Kilbas、H. M. Srivastava 和 J. J. Trujillo，分数阶微分方程理论与应用，Elsevier，阿姆斯特丹，2006 年。[6] F. Mainardi，分数阶微积分与线性黏弹性中的波，Imperial College Press，伦敦，2010 年。[7]R. Khalil、M. A. Horani、A. Yousef 和 M. Sababheh，分数阶导数的新定义，*J. Comput. Appl. Math.* **264**（2014），65–70。[8] T. Abdeljawad，论共形分数阶微积分，*J. Comput. Appl. Math.* **279**（2015），57–66。[9] T. Abdeljawad 和 M. Al Horani，采用共形分数阶导数的分数阶微积分，*Chaos Solitons Fractals* **89** （2016），1–5。[10] Wang, Y.、Zhou, J.、Li, Y.：通过共形分数阶微积分构造时间尺度上的分数阶 Sobolev 空间及其在时间尺度上分数阶微分方程中的应用。*Adv. Math. Phys.* **2016**，文章编号 9636491（2016）。[11] V. E. Tarasov，无非局部性，无分数阶导数，*Commun. Nonlinear Sci.Numer. Simul.* **62** （2018），157–163。