亏格一中的开 r-spin 理论与 Gelfand–Dikii 波函数

RanJ. Tessler YizhenZhao

arXiv:2601.04114v1 [math.AG] 7 Jan 2026

摘要

我们构造了开 r-spin 理论的 $g=1$ 扇区，即圆柱模空间上的开 r-spin 理论。这是第二个包含后代类的 $g>0$ 开放交理论构造（第一个是关于带边界的开黎曼曲面模空间上交叉理论的全亏格构造， [23, 30], 其 $g=1$ 情形等于我们构造的 $r=2$ 情形）。不同于 [30], 的构造，为了构造 r-spin 圆柱理论，我们必须解决维数跳跃轨迹这一基础性问题；在类似的闭理论中，该问题通过虚基本类技术处理，但这些技术目前在开放情形中尚不存在。因此，我们的构造要复杂得多，并且依赖于 [31, 32]中发展出的点插入技巧。

我们证明，经过坐标变换后，开 $g=1$ 势等于 Gelfand–Dikii 波函数的 $g=1$部分，从而证实了 [7]的一个猜想。我们还证明，我们的 $g=1$ 交数满足一种 $g=1$ 递归，这也是 [7, 15]所预言的。这种递归是 Solomon 著名的带 $g=0$ 后代类的 $g=1$ 开 WDVV 方程 [25], 的类比，同时也是 F-上同调场论 [1]的普适 $g=1$ 递归。再次，这是首个经几何构造证明满足这一普适递归、且并非 [23, 30], 的 $g=1$ 部分的例子。

目录

1 引言 1 2 分次 r-自旋圆盘与圆柱回顾 10 3 相对余切线丛与 TRR 多截面 31 4 开 r-自旋关联函数的定义 38 5 亏格一拓扑递归关系 46 6 命题4.10的证明 61

1 引言

1.1 闭合 r-自旋理论与 Witten 的 r-自旋猜想背景

1.1.1 Witten 的 KdV 猜想

Witten 猜想 [33], 由 Kontsevich [21], 证明，是现代稳定曲线模空间$\overline{\mathcal{M}_{g上的}}_{n}$，交叉理论研究以及 Gromov–Witten 理论发展的基石之一。设 $\psi_1, \ldots, \psi_n \in H^2(\overline{\mathcal{M}_{g,n}})$ 为 n标记点处相对余切线丛的第一陈类，并记

$$F^c(t_0, t_1, \ldots, \lambda) := \sum_{\substack{g\geq 0, n\geq 1 \\ 2g-2+n>0}} \sum_{d_1,\ldots,d_n\geq 0} \frac{\lambda^{2g-2}}{n!} \left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{d_1} \cdots \psi_n^{d_n} \right) t_{d_1} \cdots t_{d_n}$$

闭势函数，即这些积分的生成函数；这些积分称为交数。上标“c”表示“闭”，以区别于本文关注的开理论。 λ 和 $\{t_i\}_{i\geq 0}$ 是形式变量。Witten–Kontsevich 定理表明，exp(F^c) 是 Korteweg–de Vries（KdV）层次的 tau函数；等价地，exp(F^c) 满足 Virasoro 约束，即某个偏微分方程集合。这些等价表述中的每一种都唯一确定所有交数。

1.1.2 Witten 的 r-旋交叉理论

在提出其最初猜想一年后，Witten 提出了一个广义猜想[34], ，其中曲线模空间被扩展为 r-旋曲线的模空间。光滑标记曲线（C； z_1，……， z_n）上的r-旋结构是一个线丛 S以及一个同构

$$S^{\otimes r} \cong \omega_C \left(-\sum_{i=1}^{n} a_i [z_i] \right),$$

其中 $a_i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$称为扭曲， ω_C表示典范丛。在光滑曲线上的 r-旋结构模空间存在一个自然的紧化 $\mathcal{M}_g^{1/r}$，$\overline{\{a_1,\ldots,a_n\}}$，该空间具有一个虚基本类 c_W，称为*Witten* 类。在零亏格中，Witten 类是*Witten* 丛的欧拉类（$R^1\pi_*\mathcal{S}$）$^\vee$，其中 $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{M}_0^{1/r}$，$\{a_1,\ldots,a_n\}$是万有曲线，$\mathcal{S}$ 是万有 r-旋结构。另一方面，在高亏格中，$R^1\pi_*\mathcal{S}$ 通常不是向量丛，而 Witten 类的定义涉及精细的虚基本类技术 [24, 11, 22, 14, 10]。

这些（闭） r-*spin* 交数定义为

$$\langle \tau_{d_1}^{a_1} \cdots \tau_{d_n}^{a_n} \rangle_g^{\frac{1}{r},c} := r^{1-g} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,\{a_1,\ldots,a_n\}}^{1/r}} c_W \cup \psi_1^{d_1} \cdots \psi_n^{d_n}. \tag{1.1}$$

闭 的 r-*spin* 势是闭 r-spin 交数的生成函数 rs

$$F^{\frac{1}{r},c}(t_*^*, \lambda) := \sum_{\substack{g\geq 0, n\geq 1 \\ 2g-2+n>0}} \sum_{\substack{0\leq a_1,\ldots,a_n\leq r-1 \\ d_1,\ldots,d_n\geq 0}} \frac{\lambda^{2g-2}}{n!} \langle \tau_{d_1}^{a_1} \cdots \tau_{d_n}^{a_n} \rangle_g^{\frac{1}{r},c} t_{d_1}^{a_1} \cdots t_{d_n}^{a_n},$$

其中， λ 和 t_d^a 分别是 $0 \leq a \leq r-1$ 和 $d \geq 0$ 的形式变量。

1.1.3 Gelfand–Dikii（GD）可积层级与 r-spin 猜想

回顾一下，伪微分算子 A是一个 Laurent 级数

$$A = \sum_{n=-\infty}^{m} a_n(T_1, T_2, \ldots, \lambda)\partial_x^n,$$

其中 m 是一个整数， T_i 对于 $i \geq 1$， λ 和 ∂_x 是形式变量，而 a_n(T_1， T_2、……、 λ) $\in \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}][[T_1, T_2, \ldots]]$。伪微分算子的空间是一个非交换结合代数，其中乘法 $\circ$ 是由 $\mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}][[T_1, T_2, \ldots]]$ 上的通常乘积诱导的，并且

$$\partial_x^k \circ f := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\ldots(k-l+1)}{l!} \frac{\partial^l f}{\partial x^l} \partial_x^{k-l},$$

其中 k 是整数， $f \in \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}][[T_*]]$，且变量 x 与 T_1 等同。令 $r \geq 2$ 为任意整数，并令 A 为如下形式的伪微分算子

$$A = \partial_x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \partial_x^{r-n},$$

则 A 有唯一的 r 次根，即唯一的如下形式的伪微分算子 $A^{\frac{1}{r}}$ - m

$$A^{\frac{1}{r}} = \partial_x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \partial_x^{-n}$$

满足 $\left(A^{\frac{1}{r}}\right)^r = A$。

令 $r \geq 2$，并考虑算子

$$L := \partial_x^r + \sum_{i=0}^{r-2} f_i \partial_x^i, \quad f_i \in \mathbb{C}[\lambda^{\pm 1}][[T_*]].$$

不难验证，对于任意 $n \geq 1$，交换子 $[(L^{n/r})_+, L]$ 具有如下形式： $\sum_{i=0}^{r-2} h_i \partial_x^i$，其中 $h_i \in \mathbb{C}[\lambda^{\pm 1}][[T_*]]$，而 $(\cdot)_+$ 表示由 ∂_x 的非负次幂构成的伪微分算子的部分。第 r 阶 ***Gel'fand–Dikii*** 层次有时也称为 r***KdV*** 层级，它是关于 f_0， f_1，……， f_{r-2} 的偏微分方程组，定义如下：

$$\frac{\partial L}{\partial T_n} = \lambda^{n-1}[(L^{n/r})_+, L], \quad n \geq 1. \tag{1.2}$$

将满足初始条件的系统解记为 L

$$L|_{T_{\geq 2}=0} = \partial_x^r + \lambda^{-r} r x, \tag{1.3}$$

Witten 的 r-旋猜想指出 $\frac{\partial F^{\frac{1}{r}, c}}{\partial t_d^{r-1}} = 0$ 对于 $d \geq 0$ （拉蒙德消失现象），并且在变量变换

$$T_k = \frac{1}{(-r)^{\frac{3k}{2(r+1)} - \frac{1}{2} - d} k!_r} t_d^a, \quad 0 \leq a \leq r-2, \quad d \geq 0, \tag{1.4}$$

其中 $k = a + 1 + rd$ 和

$$k!_r := \prod_{i=0}^{d} (a + 1 + ri),$$

成立

$$\operatorname{res} L^{n/r} = \lambda^{1-n} \frac{\partial^2 F^{\frac{1}{r}, c}}{\partial T_1 \partial T_n}$$

当且仅当 $n \geq 1$ 不能被 r整除时，并且 $\operatorname{res} L^{n/r}$ 表示 $L^{n/r}$中 ∂_x^{-1}的系数。

用可积层次的语言来说，这意味着 $\exp(F^{\frac{1}{r}, c})$经过简单的变量变换后，成为 r阶 Gel'fand–Dikii 层次的一个 ***tau***函数 。

这一结果由 Faber–Shadrin–Zvonkine [13]证明。 $r = 2$ 的情形等价于 Witten 最初的猜想。Witten 的 r-旋量构造开启了对 Fan–Jarvis– Ruan–Witten [14] 量子奇点理论的研究。

1.1.4 闭扩展 $g = 0$ r-旋量理论

[20] 证明了，零亏格的 r-旋理论可以扩展到允许一个扭曲为 -1的标记点。这一理论在 [5], 中得到了进一步研究，并且也被证明与Gel'fand–Dikii层次有关。我们用 $\langle \cdots \rangle^{\frac{1}{r}, ext}$ 表示这一扩展理论中的交数。包含 -1扭曲的扩展交数不一定满足拉蒙德消失，对于写出开交数的递推关系至关重要。

1.2 Open r-旋理论，以及 Witten 的 r-旋猜想的开类比

1.2.1 Witten 的 KdV 猜想的开类比

对带边界曲面的模空间上的交叉理论的研究，最初由 Pandharipande、Solomon 和第三位作者在 [23]（圆盘情形）和 [27, 30]（$g > 0$ 情形）中开展。这些工作考察了模空间 $\mathcal{M}_{g,k,l}$，它参数化了如下元组 $(\Sigma; x_1, \ldots, x_k; z_1, \ldots, z_l)$：其中 Σ 是带边界的稳定黎曼曲面，带有一种称为分级自旋结构的附加结构；$x_i \in \partial\Sigma$ 是边界标记点，$z_j \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$ 是内部标记点。当 $g = 0$ 时，分次数据是平凡的，而 Σ 只是一个稳定标记圆盘。在$\mathcal{M}_{g,k,l}$上的交数——应当视为内部标记点处 ψ 类的积分——得以构造，从而将开势 $F^o(t_0, t_1, \ldots, s, \lambda)$ 定义为 F^c 的直接推广；新的形式变量s 记录边界标记点的数目。 [23] 针对这些交数提出了 Witten 猜想的一个开类比：开势满足 Virasoro 约束和 KdV 方程的开类比。这些猜想的证明结合了 [3, 30, 8] 的结果。面向物理学家的综述可见 [12]。

定义开交数有两个概念上的困难。首先，带边界黎曼曲面的朴素模空间没有典范定向，有时甚至不可定向；当 $g > 0$, 这使积分的定义变得复杂。另一个更为微妙的问题是模空间存在实余维一边界。由于这些边界，任何合理的积分定义都应涉及施加边界条件。引入分级自旋结构解决了这些问题。分级自旋结构的模空间是带边界曲面朴素模空间的一个定向轨形覆盖，见 [30, §5]。此外，对于结点曲面的每个分层以及每个边界结点，这一结构都会选出一个指定的非法半结点。“遗忘型边界条件”施加在ψ_i “类”上的条件，实质上是：在边界分层上，ψ_i 的截面是从参数化由该分层的结点正规化并遗忘非法侧后所得曲面的模空间拉回的。详情见 [30,§2]。

1.2.2 零亏格开 r-自旋交叉理论

在亏格零的圆盘情形下，[6, 4] 和[31, 32]构造了 Witten 的 r-自旋理论的一个开类比。 [6] 的工作构造了 r分次 r-自旋圆盘 $\mathcal{M}_{0\ k}^{1/r}{}_{,,\{a_1,\ldots,a_l\}}$ 的模空间，该模空间参数化带有旋结构和分次的稳定标记圆盘。内部点的扭曲 $a_1, \ldots, a_l$ 仍取值于 $\{0, \ldots, r-1\}$，但要求边界标记点的扭曲为 $r-2$. [6] 也为 Witten 丛 $\mathcal{W} = (R^1\pi_*\mathcal{S})^\vee$构造了一个开类比，同样针对$g = 0$ 中的相同对象，并证明该丛具有典范的相对定向。[4] 为分次 r-自旋圆盘构造了一种交叉理论。与上文描述的无自旋情形一样，几何因素主要体现在如何定义有意义的边界条件上。事实证明，对于某些分层，或者等价地说，对于某些类型的边界结点，遗忘边界条件方案仍然适用。但对于大多数边界分层，该方案并不适用。 [4] 的一项主要新几何洞见是发现了一种隐藏的正性结构，这同样以分次为基础。因此，人们对其余边界施加了正性边界条件 。开亏格 0 r-自旋交数定义为

$$\langle \tau_{d_1}^{a_1} \cdots \tau_{d_l}^{a_l} \sigma^k \rangle_0^{\frac{1}{r},o} := \int_{\overline{\mathcal{PM}}_{0,k,\{a_1,\ldots,a_l\}}^{1/r}} e\left(\mathcal{W} \oplus \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{L}_i^{\oplus d_i}, \mathbf{s}_{\text{canonical}}\right), \tag{1.5}$$

其中，在带边界流形 M上，记号 $e(E, s)$ 表示 E[1]关于 s所给边界条件的 $E|_{\partial M} \to \partial M$欧拉类。 $\mathcal{PM}_{0,k,\vec{a}}^r$是对 $\mathcal{M}_{0,k,\vec{a}}^r$的修改

[1] ——

这是通过移除某些边界分层得到的。[1] 最后，截面 $\mathbf{s}_{\text{canonical}}$ 是 $\mathcal{W}\oplus\bigoplus_{i=1}^{l}\mathbb{L}_i^{\oplus d_i}|_{\partial\mathcal{P}\overline{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r}}_{0,k,\vec{a}}}$ 的任意一个处处不为零的截面，且满足遗忘边界条件和正性边界条件。已证明，任意两个这样的边界截面选择都会给出相同的交数。还证明了，在 $g=0$ 中，只有在以下情况下这些数才非零

$$2\sum_{i=1}^{l}d_i+\frac{2\sum_{i=1}^{l}a_i+k(r-2)+(g-1)(r-2)}{r}=2l+k+3g-3. \tag{1.6}$$

特别是，

$$2\sum_{i=1}^{l}a_i+k(r-2)+(g-1)(r-2)=0 \mod r. \tag{1.7}$$

and

$$\frac{2\sum_{i=1}^{l}a_i+k(r-2)+(g-1)(r-2)}{r}=k+g-1 \mod 2 \tag{1.8}$$

在设定 $g=0.$ 时成立

亏格零开 r-旋量势是生成函数

$$F_0^{\frac{1}{r},o}(t_*^*,s):=\sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k+2l>2}}\sum_{\substack{0\leq a_1,\dots,a_l\leq r-1\\ d_1,\dots,d_l\geq 0}}\frac{1}{k!l!}\left\langle\tau_{d_1}^{a_1}\cdots\tau_{d_l}^{a_l}\sigma^k\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}t_{d_1}^{a_1}\cdots t_{d_l}^{a_l}s^k.$$

[31, 32]的目标是定义允许更多类型边界扭曲的交理论。新的几何见解是，遗忘型边界条件应由新的点插入边界条件取代。 [32]定义了以 $\mathfrak{h}\in\{0,1,\dots,\lfloor\frac{r}{2}\rfloor-1\}$. 为指标的 $\lfloor\frac{r}{2}\rfloor$开 r-旋量交理论。在 [32, §5] 中证明， $\mathfrak{h}=0$零点携带的信息与 [4], 的开 r-旋量理论相同；对其稍作修改后，得到的交数与 [4], 在（1.5）中给出的完全相同，参见 [32, 注 5.7]。这一最后的交理论通过点插入边界条件和正性边界条件定义，是本文的出发点。

1.2.3 rGD波函数与 [7]的猜想

令 L 如 §1.1.3 中所述，设 $\Phi(T_*,\lambda)$ 为方程组的解

$$\frac{\partial\Phi}{\partial T_n}=\lambda^{n-1}(L^{n/r})_+\Phi,\quad n\geq 1, \tag{1.9}$$

满足初始条件

$$\Phi|_{T_{\geq 2}=0}=1.$$

函数 Φ 满足的微分方程组 (1.9) 与 KP 层级波函数满足的微分方程组相同。对于 $r=2$ ，函数 Φ 首次在 [3] 中得到研究。对于一般的 r ，它首次在 [2], 中得到研究，作者在那里找到了一个以波函数表示 Φ 的显式公式。

令 $\phi:=\log\Phi$ ，并将其展开为关于 λ 的幂级数:

$$\phi=\sum_{g\in\mathbb{Z}}\lambda^{g-1}\phi_g,\quad \phi_g\in\mathbb{C}[[T_*]].$$

[1]也可以直接在 $\overline{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r}}_{0,k,\vec{a}}$ 上进行处理，但这样定义在技术上会变得更加复杂。

虽然 $F^{\frac{1}{r},c}_{-,0}$ 仅取决于变量 $t^0_d,\dots,t^{r-2}_d$，但函数 $F^{\frac{1}{r},o}_{r,0}$ 还取决于 t^{r-1}_d和 s。我们通过以下方式关联 T_{mr}和 t^{r-1}_{m-1}：

$$T_{mr}=\frac{1}{(-r)^{\frac{m(r-2)}{2(r+1)}}m!r^m}t^{r-1}_{m-1},\quad m\geq 1. \tag{1.10}$$

[4]的主要代数结果是：

定理 1.1。有

$$F^{\frac{1}{r},o}_0=\frac{1}{\sqrt{-r}}\phi_0\big|_{t^{r-1}_d\mapsto\frac{1}{\sqrt{-r}}(t^{r-1}_d-r\delta_{d,0}s)}-\frac{1}{\sqrt{-r}}\phi_0\big|_{t^{r-1}_d\mapsto\frac{1}{\sqrt{-r}}t^{r-1}_d}. \tag{1.11}$$

这给出了零亏格中开 r-自旋版本的 Witten 猜想。 [4]中构造的不变量的镜像理论解释见 [16]。

在 $r=2$ [3] 的情形下， [23, 30]证明了 F^o 的无旋开势的一个显式公式，该公式用函数 $\phi=\log\Phi$表示。

需要指出的是，目前对于 $\lfloor r/2\rfloor$ 中构造的开 r-自旋理论，尚无已知或猜想中的类似结果，[31, 32], 尽管这些理论的所有 $g=0$ 交数已在 [32], 中完全计算出来，而且 [18]以及隐含地还有 [19]也给出了看似相关的预测。

[7] 猜想了定理 1.1 的一个全亏格推广。更准确地说，他们猜想如下。

猜想 1 （ [7]的 rGD 波函数猜想）。 对于每个亏格 $g\geq 1$，都存在一种开 r-*spin* 交数的几何构造

$$\langle\tau^{\alpha_1}_{d_1}\cdots\tau^{\alpha_l}_{d_l}\sigma^k\rangle^{\frac{1}{r},o}_g. \tag{1.12}$$

此外，若将亏格 g势函数 $F^{\frac{1}{r},o}_{r,g}(t^*_*,s)$ 定义为

$$F^{\frac{1}{r},o}_g(t^*_*,s):=\sum_{l,k\geq 0}\frac{1}{l!k!}\sum_{\substack{0\leq\alpha_1,\dots,\alpha_l\leq r-1\\ d_1,\dots,d_l\geq 0}}\langle\tau^{\alpha_1}_{d_1}\cdots\tau^{\alpha_l}_{d_l}\sigma^k\rangle^{\frac{1}{r},o}_g t^{\alpha_1}_{d_1}\cdots t^{\alpha_l}_{d_l}s^k. \tag{1.13}$$

那么对于每个 $g\geq 1$，我们都有

$$F^{\frac{1}{r},o}_g=(-r)^{\frac{g-1}{2}}\phi_g\Big|_{t^{r-1}_d\mapsto\frac{1}{\sqrt{-r}}(t^{r-1}_d-\delta_{d,0}rs)}. \tag{1.14}$$

注 1.2。 在开格罗莫夫–威滕理论中，与闭理论不同，人们对高亏格不变量知之甚少，甚至鲜有相关猜想。上述猜想是少数描述完整全亏格开格罗莫夫–威滕理论的猜想之一，也是少数将势函数与可积层级联系起来的猜想之一。[2]

1.2.4 普适的 $g=1$ 开拓扑递归关系、弦关系与膨胀子关系

在 [25] Solomon 证明了，某些 $g=0$ 开 GW 理论满足一种他称为 开 *WDVV* 的普适关系。此外，0 r-自旋理论的亏格 [6, 4, 7] 也可以证明满足开 WDVV。虽然并非所有开 GW 理论和开 FJRW 理论都被预期满足开 WDVV（例如，在 [17] 中研究的秩 2 费马理论就不满足这一关系），但一

[2]如前所述， [23] 曾针对 $r=2$ 情形提出类似的猜想，并于 [8]得到证明。在 [9], , 人们猜想存在关于映射到 $(\mathbb{CP}^1,\mathbb{RP}^1)$ 的完整平稳开放格罗莫夫–威滕理论。

大类开 GW 理论（其中包括当 n 为奇数时（$\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{RP}^n$）的 OGW 理论）确实满足这一关系。

在 [1] Alexandrov、Basalaev 和 Buryak 中，他们构造了一个代数延拓，将满足开 WDVV 的理论的开放势延拓到高亏格，并纳入后代类。他们证明，这些延拓满足某些普适方程：所有亏格下的开放弦方程和开放稀释子方程，以及 $g=0$,1 个拓扑递归关系。另见 [15]。他们猜想，这些延拓存在几何构造。更多详情请参阅他们的论文。

对于 r-旋理论，若我们将猜想的延拓记为 $F^{\frac{1}{r}}(t^\star_\star, s)$，并将 $F_g^{\frac{1}{r}}$ 记为其亏格 g 分量，那么这些方程可以具体地用交数写成如下形式。我们假设在所有情况下，方程左边都满足 (1.6)。

(a)（边界标记点 $g=0$ TRR）设 $l,k\geq 1$。那么

$$\left\langle \tau_{d_1+1}^{a_1}\prod_{i=2}^{l}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^k\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}=\sum_{a=-1}^{r-2}\sum_{S\sqcup R=\{2,\dots,l\}}\left\langle \tau_0^a\tau_{d_1}^{a_1}\prod_{i\in S}\tau_{d_i}^{a_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},ext}\left\langle \tau_0^{r-2-a}\prod_{i\in R}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^k\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}+$$
$$+\sum_{\substack{S\sqcup R=\{2,\dots,l\}\\ k_1+k_2=k-1}}\binom{k-1}{k_1}\left\langle \tau_{d_1}^{a_1}\prod_{i\in S}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^{k_1}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}\left\langle \prod_{i\in R}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^{k_2+2}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}.$$

(b)（内部标记点 $g=0$ TRR）设 $l\geq 2$。则

$$\left\langle \tau_{d_1+1}^{a_1}\prod_{i=2}^{l}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^k\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}=\sum_{a=-1}^{r-2}\sum_{S\sqcup R=\{3,\dots,l\}}\left\langle \tau_0^a\tau_{d_1}^{a_1}\prod_{i\in S}\tau_{d_i}^{a_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},ext}\left\langle \tau_0^{r-2-a}\tau_{d_2}^{a_2}\prod_{i\in R}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^k\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}+$$
$$+\sum_{\substack{S\sqcup R=\{3,\dots,l\}\\ k_1+k_2=k}}\binom{k}{k_1}\left\langle \tau_{d_1}^{a_1}\prod_{i\in S}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^{k_1}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}\left\langle \tau_{d_2}^{a_2}\prod_{i\in R}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^{k_2+1}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}.$$

(c)（亏格1拓扑递归关系）

$$\begin{aligned}\left\langle \tau_{d_1+1}^{a_1}\prod_{i\in[l]\setminus\{1\}}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^k\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o}=&\sum_{\substack{J_1\sqcup J_2=[l]\setminus\{1\}\\ -1\leq a\leq r-2}}\left\langle \tau_0^a\tau_{d_1}^{a_1}\prod_{i\in J_1}\tau_{d_i}^{a_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},\mathrm{ext}}\left\langle \tau_0^{r-2-a}\prod_{i\in J_2}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^k\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o}\\ &+\sum_{\substack{J_1\sqcup J_2=[l]\setminus\{1\}\\ k_1+k_2=k}}\binom{k}{k_1}\left\langle \tau_{d_1}^{a_1}\prod_{i\in J_1}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^{k_1}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}\left\langle \prod_{i\in J_2}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^{k_2+1}\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o}\\ &+\frac{1}{2}\left\langle \prod_{i\in[l]}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^{k+1}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}.\end{aligned}\tag{1.15}$$

(d)（开弦方程）假设 $2g-2+k+2l>0$，则

$$\left\langle \tau_0^0\prod_{i=1}^{l}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^k\right\rangle_g^{\frac{1}{r},o}=\sum_{j=1}^{l}\left\langle \tau_{d_j-1}^{a_j}\prod_{i=1,i\neq j}^{l}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^k\right\rangle_g^{\frac{1}{r},o},\tag{1.16}$$

其中，包含 τ_{-1}^* 的交数定义为 0。

(e)（开放稀释子）假设 $2g-2+k+2l>0$，则

$$\left\langle \tau_0^1 \prod_{i=1}^{l} \tau_{d_i}^{a_i} \sigma^k \right\rangle_g^{\frac{1}{r},o} = (g+l+k-1) \left\langle \prod_{i=1}^{l} \tau_{d_i}^{a_i} \sigma^k \right\rangle_g^{\frac{1}{r},o} \tag{1.17}$$

前两个方程已在 [4]中得到证明。

1.3 本文：一种 r-旋圆柱交叉理论

在本文中，我们将研究推进至一亏格， 并构造 $g=1$ 开 r-旋理论，或者等价地构造开 r-旋圆柱理论。这是首个在正亏格下对开 FJRW 理论进行的严格构造。在构造 r-旋圆盘理论时出现的困难，即定向问题和边界条件的选择，在圆柱理论中同样存在，而且更难克服。此外，我们还遇到一个新的困难：Witten“丛”的维数发生跳跃。因此，它只有在某个子空间的补集上才是真正的丛。

为处理维数跳跃问题，我们首先确定了模空间中的维数跳跃轨迹，然后将注意力限制在我们关注的丛的截面上，这些截面在这些轨迹附近具有预先规定的非消失行为。这实质上等同于将这些轨迹（的邻域）从模空间中排除，从而得到新的边界，并施加预先规定的边界条件。

定向问题已在 [31, §3], 中得到解决，文中证明，除维数跳跃轨迹外，Witten 纤维丛具有典范相对定向，从而允许我们进行积分。

定义边界条件时的一个关键困难在于，Witten丛截面的正性——它在构造 $g=0$ 理论、证明交数与选择无关以及计算这些交数的过程中发挥了核心作用——出人意料地在 $g=1$.中失效了。这种预期的正性使第一作者在 [7], 中预见到，当时尚未定义的 r开 $g=1$ -旋理论将满足下文定理 1.4 所述的亏格一拓扑递归关系。

但相对余切线 $\mathbb{L}_i$.为解决这一问题提供了方法。维数与秩的考量 (1.6) 表明，只有包含至少一个 ψ_i 类的交数才可能非零。奇妙的是，对于那些预期正性不成立的边界，存在全新的、自然的 ψ_i 类边界条件。有趣的是，为了始终如一地定义这些新的边界条件，我们需要研究上文提到的 BCT r-旋理论的点插入类比。我们不知道这是一个根本性问题，还是仅仅是技术细节。我们将满足上述边界条件的 Witten 丛与相对余切线直和的截面称为典范。

总而言之，结合上述思想，我们已经证明了这一点（精确表述见定义 4.13 和定理 5.6）

定理 1.3。 假设扭曲 a_1、…、a_l 以及后代类的数量 d_1、…、d_l 满足 （1.6），其中 $g=1$。我们可以定义一个整数

$$\int_{\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}_{1,k,\{a_1,\ldots,a_l\}}} e\left(\mathcal{W} \oplus \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{L}_i^{\oplus d_i}, \mathbf{s}_{canonical}\right),$$

其中 $\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}_{1\ k}{}_{,\{a_1,\ldots,a_l\}}$ 是 r-旋圆柱的点插入模空间，其内部点经 q_1、…、q_l 扭曲，边界标记经 $r-2$ 扭曲；该空间已去除某些边界分层；而 $\mathbf{s}_{canonical}$ 是 $\mathcal{W} \oplus \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{L}_i^{\oplus d_i}|_{\partial \widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}_{1\ k}{}_{,\{a_1,\ldots,a_l\}}}$ 的任意无零点典范截面。

此外 不过，该积分与无零点典范截面s_{canoni}的选择无关 $_{cal}$.
我们将上述积分记为 $\left\langle \tau_{d_1}^{a_1} \dots \tau_{d_l}^{a_l} \sigma^k \right\rangle^{r}_{,\ \ \ \

1.5 论文结构

本文结构如下。第 2 节回顾开 r-旋结构、其模空间、Witten 丛以及 [6, 31]中研究的点插入技巧。第 3 节聚焦于相对余切线丛 $\mathbb{L}$：我们研究它们之间的关系，并构造它们的特殊截面。第 4 节引入典范截面的概念，并将亏格一开 r-旋交数定义为典范截面的零点计数。第 5 节证明亏格一开 r-旋交数与典范截面的选择无关，并证明它们满足亏格一开拓扑递归关系。第 6 节证明典范截面的存在性。

1.6 致谢

R.T. 感谢 Tyler Kelly、Jake Solomon 和 Sasha Buryak 就本文内容展开了有益的讨论。R.T. 和 Y.Z. 获得了 ISF 的资助（项目编号：1729/23）。

2 分次 r-旋圆盘和圆柱回顾

本节回顾分次 r-旋圆盘和圆柱的定义、它们的模空间、相关的丛以及点插入技巧。更多细节参见 [6, 31]。

全文中，我们将使用记号 $[N]$，其中 N 是一个自然数，表示集合 $\{1, 2, \ldots, N\}$.

2.1 带分次 r-旋曲面的模空间

本文研究的主要对象是带边界的零亏格和亏格一标记黎曼曲面；我们将其视为由带有反定向对合的闭球面和环面产生。更准确地说，结点标记曲面定义为一个元组

$$(C, \phi, \Sigma, \{z_i\}_{i\in I}, \{x_j\}_{j\in B}, m^I, m^B),$$

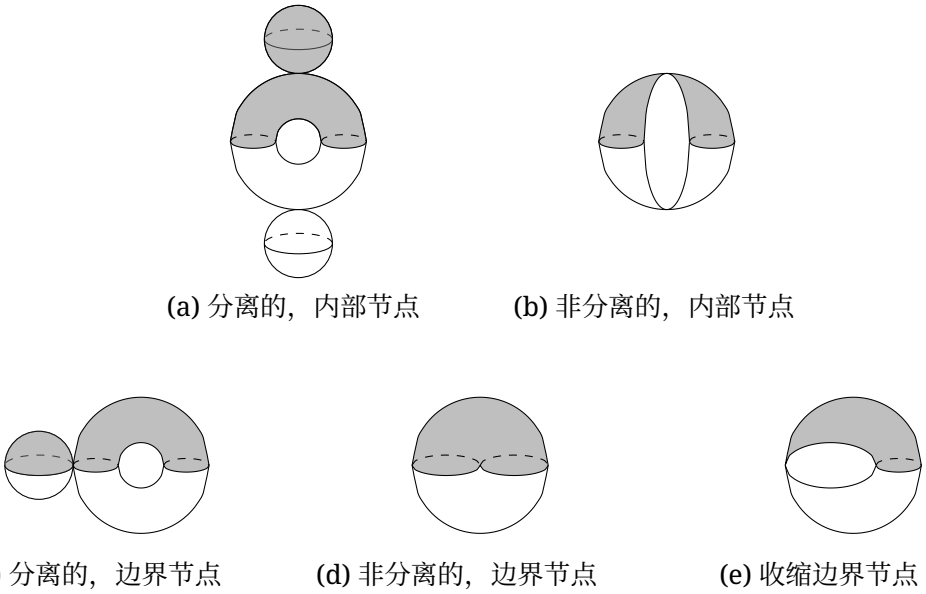
其中

- C 是一个节点轨形黎曼曲面，可能由非连通的分支组成，并且仅在特殊点处具有各向同性群；
- $\phi\colon\ C \to C$ 是一个反全纯对合，从拓扑角度看，它将底层粗黎曼曲面 $|C|$ 实现为两个黎曼曲面 Σ和$\Sigma = \phi$（Σ）的并集，二者沿其公共子集 Fix(|ϕ|)粘合；
- $\{z_i\}_{i\in I} \subset C$ 由不同的内部标记点（或内部尾）组成，它们在$|C|$ 中的像位于 Σ \Fix(|ϕ|)中。我们将其共轭标记点记为 $z_i\colon = \phi$（z_i）；
- $\{x_j\}_{j\in B}$ ⊂Fix(ϕ)由不同的边界标记点（或边界尾）组成，它们在 $|C|$中的像位于 $\partial\Sigma$;
- m^I（分别地，m^B）是 I 和（分别地，B）的一个标记，即在 I（分别地，m^B）与 $[|I|]$（分别地，$[|B|]$）之间建立一一对应。

结点标记曲面的亏格是 C 每个连通分支亏格之和。我们将零亏格的结点标记曲面称为圆盘，将亏格一的结点标记曲面称为圆柱。如果每个零属不可约分支至少有三个特殊点，且每个亏格一不可约分支至少有一个特殊点，则称该结点标记曲面为稳定 。

注 2.1。 若 Fix($|\phi|$) $= \emptyset$，则 Σ是闭合结点轨形黎曼曲面，且 $C = \Sigma \sqcup \Sigma$是不交并。注意，在这种情况下亏格总是偶数，因此对于亏格一结点标记曲面，我们总有 Fix($|\phi|$) $\neq \emptyset$。

结点标记曲面的节点可以是内部节点、边界节点或收缩边界节点；在亏格一的连通分支上，内部节点或边界节点可以是分离的或非分离的，如图1中各例的阴影 $\Sigma \subseteq |C|$ 所示。注意，$\partial\Sigma \subset$Fix($|\phi|$)是若干个圆的并，而Fix($|\phi|$) $\setminus \partial\Sigma$ 是收缩边界节点的并。



(a) 分离的，内部节点　　(b) 非分离的，内部节点

(c) 分离的，边界节点　　(d) 非分离的，边界节点　　(e) 收缩边界节点

图1：结点标记圆柱上的五种节点类型。

有根结点标记圆盘是一个连通的零亏格结点标记曲面，并带有一个选定的特殊边界标记点（称为根）。双根结点标记圆盘是一个连通的零亏格结点标记曲面，并带有两个选定的特殊边界标记点（称为根）。带锚点的带标记节点曲面是一个结点标记曲面，并且在每个与集合 Fix(ϕ) 不相交的连通分支 C' 中，都选定一个 ϕ-不变的特殊内部标记点（称为锚点）。我们用 $Anc \subseteq I$ 表示位于 Σ上的锚点索引集合。注意，对于零亏格或亏格一的带锚点结点标记曲面，锚点只能位于亏格零连通分支上。

备注 2.2. 我们主要关注带边界圆柱及其退化，也就是说，连通的亏格一结点标记曲面。带有标记曲面作为连通分支的（不连通）曲面，通常会作为在节点处进行归一化的结果出现（稍后也会由我们将要定义的点插入法产生）。根和锚点有助于我们追踪这些归一化：

- 若在连通结点圆柱的一个分离边界结点处进行归一化，则得到两个连通分支，一个为零亏格，另一个为亏格一。若将归一化后位于零亏格一侧的半节点视为根，则零亏格分量是一个有根结点标记圆盘。- 若在连通结点圆柱的一个非分离边界结点处进行归一化，则得到一个连通结点标记圆盘；若将归一化产生的两个半节点视为根，则它是一个双根结点标记圆盘。- 若在一个具有非空 Fix(ϕ) 的连通结点曲面的一对（在 ϕ 作用下保持不变的）分离内部节点处进行归一化，则得到三个连通分支，其中一个与

Fix(ϕ) 相交，另一对（在 ψ 作用下保持不变）与 Fix(ϕ) 不相交。我们选择归一化后位于与 Fix(ϕ) 不相交的一侧的半节点作为锚点。

我们使用“根”和“锚点”这两个相近的术语，其中“根”仅用于开分支上的半节点，而“锚点”专用于闭曲面上的内部半节点。“锚点”的用法也与 [6, 4, 31, 32] 中的术语一致。

2.1.1 开 r-旋结构

设 C 是一个带锚点的带标记节点曲面，在标记点和节点处具有序为 r 的循环同伦群，则 r-旋结构在 C 上是

- 一个轨形复线丛 L，其定义在 C 上，
- 一个同构

$$\kappa : L^{\otimes r} \cong \omega_{C,log} := \omega_C \otimes \mathcal{O}\left(\sum_{i\in I}[z_i] + \sum_{i\in I}[\overline{z_i}] + \sum_{j\in B}[x_j]\right),$$

  其中 $[p]$ 是每个标记点 p 所对应的次数为 $1/r$ 的除子。

- 一个对合 $\phi : \widetilde{L} \to L$ 提升 ϕ。

L 在点 p 处的局部等伦由整数 $\mathrm{mult}_p(L) \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ 按如下方式刻画：L在 p附近的全空间的局部结构为 $[\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})]$，，其中典范生成元 $\xi \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ 的作用为 $\xi \cdot (x,\ y) = (\xi x,\ \xi^{\mathrm{mult}_{p(L)}y})$。

我们将满足 $\mathrm{mult}_p(L) = 0$的内部和边界标记点子集分别记为 $RI \subseteq I$ 和 $RB \subseteq B$。关联的扭曲 r-旋结构 S 定义为

$$S := L \otimes \mathcal{O}\left(-\sum_{i\in\widetilde{RI}} r[z_i] - \sum_{i\in\widetilde{RI}} r[\overline{z_i}] - \sum_{j\in RB} r[x_j]\right),$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$其中 $RI \subseteq RI$ 是满足 $RI = RI \setminus Anc$的子集。

对于内部标记点 z_i，我们将 z_i 处的内部扭曲 定义为 $a_i := \mathrm{mult}_{z_i}(L) - 1\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$，若 $i \in I \setminus RI$；若 $i \in RI$，则为 $a_i := r-1$。对于边界标记点 x_i，我们将x_j 处的边界扭曲 定义为 $b_j := \mathrm{mult}_{x_j}(L) - 1$，若 $i \in B \setminus RB$；若 $j \in RB$，则为 $b_j := r-1$。注意，所有扭曲为 -1 的$\widetilde{\ }$标记点均由 $RI \setminus RI \subseteq Anc$编号。当曲面 C 光滑时，粗略底层球面 $|C|$ 上的粗略底层丛 $|S|$满足

$$|S|^{\otimes r} \cong \omega_{|C|} \otimes \mathcal{O}\left(-\sum_{i\in I} a_i[z_i] - \sum_{i\in I} a_i[\overline{z_i}] - \sum_{j\in B} b_j[x_j]\right),$$

这里，$[p]$ 是粗略空间上与每个标记 p对应的次数为一的除子 $|C|$。

观察 2.3. 一个连通节点标记圆盘存在一个具有扭曲a_i 和 b_j 的扭曲 r-旋结构，当且仅当

$$\frac{2\sum_{i\in I} a_i + \sum_{j\in B} b_j - r + 2}{r} \in \mathbb{Z}, \tag{2.1}$$

并且，一个连通节点标记圆柱存在一个带有扭曲 r 的旋结构，其扭曲为 a_i 和 b_j，当且仅当

$$\frac{2\sum_{i\in I} a_i + \sum_{j\in B} b_j}{r} \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

这些公式是将一个更广为人知的事实 [34] 特化到我们的情形所得：一个（闭的）连通节点标记亏格-g 曲线存在一个带有扭曲 r 的旋结构，其扭曲为 a_i，当且仅当

$$\frac{\sum_{i\in I} a_i + (g-1)(r-2)}{r} \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

我们可以将扭曲的定义推广到半节点。令 $n : C \to C$ 为归一化态射。对于半节点 $q \in C$，我们用 $\sigma_0(q)$ 表示与同一节点 $n(q)$相对应的另一个半节点。n^*L在 q 和 $\sigma_0(q)$处的同伦满足

$$\mathrm{mult}_q(n^*L) + \mathrm{mult}_{\sigma_0(q)}(n^*L) \equiv 0 \mod r.$$

需要注意的是，n^*S 可能不是一个扭曲的 r-旋结构（与 n^*L相关联），因为其连通分支中可能包含过多带有扭曲-1 的标记点（注意，带有扭曲 -1 的标记点是锚点）。然而，在零亏格或亏格为一的情形下，存在一种典范方法，可以选取半节点的极小子集 $\mathcal{R}$，使得

$$\widehat{S} := n^*S \otimes \mathcal{O}\left(-\sum_{q\in\mathcal{R}} r[q]\right) \tag{2.4}$$

成为扭曲的 r-旋结构：令 $\mathcal{T}$ 表示满足 $\mathrm{mult}_q(n^*L) = 0$的 C 的半节点 q 集合，我们定义

$$\mathcal{A} := \left\{ q \in \mathcal{T} : n(q) \text{ 是一个内部结点；在对节点 } n(q)\text{进行归一化后，半节点 } \sigma_0(q)\text{属于一个与 } \mathrm{Fix}(\phi) \right.$$
$$\left. \text{相交或包含锚点的连通分支。} \right\}$$

并定义 $\mathcal{R} := \mathcal{T} \setminus \mathcal{A}$。注意，$\mathcal{R}$ 中的元素始终来自分离内部节点，并且位于与 $\mathrm{Fix}(\phi)$不相交的零亏格不可约分支上，详见 [6, §2.3] 。我们将 c_t定义为在 S处的半节点 h_t的扭曲，即当 $h_t \notin \mathcal{R}$时为 $c_t := \mathrm{mult}_{h_t}(n^*L) - 1$，当 $h_t \in \mathcal{R}$时为 $c_t := r - 1$。

对于 C 的每个不可约分支 C_l，若其半节点为 $\{h_t\}_{t\in N_l}$，则有

$$\left(\widehat{S}\big|_{|C_l|}\right)^{\otimes r} \cong \omega_{|C_l|} \otimes \mathcal{O}\left(-\sum_{\substack{i\in I\\ z_i\in C_l}} a_i[z_i] - \sum_{\substack{i\in I\\ \overline{z_i}\in C_l}} a_i[\overline{z}_i] - \sum_{\substack{j\in B\\ x_j\in C_l}} b_j[x_j] - \sum_{t\in N_l} c_t[h_t]\right);$$

注意，在 C_l 与 $\partial\Sigma$相交的情况下，集合 $\{h_t\}_{t\in N_l}$ 在 ϕ作用下保持不变，并且被 ϕ共轭的半节点具有相同的扭曲。

注意，如果 $h_{t_1} = \sigma_0(h_{t_2})$，则

$$c_{t_1} + c_{t_2} \equiv -2 \mod r. \tag{2.5}$$

如果一个节点的两个半节点 h_t 中有一个（因而两个都）满足 $c_t \equiv -1 \bmod r$，则称该节点为 *Ramond* 节点；否则称其为***Neveu–Schwarz***（***NS***）节点。注意，如果一个节点是 Ramond 节点，则其两个半节点都属于集合 $\mathcal{T}$；此外，一个半节点具有 -1 扭曲，当且仅当它属于 $\mathcal{A}$。方程（2.4）中的集合$\mathcal{R}$ 的选取方式是：每个分离内部 Ramond 节点在 $\mathcal{R}$.中恰有一条半边

对于每个扭曲的 r-旋结构 S，我们定义一个 Serre 对偶丛

$$J := S^\vee \otimes \omega_C. \tag{2.6}$$

注意，C 和 L 上的对合会在 S 和 J上诱导出对合；为简便起见，我们也将 S 和 J 上的对合记作 ϕ。

2.1.2 分次

对于结点标记曲面， Σ 的边界 $\partial\Sigma$ 带有良定义的定向，该定向由 $\Sigma \subseteq |C|$上的复取向决定。此定向为 ϕ-不变的$\omega_{|C|}$ 在 $\partial\Sigma$上的截面赋予了正性的概念：设 $\partial\Sigma$ 中的 p 是一个非节点点，若对于沿定向方向的任意切向量 $v \in T_p(\partial\Sigma)$，都有 $\langle s(p)\ \ v\rangle > 0$，则称截面 s在 p 处为正 $\langle -, -\rangle$ 是余切向量与切向量之间的自然配对。

设 C 是带锚点的带标记节点曲面，并设 A 是 $\partial\Sigma$ 中去掉特殊点后的补集。若存在一个 $\widetilde{\phi}$ 不变截面 $v \in C^0\left(A, |S|^{\widetilde{\phi}}\right)$（称为 S 在边界分支上的提升），使得由包含映射 $|S|^{\otimes r} \to \omega_{|C|}$ 诱导的截面映射将 $v^{\otimes r}$ 映至正值，则称该 C 上的扭曲 r-旋结构在边界分支上相容。若 $\langle w, v\rangle \in C^0(A, \omega_{|C|})$ 为正值，则称 $w \in C^0\left(A, |J|^{\widetilde{\phi}}\right)$ 是关于 v 的、 J在边界分支上的 ***Serre*** 对偶提升，其中 $\langle -, -\rangle$ 是 $|S|^\vee$ 与 $|S|$ 之间的自然配对。该 w 在正数缩放意义下由 v 唯一确定。

边界分支上 J（或等价地， S）的提升在正比例缩放下的等价类，与 S^0（$|J|^{\widetilde{\phi}}$）的连续截面等价，其中 S^0-丛 $\left(|J|^{\widetilde{\phi}} \setminus |J|_0\right)/\mathbb{R}_{+\sim}$ 位于 A 上， $|J|_0$ 表示 $|J|^\phi$ 的零截面。给定一个提升的等价类 $[w]$，若边界标记点或边界半节点 x_j 是合法的，或者说，若 $[w]$ 在 x_j 处交替，$\sim$，则称之为合法；这是指作为 S^0（$|J|^\phi$）的截面， $[w]$ 无法连续延拓到 x_j。若边界上 J 的提升的一个等价类 $[w]$ 是边界分支上扭曲的 r-旋结构的分次，则要求对每个 Neveu–Schwarz 边界节点，其中一个半节点合法，另一个不合法。

备注 2.4。 要求每个 NS 边界节点都有一个合法半节点和一个不合法半节点，这源于退化时边界分支上分次的行为。这一条件与 (2.5) 一起允许对边界节点进行光滑化。更多详情请参见 [6] 。

设 q 是 C 的一个收缩边界节点。若 q 是 Ramond，且存在一个 $\widetilde{\phi}$-不变元素 $v \in |S|\big|_q$（称为 q 处 S 的一个提升），使得在通过留数给出的 $\omega_{|C|}\big|_q$ 与 $\mathbb{C}$ 的典范识别下， $v^{\otimes r}$ 在映射 $|S|^{\otimes r}\big|_q \to \omega_{|C|}\big|_q$ 下的像为正虚数，则称 C 上的一个扭曲 r-旋结构在 q 处是相容的。更多详情请参见 [6, 定义 2.8]。这样的 v也存在一个 Serre 对偶提升，即 一个 $\widetilde{\phi}$-不变的 $w \in |J|\big|_q$，使得 $\langle v,\ w\rangle$ 为正虚数。我们将此类 w 在正数缩放意义下的等价类 $[w]$ 称为收缩边界节点处的分次 q。

我们称一个扭曲的 r-旋结构是相容的，如果它在边界分支上以及所有收缩边界节点处都相容。一个（总体）分次 是边界分支上的分次与每个收缩边界节点处的分次的集合。若每个边界标记点都合法，我们就称该分次合法 。

分次对于确定 Witten 丛的典范相对定向（在 [31] 中）以及定义典范边界条件（在 §2.3 中）至关重要；这些都是定义零亏格开 r-旋交数的关键要素。

扭曲与合法性之间的关系，以及分次存在的障碍，总结如下命题。

命题 2.5 ([4,命题 2.3])**.** *1.* 当 r 为奇数时，任意扭曲的 r-旋结构都相容，并且存在唯一的分次。

2. 当 r 为奇数时，在带有分次的扭曲 r-旋结构中，边界标记点或边界半节点 x_j 合法，当且仅当其扭曲为奇数。

3. 当 r 为偶数时，相容的扭曲 r-旋结构中的边界扭曲 b_j 必须为偶数。

4. 在分次 r-旋结构中，任何 *Neveu–Schwarz* 边界节点都有一个合法半节点和一个不合法半节点。[3]

5. 仅当 r 为奇数时，*Ramond* 边界节点才会出现在带分次的 r-旋结构中；在这种情况下，它们的半节点带有扭曲 $r-1$.，且不合法

6. 对于连通标记圆盘上的扭曲 r-旋结构，存在一种分次恰好在子集 $D \subset \{x_j\}_{j\in B}$ 处交替，当且仅当

$$\frac{2\sum a_i + \sum b_j + 2}{r} \equiv |D| \mod 2. \tag{2.7}$$

7. 对于具有两个边界分支 $\partial_1\Sigma$ 和 $\partial_2\Sigma$的连通标记圆柱上的扭曲 r-旋结构，存在一种分次恰好在子集 $D \subset \{x_j\}_{j\in B}$处交替，当且仅当

$$|D \cap \partial_i\Sigma| \equiv \Theta_i \mod 2 \tag{2.8}$$

对于 $i=1$，2，其中 Θ_i：$=0$若$|J|^{\phi}_{\partial_i\Sigma}$可定向，以及 Θ_i：$=1$若$|J|^{\phi}_{\partial_i\Sigma}$不可定向。特别地，我们有

$$\frac{2\sum a_i + \sum b_j}{r} \equiv |D| \mod 2. \tag{2.9}$$

当一个 Ramond 收缩边界节点被归一化时，该边界节点处的分次会在相应的半节点处诱导出一种附加结构。我们将这样的半节点称为归一化收缩边界标记点。由于本文不需要这种附加结构，精确定义请参阅 [31,定义 2.5] 。

现在我们可以定义本文关注的主要对象：

定义 2.6。 一个稳定分次 r-旋圆盘或圆柱 （分别地，合法稳定分次 r-旋圆盘或圆柱）是一个稳定锚定结点标记圆盘或圆柱，并配备

1. 一个相容的扭曲 r-旋结构 S ，其中所有收缩边界结点都是 Ramond 型；2. 一个分次的选择（分别地，满足所有边界标记点的扭曲为 $r-2$ 的合法分次）；3. 在扭曲为 $r-1$ 的一部分标记点上，额外配备归一化收缩边界标记点结构。

注 2.7。 本文所称的“合法稳定分次 r-旋圆盘”在 [31, 32] 中称为“合法稳定分次 level-0 r-旋圆盘”。本文将重点讨论所有合法标记点的扭曲均为 $r-2$ 的情形，如 [4] 所示。我们将省略“level-0”一词。

我们用 $\mathcal{M}^{*1/r}_{g\,k\,,,l}$（分别用$\mathcal{M}^{1/r}_{g\,k\,,,l}$ ）表示亏格为 g 、有 k 个边界和 l 个内部标记点的连通稳定分次r-旋曲面（分别为合法连通稳定分次 r-旋曲面）的模空间。在 [6, 定理 3.4] 和 [31, 定理 2.8]中， $\mathcal{M}^{1/r}_{g\,k\,,,l}$ 和$\mathcal{M}^{*1/r}_{g\,k\,,,l}$ 被证明是实维数为.....的紧致光滑可定向带角轨形

$$\dim_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{M}^*}^{1/r}_{g,k,l} = k + 2l + 3g - 3. \tag{2.10}$$

[3]此项 m 是分次定义的一部分，我们将它放在这里，是因为它是分次的一项重要性质 g.

记号 2.8。假设内部标记点 $\{z_i\}_{i\in I}$ 具有扭曲 $\{a_i\}_{i\in I}$，根据记号上的滥用，我们也用 I 表示多重集[4] $\{a_i\}_{i\in I}$。

类似地，我们用 B 表示 $\{b_j\}_{j\in B}$ 多重集，其中每个元素都预先指定了合法性。此外，若 B 在 $\sigma\colon B\to B$上带有一个循环序，我们用 $\bar{\quad}$ $\bar{\quad}$表示，并记作 B，以明确呈现该循环序，其中 $\sigma_2(b_i)=b_{i+1}$对于$1\le i\le |B|$ 成立，且 $\sigma_2(b_{|B|})=b_1$。

我们用 $\mathcal{M}^{*\,1/r}_{0\,B,,I}$表示带分级的 r-旋转自旋圆盘的模空间，其边界点标记为 B，内部点标记为 I。注意，对于带分级的 r-旋转自旋圆盘，$\partial\Sigma$ 上的典范定向会在 B上诱导一个循环序；给定循环序 $\sigma_2\colon B\to B$，我们用 $\mathcal{M}^{*\,1/r}_{0\,\bar{B},,I}\subseteq\mathcal{M}^{*\,1/r}_{0\,\bar{B},,I}$ 表示参数化如下 r-旋转自旋圆盘的连通分支：其在 B 上诱导的循环序与 σ_2一致。类似地，我们用 $\mathcal{M}^{*\,1/r}_{1\,\bar{B},,I}$ 表示带分级的 r-旋转自旋圆柱的模空间，其边界点标记为 B，内部点标记为I。注意，对于具有两个边界分支 $\partial_i\Sigma$ （其中 $i=1,2$）的带分级 r-旋转自旋圆柱，$\partial_i\Sigma$ 上的典范定向会在 B^i上诱导一个循环序，其中 $B^i\subset B$ 是对应于 $\partial_i\Sigma$上标记点的标记；给定划分 $B=B^1\sqcup B^2$，以及每个 B^i上的循环序$\sigma_2^i\colon B^i\to B^i$，我们用 $\mathcal{M}^{*\,1/r}_{1\,\{\bar{B^1},\bar{B^2}\},I}\subseteq\mathcal{M}^{*\,1/r}_{1\,B,,I}$表示参数化如下 r-旋转自旋圆柱的连通分支：其在 B^i 上诱导的循环序与 σ_2^i一致。 $\bar{\quad}$

注记2.9。本文的大部分内容主要考虑圆柱的合法分级 r-旋圆盘模空间。只有在需要强调可能存在不合法边界标记时，我们才使用带上标 $*$ 的记号。

2.1.3 稳定分级 r-旋图

每个连通锚定标记曲面 Σ 都可以用装饰对偶图 $\Gamma(\Sigma)$ 描述如下。

- 图 $\Gamma(\Sigma)$ 的顶点集合是 Σ 的不可约分支集合；根据相应不可约分支是否与 $\partial\Sigma$ 相交，这些顶点分为开顶点和闭顶点 $V=V^O\sqcup V^C$[5]。每个顶点都有一个亏格，即相应不可约分支的亏格。

- 从顶点 $v\in V$ 发出的半边集合 $H(v)$，是对应于 v 的不可约分支上的特殊点（即半节点和标记点）的集合。集合 $H(v)$ 根据相应特殊点是否位于 $\partial\Sigma$ 上，分解为边界半边和内部半边 $H(v)=H^B(v)\sqcup H^I(v)$。我们用 $H:=\sqcup_{v\in V}H(v)$ 和 $H=H^B\sqcup H^I$ 表示相应的分解。两个半边对应于边集合中的一条（内部或边界、分离或非分离）边 e

$$E=E^I\sqcup E^B=E_{sp}\sqcup E_{nsp}=E^I_{sp}\sqcup E^I_{nsp}\sqcup E^B_{sp}\sqcup E^B_{nsp}$$

  当它们对应的特殊点是同一个（内部或边界、分离或非分离）节点的两个半节点时。我们用 H^I、H^B、H_{sp}、H_{nsp}、H^I_{sp}、H^I_{nsp}、H^B_{sp}、H^B_{nsp}表示相应的半边集合。

- 当 Σ 是一个圆柱时，如注 2.2 所述，对于每个零亏格 $v\in V$，$RT(v)\subseteq H^B(v)$ 中都有一个或两个与根相对应的特殊边界半边。

[4]这里使用“多重集”一词，是因为集合 I 中可能包含多个值相同的 a_i，但我们将它们视为不同的元素。[5]由于 V、V^O 或 V^C 取决于图 $\Gamma(\Sigma)$，严格来说，我们应将它们写作 $V(\Gamma(\Sigma))$ $V^O(\Gamma(\Sigma))$ 或 $V^C(\Gamma(\Sigma))$。为简便起见，此处（以及以下各项中）我们省略记号中的 $\Gamma(\Sigma)$，因为不会产生歧义。

• 尾的集合 T 由所有标记点和收缩边界节点组成。我们记作 $T^B := T \cap H^B$ 和 $T^I := T \cap H^I$。收缩边界尾 $H^{CB} \subseteq T^I$ 的集合对应于收缩边界节点，而集合 $T^{anc} \subseteq T^I \setminus H^{CB}$ 对应于锚点。

• 由 $\partial\Sigma$ 诱导的典范定向为每个 $v \in V^O$ 给出一个映射 σ_2: $H^B(v) \to H^B(v)$，可将其视为每个轨道上的循环序。

如果 $E = H^{CB} = \emptyset$，或者等价地，如果 Σ 光滑，则称 $\Gamma(\Sigma)$ 为光滑 。若 Σ 带有分次 r-旋结构 S，则还有以下附加装饰：

• 一个映射 tw: $H \to \{-1, 0, 1, \dots, r-1\}$，用于编码每个特殊点处 S 的扭曲；

• 一个映射 alt: $H^B \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，定义为：若对应于 h 的特殊点合法，则 $\mathrm{alt}(h) = 1$；否则 $\mathrm{alt}(h) = 0$ 。

一个零亏格（分别为亏格一）分次 r-旋图 是一个装饰图，其中每个连通分支都是上述连通分次 r-旋圆盘（分别为圆柱）的对偶图；其内在定义见 [31, §3.2]。若图 Γ 对每个零亏格 $v \in V(\Gamma)$ 都满足 $|H^B(v)| + 2|H^I(B)(v) \geq 3$，且对每个亏格一 $v \in V(\Gamma)$ 都满足 $|H^B(v)| + 2|H^I(B)(v) \geq 1$，则称其为稳定 。

对于稳定分级 r-旋图 $\Gamma = \Gamma(\Sigma)$ 的一条边 e（或一组边 S），沿 e（或 S）对 Γ 进行光滑化，所得稳定分级 r-旋图 $d_e\Gamma$（或 $d_S\Gamma$）与以下稳定分级 r-旋曲面的对偶图同构：该曲面由对 Σ 中对应于 e（或 S）的节点进行光滑化得到。沿 e（或 S）对 Γ 进行分离，所得稳定分级 r-旋图 $\mathrm{Detach}_e\Gamma$（或 $\mathrm{Detach}_S\Gamma$）与以下稳定分级 r-旋曲面的对偶图同构：该曲面由对 Σ 中对应于 e（或 S）的节点进行正规化得到。内在定义见 [31, §3.2] 。我们定义

$$\partial^!\Gamma = \{\Lambda : \Lambda \text{ stable}, \Gamma = d_S\Lambda \text{ for some } S \subset E(\Lambda)\},$$
$$\partial\Gamma = \partial^!\Gamma \setminus \{\Gamma\},$$
$$\partial^B\Gamma = \{\Lambda \in \partial\Gamma : E^B(\Lambda) \cup H^{CB}(\Lambda) \neq \emptyset\}.$$

若每个边界尾都是合法的，即 $\mathrm{alt}(t) = 1\ \forall t \in T^B$，且扭曲为 $r-2$（在 [4]中称为合法的 0 级分级 r-旋图），则称稳定分级 r-旋图是合法的 。

若 Γ 是连通的稳定分次 r-旋图，则用 $\mathcal{M}^{*1/r}_\Gamma \subseteq \mathcal{M}^{*1/r}_{g,\ T^B,\ T^I\setminus H^{CB},}$ 表示由对偶图恰为 Γ 的 r-旋曲面组成的子模空间，并用 $\mathcal{M}^{*1/r}_\Gamma$ 表示其闭包。若 Γ 不连通，则将 $\mathcal{M}^{*1/r}_\Gamma$ 定义为与其各连通分支相关联的模空间之积。在不会引起混淆时（§2.2.3 除外，这种情况总是成立），我们省略 $\mathcal{M}^{*1/r}_\Gamma$ 中的上标 $1/r$ 。由于边界半边的扭转和合法性（即 映射 tw 和 alt）是 Γ 的数据组成部分，因此在没有歧义时，我们也会在记号中省略上标 $*$。若 Γ 是单顶点不稳定图，则形式上将 $\mathcal{M}^{*1/r}_\Gamma$ 视为一个单点。

对于稳定对偶图 Γ 及其尾的子集 $S \subseteq T^I(\Gamma)$，将遗忘 S 中所有尾后得到的对偶图记为 $\mathrm{for}_S(\Gamma)$。当 Γ 是稳定分次 r-旋图，且 S 中所有尾均为扭转为零的内部尾或扭转为零的非法边界尾时，$\mathrm{for}_S(\Gamma)$ 也是一个分次 r-旋图。注意，$\mathrm{for}_S(\Gamma)$ 不一定稳定；将对 $\mathrm{for}_S(\Gamma)$ 收缩所有不稳定顶点后得到的图记为 $\overline{\mathrm{for}}_S(\Gamma)$；$\overline{\mathrm{for}}_S(\Gamma)$ 要么稳定，要么是单顶点不稳定图。我们将

$$\mathrm{For}_{\Gamma\to\overline{\mathrm{for}}_S(\Gamma)} \colon \overline{\mathcal{M}}_\Gamma \to \overline{\mathcal{M}}_{\overline{\mathrm{for}}_S(\Gamma)}$$

or

$$\mathrm{For}_{\Gamma\to\overline{\mathrm{for}}_S(\Gamma)} \colon \overline{\mathcal{M}^*}^{1/r}_\Gamma \to \overline{\mathcal{M}^*}^{1/r}_{\overline{\mathrm{for}}_S(\Gamma)}$$

相应的遗忘态射。

2.2 Witten丛与相对余切线丛

2.2.1 零亏格 Witten 丛

Witten 丛是 r-旋理论的主角。粗略地说，设 $\pi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}^{*\,1/r}_{0\,k\,,,l}$为万有曲线， $\mathcal{S} \to \mathcal{C}$ 为扭曲万能旋丛，且带有万能 Serre 对偶丛

$$\mathcal{J} := \mathcal{S}^{\vee} \otimes \omega_{\pi}, \tag{2.11}$$

于是我们定义一个层

$$\mathcal{W} := (R^0\pi_*\mathcal{J})_+, \tag{2.12}$$

~其中，下标 $+$ 表示在万能对合 ϕ 下的不变截面： $\mathcal{J} \to \mathcal{J}$. 更准确地说，若按（2.12）定义 $\mathcal{W}$ ，就需要在带角轨形范畴中处理导出推前。为避免这一技术问题，我们通过从闭模空间 $\mathcal{M}_0^{1/r}{}_{,k+2l}$的某个子集拉回相应的层，来定义 $\mathcal{W}$ ；参见 [6, §4.1]。

在此 $g = 0$ 情形下， $\mathcal{W}$ 实际上是一个向量丛；这一点可由直接的黎曼–罗赫计算得出，该计算表明

$$R^0\pi_*\mathcal{S} = 0. \tag{2.13}$$

在参数化带有内部扭曲 $\{a_i\}$ 和边界扭曲 $\{b_j\}$的 r-旋转圆盘的模空间的非空分支上，Witten 丛的（实）秩为

$$\frac{2\sum_{i\in I} a_i + \sum_{j\in B} b_j - (r-2)}{r}. \tag{2.14}$$

2.2.2 亏格一 Witten 丛

在 $g = 1$ 情形下，我们仍有万有曲线 $\pi\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}^{*\,1/r}_{1\,k\,,,l}$ 以及扭曲万能旋丛 $\mathcal{S} \to \mathcal{C}$ 和万有 Serre 对偶丛 $\mathcal{J} := \mathcal{S}^{\vee} \otimes \omega_{\pi}$ ，如同 $g = 0$ 情形一样。然而，在此情形下，(2.13) 不成立，因此 $\mathcal{W}$ 不是整个模空间上的向量丛。我们的做法是从 $\mathcal{M}^{*\,1/r}_{1\,k\,l,,}$中去掉“维数跳跃轨迹” $\mathcal{Z}^{dj}$，即 $R^0\pi_*\mathcal{S}$的支撑，并定义

$$\mathcal{W} := (R^0\pi_*\mathcal{J})_+,$$

作为 $\mathcal{M}^{*\,1}$上的向量丛 $\overline{}^{\,r}_{l\,\left\langle \,{}^{1\,k}_{\mathcal{Z}^{dj}},,\right.}$.

定义 2.10. 对于一个 r-旋（结点）圆柱 Σ，若存在$\Sigma' \subseteq \Sigma$ 使得 Σ 是维数跳跃的，则称其为

- Σ' 是 Σ的不可约分支之并；
- Σ' 是亏格一；
- 在 Σ' 上的限制 S 是平凡线丛。

注记 2.11。注意， $S|_{\Sigma'}$ 是平凡的，这意味着Σ' 上的所有内部与边界标记的扭曲均为 0。此外， Σ' 上连接 Σ' 与 $\Sigma \setminus \Sigma'$ 的所有半节点的扭曲均为 0。

定义 2.12。我们将 $\mathcal{M}^{1/r}_{1\,k\,,,l}$ 内维数跳跃的轨迹定义为 $\overline{}$

$$\mathcal{Z}^{dj} := \left\{ [\Sigma] \in \overline{\mathcal{M}}^{1/r}_{1,k,l} \colon \Sigma \text{ is dimension-jump} \right\}.$$

记作

$$\overline{\mathcal{QM}}_{1,k,l} := \overline{\mathcal{M}}^{1/r}_{1,k,l} \setminus \mathcal{Z}^{dj};$$

对于一个 r-旋图 Γ，我们也记作

$$\mathcal{Z}^{dj}_{\Gamma} := \mathcal{Z}^{dj} \cap \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma} \quad \overline{\mathcal{QM}}_{\Gamma} := \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma} \setminus \mathcal{Z}^{dj}_{\Gamma}.$$

注记 2.13。 注意， Σ中的所有非分离边界结点都是 Ramond 节点（其半节点的扭曲为 $r-1$），因此，对于任何具有非分离 NS 边的 Γ，都有 $\mathcal{QM}_\Gamma = \mathcal{M}_\Gamma$。此外，当 r 为偶数时，根据命题 2.5 的第 5 项，Ramond 边界节点不会出现；因此，当 r 为偶数时，我们有 $\mathcal{Z}^{dj} = \emptyset$ 。

例 2.14. 当 r 为奇数时，设 Δ 是一个光滑的 r-spin 图，它只有一个亏格一顶点、k 个边界以及 l 个扭曲为零的内部标记点。那么从拓扑上看，模空间 $\mathcal{M}_\Delta$ 是不交并，由 r 个 $\mathcal{M}_{1,k,l}$ 组成，而维数跳跃轨迹 $\mathcal{Z}^{dj} \cap \mathcal{M}_\Delta$ 是其中一个 $\mathcal{M}_{1,k,l}$。因此，在这种情况下， $\mathcal{QM}_\Delta$ 是不交并，由 $r-1$ 个 $\mathcal{M}_{1,k,l}$组成。

我们定义 Witten 丛 $\mathcal{W}$ 在 $\mathcal{QM}_{1,k,l}$ 上的形式如下：

$$\mathcal{W} := (R^0\pi_*\mathcal{J})_+.$$

在模空间的一个非空连通分支上，该分支参数化带有内部扭曲 $\{a_i\}$ 和边界扭曲 $\{b_j\}$的 r-spin 圆柱，Witten 丛的（实）秩为

$$\frac{2\sum_{i\in I} a_i + \sum_{j\in B} b_j}{r}. \tag{2.15}$$

对于零亏格 Γ，我们将形式地记作 $\mathcal{QM}_\Gamma := \mathcal{M}_\Gamma$。在 [31, §3.2], 中，为每个连通的零亏格或亏格一合法稳定分级 r-spin 图 Γ定义 Witten 丛 $\mathcal{W}_\Gamma \to \mathcal{QM}_\Gamma$ 的典范相对定向 o_Γ 。

2.2.3 Witten 丛的分解性质

在 [6, 31] 中，我们证明了 Witten 纤维丛沿节点满足某些分解性质。现陈述这些性质，更多细节及证明可见 [31] 和 [6, §4.2]。

给定一个亏格为 g，对应于 $g=0$ 或 1 的稳定分级 r-旋图 Γ，令 $\widehat{\Gamma}$ 是一个亏格边或一个收缩边界最分离得到。为陈述 Witten 丛的分解性质，我们需要以下态射

$$\overline{\mathcal{QM}}_{\widehat{\Gamma}}^{1/r} \xleftarrow{q} \overline{\mathcal{M}}_{\widehat{\Gamma}} \times_{\overline{\mathcal{M}}_\Gamma} \overline{\mathcal{QM}}_\Gamma^{1/r} \xrightarrow{\mu} \overline{\mathcal{QM}}_\Gamma^{1/r} \xrightarrow{i_\Gamma} \overline{\mathcal{QM}^*}_{g,k,l}^{1/r}, \tag{2.16}$$

其中 $\overline{\mathcal{M}_\Gamma} \subseteq \overline{\mathcal{M}_{g,\ k,\ l}}$ 是与对偶图 Γ对应的带标记曲面（不带 r-旋结构）模空间。态射 q 将 r-旋结构 S 映至由（2.4）定义的 r-旋结构 S ；其次数为一，但不是同构，因为它不在各向同性群之间诱导同构。态射 μ是到纤维积第二个因子的投影；它是满射态射，且当Γ没有非分离边时是同构。态射 i_Γ 是包含映射。

我们用 $\mathcal{W}$ 和 $\widehat{\mathcal{W}}$ 表示定义在 $\mathcal{QM}^{*1/r}_{g\ k\ ,,l}$ 和 $\mathcal{QM}_{\widehat{\Gamma}}^{1/r}$ 上的 Witten 丛；下面的分解性质展示了这些丛如何通过态射 (2.16) 拉回而彼此关联。

命题 2.15 ([31, 命题 2.20]). 设 Γ 是一个带有单条边 e的零亏格或亏格一稳定分级 r-旋图，且 Γ 是沿着 e分离 Γ 所得的图。那么 *Witten* 丛分解如下：

1. 若 e 是一条 *Neveu–Schwarz* 边，则

$$\mu^* i_\Gamma^* \mathcal{W} = q^* \widehat{\mathcal{W}}. \tag{2.17}$$

2. 若 e 是一条 *Ramond* 边界边，则存在一个正合列

$$0 \to \mu^* i_\Gamma^* \mathcal{W} \to q^* \widehat{\mathcal{W}} \to \underline{\mathbb{R}_+} \to 0, \tag{2.18}$$

其中 $\underline{\mathbb{R}_+}$ 是一个平凡实线丛。

3. 如果 $q^*\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \boxplus$ 是连接两个闭的零亏格顶点的 *Ramond* 内部边，记作 $\mathcal{W}_2$，其中 $\mathcal{W}_1$ 是包含收缩边界尾或 Γ锚点的分支上的 *Witten* 丛，而 $\mathcal{W}_2$ 是另一个分支上的 *Witten* 丛。于是有一个正合列

$$0 \to \widehat{\mathcal{W}}_2 \to \mu^* i_\Gamma^* \mathcal{W} \to \widehat{\mathcal{W}}_1 \to 0. \tag{2.19}$$

此外，若定义 Γ'，使其与 Γ 相同，但每个 *Ramond* 尾处的扭曲为$r-1$，并且 $q': \mathcal{M}_{\widehat{\Gamma}} \times_{\overline{\mathcal{M}}_\Gamma} \mathcal{M}_\Gamma^{1/r} \to \mathcal{M}_{\widehat{\Gamma}'}^{1/r}$ 的定义与 q类似，则有一个正合列

$$0 \to \mu^* i_\Gamma^* \mathcal{W} \to (q')^* \widehat{\mathcal{W}}' \to \underline{\mathbb{C}}^{1/r} \to 0, \tag{2.20}$$

其中，$\widehat{\mathcal{W}}'$ 是 $\mathcal{M}_{\widehat{\Gamma}'}^{1/r}$ 上的 *Witten* 丛，而 $\mathbb{C}^{1/r}$ 是一个 r次幂为平凡丛的线丛。

4. 若 e 是连接一个开顶点与一个闭顶点的分离型 *Ramond* 内部边，记为$q^*\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \boxplus \mathcal{W}_2$，其中 $\mathcal{W}_1$ 是开分支上的 *Witten* 丛（通过 $\mathcal{S}|_{\mathcal{C}_1}$ 定义），而 $\mathcal{W}_2$ 是闭分支上的 *Witten* 丛。则正合列(2.19) 和(2.20) 均成立。

类似地，对于具有单个顶点、无边且带有一条收缩边界尾 t的零亏格 Γ，若 Γ 是沿着 t对 Γ 进行分离，则有如下分解性质：

5. 若 $\mathcal{W}$ 和 $\widehat{\mathcal{W}}$ 分别表示$_{,,l}$ 和 $\mathcal{M}_{\widehat{\Gamma}}^{1/r}$ 上的 *Witten* 丛，则这个序列(2.18)成立。

注记 2.16. 若边 e是一个 Neveu–Schwarz 边界边，则映射 q 是同构。在这种情况下，该命题意味着 Witten 丛在粘合态射 $\mu \circ q^{-1}$下的拉回为：$\mathcal{QM}^{*\,1/r}_{\widehat{\Gamma}} \to \mathcal{QM}^{*\,1/r}_{g\,k\,,,l}$。

记号 2.17. 假设 Γ只有 NS 边界边，且 Γ 有 t 个连通分支$\Delta_1, \dots, \Delta_t$。若用$\mathcal{W}_{\Delta_i} \to \mathcal{QM}_{\Delta_i}$ 表示相应的 Witten 丛，则有$\widetilde{\mathcal{W}} = \boxplus_{i=1}^t \mathcal{W}_{\Delta_i}$。对于 $\mathcal{W}_\Gamma = i_\Gamma^* \mathcal{W} \to \mathcal{QM}_\Gamma$ 的多截面 s_Γ 和 $\mathcal{W}_{\Delta_i}$ 的多截面 s_{Δ_i}，滥用记号时，只要 $\mu^* s_\Gamma = q^* \left(\boxplus_{i=1}^t s_{\Delta_i}\right)$，我们就将 $s_\Gamma = \boxplus_{i=1}^t s_{\Delta_i}$ 记作

2.2.4 相干截面与组装算子

沿用命题 2.15 中的记号，设 Γ 是一个零亏格或亏格一的连通分级 r-spin 图，e 是 Γ 的一条分离边，且 $\mathcal{QM}_{\widehat{\Gamma}_1}$ 和 $\mathcal{QM}_{\widehat{\Gamma}_2}$ 是 Γ 的两个连通分支：$= $。我们记作 $q^*\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \boxplus \mathcal{W}_2$，其中 $\mathcal{W}_1$ 和 $\mathcal{W}_2$ 是 $\mathcal{QM}_{\widehat{\Gamma}_1}$ 和 $\mathcal{QM}_{\widehat{\Gamma}_2}$ 上 Witten 丛的拉回。给定 $\mathcal{W}_1$ 和 $\mathcal{W}_2$ 的截面 s_1 和 s_2，我们希望构造 $\mathcal{W} \to \mathcal{QM}_\Gamma$ 的一个截面。当 e 是一条 NS 边界边时，根据注释 2.16，我们可以将 s_1，s_2 拼接成 $\mathcal{W} \to \mathcal{QM}_\Gamma$ 的一个截面。然而，当 e 是一条内部边时，我们无法直接拼接 s_1 和 s_2。对于内部 NS 边，这是因为 $\mathcal{W}$ 的自同构群与直和的自同构群并不相同。Ramond 内部边则带来了一个更根本的问题，因为根据上面的命题 2.15，$\mathcal{W}$ 无法自然地分解为 $\mathcal{W}_1$，$\mathcal{W}_2$，的直和。为了构造 $\mathcal{W} \to \mathcal{QM}_\Gamma$ 的一个截面，我们需要在 [4]，中引入组装算子，它基于以下关于相干多重截面的技术概念。

设 Γ_c 为一个带有锚点 $t \in T^I(\Gamma_c)$ 的零亏格连通稳定 r-旋对偶图，即Γ_c 不含开顶点或收缩边界尾。

- 若 tw(t) $= -1$，令 $\mathcal{J} \to \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma_c}$ 为式 (2.11) 中的万有 Serre 对偶丛，我们定义$\mathcal{J}' := \mathcal{J} \otimes \mathcal{O}(r\Delta_{z_t})$，其中 Δ_{z_t} 是万有曲线中与锚点 t对应的除子。我们在 $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma_c}$ 上定义轨形丛 $\mathcal{R}_{\Gamma_c}$，使得 $\mathcal{R}_{\Gamma_c} := \sigma_{z_t}^* \mathcal{J}'$，其中 σ_{z_t} 是万有曲线中与锚点 t 对应的截面。我们也滥用记号来

表示该丛的全空间为 $\mathcal{R}_{\Gamma_c}$。记投影为 $\wp\colon \mathcal{R}_{\Gamma_c} \to \mathcal{M}_{\Gamma_c}$。记 $R^0\pi_*\mathcal{J}'$ 为 $\mathcal{R}_{\Gamma_c}$上的丛 $\mathcal{W}$。

- 若 $\mathsf{tw}(t) \neq -1$，我们令 $\overline{\mathcal{R}}_{\Gamma_c} := \overline{\mathcal{M}}_{\Gamma_c}$，并令 $\mathcal{W} \to \overline{\mathcal{R}}_{\Gamma_c}$ 与 $\mathcal{W} \to \mathcal{M}_{\Gamma_c}$相同。

定义 2.18 ([4, 定义 4.2])。设 Γ_c 是一个带有锚点 $t \in T^I(\Gamma_c)$ 的连通零亏格稳定 r-spin 对偶图，且设 s 是定义在子集 $U \subset \mathcal{R}_{\Gamma_c}$上的 $\mathcal{W}$的截面。若满足以下条件之一，我们称 s为相容：扭曲 $\overline{\mathsf{tw}}(t) \neq -1$；或者在 $\mathsf{tw}(t) = -1$的情况下，对于任意点$\zeta = (C, u_t) \in U$，该点对应一个分次 r-spin 圆盘 C，且对于线丛 $J' := J \otimes \mathcal{O}(r[z_t]) \to C$在$z_t \in C$上方纤维中的元素 u_t，元素 $s(\zeta) \in H^0(J')$ 满足

$$\mathrm{ev}_{z_t}\, s(\zeta) = u_t.$$

相容多重截面 s 定义为一个多重截面（见 [4, 附录 A]），其局部分支均相容。

设 s 是 $\mathcal{W} \to \mathcal{R}_{\Gamma_c}$ 的相容多重截面。注意，在 $\mathsf{tw}(t) = -1$ 的情形下，对于任意 $\zeta \in \mathcal{M}_{\Gamma_c} \hookrightarrow \mathcal{R}_{\Gamma_c}$，取值 $\mathrm{ev}_{z_t}(s(\zeta))$ 等于零，因此 $s(\zeta)$ 是由 J 的一个多重截面诱导的。换言之，将相容多重截面 s 限制到 $\mathcal{M}_{\Gamma_c}$，可典范地识别为 $\mathcal{W} \to \mathcal{M}_{\Gamma_c}$ 的一个多重截面；我们将这个诱导的多重截面记为 $s_\circ$。在 $\mathsf{tw}(t) \neq -1$ 的情形下，我们记为 $s = s_\circ$。

引理 2.19 ([32, 引理 2.12])。设 Γ_c 是一个带有锚点 t 的连通分次 r-*spin* 图。对于 $\mathcal{W} \to \mathcal{M}_{\Gamma_c}$ 的任意多截面 $\hat{s}$，都存在 $\mathcal{W} \to \mathcal{R}_{\Gamma_c}$ 的相容多重截面 s，满足 $\hat{s} = s_\circ$。

给定一个连通的分次 r-旋图 Γ，它含有一个开顶点或一个收缩边界，令e 为一条分离内部边 $e \in E^I_{nsp}(\Gamma)$。我们将 $\mathsf{detach}_e\Gamma$的连通分支记作 Γ_o 和 Γ_c，其中 Γ_o 含有一个开顶点或一个收缩边界尾（因此 Γ_c 含有一个锚点）。利用 [4, §4.1.3], 中定义的组装算子 $\maltese$，我们可以将 $\mathcal{W} \to \mathcal{QM}_{\Gamma_o}$的一个多截面 s_o与 $\mathcal{W} \to \mathcal{R}_{\Gamma_c}$的一个相容多截面 s_c粘合起来，得到 $\mathcal{W} \to \mathcal{QM}_\Gamma$的一个多截面 $s_o \maltese s_c$。根据构造，多截面 $s_o \maltese s_c$满足以下性质。

引理 2.20. 采用上述记号，令 $\pi_o\colon \mathcal{QM}_\Gamma \to \mathcal{QM}_{\Gamma_o}$和 $\overline{\pi_c\colon \mathcal{QM}_\Gamma \to \mathcal{M}_{\Gamma_c}}$为投影。对于$\mathcal{W} \to \overline{\mathcal{QM}_{\Gamma_o}}$的任意多截面 s_o 以及 $\mathcal{W} \to \mathcal{R}_{\Gamma_c}$的一个相容多截面 s_c，多截面 $s_o \maltese s_c$ 在 $p \in \mathcal{QM}_\Gamma$ 处为零，当且仅当 $s_c(\pi_c(p)) = 0$ 且 $s_o(\pi_o(p)) = 0$。

更多细节和精确定义请参阅 [4, §4.1.3]。

2.2.5 相对余切线丛

开 r-旋理论中的其他重要线丛，是内部标记点处的相对余切线丛 或典范线丛 。这些线丛已在 [23], 中定义于稳定标记曲面（不带旋结构）的模空间$\mathcal{M}_{g,k,l}$ 上，其纤维为 $T^*_{z_i}\Sigma$。等价地，这些线丛是通常的相对余切线丛 $\mathbb{L}_i \to \mathcal{M}_{g,k+2l}$ 在加倍映射 $\mathcal{M}_{g,k,l} \to \mathcal{M}_{g,k+2l}$ 下的拉回；该映射将 Σ 映至 $C = \Sigma \sqcup_{\partial\Sigma} \Sigma$。丛$\mathbb{H}_i \to \mathcal{M}^{1/r}_{g\,k\,,,l}$ 是该相对余切线丛在$\mathcal{M}_{g,k,l}$ 下的拉回，其中态射 $\mathsf{For}^{\mathrm{spin}}$ 遗忘旋结构。注意，$\mathbb{L}_i$ 是一个复线丛，因此带有典范定向。更多讨论见 §3。

2.3 零亏格 Witten 丛截面的正性边界条件

在构造零亏格 r-旋理论 [4, 32], 时，Witten丛 $\mathcal{W}$的截面正性边界条件是一个重要概念。

设 Γ 是一个分级的（零亏格或亏格一） r-旋图，我们将边界边$e \in E^B(\Gamma)$，或对应的节点称为<解剖 id='7'> 正，如果它的一条半边 h_1 e 满足 $\mathrm{alt}(h_1) = 0$ 且 $\mathrm{tw}(h_1) > 0$。对于分级的 r- 旋图 Γ ，记

$$H^+(\Gamma) := \left\{h \in H^B(\Gamma) \colon \text{either } h \text{ or } \sigma_1(h) \text{ is positive}\right\},$$

$$\partial^+\Gamma := \{\Delta \in \partial^!\Gamma \colon H^+(\Delta) \neq \emptyset\}.$$

$$\partial^{CB}\Gamma := \{\Delta \in \partial^!\Gamma \colon H^{CB}(\Delta) \neq \emptyset\}$$

and

$$\partial^*\Gamma := \{\Delta \in \partial^!\Gamma \colon H^I_{nsp} = H^+(\Delta) = \emptyset\}$$

对于一个分次的 r-旋量图 Γ，我们定义

$$\partial^+\overline{\mathcal{M}}_\Gamma := \bigcup_{\Lambda\in\partial^+\Gamma} \mathcal{M}_\Lambda, \quad \overline{\mathcal{PM}}_\Gamma := \overline{\mathcal{QM}}_\Gamma \setminus \partial^+\overline{\mathcal{M}}_\Gamma, \quad \partial^{CB}\overline{\mathcal{M}}_\Gamma := \bigcup_{\Lambda\in\partial^{CB}\Gamma} \mathcal{M}_\Lambda$$

类似地， $\mathcal{PM}^{1/r}_{g\,B,\ ,\ I} \subseteq \mathcal{M}^{1/r}_{g\,B,\ ,\ I}$，$\overline{\mathcal{PM}^{1/r}_{g\,k,\ ,\ l}} \subseteq \mathcal{M}^{1/r}_{g\,k,\ ,\ l}$ 是对光滑 Γ 取不交并。

定义 2.21. 设 C 是一个分次的 r-旋量曲面， $q \in C$ 是一个点，且 $v \in \mathcal{W}_C$。 v 在 q 处的取值为 $\mathrm{ev}_q(v) := v(q) \in J_q$。特别地，若 q 是一个收缩边界节点，或是 Σ 上一个并非合法特殊点的点，则若 $\mathrm{ev}_q(v)$ 相对于分次为正，我们称 v 在 q 处正向取值。

粗略地说，对于零亏格 Γ， $\mathcal{W} \to \mathcal{M}_\Gamma$ 的正多截面是满足 $\partial^+\mathcal{M}_\Gamma \cup \overline{\partial^{CB}\mathcal{M}_\Gamma}$ 处某些正性约束的多截面。对于多截面 s，$\partial^{CB}\mathcal{M}_\Gamma$ 处的正性约束规定为： s 在收缩边界节点处的取值为正。对于多截面 s，$\partial^+\mathcal{M}_\Gamma$ 处正性约束的一种天真定义是： s 在非法半节点处的取值为正；然而，这一约束过强，典范多截面可能不存在（见例 3.23], [4,）。

与 [4], 中一样，我们不在 $\partial^+\mathcal{M}_\Gamma$处施加正性约束，而是在其邻域处施加正约束（因此我们在$\mathcal{PM}_\Gamma$上工作）；正取值将要求在圆盘边界上的某些“区间”内成立，现回顾如下：应将它们视为一族光滑变化的区间，用以逼近带节点圆盘中边界结点的邻域。

注记 2.22。另一种等价的边界条件定义方式，是在$\mathcal{M}_\Gamma$ 上而非 $\mathcal{PM}_\Gamma$ 上工作：允许 Witten 丛的截面在边界上消失，但要求其导数满足类诺伊曼边界条件。遵循 [4] ，我们选择在 $\mathcal{PM}_\Gamma$.上工作 ——

定义 2.23 ([4, 定义 3.4])。设 Γ 是一个零亏格分级 r-旋图，且 $\Lambda \in \partial\Gamma$。若开集 $U \subseteq \mathcal{M}_\Gamma$ 与分层 $\mathcal{M}_\Xi$ 不相交，其中 $\Xi \in \overline{\partial^!\Gamma}$ 满足 $\Lambda \notin \partial^!\Xi$，则称$U \subseteq \mathcal{M}_\Gamma$ 为相对于 Γ 的-集。若 $U \subseteq \mathcal{M}_\Gamma$ 是 $u \in \mathcal{M}_\Gamma$ 的一个邻域，且它是相对于 Γ 的 Λ-集，则称 $U \subseteq \mathcal{M}_\Gamma$ 为相对于 u 的 Γ 的Λ-邻域。由于满足 $\Lambda \in \partial^!\Gamma$的光滑图 Γ 唯一，因此对于光滑的 Γ ，我们将相对于它的 Λ-邻域简称为 Λ-邻域。

设 Σ 是一个分次标记圆盘的优选半边。我们将与 S^1 同胚的空间 S 记作 $\partial\Sigma = S/\sim$ ，并将 $q\colon S \to \partial\Sigma$ 记作商映射。区间 I 是 S 中一个连通开集在 q 下的像。注意， I 在商映射 q 下的原像是一个开集与有限个孤立点的并集。

设 $C \in \mathcal{M}_\Lambda$，并令 n_h 为与半边 $h \in H^B(\Lambda)$ 对应的边界半节点。记 $N\colon \widehat{C} \to C$ 为归一化映射，并写作 $\widehat{\Sigma} = N^{-1}(\Sigma)$。若以下两个条件成立，我们称 n_h 属于区间 I：

- 对应的节点 N（n_h）位于 I 中；
- $N^{-1}(I)$包含一个以 n_h 为起点的半开区间，以及一个以n_{σ_1}为终点的半开区间$_{(h)}$，其中起点和终点由 $\partial\Sigma$的典范定向确定。

设 U 为一个 Λ-集合。我们用 $\pi : |\mathcal{C}| \to U$ 表示粗通用曲线，用 $\Sigma_u \subseteq \pi^{-1}(u)$表示纤维中的优选半边。对于 U，一个 Λ-区间族 $\{I_h(u)\}_{h\in H^+(\Lambda)\ u\in U}$ 是指对每个 $h \in H^+(\Lambda)$和 $u \in U$，选择一个区间 $I_h(u)$，使得：

1. 每个 $I_h(u)$的端点相对于限制在 U上的万有曲线的光滑结构光滑变化。

若 $\Lambda \in \partial^!\Xi$ 且 h 属于单射 $\iota\colon H^+(\Xi) \to H^+(\Lambda)$的像，则称 Ξ 是一个远离 $h \in H^+(\Lambda)$的光滑化 Λ。此外，我们还要求：

2. 如果 $h \notin \{h', \sigma_1(h')\}$，则有 $I_h(u') \cap I_{h'}(u') = \emptyset$。如果 $h = \sigma_1(h')$，则当且仅当 $\cap I_{h'}(u') \neq \emptyset$，存在某个光滑化 Ξ，使得 Λ 远离 h 时 $I_h(u') \cap I_{h'}(u') \neq \emptyset$。在此情况下，$I_h(u')\cap I_{\sigma_1(h)}(u')$ 恰好由节点 $N(n_h)$ 构成。
3. $I_h(u')$中没有标记点。区间 $I_h(u')$ 至多包含一个半节点；当且仅当 $u' \in \mathcal{M}_\Xi$ 存在某个光滑化 Ξ，使得 Λ 远离 h 时，它包含一个半节点。此时，属于 $I_h(u')$ 的半节点是 n_h。

如果模空间点 u 表示稳定分次圆盘 C，我们将 $I_h(C)$ 写作 $I_h(u)$。图2 展示了节点圆盘和光滑圆盘中区间的局部图景。

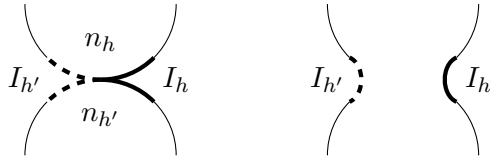


图2：表示区间 I_h 和 $I_{h'}$ 的较粗线条分别对应半节点 n_h和 $n_{h'}$，绘制在较细的边界线之上。右侧的像表示模空间中的一个点，它接近左侧的像，此处节点已被光滑化。

定义 2.24. 设 C 是一个带分次的 r-旋圆盘，且 $A \subseteq \partial\Sigma$ 是不含合法特殊点的子集。若对于每个$x \in A$，$w \in \mathcal{W}_\Sigma$ 关于分次均满足 $\mathrm{ev}_x(w)$ 为正，则称元素 $w \in \mathcal{W}_\Sigma$ 在 A 处正向取值。

设 Γ是一个零亏格带分次图，U 是关于 Γ的一个 Λ-集合，$\{I_h\}$ 是 U的一族 Λ-区间。给定一个定义在包含 $U\cap\mathcal{PM}_\Gamma$的 $\mathcal{PM}_\Gamma$ 子集上的 $\mathcal{W}$的多截面 s，若对于任意 $u' \in U \cap \mathcal{PM}_\Gamma$，任意局部分支 $s_i(u')$ 在每个 $I_h(u')$ 处均正向取值，则称 s 是 (U, I)-正的 （关于 Γ）。

我们称定义在 $W \cap \mathcal{PM}_\Gamma$ 中的多截面 s （其中 W 是 $u \in \mathcal{M}_\Lambda$ 的一个邻域）相对于 Γ 在 u 附近为正，若存在 u 的一个 Λ-邻域 $U \subseteq W$，以及一族由 Λ 参数化的区间 $I_*(-)$（针对 U），使得 s 是 $(U,\ I)$-正的。

若 W 是 $\partial^+\mathcal{M}_\Gamma$ 的一个邻域，则定义在集合

$$U_{+,\Gamma} = \left(W \cup \partial^{CB}\overline{\mathcal{M}}_\Gamma\right) \cap \overline{\mathcal{PM}}_\Gamma \tag{2.21}$$

上的多截面 Γ 若在 $\partial^+\mathcal{M}_\Gamma$ 的每一点附近都为正（相对于 Γ），并且在收缩边界节点处正向取值，则称其为正。如上所述，若 Γ 光滑，我们省略“相对于 Γ”这一说法。

对于亏格零的 r-spin 图 Γ，根据 [4, 命题 3.20]，$\mathcal{W}_\Gamma \to \mathcal{PM}_\Gamma$总是存在正的多截面。然而，对于亏格一 Γ，尽管我们可以为 Witten 丛的多截面定义类似的正性条件，但正的多截面可能并不存在。

2.4 点插入技巧

正如闭的 r-spin 理论研究 r-spin 曲线模空间上的交叉理论，开 r-spin 理论（亏格零或亏格一）研究 r-spin 曲面 $\mathcal{M}_{g\ B}^{1/r}{}_{,,I}$的模空间上的交叉理论。然而，由于 $\mathcal{M}_{g\ B}^{1/r}{}_{,,I}$ 是一个带角轨形，交叉理论并未得到良好定义。分次结构使我们能够借助正性这一概念处理某些类型的边界（见 §2.3）。点插入点插入这一过程同样依赖于分次，由 [31]提出，用以处理其余边界：我们可以将另一个模空间沿着这些分层粘接到 $\mathcal{M}_{g\ B}^{1/r}{}_{,,I}$ 上，从而将它们消去。

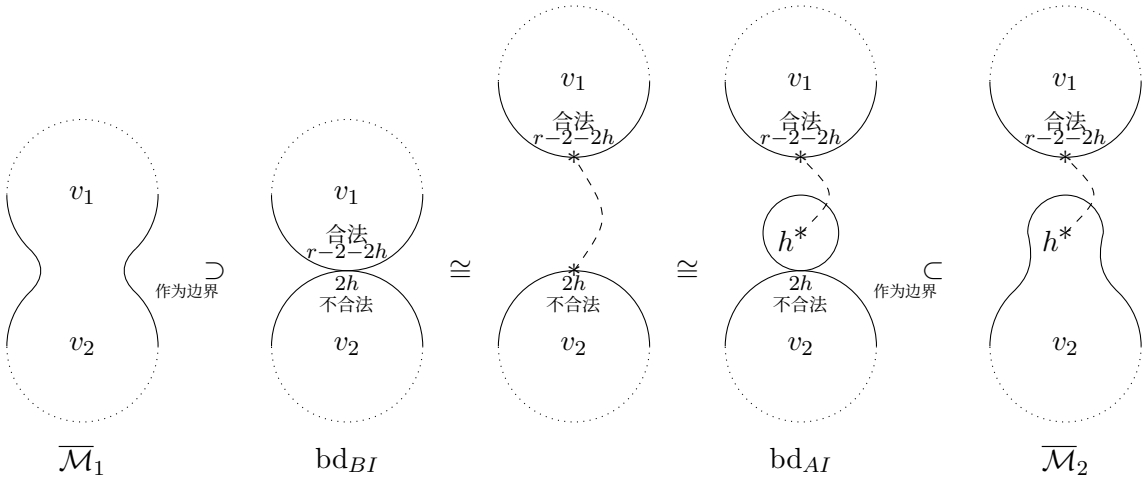


图 3：在点插入过程中，我们沿着同构边界 bd_{BI} 和 bd_{AI} 将 $\mathcal{M}_1$ 与 $\mathcal{M}_2$ 粘合在一起。第一个同构由边界 NS 节点的分解性质得出；第二个同构成立，是因为模空间 $\mathcal{M}^{1/r}_{0,\{r-2-2h\},\{h\}}$（图中由最小的气泡表示）是一个单点。点插入过程产生的新标记点由 $*$ 表示；新标记点之间的虚线表示它们来自同一个节点。

更准确地说，如图 3 所示，设 $\mathcal{M}_1$ 是一个 r-自旋曲面的模空间，$\mathrm{bd}_{BI} \subset \mathcal{M}_1$ 是一个对应于 NS 边界节点的边界，非法半节点处的扭曲为 $2h$。我们可以沿着边界 bd_{BI} 将另一个模空间 $\mathcal{M}_2$ 粘合到 $\mathcal{M}_1$ 上，其中 $\mathcal{M}_2$ 具有一个与 bd_{BI} 微分同胚的边界 bd_{AI}。注意， $\mathcal{M}_2$ 是一个可能不连通的 r-自旋曲面的模空间，它首先通过分离边界节点获得，然后将非法扭曲-$2h$边界标记点“插入”到内部，作为扭曲-h 内部标记点。沿其粘合模空间的边界分层称为伪边界。

反复应用这一过程，我们得到一个粘合模空间（见 [31, §4.6]）。预粘合空间中的一个点表示若干分次 r-旋曲面的不交并，以及在点插入过程中同时出现的每一对边界标记和内部标记之间由虚线连接的组合数据。粘合空间中的一个点表示这类对象在由点插入过程诱导的等价关系下的一个等价类。

在本文中，我们只进行“$\mathfrak{h} = 0$ 点插入”， [31], 即，当且仅当非法半节点的扭曲为零时，我们才会在 NS 边界节点 n 处进行点插入， n 即，图 3 中的情形 $h = 0$ 。

2.4.1 $(r,\ 0)$-曲面、$(r,\ 0)$-图与模空间

现在我们更正式地描述预粘合模空间中的对象。

定义 2.25 ([31, 定义 4.3])。 一个 (r,0)-曲面是由合法连通稳定分次 r-旋曲面（即这些连通分支）组成的集合，满足 Fix(ϕ) $\neq \emptyset$ 且所有边界扭曲均为 $r-2$，以及

1. 边界尾集合 B^{PI} （由虚线表示）与内部尾集合 I^{PI} 之间的一个双射；前者的扭曲为 $r-2$，后者的扭曲为 0，且这些内部尾不是收缩边界节点；2. 对未配对边界尾集合 B^{up} 和内部尾集合 I^{up} 中的尾进行标记，这些尾不是收缩边界节点，即 标记 $I^{up} = \{1,2,\ldots,|I^{up}|\}$ 和 $B^{up} =\{1,2,\ldots,|B^{up}|\}$。

我们要求，在这组曲面中，不存在亏格零的稳定分级 r-旋量圆盘仅有两个尾且二者均属于 $I^{PI} \sqcup B^{PI}$ 的情形。

- 我们称一个 (r，0)-曲面为 (r，0)-圆盘（亏格零），如果该集合中的所有连通曲面均为亏格零，并且图 **G**（其顶点是集合中的连通圆盘；若两个顶点分别包含一对与某条虚线对应的点，则二者之间有一条边）是一个连通的亏格零图。

- 若以下两个条件之一成立，我们称一个（r，0）-曲面为（r，0）-圆柱（亏格一）。

  ˆ– 集合中的所有连通曲面均为零亏格，且图**G**是连通亏格一图。– 集合中有一个连通曲面为亏格一，而其他所有连通曲面均为零亏格，且图**G**是连通亏格零图。

注 2.26: （r，0）中的 0 指的是 $\mathfrak{h}=0$，见记号 [31, 32]。

ˆ上文提到的图**G** 刻画了一个（r，0）-曲面的拓扑类型。由于（r，0）-曲面所含集合中的每个分次 r-spin 曲面都与一个分次 r-spin 图相关联，因此，将相应的分次 r-spin 图赋给**G** 的每个顶点，并为**G**的每条边指定相应的一对尾，我们就得到以下组合对象；它可以看作**G**的一个精细化版本。

定义 2.27 ([31, 定义 4.7])。A (r,0)-图**G** 由以下部分组成

- 一个集合 V(**G**)，其中包含连通的合法稳定分级 r-旋图，且每个图至少有一个开顶点或收缩边界尾，并且它们的边界尾的扭曲均为 $r-2$;
- 两个集合的划分

$$\bigsqcup_{\Gamma\in V(\mathbf{G})} \big(T^I(\Gamma)\backslash H^{CB}(\Gamma)\big) = I(\mathbf{G}) \sqcup I^{PI}(\mathbf{G})$$

  and

$$\bigsqcup_{\Gamma\in V(\mathbf{G})} T^B(\Gamma) = B(\mathbf{G}) \sqcup B^{PI}(\mathbf{G})$$

  使得所有 $a \in I^{PI}$(**G**) 的扭曲均为 0;

- 一个边的集合（即虚线）

$$E(\mathbf{G}) \subseteq \{(a,b)\colon a \in I^{PI}(\mathbf{G}), b \in B^{PI}(\mathbf{G})\}$$

  由此在 δ I^{PI}(**G**)与 B^{PI}(**G**)之间建立一一对应;

• 以 $\{1,2,\ldots,l(\mathbf{G})$标记集合 $I(\mathbf{G}):=|I(\mathbf{G}),|\}$ 并以 $\{1,2,\ldots,k(\mathbf{G})$标记集合 $B(\mathbf{G}):=|B(\mathbf{G})|\}$。

我们要求

1. 不存在满足 $H^I(\Gamma)\subseteq I^{PI}(\mathbf{G})$ $H^B(\Gamma)\subseteq B^{PI}(\mathbf{G})$ 且 $|H^I(\Gamma)|+|H^B(\Gamma)|\leq 2$ 的 $\Gamma\in V(\mathbf{G})$;

ˆ 我们按通常的方式定义辅助图 $\mathbf{G}$ 如下：$\mathbf{G}$ 的顶点集合为 $V(\mathbf{G})$，$\mathbf{G}$ 的边集合为 $E(\mathbf{G})$；元素 $(a,b)\in E(\mathbf{G})$ 对应于顶点 Γ_a 和 Γ_b 之间的一条边，其中 $a\in T^I(\Gamma_a)$ 且 $b\in T^B(\Gamma_b)$。我们还要求

ˆ 2. 图 $\mathbf{G}$是连通的。

$(r,0)$-图 $\mathbf{G}$ 的亏格定义为

$$g(\mathbf{G})=\sum_{\Gamma\in V(\boldsymbol{G})}g(\Gamma)+g(\hat{\mathbf{G}}),$$

ˆ 其中 $g(\Gamma)$ 是分次 r-旋图 $\Gamma\in V(\boldsymbol{G})$ 的亏格，而 $g(\mathbf{G})$ 是辅助图 $\mathbf{G}$ 的亏格。

本文仅关注零亏格和亏格一的情形。

定义 2.28。对于一个亏格一（r，0）-图 $\mathbf{G}$，我们定义一个子集

$$I^{PI}_{sp}(\mathbf{G})\subseteq I^{PI}(\mathbf{G})\quad(\text{respectively } B^{PI}_{sp}(\mathbf{G})\subseteq B^{PI}(\mathbf{G}))$$

其由 x属于 I^{PI}（$\mathbf{G}$）（分别为 B^{PI}（$\mathbf{G}$））的所有元素组成，使得图 $\mathrm{Detach}^{(x,\delta(x))}$ˆ$\mathbf{G}$ˆ（通过移除 $\mathbf{G}$ 中对应于对（x，δ（x））的边而得到）是不连通的。这些尾由分离边界结点的点过程中生成。我们还定义

$$I^{PI}_{nsp}(\mathbf{G}):=I^{PI}(\mathbf{G})\setminus I^{PI}_{sp}(\mathbf{G})\quad(\text{respectively } B^{PI}_{nsp}(\mathbf{G}):=B^{PI}(\mathbf{G})\setminus B^{PI}_{sp}(\mathbf{G})),$$

它们是在非分离边界结点的点插入过程中生成的尾。此外，我们定义一个子集

$$I^{PI}_{sp,1}(\mathbf{G})\subseteq I^{PI}_{sp}(\mathbf{G})\quad(\text{respectively } B^{PI}_{sp,1}(\mathbf{G})\subseteq B^{PI}_{sp}(\mathbf{G}))$$

其由 x属于 I^{PI}_{sp}（$\mathbf{G}$）（分别为 B^{PI}_{sp}（$\mathbf{G}$））的所有元素组成，满足：ˆ$\mathbf{G}x$（即 $\mathrm{Detach}^{(x,\delta(x))}\mathbf{G}$ 中包含 x 的连通分支）是亏格一的，或者 $\mathbf{G}x$ 的某个顶点是一个亏格一 r-spin 图。我们还定义

$$I^{PI}_{sp,0}(\mathbf{G}):=I^{PI}_{sp}(\mathbf{G})\setminus I^{PI}_{sp,1}(\mathbf{G})\quad(\text{respectively } B^{PI}_{sp,0}(\mathbf{G}):=B^{PI}_{sp}(\mathbf{G})\setminus B^{PI}_{sp,1}(\mathbf{G})).$$

对于任意 $\Gamma\in V(\boldsymbol{G})$，我们将 Γ 上的根的集合定义为

$$RT(\Gamma):=T(\Gamma)\cap(B^{PI}_{sp,0}(\mathbf{G})\sqcup I^{PI}_{sp,0}(\mathbf{G})\sqcup I^{PI}_{nsp}(\mathbf{G})\sqcup B^{PI}_{nsp}(\mathbf{G})).\tag{2.22}$$

注记 2.29. 对于任意亏格一的 $(r,0)$-图 $\mathbf{G}$ 和 $\Gamma\in V(\mathbf{G})$，如果 Γ 是一个亏格一的 r-旋图，那么我们总有 $RT(\Gamma)=\emptyset$。对于零亏格的 Γ，有两种可能：

1. $RT(\Gamma)\subset I^{PI}_{nsp}(\mathbf{G})\sqcup B^{PI}_{nsp}(\mathbf{G})$ 是一个二元素集合;
2. $RT(\Gamma)\subset I^{PI}_{sp,0}(\mathbf{G})\sqcup B^{PI}_{sp,0}(\mathbf{G})$ 是一个单元素集合。

因此，对于$\mathbf{G}$的任意亏格零顶点 Γ，我们可以将其视为一个有根或双根的 r-旋图。

定义 2.30。设$\mathbf{G}$是一个（r，0）-图。设e是某个$\Gamma \in V$（$\mathbf{G}$）的一条边或一个收缩边界尾。由于T^I（Γ）$\backslash H^{CB}$（Γ）$= T^I$（$d_e\Gamma$）$\backslash H^{CB}$（$d_e\Gamma$）且T^B（Γ）$= T^B$（$d_e\Gamma$），我们将沿e对$\mathbf{G}$进行光滑化，定义为将Γ替换为$d_e\Gamma$后得到的（r，0）-图$d_e\mathbf{G}$。

若所有 $\Gamma \in V(\mathbf{G})$ 都是光滑稳定的分次 r-旋图，则称$\mathbf{G}$为光滑。我们用$\mathrm{GPI}_g^{r\,0,}$表示所有亏格-g(r,0)-图的集合，用$\mathrm{GPI}_{g\ B^{,,,}I}^{r\ 0}$表示满足 $I(\mathbf{G}) = I$ 且 $B(\mathbf{G}) = B$ 的所有亏格-g(r,0)-图$\mathbf{G}$的集合，用$\mathrm{sGPI}_{g\ B^{,,,}I}^{r\ 0}$表示集合

$$\mathrm{sGPI}_{g,B,I}^{r,0} := \{\mathbf{G} \in \mathrm{GPI}_{g,B,I}^{r,0} \colon \mathbf{G} \text{ smooth}\}.$$

定义 2.31. 两个(r,0)-图 $\mathbf{G_1}$ 和 $\mathbf{G_2}$ 之间的同构由一组稳定分次 r-旋图的同构构成，这些同构对应于 $V(\mathbf{G_1})$ 和 $V(\mathbf{G_2})$ 中的元素，并在 $V(\mathbf{G_1})$ 和 $V(\mathbf{G_2})$ 之间诱导一个双射，同时保持划分、虚线和标记。

对于每个$\mathbf{G} \in \mathrm{GPI}_g^{r\,0,}$，令 $\mathrm{Aut}\mathbf{G}$ 为$\mathbf{G} \in \mathrm{GPI}_g^{r\,0,}$的自同构群，则 $\mathrm{Aut}\mathbf{G}$ 在乘积 $\prod_{\Gamma\in V(\mathbf{G})} \mathcal{M}_\Gamma$ 上有自然作用。我们定义

$$\overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{G}} := \left(\prod_{\Gamma\in V(\mathbf{G})} \overline{\mathcal{M}}_\Gamma\right) \Big/ \mathrm{Aut}\,\mathbf{G}$$

且（当$\mathbf{G}$ 的亏格为零或一时）

$$\overline{\mathcal{QM}}_{\mathbf{G}} := \left(\prod_{\Gamma\in V(\mathbf{G})} \overline{\mathcal{QM}}_\Gamma\right) \Big/ \mathrm{Aut}\,\mathbf{G}$$

and

$$\overline{\mathcal{PM}}_{\mathbf{G}} := \left(\prod_{\Gamma\in V(\mathbf{G})} \overline{\mathcal{PM}}_\Gamma\right) \Big/ \mathrm{Aut}\,\mathbf{G}.$$

注意，对于零亏格$\mathbf{G}$，我们总有 $\mathcal{M}_{\mathbf{G}} = \mathcal{QM}_{\mathbf{G}}$

2.4.2 $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$上的 Witten丛

设 $\mathcal{W}_\Gamma$ 为 $\mathcal{QM}_\Gamma$上的 Witten 丛，我们将 $\mathcal{QM}_{\mathbf{G}}$ 上的 Witten 丛 $\mathcal{W}_{\mathbf{G}}$ 定义为

$$\mathcal{W}_{\mathbf{G}} := \left(\boxplus_{\Gamma\in V(\mathbf{G})} \mathcal{W}_\Gamma\right) \Big/ \mathrm{Aut}\,\mathbf{G}.$$

注 2.32. 本文中，当我们只考虑零亏格或亏格一的（$r, \mathfrak{h}$）图$\mathbf{G}$时，这两种情况下自同构群 $\mathrm{Aut}\mathbf{G}$ 总是平凡的。我们用 $\pi_{\mathbf{G}\to\Gamma}$ 表示投影映射

$$\pi_{\mathbf{G}\to\Gamma} \colon \overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{G}} \to \overline{\mathcal{M}}_\Gamma.$$

设 o_Γ 为 $\mathcal{QM}_\Gamma$上的 $\mathcal{W}_\Gamma$ 的典范相对定向，我们将 $\mathcal{QM}_{\mathbf{G}}$上的 $\mathcal{W}_{\mathbf{G}}$ 的典范相对定向 $o_{\mathbf{G}}$ 定义为

$$o_{\mathbf{G}} := (-1)^{|E(\mathbf{G})|} \bigboxtimes_{\Gamma\in V(\mathbf{G})} o_\Gamma. \tag{2.23}$$

注意， $o_{\mathbf{G}}$ 与楔积的顺序无关，因为对于每个 $\Gamma \in V(\mathbf{G})$，我们都有

$$\dim \overline{\mathcal{M}}_\Gamma \equiv \mathrm{rank}\, \mathcal{W}_\Gamma \mod 2.$$

定义 2.33. 给定一个有限的内部标记集合 I，其扭曲为 $\{0,1,\dots,r-1\}$，以及一个有限的边界标记集合 B，其扭曲为 $r-2$，我们将带有标记 B,I 的 $(r,0)$-曲面的模空间 $\overline{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I}$ 定义为

$$\overline{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I} := \bigsqcup_{\mathbf{G}\in \mathrm{sGPI}^{r,0}_{0,B,I}} \overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{G}}. \tag{2.24}$$

对于 $g=0,\ 1$，我们还定义子空间

$$\overline{\mathcal{QM}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I} := \bigsqcup_{\mathbf{G}\in \mathrm{sGPI}^{r,0}_{0,B,I}} \overline{\mathcal{QM}}_{\mathbf{G}} \ \subseteq\ \overline{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I} \tag{2.25}$$

and

$$\overline{\mathcal{PM}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I} := \bigsqcup_{\mathbf{G}\in \mathrm{sGPI}^{r,0}_{0,B,I}} \overline{\mathcal{PM}}_{\mathbf{G}} \ \subseteq\ \overline{\mathcal{QM}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I}. \tag{2.26}$$

连通分支 $\mathcal{QM}_{\mathbf{G}}$ of $\mathcal{QM}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I}$ 上带有相对定向的 Witten 丛诱导出 $\mathcal{QM}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I}$ 上带有相对定向的 Witten 丛 $\mathcal{W}^{r}_{g,B,I}$。

2.4.3 $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ 上的相对余切线丛

对于任意 $i\in I$，$\overline{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I}$ 上的相对余切线丛有三种不同的定义。

1. 对于任意 $\boldsymbol{G}\in \mathrm{sGPI}^{r,0}_{g,B,I}$，令 $\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}\in V(\boldsymbol{G})$ 为 $\boldsymbol{G}$ 中满足 $i\in I\cap T^I(\Gamma_{i,\boldsymbol{G}})$ 的唯一顶点。我们将经由投影 $\pi_{\boldsymbol{G}\to\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}}\colon \mathcal{M}_{\boldsymbol{G}}\to\mathcal{M}_{\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}}$ 从 $\mathbb{L}_i\to\mathcal{M}_{\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}}$ 拉回的线丛记为 $\mathbb{L}_i\to\mathcal{M}_{\boldsymbol{G}}$；并将以此方式在所有连通分支上定义的线丛记为 $\mathbb{L}'_i\to\overline{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I}$。

2. 使用上述记号，我们用 $\mathcal{B}\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}$ 表示从 $\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}$ 中遗忘所有插入的内部尾后得到的图，其中 $I^{PI}(\boldsymbol{G})\cap T^I(\Gamma_{i,\boldsymbol{G}})$；并用 $\mathrm{For}^{\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}\to\mathcal{B}\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}}\colon \mathcal{M}_{\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}}\to\mathcal{M}_{\mathcal{B}\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}}$ 表示遗忘态射（若 $\mathcal{B}\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}$ 不稳定，则形式上将 $\mathcal{M}_{\mathcal{B}\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}}$ 视为一个点）。我们用 $\mathbb{L}_i\to\mathcal{M}_{\boldsymbol{G}}$ 表示经由下述映射从 $\mathbb{L}_i\to\mathcal{M}_{\mathcal{B}\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}}$ 拉回的线丛（若 $\mathcal{B}\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}$ 不稳定，则形式上将其视为平凡复直线）：

$$\mathrm{For}^{\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}\to\mathcal{B}\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}}\circ\pi_{\boldsymbol{G}\to\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}}\colon \overline{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{G}}\to\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{B}\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}}$$

并用 $\mathbb{L}_i\to\overline{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I}$ 表示以此方式在所有连通分支上定义的线丛。

3. 在 $g=1$ 的情形下，使用上述记号，我们用 $\mathcal{B}\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}$ 表示从 $\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}$ 中遗忘所有插入的内部尾后得到的图，其中 $I^{PI}_{sp,1}(\boldsymbol{G})\cap T^I(\Gamma_{i,\boldsymbol{G}})$；并用 $\mathrm{For}^{\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}}\colon \mathcal{M}_{\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}}\to\mathcal{M}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}}$ 表示遗忘态射（若 $\mathcal{B}\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}$ 不稳定，则同样形式上将 $\mathcal{M}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}}$ 视为一个点）。我们用 $\mathbb{L}^*_i\to\mathcal{M}_{\boldsymbol{G}}$ 表示经由 $\mathbb{L}_i\to\mathcal{M}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}}$ 拉回的线丛

$$\mathrm{For}^{\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}}\circ\pi_{\boldsymbol{G}\to\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}}\colon \overline{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{G}}\to\overline{\mathcal{M}}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i,\boldsymbol{G}}}$$

以及由 $\mathbb{L}^*_i\to\overline{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I}$ 以这种方式在所有连通分支上定义的线丛。

这些相对余切线丛之间的关系将在 §3.1 中讨论。

注记 2.34。在 [31, 32], 中，记号“$\mathbb{L}_i\to\overline{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I}$”指的是本文中记作“$\mathbb{L}'_i\to\overline{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I}$”的对象。本文更改记号，是因为我们主要研究线丛 $\mathbb{L}_i\to\overline{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I}$，这些线丛会“遗忘” I^{PI} 中的所有插入点。

2.4.4 边界分层与点插入

对于一个 $(r,\ 0)$-图 $\boldsymbol{G}$，我们记作

$$E(\boldsymbol{G}) := \bigsqcup_{\Gamma\in V(\boldsymbol{G})} E(\Gamma)$$

and

$$H^{CB}(\boldsymbol{G}) := \bigsqcup_{\Gamma\in V(\boldsymbol{G})} H^{CB}(\Gamma).$$

遗忘一个集合 $S \subseteq E(\boldsymbol{G}) \sqcup H^{CB}(\boldsymbol{G})$ 后，我们可以依任意顺序进行一系列光滑化（因为它们会得到相同的结果），从而得到一个 $(r,0)$-图 $d_S\boldsymbol{G}$。我们定义

$$\begin{aligned}
&\partial^!\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{G} = d_S\boldsymbol{H} \text{ for some } S\},\\
&\partial\boldsymbol{G} = \partial^!\boldsymbol{G} \setminus \{\boldsymbol{G}\},\\
&\partial^B\boldsymbol{G} = \{\boldsymbol{H} \in \partial\boldsymbol{G} \mid E^B(\boldsymbol{H}) \cup H^{CB}(\boldsymbol{H}) \neq \emptyset\}.
\end{aligned}$$

对于一个 $(r,0)$-图 $\mathbf{G}$，$\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ 的一个边界分层对应于 $\partial^!\mathbf{G}$ 中的一个图，更准确地说，对每个 $\Gamma_i \in V(\mathbf{G})$ 选择一个 $\Delta_i \in \partial^!\Gamma_i$。特别地，对于光滑的 $\mathbf{G}$，$\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ 的一个余维一边界由对 $\Gamma \in V(\mathbf{G})$ 的选择以及一个图 $\Delta \in \partial\Gamma$ 确定，其中 Δ或者有一个收缩边界尾且没有边，或者恰好有一条边，且它是边界边。根据 Δ 的（半）边类型（等价地，根据曲面 $C \in \mathcal{M}_\Delta$ 上相应节点的类型），$\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ 有五种不同类型的余维一边界：

CB 收缩边界尾；

R Ramond 边界边；

NS+ NS 边界边，其非法侧的扭曲大于 0；

AI NS 边界边，其非法侧的扭曲为 0，且包含合法半节点的顶点只包含这个半边和一个内部尾 $a \in T^I(\Delta) \cap I^{PI}(\mathbf{G})$；

BI 其余非法侧扭曲为 0 的 NS 边界边。

因此，$\mathcal{M}^{1}_{r,g}{}^{0}_{B,,I}$的余维一边界是五种不同类型边界的并。同样，$\mathcal{QM}^{1}_{r,g}{}^{0}_{B,,I}$的余维一边界也是这五种不同类型边界的并，因为 $\partial\mathcal{QM}^{1}_{r,g}{}^{0}_{B,,I} = \mathcal{QM}^{1}_{r,g}{}^{0}_{B,,I} \cap \partial\mathcal{M}^{1}_{r,g}{}^{0}_{B,,I}$，而 $\mathcal{PM}^{1}_{r,g}{}^{0}_{B,,I}$ 只有三种类型的边界，因为所有 NS+型和 R 型边界都从 $\mathcal{PM}^{1}_{r,g}{}^{0}_{B,,I}$中移除了。

我们将 $\mathcal{M}_{\boldsymbol{G}}$ 中相应的边界记为 $\overline{\partial^{CB}\mathcal{M}_{\boldsymbol{G}}}$、$\overline{\partial^{R}\mathcal{M}_{\boldsymbol{G}}}$、$\overline{\partial^{NS+}\mathcal{M}_{\boldsymbol{G}}}$、$\overline{\partial^{AI}\mathcal{M}_{\boldsymbol{G}}}$ 和 $\partial^{BI}\mathcal{M}_{\boldsymbol{G}}$。我们还记 $\mathcal{Z}^{dj}_{\boldsymbol{G}} := \mathcal{M}_{\boldsymbol{G}} \setminus \mathcal{QM}_{\boldsymbol{G}}$。

注2.35。缩写“BI”代表“插入前”，而缩写“AI”代表“插入后”。

我们声称，AI 型边界与 BI 型边界之间存在一一对应关系。

定理 2.36 ([31, 定理 4。12])。固定 I 和 B 后，$\mathcal{M}^{1}_{r,\ g}{}^{0}_{B,\ ,\ I}$ 的 *BI* 型边界与 *AI* 型边界之间存在一一对应 *PI*（分别对应 $\mathcal{QM}^{1}_{r,\ g}{}^{0}_{B,\ ,\ I}$ 或 $\mathcal{PM}^{1}_{r,\ g}{}^{0}_{B,\ ,\ I}$）。对应 *PI* 配对的两个边界典范微分同胚，且该微分同胚可提升到 *Witten* 丛（当 $g = 1$ 我们限制到 $\mathcal{QM}^{1}_{r,\ 1}{}^{0}_{B,\ ,\ I}$ 时）以及限制在这些边界上的相对余切线丛。此外，由典范相对定向诱导的配对（伪）边界上 *Witten* 丛的典范相对定向彼此相反。

注 2.37。当 $g=0$ 时，BI 型边界与 AI 型边界之间的微分同胚可延拓为它们的闭包之间的微分同胚。当 $g\geq 1$ 时，我们可以将这种微分同胚延拓为从 AI 型边界的闭包到 BI 型边界的闭包的满射态射，但它在高余维边界分层上不一定是单射。这种满射态射仍会拉回闭包上的 Witten 丛和相对余切线丛。

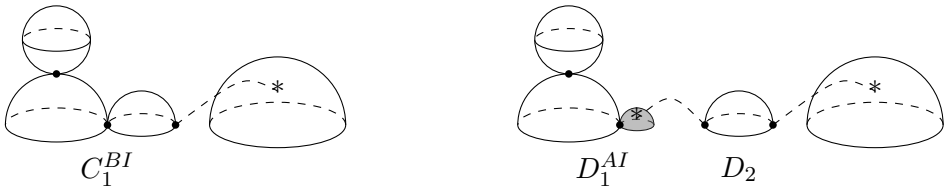


图 4：两个 $(r,\ 0)$-圆盘分别位于边界 bd_{BI} 和 bd_{AI} 上，并由 PI 配对。左侧 $(r,\ 0)$-圆盘的分支 C_1^{BI} 上有一个 BI 型节点，而左侧 $(r,\ 0)$-圆盘的分支 D_1^{AI} 上有一个 AI 型节点。阴影不可约分支仅包含一个合法半节点（对应于一个 AI 型节点）以及 I^{PI} 中的一个内部尾。

令 $\sim_{PI}$ 为对应 PI 在 $\overline{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r}}_{g,B}$、...、$I$ 的边界上诱导的等价关系（以及其在 $\overline{\mathcal{QM}}^{\frac{1}{r}}_{g,B}$、...、$I$ 或 $\overline{\mathcal{PM}}^{\frac{1}{r}}_{g,B}$、...、$I$ 的边界上的限制）。若 $\overline{p_{BI}}$ 是 p_{AI} 在注 2.37 中的满射态射下的像，则 AI 型边界闭包中的 p_{AI} 与相应 BI 型边界闭包中的 p_{BI} 等价。定理 2.36 表明，我们可以沿配对边界粘合 $\overline{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r}}_{g,B}$、...、$I$、$\overline{\mathcal{QM}}^{\frac{1}{r}}_{g,B}$、...、$I\subseteq\overline{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r}}_{g,B}$、...、$I$ 以及 $\overline{\mathcal{PM}}^{\frac{1}{r}}_{g,B}$、...、$I\subseteq\overline{\mathcal{QM}}^{\frac{1}{r}}_{g,B}$、...、$I$，从而得到分片光滑粘合模空间

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I}:=\overline{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I}/\sim_{PI},$$

$$\widetilde{\mathcal{QM}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I}:=\overline{\mathcal{QM}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I}/\sim_{PI}\subseteq\widetilde{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I}$$

and

$$\widetilde{\mathcal{PM}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I}:=\overline{\mathcal{QM}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I}/\sim_{PI}\subseteq\widetilde{\mathcal{QM}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,I}.$$

$\widetilde{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,\ldots,I}$所参数化的对象称为 r，0-曲面中的约化对象：它们是 r，0-曲面在 $\sim_{PI}$ 所诱导的关系下的等价类。注意，$\widetilde{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,\ldots,I}$ 和 $\widetilde{\mathcal{QM}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,\ldots,I}$ 只有 CB 型、R 型和 NS+型边界，而 $\widetilde{\mathcal{PM}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,\ldots,I}$ 只有 CB 型边界。

不同连通分支上的 Witten 丛和相对余切线丛 $\mathbb{L}_i$、$\mathbb{L}_i'$ 或 $\mathbb{L}_i^*$，也可以沿相同的边界粘合，得到粘合的 Witten 丛 $\widetilde{\mathcal{W}}\to\widetilde{\mathcal{QM}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,\ldots,I}$，以及带有典范复结构的粘合相对余切线丛 $\widetilde{\mathbb{L}}_i\to\widetilde{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,\ldots,I}$、$\widetilde{\mathbb{L}}_i'\to\widetilde{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,\ldots,I}$ 或 $\widetilde{\mathbb{L}}_i^*\to\widetilde{\mathcal{M}}^{\frac{1}{r},0}_{g,B,\ldots,I}$。



图5：一个示例，其中两个（r，0）圆柱通过 PI 配对。左侧圆柱有一个非分离的 BI型边界节点，右侧圆柱有一个分离的 AI型边界节点；一条虚线连接同一连通分支上的一个边界尾和一个内部尾。

注 2.38。 在 $r=2$ 且仅有 NS 插入的情况下，Witten 纤维丛是一个平凡的零秩丛。在这种情况下，将不同的模空间粘合起来以得到无边界轨形的想法，归功于 Jake Solomon 和第一作者 [26]。

根据定理 2.36 以及粘合在一起的相对余切线丛 $\widetilde{\mathcal{M}}^{1}_{r,g}{}^{\hbar}_{B,,I}$带有典范复定向这一事实，我们得到以下定理：

定理 2.39。 *[31, 定理 4.13]* 所有形如

$$\widetilde{\mathcal{W}}\oplus\bigoplus_{i=1}^{l}\widetilde{\mathbb{L}}_i^{\oplus d_i}\to\widetilde{\mathcal{QM}}_{g,B,I}^{\frac{1}{r},\hbar}\ or\ \widetilde{\mathcal{W}}\oplus\bigoplus_{i=1}^{l}\widetilde{\mathbb{L}'}_i^{\oplus d_i}\to\widetilde{\mathcal{QM}}_{g,B,I}^{\frac{1}{r},\hbar}\ or\ \widetilde{\mathcal{W}}\oplus\bigoplus_{i=1}^{l}\widetilde{\mathbb{L}_i^*}^{\oplus d_i}\to\widetilde{\mathcal{QM}}_{g,B,I}^{\frac{1}{r},\hbar}$$

的丛都具有典范相对定向。

2.5 闭扩展 FJRW 理论

在 [5, 4] 中，人们注意到，Witten 的 r-旋理论的某种延拓在开 r-旋理论中发挥着重要作用。这一闭扩展 r-旋理论 的定义与通常的亏格零闭 r-旋理论相同，只是允许一个标记具有 $-1.$ 的负扭转。人们最初在 [20] 中观察到，与通常仅具有非负扭转的闭情形一样，在这里 $R^1\pi_*\mathcal{S}$ 也是亏格零中的一个轨形向量丛，因此 Witten 类 c_W 可以定义为 $c_W=c_{top}((R^1\pi_*\mathcal{S})^\vee)$。闭扩展 r<style id='20}-旋关联函数 为

$$\left\langle\prod_{i\in I}\tau_{d_i}^{a_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},\mathrm{ext}}:=r\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,I}^{1/r}}c_W\cap\psi_1^{d_1}\cdots\psi_n^{d_n}. \tag{2.27}$$

所有这些数值均在 [5]中计算。它们满足以下关系。

定理 2.40 ([5, 引理 3.6])。 对于任意 $i_1\in I$ 和 $j_1\neq j_2$，若它们属于 $I\setminus\{i_1\}$，则关于$(i_1,\{j_1,j_2\})$，有如下拓扑递归关系：

$$\left\langle\tau_{d_{i_1}+1}^{a_{i_1}}\prod_{i\in I\setminus\{i_1\}}\tau_{d_i}^{a_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},ext}=\sum_{\substack{R_1\sqcup R_2=I\setminus\{i_1\}\\ j_1,j_2\in R_2\\ -1\le a\le r-2}}\left\langle\tau_0^a\tau_{d_{i_1}}^{a_{i_1}}\prod_{i\in R_1}\tau_{d_i}^{a_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},ext}\left\langle\tau_0^{r-2-a}\prod_{i\in R_2}\tau_{d_i}^{a_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},ext}. \tag{2.28}$$

3 相对余切线丛与 TRR 多截面 s

相对余切线丛在我们构造亏格一开 r-spin 理论的过程中发挥着重要作用。

3.1 不同相对余切线丛之间的关系

设 Γ 为一个对偶图，设 $\pi_\Gamma\colon\mathcal{C}_\Gamma\to\mathcal{M}_\Gamma$ 为万有曲线。我们将 $\mathcal{U}_\Gamma\subseteq\mathcal{C}_\Gamma$ 记为光滑轨迹，将 $\mathbb{L}_\Gamma\to\mathcal{U}_\Gamma$ 记为垂直余切线丛，即$d\pi_\Gamma^*\colon\pi_\Gamma^*T^*\mathcal{M}_\Gamma\to T^*\mathcal{U}_\Gamma$的余核。于是，对于 $i\in T^I(\Gamma)$，记$\mu_{i,\Gamma}\colon\mathcal{M}_\Gamma\to\mathcal{U}_\Gamma$ 为对应于由 i标记的内部标记的截面，则 i 处的相对余切线丛可定义为$\mathbb{L}_{i,\Gamma}:=\mu_{i,\Gamma}^*\mathbb{L}_\Gamma\to\mathcal{M}_\Gamma$。在没有歧义时，我们将在下标中省略 Γ，并将$\mathbb{L}_{i,\Gamma}$ 写作 $\mathbb{L}_i$。

设 $S^I\subset T^I(\Gamma)$ 和 $S^B\subset T^B(\Gamma)$ 是内部尾与边界尾的两个子集。假设遗忘 S^I 和 S^B 中的所有尾后 Γ 稳定，我们用 $\mathrm{for}_{S^I,\ S^B}(\Gamma)$ 表示遗忘后的图，用 $\mathrm{For}^{\Gamma\to\mathrm{for}_{S^I,\ S^B}(\Gamma)}\colon\mathcal{M}_\Gamma\to\mathcal{M}_{\mathrm{for}_{S^I,\ S^B}(\Gamma)}$ 表示遗忘态射，并用

$\widetilde{\mathrm{For}}^{\Gamma\to\mathrm{for}_{S^I,\ S^B}(\Gamma)}\colon \mathcal{U}_\Gamma \to \mathcal{U}_{\mathrm{for}_{S^I,\ S^B}(\Gamma)}$ 表示 $\mathrm{For}^{\Gamma\to\mathrm{for}_{S^I,\ S^B}(\Gamma)}$ 在万有曲线上的提升。根据 [23, §3.5]，态射

$$d\widetilde{\mathrm{For}}^*_{\Gamma\to\mathrm{for}_{S^I,S^B}(\Gamma)}\colon \widetilde{\mathrm{For}}^*_{\Gamma\to\mathrm{for}_{S^I,S^B}(\Gamma)}T^*\mathcal{U}_{\mathrm{for}_{S^I,S^B}(\Gamma)} \to T^*\mathcal{U}_\Gamma$$

诱导出垂直余切线之间的态射

$$\mathfrak{t}_{\mathrm{for}_{S^I,S^B}(\Gamma)\to\Gamma}\colon \widetilde{\mathrm{For}}^*_{\Gamma\to\mathrm{for}_{S^I,S^B}(\Gamma)}\mathbb{L}_{\mathrm{for}_{S^I,S^B}(\Gamma)} \to \mathbb{L}_\Gamma$$

在 U_Γ 上。态射 $\mathfrak{t}_{\mathrm{for}_{S^I,\ S^B}(\Gamma)\to\Gamma}$ 是同构，除非在 $\mathcal{U}_\Gamma$ 的那些被遗忘 $\Gamma\to\mathrm{for}_{S^I,\ S^B}(\Gamma)$ 收缩的分支上；在这些分支上，它恒等于零。

对于 $i\in T^I(\Gamma)\setminus S^I$，注意到 $\mu_{i,\ \Gamma}$ 的像：$\mathcal{M}_\Gamma\to\overline{\mathcal{C}_\Gamma}$ 总是落在光滑轨迹 $\mathcal{U}_\Gamma$ 中，因此态射 $\mathfrak{t}_{\mathrm{for}_{S^I,\ S^B}(\Gamma)\to\Gamma}$ 诱导出线丛之间的态射

$$\tilde{\mathfrak{t}}_{i,\mathrm{for}_{S^I,S^B}(\Gamma)\to\Gamma} := \mu_{i,\Gamma}^*\mathfrak{t}_{\mathrm{for}_{S^I,S^B}(\Gamma)\to\Gamma}\colon\ \mathrm{For}^*_{\Gamma\to\mathrm{for}_{S^I,S^B}(\Gamma)}\mathbb{L}_{i,\mathrm{for}_{S^I,S^B}(\Gamma)} \to \mathbb{L}_{i,\Gamma}$$

在 $\mathcal{M}_\Gamma$ 上，该态射在轨迹 $D_{i,\ S^I,\ \Gamma}\subset\mathcal{M}_\Gamma$ 处为零，其中第 i 个内部标记位于被遗忘 $\Gamma\to\mathrm{for}_{S^I,\ S^B}(\Gamma)$ 收缩的分支上。因此，要么 $D_{i,\ S^I,\ \Gamma}=\mathcal{M}_\Gamma$ 和 $\mathfrak{t}_{i,\ \mathrm{for}_{S^I,\ S^B}(\Gamma)\to\Gamma}$ 恒等于零，要么 $D_{i,\ S^I,\ \Gamma}$ 可表示为正规交叉余维二子空间的有限并，如下所示

$$D_{i,S^I,\Gamma}=\bigcup_{\Delta\in\mathcal{G}_{i,S^I,\Gamma}}\overline{\mathcal{M}}_\Delta\subseteq\overline{\mathcal{M}}_\Gamma,$$

其中 $\mathcal{G}_{i,\ S^I,\ \Gamma}\subset\partial\Gamma$ 由满足以下条件的图组成：i标记位于闭亏格零顶点 v上，并且存在一个分离内部边 $e\in E^I_{sp}(\Delta)$ 使得 $d_e\Delta=\Gamma$；其中，包含 v的 $\mathrm{Detach}_e\,\Delta$的连通分支 Δ_v是闭亏格零的，而 $T^I(\Delta_v)$中的所有尾都是 i、来自 e的半边，或 S^I中的元素。

注 3.1：在 $S^B=\emptyset$, $\tilde{\mathfrak{t}}_{i,\ \Gamma\to\mathrm{for}_{S^I,\ S^B}(\Gamma)}$ </style}的情形下，它是一个同构。

我们假设 $D_{i,S^I,\Gamma}\neq\mathcal{M}_\Gamma$；在这种情况下，消失轨迹 D_{i,S^I} 表现得像一个“除子”，即它是有限个正规交叉（实）余维二子空间的并。此外，若我们将 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i,\mathrm{for}_{S^I},S^B(\Gamma)\to\Gamma}$ 视为 $\mathcal{O}(D_{i,S^I,\Gamma})$ 的一个截面：$=$遗忘$^{*\Gamma\to\mathrm{for}_{S^I},S^B(\Gamma)}$ $\mathbb{L}_i^\vee,^{\mathrm{for}_{S^I},S^B(\Gamma)}\otimes\mathbb{L}_{i,\Gamma}$，则有如下引理。

引理 3.2。设 Γ 是亏格为零或一的光滑对偶图，使得$\mathcal{M}_\Gamma = \mathcal{M}_{0,\ B,\ I}$ （或$\mathcal{M}_\Gamma = \overline{\mathcal{M}}_{1,\ \overline{\{B_1,B_2\}},\ \overline{I}}$）。截面 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i,\ \mathrm{for}_{S^I,\ S^B}(\Gamma)\to\Gamma}$ 在余维二子空间 $\mathcal{M}_\Delta\subseteq\mathcal{M}_\Gamma$ 处横截地消失，其中每个 $\Delta\in\mathcal{G}_{i,\ S^I,\ \Gamma}$均如此。

此外，每个 $\Delta\in\mathcal{G}_{i,\ S^I,\ \Gamma}$ 都由一个闭顶点 v^c 和一个带有由 I^o 标记的内部 条半边的开顶点组成。对于任意选择 $x\in B$ （或在不同的 B_1 和 B_2 中选择 x、y），由 $\tilde{\mathfrak{o}}^x_0$、$\bar{B}$、I （或 $\tilde{\mathfrak{o}}^x$、$_1{}^y$、$(B_1$、$B_2)\,I$）以及 $\mathfrak{t}_{\mathrm{for}_{S^I}}$、$_{S^B}$ $(\Gamma)\to\Gamma$ 在 $\mathcal{M}_\Delta$ 上诱导的定向，与 $\tilde{\mathfrak{o}}^x_0$、$\bar{B}$、$I^o\boxtimes\tilde{\mathfrak{o}}_{v^c}$ （或 $\tilde{\mathfrak{o}}^x$、$_1{}^y$、$(\bar{B}_1$、$\bar{B}_2)\,I^o\boxtimes\tilde{\mathfrak{o}}_{v^c}$）一致，其中 $\tilde{\mathfrak{o}}$ 是在 *[31,§3.1]* 中构造的圆盘或圆柱模空间的定向。

证明。对于子集 $T\in I$，我们用 $\Delta^T\in\partial\Gamma$ 表示由两个顶点 v^c 和 v^c 通过一条分离边 e 连通而成的图，其中 $H^I(v^c)=T\sqcup\{h_e\}$，而 h_e 是 e 在 v^c 一侧对应的半边。

我们假设 $S^B=\emptyset$。当 $S^I=\{j\}$ 由单个元素组成时，$D_{i,\ \{j\},\ \Gamma}=\mathcal{M}_{\Delta^{\{i,j\}}}$ 是光滑余维二子空间。根据 [23, 引理 3.43]，$\tilde{\mathfrak{t}}_{i,\ i,\ \Gamma}$ 是一个横截消失的截面 $D_{i,\ \{j\},\ \Gamma}$，并满足定向性质。

假设我们已证明 $|S^I| \leq n-1$的引理，现在证明 S^I由 $n \geq 2$ 个元素组成时的情形。假设 $j \in S^I$ 是其中之一，我们将线丛遗忘$^*_{\Gamma\to \mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)}\mathbb{L}^\vee_{i,\ \mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)}\otimes \mathbb{L}_{i,\ \Gamma}$写作

$$(\mathrm{For}^*_{\Gamma\to \mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)}\mathbb{L}^\vee_{i,\mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)}\otimes \mathbb{L}_{i,\Gamma})\otimes \mathrm{For}^*_{\Gamma\to \mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)}(\mathrm{For}^*_{\mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)\to \mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)}\mathbb{L}^\vee_{i,\mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)}\otimes \mathbb{L}_{i,\mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)})$$

并且我们可以写成（因为遗忘态射可以复合）

$$\tilde{\mathfrak{t}}_{i,\mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)\to\Gamma}=\tilde{\mathfrak{t}}_{i,\mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)\to\Gamma}\otimes \mathrm{For}^*_{\Gamma\to \mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)}\tilde{\mathfrak{t}}_{i,\mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)\to \mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)}.$$

~截面 $\mathfrak{t}_{i,\mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)\to\Gamma}$ 在以下位置消失：

$$D_{i,\{j\},\Gamma}=\overline{\mathcal{M}}_{\Delta^{\{i,j\}}},$$

而遗忘$^*_{\Gamma\to \mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)}\tilde{\mathfrak{t}}_{i,\mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)\to \mathrm{for}\{j\}(\Gamma)}$在以下位置消失：

$$\mathrm{For}^{-1}_{\Gamma\to \mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)}(D_{i,S^I\setminus\{j\},\mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)})=\bigcup_{T\subseteq S^I, T\neq\{j\}}\overline{\mathcal{M}}_{\Delta^{T\sqcup\{i\}}}.$$

我们需要证明横截性以及诱导定向的定向性质。

$\mathcal{M}_{\Delta^{\{i,j\}}}$ 处的横截性和定向性质由 [23, 引理 3.43]保证。

要证明 $\mathcal{M}_{\Delta^{T\sqcup\{i\}}}$ 处关于 $T\neq\{j\}$的横截性和定向性质，在$\overline{p\in\mathcal{M}_{\Delta^{T\sqcup\{i\}}}}$附近的局部范围内，我们可以取一个小邻域 $p=$(遗忘$\{j\}(p)$, 0) $\in U\times V\subset\mathcal{M}_\Gamma$，其中 $U\subset\mathcal{M}_{\mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)}$是$\mathcal{M}_{\mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)}$中遗忘$_{\Gamma\to \mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)}(p)$的一个邻域，而 V是复平面中0的一个邻域；遗忘$_{\Gamma\to \mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)}$在 $U\times V$处的限制是到 U的投影。那么在 p附近的局部范围内，遗忘$^*_{\Gamma\to \mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)}\tilde{\mathfrak{t}}_{i,\mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)\to \mathrm{for}\{j\}(\Gamma)}$的零点集为$(\mathcal{M}_{\mathrm{for}_{\{j\}}(\Delta^{T\sqcup\{i\}})}\cap U)\times V$，其上的诱导定向是由$\tilde{\mathfrak{t}}_{i,\mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)\to \mathrm{for}\{j\}(\Gamma)}$诱导的$\mathcal{M}_{\mathrm{for}_{\{j\}}(\Delta^{T\sqcup\{i\}})}$上的定向与 V的典范复定向的张量积。于是，根据归纳假设以及 [31,命题 3.1和命题 3.3]中的最后几项，可得该引理。

□

注记 3.3。对于线丛 $K\to\mathcal{M}_\Gamma$ 的任意截面 s，都存在相应的截面$s\otimes\tilde{\mathfrak{t}}_{i,\ \mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)\to\Gamma}$，其属于 $K\otimes\mathcal{O}(D_{i,\ S^I,\ \Gamma})$，并且在$\overline{D_{i,\ S^I,\ \Gamma}}$处额外具有零点集。

另一方面，若我们将 $\mathcal{O}(-D_{i,S^I,\Gamma})$记作 $\mathcal{O}(D_{i,S^I,\Gamma})$ 的对偶，那么对偶截面$\tilde{\mathfrak{t}}^\vee_{i,\mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)\to\Gamma}$在 $D_{i,S^I,\Gamma}$ 处具有“极点”。我们可以构造 $\tilde{\mathfrak{t}}'^\vee_{i,\mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)\to\Gamma}$ 的截面，该截面属于 $\mathcal{O}(-D_{i,S^I,\Gamma})$，在 $D_{i,S^I,\Gamma}$ 处为零，并且在$D_{i,S^I,\Gamma}$的一个小邻域之外与 $\tilde{\mathfrak{t}}^\vee_{i,\mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)\to\Gamma}$ 重合；其在 $\mathcal{M}_{\Delta^{T\sqcup\{i\}}}$ 上诱导的定向，是由 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i,\mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)\to\Gamma}$ 诱导的定向的反向。

事实上，当 $|S^I|=1$ $D_{iS^I\Gamma}$ 是一个光滑余维 2 子空间时，我们可以取$D_{iS^I\Gamma}$在$\mathcal{M}_\Gamma$中的一个小管状邻域，它与$D_{iS^I\Gamma}\times\mathbb{D}_z$同构，其中 $\mathbb{D}_z$是复平面中由 z参数化的一个小圆盘，而在适当的平凡化下，该管状邻域上的$\tilde{\mathfrak{t}}^\vee_{i\ \mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)\to\Gamma}$由 $1/z$ 给出。对于一个较小的 ε，当$|z|\geq\varepsilon$ 时，我们可以令 $\tilde{\mathfrak{t}}'^\vee_{i\ \mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)\to\Gamma}$ 为$\tilde{\mathfrak{t}}^\vee_{i\ \mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)\to\Gamma}$；当 $|z|\leq\varepsilon$ 时，我们令 $\tilde{\mathfrak{t}}'^\vee_{i\ \mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)\to\Gamma}$ 为 $\bar{z}/\varepsilon^2$。

遗忘 $|S^I|\geq 2$，假设我们已经构造了 $\tilde{\mathfrak{t}}'^\vee_{i,\ \mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)\to\text{遗忘}\{j\}(\Gamma)}$，我们可以通过设定，在 $|S^I|$ 上归纳地构造 $\tilde{\mathfrak{t}}'^\vee_{i,\ \mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)\to\Gamma}$

$$\tilde{\mathfrak{t}}'^\vee_{i,\mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)\to\Gamma}=\tilde{\mathfrak{t}}'^\vee_{i,\mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)\to\Gamma}\otimes \mathrm{For}^*_{\Gamma\to \mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)}\tilde{\mathfrak{t}}'^\vee_{i,\mathrm{for}_{S^I}(\Gamma)\to \mathrm{for}_{\{j\}}(\Gamma)}.$$

横截性和定向性质可通过与上述引理的证明相同的论证得出。

3.2 拓扑递归关系多截面

在本小节中，对于每个以一个或两个尾为根的光滑零亏格对偶图 Γ，以及每个光滑亏格一对偶图 Γ，我们为 $\mathbb{L}_i \to \mathcal{M}_\Gamma$ 构造一种特定的多截面，称为拓扑递归关系 *(TRR)* 多截面。对于分级的 r-自旋图 Γ，$\mathbb{L}_i \to \underline{\mathcal{M}}_\Gamma^{1/r}$ 的 TRR 多截面是通过遗忘态射从无旋模空间拉回的多截面。

3.2.1 关于一个根的零亏格 TRR 截面

设 Γ 是一个光滑零亏格对偶图，$i \in T^I(\Gamma)$ 是一条内部尾，而 $j \in T(\Gamma)$ 是一条不同于 i 的内部尾或边界尾。我们将 j 视为 Γ 的根，并按以下方式定义 $\mathbb{L}_i \to \mathcal{M}_\Gamma$ 的一个截面 $\mathfrak{s}_{i,\Gamma,j}$。

对于一个光滑圆盘 $[\Sigma] \in \mathcal{M}_\Gamma$，我们用 z_i 表示 Σ 上对应于 i 的标记，并用 z_j 表示 Σ 上对应于 j 的（内部或边界）标记。我们将优选半边 Σ 与上半平面等同，并令

$$\mathfrak{s}_{i,\Gamma,j}(\Sigma) = dz\left(\frac{1}{z-z_j} - \frac{1}{z-\bar{z}_i}\right)\Big|_{z=z_i} \in T^*_{z_i}C = T^*_{z_i}(\Sigma \cup \overline{\Sigma}). \tag{3.1}$$

这个逐纤维定义粘合成 $\mathbb{L}_i \to \mathcal{M}_\Gamma$ 的一个截面。容易看出，此截面可延拓为 $\mathcal{M}_\Gamma$，上的一个光滑整体截面 $\mathfrak{s}_{i,\Gamma,j}$：对于不一定光滑的圆盘 Σ，令 φ_C 为 $C = \Sigma \cup \overline{\Sigma}$ 上唯一的亚纯微分，其在 $\bar{z}_i$ 和 z_j 处有单极点，在其他标记点或光滑点处均无极点，并且在 z_j 处的留数为 1，在 $\bar{z}_i$ 处的留数为 -1，且每对半节点处的留数之和为 0。则 $\mathfrak{s}_{i,\Gamma,j}(\Sigma)$ 是 φ_C 在 $z_i \in C$ 处的取值。

若 j 是边界尾，在最简单的情形 $\Gamma = u_{0,1,1}$ 中，对偶图是光滑零亏格图，且只有一个内部尾 i 和一个边界尾 j；截面 $\mathfrak{s}_{i,u_{0,1,1},j}$ 是零维模空间 $\mathcal{M}_{u_{0,0,2}}$ 上 $\mathbb{L}_i$ 的处处非零截面。对于一般的 Γ，截面 $\mathfrak{s}_{i,\Gamma,j}$ 具有如下形式

$$\mathfrak{s}_{i,\Gamma,j} = \tilde{t}_{i,u_{0,1,1}\to\Gamma}\,\mathrm{For}^*_{\Gamma\to u_{0,1,1}}\,\mathfrak{s}_{i,u_{0,1,1},j},$$

其中，遗忘 $\Gamma\to u_{0,1,1}\colon \overline{\mathcal{M}}_\Gamma \to \mathcal{M}_{u_{0,1,1}}$ 是遗忘态射，遗忘除 i 和 j 以外的所有尾。

若 j 是内部尾，在最简单的情形 $\Gamma = u_{0,0,2}$ 中，对偶图是光滑零亏格图，且只有两个内部尾 i, j；截面 $\mathfrak{s}_{i,u_{0,0,2},j}$ 是 $\mathbb{L}_i \to \mathcal{M}_{u_{0,0,2}}$ 的截面，仅在一维模空间 $\overline{\mathcal{M}_{u_{0,0,2}}}$ 的一个端点处消失（该处 Σ 的边界收缩为一个收缩边界节点）。对于一般的 Γ，截面 $\mathfrak{s}_{i,\Gamma,j}$ 具有如下形式

$$\mathfrak{s}_{i,\Gamma,j} = \tilde{t}_{i,u_{0,0,2}\to\Gamma}\,\mathrm{For}^*_{\Gamma\to u_{0,0,2}}\,\mathfrak{s}_{i,u_{0,0,2},j},$$

其中，遗忘态射 $\Gamma\to\overline{u_{0,0,2}}\colon \overline{\mathcal{M}}_\Gamma \to \mathcal{M}_{u_{0,0,2}}$ 遗忘除 i 和 j 之外的所有尾。

此外，对于一个没有内部边的图 $\Delta \in \partial\Gamma$，我们将含有尾 i 的唯一顶点记作 $v_{i,\Delta} \in V(\Delta)$，并将投影记作 $\pi_{\Delta\to v_{i,\Delta}}\colon \mathcal{M}_\Delta \to \mathcal{M}_{v_{i,\Delta}}$。若 $j \in T(v_{i,\Delta})$，则有

$$\mathfrak{s}_{i,\Gamma,j}|_{\overline{\mathcal{M}}_\Delta \subset \overline{\mathcal{M}}_\Gamma} = \pi^*_{\Delta\to v_{i,\Delta}}\mathfrak{s}_{i,v_{i,\Delta},j}.$$

若 $j \notin T(v_{i,\Delta})$，我们将与 i “最近”的边界半边记作 $r_j \in T^B(v_{i,\Delta})$，即，在分离对应于 r_j 的 Δ 的边之后，尾 i 和 j 位于不同的连通分支上。在此情况下，有

$$\mathfrak{s}_{i,\Gamma,j}|_{\overline{\mathcal{M}}_\Delta \subset \overline{\mathcal{M}}_\Gamma} = \pi^*_{\Delta\to v_{i,\Delta}}\mathfrak{s}_{i,v_{i,\Delta},r_j}.$$

当根没有歧义时，我们将简单地把 $\mathfrak{s}_{i,\Gamma,j}$ 记作 $\mathfrak{s}_{i,\Gamma}$。

3.2.2 关于两个根的零亏格 TRR 截面

设 Γ 是一个光滑零亏格对偶图，$i \in T^I(\Gamma)$ 是一条内部尾，$j,k \in T(\Gamma)$ 是两条不同于 i 的尾。我们将 j 和 k 视为 Γ 的两个根，并按以下方式定义$\mathbb{L}_i \to \mathcal{M}_\Gamma$ 的多截面 $\mathfrak{s}_{i,\Gamma,j,k}$。

多截面 $\mathfrak{s}_{i,\Gamma,j,k}$ 有两个分支，每个分支的权重都是 $1/2$。一个分支是$\mathfrak{s}_{i,\Gamma,j}$，另一个分支是 $\mathfrak{s}_{i,\Gamma,k}$。将 $\mathfrak{s}_{i,\Gamma,j,k}$ 限制到 $\mathcal{M}_\Delta \subset \mathcal{M}_\Gamma$ 时的行为，遵循其各分支的行为。

当根没有歧义时，我们将简单地把 $\mathfrak{s}_{i,\Gamma,j,k}$ 记作 $\mathfrak{s}_{i,\Gamma}$。

3.2.3 亏格一 TRR 多截面

设 $u_1$0,1 是一个具有一个内部尾且没有边界尾的光滑单顶点开亏格一图。我们首先构造泛线丛 $\mathbb{L} \to \mathcal{M}_{u_1,0,1} = \mathcal{M}_{1,0,1}$ 的特殊多截面 $\mathfrak{s}$，s_1^x0,1 和s_1^y 0,1。我们用两个实数 τ 和 h 来参数化 $\mathcal{M}_{1,0,1}$，使得 $0 < h < \tau$ 中的点 (τ, h) 表示一个圆柱 $(C, \Sigma, z_1, \bar{z}_1)$，其中 $C = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 \le \mathrm{Im}\ z \le 2\tau\}/ <z \sim z+1>$，$\Sigma = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 \le \mathrm{Im}\ z \le \tau\}/ < z \sim z+1 >$；标记点 z_1及其共轭点 $\bar{z}_i$ 位于 $h\sqrt{-1}$ 和 $-h\sqrt{-1}$处。在每个点 (τ, h) 处，$dz + d\bar{z}$ 表示 $\mathbb{L} \to \mathcal{M}_{1,0,1}$ 在 (τ, h) 上的纤维中的一个向量，它是与“平行于 Σ 的边界”的切向量对偶的余切向量。因此，我们可以用 $dz + d\bar{z}$ 表示 $\mathbb{L} \to \mathcal{M}_{1,0,1}$ 的一个截面。我们将 s_1^y 0,1 记作 $\mathbb{L} \to \mathcal{M}_{1,0,1}$ 的一个多截面，它有两个分支，一个分支是 $dz + d\bar{z}$，权重为 1 2，另一个分支是 $-dz - d\bar{z}$，权重为 1 2。我们还将s_1^x0,1 := $\sqrt{-1} \cdot s_1^y$ 0,1 记作 $\mathbb{L} \to \mathcal{M}_{1,0,1}$ 的另一个多截面；注意，在每个纤维中，s_1^x0,1 的分支是 $\pm\sqrt{-1} \cdot (dz + d\bar{z}) = \pm(dz - d\bar{z})$，它们是与“垂直于 Σ 的边界”的切向量对偶的余切向量。

我们考虑将$s_{1\ ,0,1}^y$（因而也包括 $s_{1,0,1}^x$）延拓到 $\mathcal{M}_{1,0,1_0}$。注意，$\mathcal{M}_{1,0,1}$ 有三种余维 1 边界，如图 6所示。

1. 形如 Γ_{sp} 的边界，其中 Γ_{sp} 是由两个顶点组成的图：一个亏格一开顶点 v_{sp}^1 和一个零亏格开顶点 v_{sp}^0，其中 v_{sp}^1 和 v_{sp}^0 由一条分离边 e_{sp} 连接，而对应于 z_1 的唯一标记（位于内部）附着于 v_{sp}^0。

   $\mathcal{M}_{\Gamma_{sp}}$ 中的节点圆柱有一个亏格一分量和一个零亏格分量。若我们用 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘对其零亏格分量进行参数化，其中内部标记点 z_1 位于原点 $0 \in \mathbb{C}$，而对应于 e_{sp} 的半节点位于 $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$。在上述参数化下，$s_{1\ ,0,1}^y$ 趋于 $\mathcal{M}_{\Gamma_{sp}}$ 的极限有两个分支：一个分支（在正数缩放意义下）由 $dz - d\bar{z}$ 表示，其权重为1 2（即对偶于“指向”半节点的截面）；另一个分支由前者的负值表示（在正数缩放意义下），即 $-dz + d\bar{z}$，其权重为1 2。

2. 形式为 Γ_{nsp} 的边界，其中 Γ_{nsp} 是由一个开放的零亏格顶点 v_{nsp} 构成的图，该顶点通过一条非分离边 e_{nsp} 与自身相连。在 v_{nsp} 上总共有三条半边：e_{nsp} 的两条边界半边 h_1 和 h_2，以及一条对应于内部标记点的内部半边。

   $\mathcal{M}_{\Gamma_{nsp}}$ 中的节点圆柱有一个亏格零分量。若将其参数化为 $\mathbb{C}$中的单位圆盘，其中内部标记点 z_1 位于原点 $0 \in \mathbb{C}$，而对应于 h_1 和 h_2 的两个边界半节点位于 α，$-1/\alpha \in \mathbb{C}$，其中 $|\alpha| = 1$。当$s_{1\ ,0,\ 1}^y$ 趋于$\mathcal{M}_{\Gamma_{nsp}}$ 时，其极限有两个分支。在上述参数化下，一个分支（相差一个正数缩放）由 $dz - d\bar{z}$ 表示，其权重为1 2（即对偶于一个「指向」朝向 α 和 $-1/\alpha$方向之间角平分线的切向量），另一个分支（相差一个正数缩放）由前一个分支的负向表示，即$-dz + d\bar{z}$，其权重为1 2。

3. 形如 Γ_{cb}的边界，其中 Γ_{cb} 是一个由单个开放的零亏格顶点v_{cb}构成的图，并且它有一个收缩边界半边 e_{cb}。在 v 上有一条对应于内部标记点的内部半边。

$\mathcal{M}_{\Gamma_{cb}}$ 中的节点圆柱有一个亏格零分量。若我们用 $\mathbb{C}$中的单位圆盘对其进行参数化，则内部标记点 z_1 位于原点 $0 \in \mathbb{C}$，而对应于 e_{cb} 的收缩边界节点在 $0 < \lambda < 1$时位于 $\lambda\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$。在上述参数化下，$s_{1,\ 0,\ 1}^{y}$ 到 $\mathcal{M}_{\Gamma_{cb}}$ 的极限有两个分支：一个分支（相差一个正数缩放）由 $dz - d\bar{z}$ 表示，权重为1 2 （即对偶于“指向”收缩边界节点的切向量）；另一个分支（相差一个正数缩放）由前者的负值表示，即 $-dz + d\bar{z}$，权重为1 2。

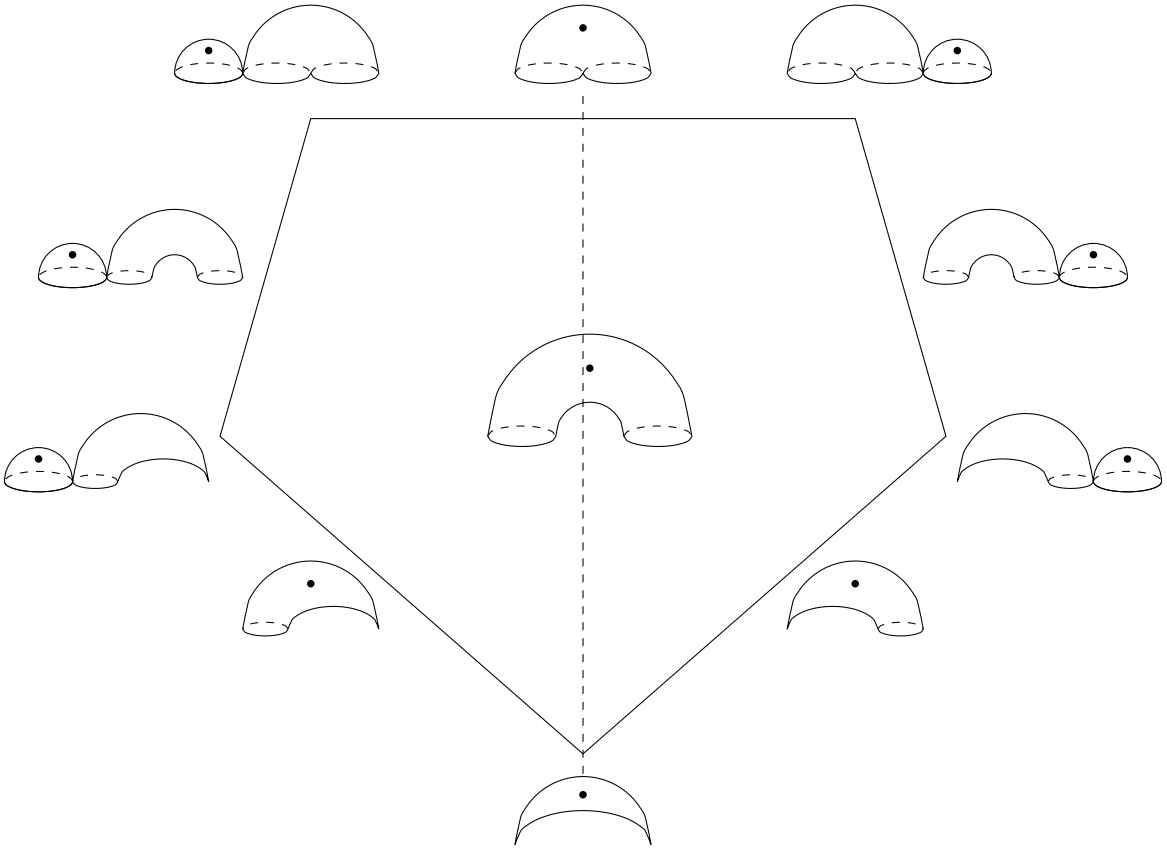


图6：基本模空间$\mathcal{M}_{1,\ 0,\ 1}$的双覆盖，即，带标记圆柱且边界带有标记的模空间。对交换两个边界标记的对合取商后，我们得到$\mathcal{M}_{1,\ 0,\ 1}$，即，沿垂直虚线轴的反射。

$s_{1,\ 0,\ 1}^{x}$ 到 $\mathcal{M}_{\Gamma_{sp}}$、$\mathcal{M}_{\Gamma_{nsp}}$和 $\mathcal{M}_{\overline{\Gamma_{cb}}}$ 的延拓，是在 $s_{1,\ 0,\ 1}^{y}$ 的延拓基础上再进行一次90度旋转得到的。我们按如下方式在 $\mathcal{M}_{1,\ 0,\ 1}$ 的边界上定义一个截面 $\mathfrak{s}$（在正函数缩放意义下）。

1. 在 $\overline{\mathcal{M}}_{\Gamma_{sp}}$ 上，若以 i 表示唯一的内部尾（位于 v_{sp}^{0} 上），以 h_0 表示 v_{sp}^{0} 上对应于 e_{sp} 的边界半边，则多截面 $\mathfrak{s}$ 是通过投影 $\mathcal{M}_{\Gamma_{sp}} \to \mathcal{M}_{v_{sp}^{0}}$ 从 $\mathbb{L}_i \to \mathcal{M}_{v_{sp}^{0}}$ 的截面 $\mathfrak{s}_{i,\ v_{sp}^{0},\ h}$ 拉回得到的。在上述参数化下，$\mathfrak{s}$（经过正数缩放）只有一个分支 $dz - d\bar{z}$，其权重为 1，且它与指向该半节点的截面对偶。

2. 在 $\mathcal{M}_{\overline{\Gamma_{nsp}}}$ 上，若记 i 为唯一的内部尾，并以 h_1，h_2 表示 v_{nsp} 上的两个边界半边，则多截面 $\mathfrak{s}$ 是由 $\mathbb{L}_i \to \mathcal{M}_{v_{nsp}}$ 上的截面 $\mathfrak{s}_{i,\ v_{nsp},\ h_1,\ h_2}$ 拉回得到的

通过（同构的）投影 $\mathcal{M}_{\Gamma_{nsp}} \to \overline{\mathcal{M}}_{v_{nsp}}$。于是 $\mathfrak{s}$ 有两个分支，每个分支的权重都是 $1\,2$；按上述参数化，在正数缩放意义下，其中一个是 $\alpha(dz+d\bar{z})$，另一个是 $-\frac{1}{\alpha}(dz+d\bar{z})$，它们各自是指向其中一个边界半节点的切向量的对偶。注意，这种 $\mathfrak{s}$ 在角点 $\mathcal{M}_{\Gamma_{nsp}} \cap \mathcal{M}_{\Gamma_{sp}}$ 处的限制，与前一项中在 $\mathcal{M}_{\Gamma_{sp}}$ 上定义的 $\mathfrak{s}$ 一致。还要注意，以这种方式构造的 $\mathfrak{s}|_{\mathcal{M}_{\Gamma_{nsp}}=\mathcal{M}_{v_{nsp}}}$ 具有对称性，即在交换两个边界半边的自同构 $\mathrm{Exc}_{h_1,\,h_2}$ 下保持不变：$\mathcal{M}_{v_{nsp}} \to \mathcal{M}_{v_{nsp}}$。

3. 在 $\mathcal{M}_{\Gamma_{cb}}$ 上，$\mathfrak{s}$ 有两个权重为 $1\ 2$ 的分支。在香蕉形角点（见图6），$\mathfrak{s}$ 与 $s^x_{1,\,0,\,1}$ 的极限相同；在另一个角点（即 $\mathcal{M}_{\Gamma_{cb}} \cap \mathcal{M}_{\Gamma_{sp}}$），$\mathfrak{s}$ 已由其在 $\mathcal{M}_{\Gamma_{sp}}$ 上的定义确定，此处两个分支重合。在这两个角点之间，注意到由 $s^y_{1\,,\,0,\,1}$ 的两个分支确定的直线将内部标记处的余切平面分成两个半平面，我们将 $\mathfrak{s}$ 从角点延拓到 $\mathcal{M}_{\Gamma_{cb}}$，使其两个分支分别位于不同的半平面内。

在 $\mathcal{M}_1$,0,1 的任意一点，由 s^y_1,0,1 的两个分支确定的直线将内部标记处的余切平面分成两个半平面，而 s^x_1,0,1 的两个分支分别位于不同的半平面内。此外，在 $\partial\mathcal{M}_1$,0,1 的任意一点，$\mathfrak{s}$ 的两个分支要么分别位于不同的半平面内，要么重合并位于分界线上。因此，在 $\partial\mathcal{M}_1$,0,1 上，s^x_1,0,1 与 $\mathfrak{s}$ 之间存在一个处处不为零的同伦，这意味着 s^x_1,0,1 与 $\mathfrak{s}$ 在边界 $\partial\mathcal{M}_1$,0,1 上具有相同的绕数。注意到 s^x_1,0,1 在整个 $\mathcal{M}_1$,0,1 上处处不为零，因此我们可以将 $\mathfrak{s}$ 延拓为整个 $\mathcal{M}_1$,0,1 上处处不为零的多截面 $\mathfrak{s}$。

对于任意光滑单顶点亏格一图 u，假设 i是 u的一个内部尾，令

$$\mathrm{For}_{u\to u_{1,0,1}} : \overline{\mathcal{M}}_u \to \overline{\mathcal{M}}_{1,0,1}$$

为遗忘除 i之外所有半边的遗忘态射。我们定义$\mathbb{L}_i \to \mathcal{M}_u$ 的一个多截面 $\mathfrak{s}_u$ 为

$$\mathfrak{s}_u := \tilde{\mathfrak{t}}_{i,u_{1,0,1}\to u} \otimes \mathrm{For}^*_{u\to u_{1,0,1}}\mathfrak{s}.$$

对于任意不含非分离内部边的 $\Gamma \in \partial u$，假设 $i \in T^I(v)$属于一个开顶点$v \in V^O(\Gamma)$，则有三种可能。

1. v 是一个亏格一顶点。在这种情况下，$\mathfrak{s}_{i,\,u}|_{\mathcal{M}_\Gamma}$ 是经由投影态射 $\pi_{\Gamma\to v}\colon \mathcal{M}_\Gamma \to \mathcal{M}_v$从$\mathfrak{s}_{i,\,v}$ 拉回的，即，

$$\mathfrak{s}_{i,u}|_{\overline{\mathcal{M}}_\Gamma} = \pi^*_{\Gamma\to v}\mathfrak{s}_{i,v}. \tag{3.2}$$

这是因为复合

$$\mathrm{For}_{v\to u_{1,0,1}} \circ \pi_{\Gamma\to v} = \mathrm{For}_{u\to u_{1,0,1}}|_{\overline{\mathcal{M}}_\Gamma}$$

这意味着遗忘$^*_{u\to u_{1,\,0,\,1}}\mathfrak{s}|_{\mathcal{M}_\Gamma} = \pi^*_{\Gamma\to v}$遗忘$^*_{v\to u_{1,\,0,\,1}}\mathfrak{s}$ 以及$\tilde{\mathfrak{t}}_{i,\,u_{1,\,0,\,1}\to u}|_{\mathcal{M}_\Gamma} = \pi^*_{\Gamma\to v}\tilde{\mathfrak{t}}_{i,\,u_{1,\,0,\,1}\to v}$。

2. v 是一个带边界根 r_v的带根亏格零顶点。根据构造，我们有

$$\mathfrak{s}_{i,v,r_v} = \tilde{\mathfrak{t}}_{i,v^0_{sp}\to v} \otimes \mathrm{For}^*_{v\to v^0_{sp}}\mathfrak{s}|_{v^0_{sp}},$$

其中 $\mathrm{For}^{v\to v^0_{sp}}\colon \overline{\mathcal{M}}_v \to \overline{\mathcal{M}}_{v^0_{sp}}$ 是遗忘态射，遗忘 v的所有半边，但保留 i 和根 j，于是

$$\mathrm{For}_{v\to v^0_{sp}} \circ \pi_{\Gamma\to v} = \pi_{\Gamma_{sp}\to v^0_{sp}} \circ \mathrm{For}_{u\to u_{1,0,1}}|_{\overline{\mathcal{M}}_\Gamma}$$

意味着

$$\mathfrak{s}_{i,u}|_{\overline{\mathcal{M}}_\Gamma} = \pi^*_{\Gamma\to v}\mathfrak{s}_{i,v,r_v}. \tag{3.3}$$

3. v是 一个带有边界根 r_v^1 和 r_v^2的双根零亏格顶点。根据构造，我们有 e

$$\mathfrak{s}_{i,v,r_v^1,r_v^2} = \tilde{\mathfrak{t}}_{i,v_{nsp}\to v} \otimes \mathrm{For}^*_{v\to v_{nsp}} \mathfrak{s}|_{\overline{\mathcal{M}}_{v_{nsp}}}, \tag{3.4}$$

其中，遗忘$v\to v_{nsp}$: $\overline{\mathcal{M}}_v \to \overline{\mathcal{M}}_{v_{nsp}}$ 是一个遗忘态射，它遗忘v 的所有半边，但保留 i 以及两个边界根 r_v^1 和 r_v^2。尽管存在两个这样的遗忘态射，因为 v 和 v_{nsp} 都各有两个边界根，但由于$\mathfrak{s}|_{\mathcal{M}_{v_{nsp}}}$ 在 $\overline{\mathrm{Exc}}_{h_1,\ h_2}$下不变，(3.4) 对这两个遗忘态射都成立。于是

$$\mathrm{For}_{v\to v_{nsp}} \circ \pi_{\Gamma\to v} = \pi_{\Gamma_{nsp}\to v_{nsp}} \circ \mathrm{For}_{u\to u_{1,0,1}} |_{\overline{\mathcal{M}}_\Gamma}$$

推出

$$\mathfrak{s}_{i,u}|_{\overline{\mathcal{M}}_\Gamma} = \pi^*_{\Gamma\to v}\mathfrak{s}_{i,v,r_v^1,r_v^2}. \tag{3.5}$$

观察 3.4. 对于一个开亏格一单顶点图 u，由于遗忘$^*_{I\setminus\{i\},\ \bar{B}^1\cup\bar{B}^2}$ $\mathfrak{s}$ 处处不消失， $\mathcal{M}_u$ 中$\mathfrak{s}_{i,\ u}$ 的零点集与$\mathfrak{t}_{i,\ i,\ I\setminus\{i\},\ \bar{B}^1\cup\bar{B}^2,\ \Gamma}$的零点集重合，后者具有$\bigcup_{\Gamma\in\mathcal{G}_i(u)}\mathcal{M}_\Gamma$的形式，其中集合 $\mathcal{G}_i(u)$ $\subset \partial u$ 由含有两个顶点的图组成：一个亏格一开顶点$v_{\Gamma,\ o}$ 和一个零亏格闭顶点$v_{\Gamma,\ c}$，标记为 i 的内部半边连接到$v_{\Gamma,\ c}$。

类似地，对于带有根 r_u 的开零亏格单顶点有根图 u，$\mathfrak{s}_{i、\ u、\ r_u}$ 在 $\mathcal{M}_u$ 中的零点集具有如下形式：$\bigcup_{\Gamma\in\mathcal{G}_i(u)}\mathcal{M}_\Gamma$，其中集合 $\mathcal{G}_i(u) \subset \partial u$ 由包含两个顶点的图组成：一个零亏格开顶点$v_{\Gamma、\ o}$ 和一个零亏格闭顶点$v_{\Gamma、\ c}$；标记为 i 的内部半边连接到$v_{\Gamma、\ c}$，而根 r_u 连接到 $v_{\Gamma、\ o}$。

对于带有两个边界根 r_u^1、r_u^2 的开零亏格单顶点双根图 u，$\mathfrak{s}_{i、\ u、\ r_u^1、\ r_u^2}$ 在 $\mathcal{M}_u$ 中的零点集具有如下形式：$\bigcup_{\Gamma\in\mathcal{G}_i(u)}\mathcal{M}_\Gamma$，其中集合 $\mathcal{G}_i(u) \subset \partial u$ 由包含两个顶点的图组成：一个零亏格开顶点 $v_{\Gamma、\ o}$ 和一个零亏格闭顶点 $v_{\Gamma、\ c}$；标记为 i 的内部半边连接到 $v_{\Gamma、\ c}$，而根 r_u^1 或 r_u^2 中至少一个连接到 $v_{\Gamma、\ o}$。注意，$\mathfrak{s}_{i、\ u、\ r_u^1、\ r_u^2}$ 有两条分支 $\mathfrak{s}_{i、\ u、\ r_u^1}$ 和 $\mathfrak{s}_{i、\ u、\ r_u^2}$，权重为 $1/2$；如果只有 r_u^1 或 r_u^2 中的一个连接到 $v_{\Gamma、\ o}$，那么 $\mathcal{M}_\Gamma$ 就只是一条分支 $\mathfrak{s}_{i、\ u、\ r_u^1}$ 或 $\mathfrak{s}_{i、\ u、\ r_u^2}$ 的零点集；如果 r_u^1 和 r_u^2 都连接到 $v_{\Gamma、\ o}$，那么 $\mathcal{M}_\Gamma$ 就是两条分支的零点集。

注记 3.5。当上面的图 u 是一个（无自旋的）对偶图时， $\mathcal{M}_u$ 中零点集的重数为一。当 u 是分次的 r-自旋分次图时， $\mathcal{M}_u^{1/r}$ 中零点集的重数为 r。这是因为 $\mathcal{M}_u^{1/r}$ 中存在额外的 r 重各向同性群，而非自旋情形中并不存在这种各向同性群，因此拉回的截面在轨形意义下具有 r 阶消失。

4 开 r-自旋关联函数的定义

4.1 通过 TRR 的温和扰动构造典范多截面

设 Γ 是一个连通的光滑稳定分次 r-自旋图， I 是内部标记的集合（不一定包含于 $T^I(\Gamma)$ 中），而 $S \subseteq T^I \setminus I$ 是扭曲度为零的内部尾的子集。设 $\boldsymbol{s}_\Gamma$ 是一个多截面

$$\mathcal{W}_\Gamma \oplus \bigoplus_{i\in I\cap T^I(\Gamma)} \mathrm{For}^*_{\Gamma\to \mathrm{for}_S(\Gamma)} \mathbb{L}_{i,\mathrm{for}_S(\Gamma)}^{\oplus d_i} \to \overline{\mathcal{PM}}_\Gamma,$$

我们可以将其写成如下形式

$$\boldsymbol{s}_\Gamma = s^{\mathcal{W}} \oplus \bigoplus_{1\le i\le |I^{d>0}|} \bigoplus_{1\le j\le d_i} s_i^j,$$

其中 $s^{\mathcal{W}}$ 是 $\mathcal{W}$ 的截面，且每个 s_i^j 都是遗忘$^*_{\Gamma\to \mathrm{for}_S(\Gamma)}\mathbb{L}_{i,\mathrm{for}_S(\Gamma)}$的多截面。回想一下，若遗忘$_S(\Gamma)$ 是不稳定的，我们形式上将 $\mathbb{L}_{i,\mathrm{for}_S(\Gamma)}$ 视为单点$\mathcal{PM}_{\mathrm{for}_S(\Gamma)}$上的平凡复直线。

对于任意 $\Delta \in \partial^*\Gamma$，我们定义集合 $S_\Delta \subseteq S$ 如下：

$$S_\Delta := \{a \in S\colon\ a \in T^I(u)\ u \in V(\Delta), \text{遗忘}_{S\cap T^I(u)}(u)\text{需要收缩以使遗忘}_S(\Gamma)\text{稳定} \quad \}.$$

我们将通过遗忘 S_Δ 中的所有尾并反复收缩所有不稳定顶点所得到的图定义为 $\mathcal{T}_S\Delta$。注意，若遗忘$_S(\Gamma)$后得到的图是稳定的，则 $\mathcal{T}_S\Delta$ 是 ∂ 中遗忘$_{S_\Delta}(\Gamma)$后得到的稳定图；若遗忘$_S(\Gamma)$后得到的图是不稳定的，则 $\mathcal{T}_S\Delta$ 与遗忘$_S(\Gamma)$后得到的图相同。

注 4.1。若遗忘$_S(\Gamma)$后得到的图是稳定的，则 $\mathcal{PM}_{\mathcal{T}_S\Delta} \subseteq \mathcal{PM}_{\mathrm{for}_{S_\Delta}(\Gamma)}$ 是 $\mathcal{PM}_\Delta \subseteq \mathcal{PM}_\Gamma$ 在遗忘态射 $\mathrm{For}_{\Gamma\to\mathrm{for}_{S_\Delta}(\Gamma)}$ 下的像：$\mathcal{PM}_\Gamma \to \mathcal{PM}_{\mathrm{for}_{S_\Delta}(\Gamma)}$。我们将这样的受限遗忘态射记作

$$\mathrm{For}_{\Delta\to\mathcal{T}_S\Delta}\colon \mathcal{PM}_\Delta \to \mathcal{PM}_{\mathcal{T}_S\Delta}.$$

注 4.2。若 $\mathcal{T}_S\Delta$ 是稳定的，在收缩过程中，若带有标记为 $i \in I$ 的尾的顶点 v 是不稳定的且需要被收缩，那么唯一的可能是 v 是闭的，并且只有另一条半边与另一个顶点 v' 相连。收缩 v 后，标记 i 移至 v'，并替代 v' 上原有的半边。反复收缩遗忘 $S_\Delta(\Gamma)$ 后得到的图中的所有不稳定顶点后，尾 i 收缩为 $\mathcal{T}_S\Delta$ 中的唯一顶点，记作$\chi(i)$，并且不再是不稳定的。类似地，未被收缩的顶点 $u \in V(\Delta)$ 与 $\xi(u) \in$ 中遗忘$_{S_\Delta}(\Gamma)$后得到的图的顶点一一对应，并且 $\mathcal{PM}_u$ 与 $\mathcal{PM}_{\xi(u)}$ 之间存在自然同一。

记号 4.3。设 Δ 是一个稳定的分次 r-自旋图，$F_\Delta \to \mathcal{PM}_\Delta$ 是一个向量丛，并且对每个 $v \in V(\Delta)$ 有向量丛 $F_v \to \mathcal{PM}_v$，满足

$$q^*(\boxplus_{v\in V(\Delta)} F_v) = \mu^* F_\Delta$$

其中 q 和 μ 是 §2.2.3 中的态射。若 s_Δ 是 F_Δ 的一个多截面，且 s_v 是 F_v 的多截面，并满足

$$\mu^* s_\Delta = q^*(\boxplus_{v\in V(\Delta)} s_v),$$

我们约定（滥用记号）记作

$$s_\Delta = \boxplus_{v\in V(\Delta)} s_v \quad \text{or} \quad s_\Delta = \bigoplus_{v\in V(\Delta)} \mathrm{For}^*_{\Delta\to v}\, s_v$$

也就是说，s_Δ 是 s_v 的粘合。

定义 4.4。在上述记号下，对于一个 r-自旋图 $\Delta \in \partial^*\Gamma$，若多截面 $\boldsymbol{s}_\Gamma$ 在 Δ 处可分解，则称其为

- $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}$ 在 $\mathcal{PM}_\Delta \subset \mathcal{PM}_\Gamma$ 上的限制 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_\Delta$ 具有如下形式

$$\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_\Delta = \boxplus_{u\in V^O(\Delta)} \boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_u \maltese \maltese_{u\in V^C(\Delta)} \boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_u, \tag{4.1}$$

  其中，对于 $u \in V^C(\Delta)$，$\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_u$ 是 $\mathcal{W}_u \to \mathcal{R}_u$ 的相容多截面（参见第 2.2.4 节），使得 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_u$ 是 $\mathcal{W}_u \to \mathcal{M}_u = \mathcal{PM}_u$ 的多截面；对于 $u \in V^O(\Delta)$，$\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_u$ 是 $\mathcal{W}_u \to \mathcal{PM}_u$ 的多截面。回想一下，除非 u 是闭的且具有扭曲为 -1 的锚点，否则我们有 $\mathcal{R}_u = \mathcal{M}_u$，并且 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_u = \boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_u$ 是 $\mathcal{W}_u \to \mathcal{PM}_u$ 的多截面。
- 遗忘每个 s^j_i，其限制 s^j_i，Δ 到 $\mathcal{PM}_\Delta$，具有如下形式

$$s^j_{i,\Delta} = \mathrm{For}^*_{\Delta\to\mathcal{T}_S\Delta}\, \pi^*_{\mathcal{T}_S\Delta\to u_i^{\mathcal{T}_S\Delta}}\ s^j_{i,u_i^{\mathcal{T}_S\Delta}}, \tag{4.2}$$

在.....之间的自然同一下

$$\mathrm{For}^*_{\Gamma\to \mathrm{for}_S(\Gamma)}\,\mathbb{L}_{i,\mathrm{for}_S(\Gamma)}\big|_{\overline{\mathcal{PM}}_\Delta}$$

and

$$\mathrm{For}^*_{\Delta\to\mathcal{T}_S\Delta}\,\pi^*_{\mathcal{T}_S\Delta\to u_i^{\mathcal{T}_S\Delta}}\,\mathrm{For}^*_{u_i^{\mathcal{T}_S\Delta}\to \mathrm{for}_{S\cap T^I(u_i^{\mathcal{T}_S\Delta})}(u_i^{\mathcal{T}_S\Delta})}\,\mathbb{L}_{i,\mathrm{for}_{S\cap T^I(u_i^{\mathcal{T}_S\Delta})}(u_i^{\mathcal{T}_S\Delta})},$$

其中，遗忘$^*_{\Delta\to\mathcal{T}_S\Delta}$: $\overline{\mathcal{PM}}_\Delta\to\overline{\mathcal{PM}}_{\mathcal{T}_S\Delta}$ 是遗忘态射，$u_i^{\mathcal{T}_S\Delta}$ 是包含内部标记 $i\in I$的 $\mathcal{T}_S\Delta$ 的唯一顶点，而$s^{i\,,\ u_i^{\mathcal{T}_S\Delta}}$ 是一个多截面

$$\mathrm{For}^*_{u_i^{\mathcal{T}_S\Delta}\to \mathrm{for}_{S\cap T^I(u_i^{\mathcal{T}_S\Delta})}(u_i^{\mathcal{T}_S\Delta})}\,\mathbb{L}_{i,\mathrm{for}_{S\cap T^I(u_i^{\mathcal{T}_S\Delta})}(u_i^{\mathcal{T}_S\Delta})}\to\overline{\mathcal{PM}}_{u_i^{\mathcal{T}_S\Delta}}.$$

此外，如果对每个顶点 $v\in\mathcal{T}_S\Delta$，$\boldsymbol{s}_\Gamma$ 在 Δ 处横截可分解，

$$s_v:=\overline{\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_{\xi^{-1}(v)}}\oplus\bigoplus_{i\in I\cap T^I(v)}\bigoplus_{1\le j\le d_i}s^j_{i,v}$$

作为一个多截面与零横截

$$\mathcal{W}_v\oplus\bigoplus_{i\in I\cap T^I(v)}\mathbb{L}_i^{\oplus d_i}\to\overline{\mathcal{PM}}_v\cong\overline{\mathcal{PM}}_{\xi^{-1}(v)}.$$

注4.5。直观地说，如果我们忽略组装算子带来的微妙之处，即，假设 Witten 丛可分解为直和，那么 s在 Δ处可分解意味着我们可以写成

$$s_\Delta=\mathrm{For}^*_{\Delta\to\mathcal{T}_S\Delta}\bigboxplus_{v\in\mathcal{T}_S\Delta}s_v,$$

而 s 在 Δ处横截可分解，意味着每个 s_v 都与零横截。

在 $S=\emptyset$的情形下，我们总有 $\mathcal{T}_S\Delta=\Delta$。在这种情形下，令 $I_\Gamma^{d>0}:=\{i\in T^I(\Gamma):\ d_i\ge1\}$为 $T^I(\Gamma)$的一个子集，令 $\gamma\colon\{1,2,\dots,|I_\Gamma^{d>0}|\}\to I_\Gamma^{d>0}$为一个双射，我们将其视为集合 $I_\Gamma^{d>0}$上的一个序（也记作 $\le_\gamma$）。为简化记号，我们将这些多截面称为

$$s^1_{\gamma(1)},s^2_{\gamma(1)},\dots,s^{d_{\gamma(1)}}_{\gamma(1)},s^1_{\gamma(2)},\dots,s^{d_{\gamma(2)}}_{\gamma(2)},\dots,s^1_{\gamma(|I^{d>0}|)},\dots,s^{d_{\gamma(|I^{d>0}|)}}_{\gamma(|I^{d>0}|)}$$

as

$$t_1,t_2,\dots,t_D,$$

其中 $D=\sum_{i\in I}d_i$，并令 $t_0:=\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}$。我们还令 $T_s:=\bigoplus_{m=0}^s t_m$。我们按如下方式定义映射 $\nu\colon\{1,2,\dots,D\}\to I_\Gamma^{d>0}$：使得 t_m是 $\mathbb{L}_{\nu(m)}$的多截面。若 $t_m=s^j_{\nu(m)}$在 Δ处可分解，则对任意 $u\in V(\Delta)$，令 $t_{m,u}=s^j_{\nu\,(m)\,u}$，其中 u 是 Δ 的唯一顶点，且满足$\nu(m)\in T^I(u)$；若 $\nu(m)\notin T^I(u)$，则形式上令 $t_{m,u}=0$为秩零丛的一个截面。

定义 4.6。沿用上述记号，对于一个光滑稳定的亏格一 r-旋图 Γ，在 $S=\emptyset\subseteq T^I\setminus I$的情形下，若 $\boldsymbol{s}_\Gamma$ 是*TRR* 的温和扰动，则称之为

1. 对于所有 $\Delta\in\partial^*\Gamma$，$\boldsymbol{s}_\Gamma$ 在 Δ 处均可分解。

2. 对于所有 $\Delta\in\partial^*\Gamma$ 以及所有 $u\in V(\Delta)$ 和 $0\le j\le D$，该多截面

$$T_{j,u}:=\overline{\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_u}\oplus t_{1,u}\oplus t_{2,u}\oplus\cdots\oplus t_{j,u}$$

of

$$E_{j,u}:=\mathcal{W}_u\oplus\bigoplus_{i\in T^I(u)\cap\nu(\{1,2,\dots,j\})}\mathbb{L}_i\to\overline{\mathcal{PM}}_u$$

与零横截。

3. 对于上述所有开顶点 $u \in V(\Delta)$，若 $\nu(j) \in T^I(u)$，则存在零点集的一个开邻域（见观察 3.4）$\left(\bigcup_{\Lambda\in\mathcal{G}_{\nu(j)}(u)} \mathcal{M}_\Lambda\right) \cap \mathcal{PM}_u$ $\mathfrak{s}_{\nu(j),u}$，位于 $\mathcal{PM}_u$ 中，使得对于任意 $p \in \mathcal{PM}_u \setminus \overline{K_{j,u}}$，都有 $t_{j,u}(p) = \mathfrak{s}_{\nu(j),u}(p)$，其中 $\mathfrak{s}_{\nu(j),u}$ 是 $\mathbb{L}_{\nu(j)} \to \mathcal{PM}_u$ 的 TRR 多截面（若 u 为零亏格，则相对于 u 的有根或双根结构），其定义见 §3.2。

4. 如果秩 $E_{s\text{为}u} >$ 维数 $\overline{\mathcal{PM}_u}$，对于一个开顶点 $u \in V(\Delta)$ 和 $\nu(s) \in T^I(u)$，那么 $T_{s-1,\ u}$ 在 $K_{s\perp u} \subseteq \mathcal{PM}_u$处处不为零。

5. 如果秩 $E_{s\text{为}u} =$维数 $\overline{\mathcal{PM}_u}$，对于一个开一亏格顶点 $u \in V(\Delta)$ 和 $\nu(s) \in T^I(u)$，那么 $T_{s-1,\ u}$ 在 $K_{s\perp u} \subseteq \mathcal{PM}_u$处处不为零。

注记 4.7。注意，假设 $\boldsymbol{s}_\Gamma$ 是 TRR 的一个 γ-温和扰动，对于任意 $\Delta \in \partial^*\Gamma$，如果$u \in V(\Delta)$ 是亏格一的，那么对于任意 $0 \le j \le D$，多截面 $T_{j,\ u}$ 是 TRR 的一个 $\gamma|_{u,\ j}$-温和扰动，其中 $\gamma|_{u,\ j}$是 γ在集合 $\{i \in I_\Gamma^{d>0} \cap T^I(u) :\ i \le_\gamma \nu(j)\} \subseteq I_\Gamma^{d>0}$ 上诱导的序。

注记 4.8。对于任意秩为E_s的开顶点 $u,\ u >$ 维数为$\mathcal{PM}_u$时，$\overline{T_{s,\ u}}$由横截性可知处处不消失。此外，作为条目 3 和 5 的推论，若开的一亏格顶点 $u \in V(\Gamma)$ 满足秩$E_{s,\ u} =$维数为$\mathcal{PM}_u$，则$\overline{T_{s,\ u}}$ 在 $\mathcal{PM}_u$上也处处不消失。

定义 4.9。对于 $g = 0$ 或 1，令 I，B 为内部与边界标记的集合，使得 $|B| + 2|I| \ge 3 - 2g$，我们考虑向量丛

$$E := \mathcal{W} \oplus \bigoplus_{i\in I} \mathbb{L}_i^{\oplus d_i} \to \overline{\mathcal{PM}}_{g,B,I}^{1/r,0}.$$

令 γ 为集合 $I^{d>0} := \{i \in I\colon d_i \ge 1\}$上的一种序。对于 E的一个多截面 $\boldsymbol{s}$，记作 $\boldsymbol{s} = s^{\mathcal{W}} \oplus \bigoplus_{i\in I} \bigoplus_{1\le t\le d_i} s_i^t$，其中 $s^{\mathcal{W}}$ 是 $\mathcal{W} \to \mathcal{PM}^{1/r}{}_{,\ g\ B\ I}^{\ 0}{}_{,,}$的一个多截面，且每个 s_i^t 都是 $\mathbb{L}_i \to \mathcal{PM}^{1/r}{}_{,\ g\ B\ I}^{\ 0}{}_{,,}$的一个多截面。我们分别称 $s^{\mathcal{W}}$ 和 $\bigoplus_{i\in I} \bigoplus_{1\le t\le d_i} s_i^t$ 为 $\boldsymbol{s}$的 $\mathcal{W}$-部分和 $\mathbb{L}$-部分。若多截面 $\boldsymbol{s}$满足以下条件，则称其为 γ-典范的 。

1. 多截面 $\boldsymbol{s}$ 粘合成一个

$$\widetilde{E} := \widetilde{\mathcal{W}} \oplus \bigoplus_{i\in I} \widetilde{\mathbb{L}}_i^{\oplus d_i} \to \widetilde{\mathcal{PM}}_{g,B,I}^{1/r,0},$$

即，$\boldsymbol{s}$ 在 $\mathcal{PM}^{1/r}{}_{,g\ B\ I}^{\ 0}{}_{,,}$的 AI 型边界上的限制，在 $\sim_{PI}$下与 $\boldsymbol{s}$在 $\mathcal{PM}^{1/r}{}_{,g\ B\ I}^{\ 0}{}_{,,}$的相应 BI 型边界上的限制相一致。

2. 我们用 $\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{G}}$ 表示 $\boldsymbol{s}$ 在 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}} \subseteq \mathcal{PM}^{1/r}{}_{,1\ B\ I}^{\ 0}{}_{,,}$上的限制。对于 $\boldsymbol{G} \in \mathrm{sGPI}_{1\ B}^{r\ 0}{}_{,,,I}$，我们要求

$$\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{G}} = \boxplus_{\Gamma\in V(\boldsymbol{G})} \boldsymbol{s}_\Gamma, \tag{4.3}$$

其中 $\boldsymbol{s}_\Gamma = s_\Gamma^{\mathcal{W}} \oplus \bigoplus_{i\in I\cap T^I(\Gamma)} \bigoplus_{1\le t\le d_i} s_{i,\Gamma}^t$ 是该向量丛的一个横截多重截面

$$E_\Gamma := \mathcal{W}_\Gamma \oplus \bigoplus_{i\in I\cap T^I(\Gamma)} \mathrm{For}_{\Gamma\to\mathcal{B}\Gamma}^* \mathbb{L}_{i,\mathcal{B}\Gamma}^{\oplus d_i} \to \overline{\mathcal{PM}}_\Gamma.$$

ˆ 3. 当 $\boldsymbol{G}$ 为亏格一（即，$g = 1$）时，对于任意 $\Gamma \in V(\boldsymbol{G})$，我们将 $\mathcal{B}\Gamma$ 记作从 Γ 的 $I_{sp,\ 1}^{PI}(\mathbf{G}) \cap T^I(\Gamma) \subset T^I(I)$ 中遗忘所有内部尾后得到的图。注意，$I_{sp,\ 1}^{PI}$ 中的所有尾的扭曲均为零，因此 ˆ$\mathcal{B}\Gamma$ 仍然是一个 r-自旋图，并且它总是

稳定的。当 $T(\Gamma)\setminus RT(\Gamma)\neq\emptyset$ 时，我们将遗忘态射记作 $\mathrm{For}_{\Gamma\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$：$\mathcal{PM}_\Gamma\to\mathcal{PM}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$。我们要求 $\boldsymbol{s}_\Gamma$ 具有如下形式

$$\boldsymbol{s}_\Gamma=\mathrm{For}^*_{\Gamma\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma}\,\boldsymbol{s}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}\tag{4.4}$$

$\hat{}$ 在 $\mathrm{For}_{\Gamma\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma}E_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$ 与 E_Γ 之间的自然同一下（当 $\mathcal{B}\Gamma$ 不稳定时，这些丛是秩零丛），其中 $\boldsymbol{s}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$ 是向量丛的横截多重截面

$$E_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}:=\mathcal{W}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}\oplus\bigoplus_{i\in I\cap T^I(\Gamma)}\mathrm{For}^*_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma\to\mathcal{B}\Gamma}\mathbb{L}_{i,\mathcal{B}\Gamma}^{\oplus d_i}\to\overline{\mathcal{PM}}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}.$$

$\hat{}$**4.** 当 $\mathcal{B}\Gamma$ 稳定时，我们可以按照序将 $\boldsymbol{s}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$ 分解，写作 g

$$\boldsymbol{s}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}=t_{0,\hat{\mathcal{B}}\Gamma}\oplus t_{1,\hat{\mathcal{B}}\Gamma}\oplus\cdots\oplus t_{D,\hat{\mathcal{B}}\Gamma},$$

其中 $t_{0,\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$ 是 $\mathcal{W}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}\to\mathcal{PM}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$ 的多截面；对于 $1\le j\le D$，$t_{j,\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$ 是 $\mathrm{For}^*_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma\to\mathcal{B}\Gamma}\mathbb{L}_{\nu(j),\mathcal{B}\Gamma}\to\mathcal{PM}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$ 的多截面，当 $\nu(j)\in T^I(\Gamma)$ 时，它拉回为 t_j，否则只是秩零丛的一个形式 $\hat{}$ 截面。于是，对于任意 $\Delta\in\partial^*\mathcal{B}\Gamma$ 和任意 $0\le s\le D$，多截面

$$\bigoplus_{j=0}^{s}t_{j,\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$$

在 Δ处是横截可分解的。

5. 若 $\Gamma\in V(\boldsymbol{G})$ 为零亏格，则截面 $\boldsymbol{s}_\Gamma$ 的 $\mathcal{W}$ 部分 $\boldsymbol{s}_\Gamma^{\mathcal{W}}$，作为 $\mathcal{W}_\Gamma\to\mathcal{PM}_\Gamma$ 的多截面，是正的（见定义 2.24）。

$\hat{}$ **6.** 若 $\Gamma\in V(\boldsymbol{G})$ 为亏格一且 $\mathcal{B}\Gamma$ 稳定，则多截面 $\boldsymbol{s}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$ 是 TRR 截面的 $\gamma|_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$-温和扰动，其中 $\gamma|_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$ 是由 γ 在 $I^{d>0}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}=T^I(\hat{\mathcal{B}}\Gamma)\cap I^{d>0}\subseteq I^{d>0\hat{}}$ 上诱导的序。注意，在这种情况下我们有 $\mathcal{B}\Gamma=\mathcal{B}\hat{\Gamma}$。

命题 4.10. 使用上述记号，对于 $g=0$ 或 1，对 $\overline{I^{d>0}}$ 上的任意序 γ，至少存在一个 $E\to\mathcal{PM}^{1/r}_{g,B,,I}$ 的 γ-典范多截面。

我们将 γ 情形下的典范多截面的构造推迟到 §6。$g=0$ 情形下的构造可见命题 4.16。

观察4.11。设 $\boldsymbol{s}$ 是 γ 情形下的典范多截面，其中秩 $E=$维 $\mathcal{PM}^{1/r}_{g,B,,I}$，则除非对任意 $\Gamma\in V(\boldsymbol{G})$ 都有 $\hat{\mathcal{B}}\Gamma=\Gamma$ 且秩 $E_\Gamma=$维$\mathcal{M}_\Gamma$，否则 $\boldsymbol{s}$ 在 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$ 上处处不为零，对所有 $\boldsymbol{G}\in\mathrm{sGPI}^{r\,0}_{g\,B,,,I}$ 均如此。这由 $\boldsymbol{s}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$ 的横截性以及下列方程可得

$$\sum_{\Gamma\in V(\boldsymbol{G})}\operatorname{rank}E_\Gamma=\operatorname{rank}E,\qquad\sum_{\Gamma\in V(\boldsymbol{G})}\dim\overline{\mathcal{PM}}_\Gamma=\dim\overline{\mathcal{M}}^{1/r}_{g,B,I},$$

$$\operatorname{rank}E_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}=\operatorname{rank}E_\Gamma,\ \text{and}\ \dim\overline{\mathcal{PM}}_\Gamma\ge\dim\overline{\mathcal{PM}}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}.$$

特别是，根据注 4.8 和定义 4.9 中的第 6 项，只要存在一个亏格一 $\Gamma\in V(\boldsymbol{G})$，$\boldsymbol{s}$ 在 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$ 上便处处不为零。

观察4.12。设在秩为 $E=$、维数为 $\mathcal{PM}^{1/r}_{g,B,,,I}$的情形下，$\boldsymbol{s}$是 E 的一个 γ-典范多截面，那么对于任意 $\boldsymbol{G}\in\mathrm{sGPI}^{r\,0}_{g\,B,,,,I}$，存在一个开邻域 $U_{\boldsymbol{G}}\subseteq\mathcal{M}_{\boldsymbol{G}}$，

$$\partial^R\overline{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{G}}\cup\partial^{NS+}\overline{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{G}}\cup\mathcal{Z}^{dj}_{\boldsymbol{G}}\subset\overline{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{G}},$$

使得 $\boldsymbol{s}$ 在其上处处不为零

$$(U_{\boldsymbol{G}} \cup \partial^{CB}\overline{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{G}}) \cap \overline{\mathcal{PM}}_{\boldsymbol{G}}.$$

事实上，当存在亏格一的 $\Gamma \in V(\boldsymbol{G})$ 时，我们可以根据观察 4.11 取$\overline{U_{\boldsymbol{G}}} = \mathcal{M}_{\boldsymbol{G}}$。当所有 $\Gamma \in V(\boldsymbol{G})$ 都是亏格零时，则 $\mathcal{Z}^{dj}_{\boldsymbol{G}} = \emptyset$，且 $U_{\boldsymbol{G}}$ 的存在性可由亏格零分量上 $\mathcal{W}$-部分的正性约束推出（即 定义 4.9 中的第 5 项）。注意， $\boldsymbol{s}$ 在

$$(\partial^{BI}\overline{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{G}} \cup \partial^{AI}\overline{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{G}}) \cap \overline{\mathcal{PM}}_{\boldsymbol{G}}$$

根据定义 4.9 中的第 4 项，也处处不为零。

由于 $\mathcal{P}\overline{\mathcal{M}_{\boldsymbol{G}}} \setminus U_{\boldsymbol{G}}$ 是紧的，我们可以定义（见 [4, 附录 A]）欧拉数

$$\int_{\overline{\mathcal{PM}}_{\boldsymbol{G}}} e(E;\mathbf{s}) \in \mathbb{Q}$$

相对于多截面 $\boldsymbol{s}$，将其定义为 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$ 中 $\boldsymbol{s}$ 的零点计数（按重数计）#$Z(\boldsymbol{s})$，对每个 $\overline{\boldsymbol{G} \in \mathrm{sGPI}^{r\ 0}_{1\ B,,,I}}$，并使用在 [31] 中构造的 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$ 上 E 的典范相对定向。

定义 4.13。 沿用上述记号，对于 $g = 0$ 或 1，若 $\mathrm{rank} E = \dim\ \mathcal{PM}^{1/r}_{g\ B,,I}$，我们将积分称为

$$\left\langle \prod_{i\in I} \tau^{a_i}_{d_i} \prod_{i\in B} \sigma^{b_i} \right\rangle^{\frac{1}{r},o,\gamma,\mathbf{s}}_{g} := \int_{\overline{\mathcal{PM}}^{1/r,0}_{g,B,I}} e(E;\mathbf{s}) \in \mathbb{Q},$$

其中$\mathbf{s}$ 是一个 γ典范多截面，作为关于 γ 和 $\boldsymbol{s}$的开g r自旋交数。为简洁起见，我们有时将上述数称为有序开亏格一 r自旋交数，或称为一个关联函数。当$\underline{\mathrm{rank}(E)} \neq \dim\ \mathcal{PM}^{1/r}_{g\ B,,I}$时，积分定义为零。

备注4.14。若 $d_i = 0$ 对所有 $i \in I$都成立，则亏格一关联函数总为零，因为此时由(2.15)可得 $\mathrm{rank}\ E =$ 秩$\mathcal{W}_{1,B,I} <$ 维数$\mathcal{PM}^{1/r}_{1\ B,,I}$.

4.2 亏格零情形

在本小节中，我们将证明，在 $g = 0$ 情形下，上述关联函数与序的选择γ 以及多截面$\mathbf{s}$ 无关。我们还将把它们与 [4]中定义的零亏格开 r自旋关联函数进行比较。关于 $g = 1$ 情形下选择无关性的证明推迟至§5.2。

在 $g = 0$ 情形下，定义 4.9 中的 γ-典范性实际上与序 γ无关。在 $g = 0$ 情形下，我们将 γ-典范多截面简称为典范多截面。

命题 4.15。 对于任意两个$\mathbf{s}^a$ 和$\mathbf{s}^b$ 的典范多截面

$$E := \mathcal{W} \oplus \bigoplus_{i\in I} \mathbb{L}_i^{\oplus d_i} \to \overline{\mathcal{PM}}^{1/r,0}_{0,B,I},$$

我们有

$$\int_{\overline{\mathcal{PM}}_{0,B,I}} e(E;\mathbf{s}^a) = \int_{\overline{\mathcal{PM}}_{0,B,I}} e(E;\mathbf{s}^b),$$

即，零亏格开 r-旋关联函数与序 γ 及典范多截面 $\boldsymbol{s}$的选择无关，因此我们可以写作

$$\left\langle \prod_{i\in I} \tau^{a_i}_{d_i} \prod_{i\in B} \sigma^{b_i} \right\rangle^{\frac{1}{r},o}_{0} := \left\langle \prod_{i\in I} \tau^{a_i}_{d_i} \prod_{i\in B} \sigma^{b_i} \right\rangle^{\frac{1}{r},o,\gamma,\mathbf{s}}_{0}$$

遗忘任何此类选择。

证明。 </style>这几乎是 [32, 定理 3.9]的一个特例（$\mathfrak{h}=0$）。尽管 [32] 相对余切线丛是$\mathbb{L}_i'$，证明过程仍然相同。我们概述证明的关键思路。

我们将 $\mathbf{s}^a$ 和 $\mathbf{s}^b$ 视为 $\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}_{,0\,B\quad,,I}\subseteq\widetilde{\mathcal{M}}^{1/r}_{,0\,B\,I,,}$上的多截面。注意，$\widetilde{\mathcal{M}}^{1/r}_{,0\,B\,I,,}$是一个具有 CB 型边界、NS+ 或 R 型边界的紧空间，而 $\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}_{,0\,B\quad,,I}\subseteq\widetilde{\mathcal{M}}^{1/r}_{,0\,B\,I,,}$只有 CB 型边界。我们记作

$$\partial\widetilde{\mathcal{M}}^{1/r,0}_{0,B,I}=\partial^{CB}\widetilde{\mathcal{M}}^{1/r,0}_{0,B,I}\cup\partial^{+}\widetilde{\mathcal{M}}^{1/r,0}_{0,B,I},$$

其中 $\partial^{+}\widetilde{\mathcal{M}}^{1/r}_{,0\,B\,I,,}$是所有 NS+ 型边界和 R 型边界的并集。

由于 $\mathbf{s}^a$ 和 $\mathbf{s}^b$ 都是典范的，对于任意 $0\le t\le 1$，多截面 $(1-t)\mathbf{s}^a+t\mathbf{s}^b$在任意点 $p\in\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}_{,0\,B\quad,,I}\cap\partial^{CB}\widetilde{\mathcal{M}}^{1/r}_{,0\,B\,I,,}$都不消失。事实上，假设 $p\in\mathcal{PM}_{\Gamma^{CB}}\times\prod_{\Gamma\in V(\mathbf{G})\setminus\{\Gamma^{CB}\}}\mathcal{PM}_\Gamma$，其中 Γ^{CB}有一个收缩边界尾，那么 $\mathbf{s}^a_{\Gamma^{CB}}$、$\mathbf{s}^b_{\Gamma^{CB}}$以及 $(1-t)\mathbf{s}^a_{\Gamma^{CB}}+t\mathbf{s}^b_{\Gamma^{CB}}$ 在相应的收缩边界节点处取正值。出于类似原因，存在 $\partial^{+}\widetilde{\mathcal{M}}^{1/r}_{,0\,B\quad,,I}\subseteq\widetilde{\mathcal{M}}^{1/r}_{B,0\quad I,,}$的一个开邻域 $U^+\subseteq\widetilde{\mathcal{M}}^{1/r}_{,0\,B\,I,,}$，使得对于任意 $0\le t\le 1$，多截面 $(1-t)\mathbf{s}^a+t\mathbf{s}^b$ 在任意点 $p\in\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r,0\,B\quad,,I}\cap U^+$都不消失。

因此，$(1-t)\mathbf{s}^a+t\mathbf{s}^b$ 是$\mathbf{s}^a$ 与$\mathbf{s}^a$ 之间的一个同伦，它在$\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r,0\,B\quad,,I}\cap(U^+\cup\partial^{CB}\widetilde{\mathcal{M}}^{1/r,}_{0\,B\,I,,})$上处处不为零。由此，我们可以利用 [4,引理 4.12]完成证明。

□

在 [6, 4], 一种零亏格开 r-旋理论中（下文称为 BCT 理论），人们以不同的方式构造了该理论。对于一个分级的 r-旋图 Γ，我们用 $\mathcal{F}\Gamma$ 表示由 Γ 得到的图：先分离其在非法半边处扭曲为 0 的所有 NS 边，然后遗忘所有扭曲为 0 的非法半边。请注意，遗忘尾可能会产生不稳定分支 $\mathcal{F}\Gamma$；我们将与不稳定分支对应的模空间（它是$\mathcal{M}_{\mathcal{F}\Gamma}$的一个直和项）视为单点。令 F_Γ: $\overline{\mathcal{M}}_\Gamma\to\mathcal{M}_{\mathcal{F}\Gamma}$ 为模空间层面上诱导的映射。[4, 命题 6.2]构造了特殊 *BCT* 典范多截面，它们是横截多截面$\hat{s}^{\mathrm{BCT}}_\Gamma$的集合

$$E_\Gamma:=\mathcal{W}_\Gamma\oplus\bigoplus_{i\in T^I(\Gamma)\cap I}\mathbb{L}_i^{\oplus d_i}\to\overline{\mathcal{PM}}_\Gamma$$

对于每个分次 r-旋量图 Γ，除满足定义 2.24 中相同的正性条件外，还满足对于每个 $\Gamma\in\partial^*\Delta$

$$\hat{s}^{\mathrm{BCT}}_\Delta\big|_{\overline{\mathcal{M}}_\Gamma}=F_\Gamma^*\hat{s}^{\mathrm{BCT}}_{\mathcal{F}\Gamma}.\tag{4.5}$$

注意，模空间 $\mathcal{PM}^{1/r}_{0\,B\,,\,,\,I}$是不交并

$$\overline{\mathcal{PM}}^{1/r}_{0,B,I}=\bigsqcup_{\substack{\Gamma\text{ smooth}\\ T^I(\Gamma)=I,T^B(\Gamma)=B}}\overline{\mathcal{PM}}_\Gamma,$$

对于这类 Γ，多截面 $\hat{s}^{\mathrm{BCT}}_\Gamma$ 的集合是向量丛的一个多截面 $\hat{s}^{BCT}_{0\,B\,,\,,\,I}$

$$\mathcal{W}_\Gamma\oplus\bigoplus_{i\in T^I(\Gamma)\cap I}\mathbb{L}_i^{\oplus d_i}\to\overline{\mathcal{PM}}^{1/r}_{0,B,I}.$$

BCT 关联函数是此类 BCT 典范多截面的零点个数，也就是说，

$$\left\langle\prod_{i\in I}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o,BCT}=\int_{\overline{\mathcal{PM}}^{1/r}_{0,B,I}}e(E;\hat{s}^{BCT}_{0,B,I})\in\mathbb{Q}.$$

命题 4.16。 至少存在一个典范多截面

$$E = \mathcal{W} \oplus \bigoplus_{i \in I} \mathbb{L}_i^{\oplus d_i} \to \overline{\mathcal{PM}}^{1/r,0}_{0,B,I}.$$

此外，我们有

$$\left\langle \prod_{i \in I} \tau_{d_i}^{a_i} \prod_{i \in B} \sigma^{b_i} \right\rangle_0^{\frac{1}{r},o} = \left\langle \prod_{i \in I} \tau_{d_i}^{a_i} \prod_{i \in B} \sigma^{b_i} \right\rangle_0^{\frac{1}{r},o,BCT}. \tag{4.6}$$

证明。 注意， $\mathcal{PM}^{1/r}_{0\,B\,,,I}$ 可以视为 $\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}_{,0\,B\,I\,,,}$的一个子空间。类似于 [32,定理 5.2], 的证明, 策略是将 $\mathcal{PM}^{1/r}_{0\,B\,,,I} \subset \widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}_{0\,B\,,,I}$ 上的多截面$\mathbf{s}^{BCT}$ 扩展为整个 $\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}_{,0\,B\,I\,,,}$上的一个典范多截面，并且该多截面在 $\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}_{,0\,B\,I\,,,} \setminus \mathcal{PM}^{1/r}_{0\,B\,,,I}$上处处不为零。 ——

对于任意$\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}} \subseteq \widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}_{,0\,B\,I\,,,}$，回忆一下，对于 $\Gamma \in V(\boldsymbol{G})$，我们可以遗忘 $T^I(\Gamma) \cap I^{PI}(\boldsymbol{G})$中的所有插入的（扭曲为零的）内部尾，从而得到一个图 $\mathcal{B}\Gamma$。我们将$\mathbf{s}_{\mathbf{G}}$构造为

$$\hat{\mathbf{s}}_{\mathbf{G}} := \boxplus_{\Gamma \in V(\boldsymbol{G})} \mathrm{For}^*_{\Gamma \to \mathcal{B}\Gamma} \hat{s}^{\mathrm{BCT}}_{\mathcal{B}\Gamma}.$$

事实上，由于我们使用的是 $\mathbb{L}_i$而不是 $\mathbb{L}_i'$，因此它是$\mathcal{W} \oplus \bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{L}_i^{\oplus d_i} \to \mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$ 的一个多截面（见 §2.4.3）。

集合 $\hat{\mathbf{s}}_{\mathbf{G}}$ 是定义 4.9 中的典范多截面。事实上，第 1 项是 (4.5) 的推论，第 2 项由构造得出，第 5 项是 BCT 典范多截面 $\hat{s}_\Gamma^{BCT}$的性质，而第 3 项和第 6 项与 $g = 0$ 情形无关。

在 $\mathcal{PM}^{1/r}_{0\,B\,,,I} \subset \widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}_{B,0\quad I\,,,}$ 上，也就是说，对于带有$V(\boldsymbol{G}) = \{\Gamma_{\boldsymbol{G}}\}$的单顶点 $\boldsymbol{G}$，取 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}} = \mathcal{PM}_{\Gamma_{\boldsymbol{G}}}$ 的并，按定义，多截面 $\hat{\boldsymbol{s}}_{\mathbf{G}}$ 与 $\hat{s}^{BCT}_{\Gamma_{\boldsymbol{G}}} = \hat{s}^{BCT}_{0\,B\,,,I}|_{\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}}$ 重合。

在 $\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}_{0\,B、\,I} \setminus \mathcal{PM}^{1/r}_{0\,B、\,I}$ 上，也就是说，在多于一个顶点的 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$for $(r,\ 0)$-图 $\boldsymbol{G}$的并集上；我们证明，对于这样的 $\boldsymbol{G}$，$\hat{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{G}}$ 永不为零。事实上，我们有

$$\sum_{\Gamma \in V(\boldsymbol{G})} \operatorname{rank} E_{\mathcal{B}\Gamma} = \sum_{\Gamma \in V(\boldsymbol{G})} \operatorname{rank} E_\Gamma = \sum_{\Gamma \in V(\boldsymbol{G})} \dim \overline{\mathcal{PM}}_\Gamma > \sum_{\Gamma \in V(\boldsymbol{G})} \dim \overline{\mathcal{PM}}_{\mathcal{B}\Gamma}$$

因为至少有一个插入的内部尾被遗忘，因此对于至少一个 $\Gamma \in V(\boldsymbol{G})$，秩 $E_{\mathcal{B}\Gamma} > \overline{\dim \mathcal{PM}_{\mathcal{B}\Gamma}}$，由横截性可知 $\hat{s}^{\mathrm{BCT}}_{\mathcal{B}\Gamma}$处处不为零，故 $\hat{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{G}}$ 处处不为零。这就证明了 (4.6)。

□

因此，这些零亏格开 r-旋量关联函数满足与 [4]中相同的拓扑递归关系。

定理 4.17 ([4, 定理 4.1])。零亏格开 r-旋量关联函数满足以下两类拓扑递归关系（注意，所有边界扭曲 b_i 都是 $r-2$）：

(a) 设 $|I|$、$|B| \geq 1$，则对于任意 $i_1 \in I$ 和 $j_B \in B$，我们有如下关于

（i_1、j_B）的 *TRR*：

$$\begin{aligned}
&\left\langle \tau_{d_{i_1}+1}^{a_{i_1}} \prod_{i\in I\setminus\{i_1\}} \tau_{d_i}^{a_i} \prod_{i\in B} \sigma^{b_i} \right\rangle_0^{\frac{1}{r},o} \\
&= \sum_{\substack{R_1\sqcup R_2=I\setminus\{i_1\} \\ -1\le a\le r-2}} \left\langle \tau_0^a \tau_{d_{i_1}}^{a_{i_1}} \prod_{i\in R_1} \tau_{d_i}^{a_i} \right\rangle_0^{\frac{1}{r},ext} \left\langle \tau_0^{r-2-a} \prod_{i\in R_2} \tau_{d_i}^{a_i} \prod_{i\in B} \sigma^{b_i} \right\rangle_0^{\frac{1}{r},o} \\
&\quad + \sum_{\substack{R_1\sqcup R_2=I\setminus\{i_1\} \\ T_1\sqcup T_2=B\setminus\{j_B\}}} \left\langle \tau_{d_{i_1}}^{a_{i_1}} \prod_{i\in R_1} \tau_{d_i}^{a_i} \prod_{i\in T_1} \sigma^{b_i} \right\rangle_0^{\frac{1}{r},o} \left\langle \prod_{i\in R_2} \tau_{d_i}^{a_i} \sigma^{r-2} \sigma^{b_{j_B}} \prod_{i\in T_2} \sigma^{b_i} \right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

(b) 假设 $|I|\ge 2$，那么对于任意 $i_1\in I$ 和 $j_I\in I\setminus\{i_1\}$，关于(i_1, j_I)，我们有以下 *TRR*：

$$\begin{aligned}
&\left\langle \tau_{d_{i_1}+1}^{a_{i_1}} \prod_{i\in I\setminus\{i_1\}} \tau_{d_i}^{a_i} \prod_{i\in B} \sigma^{b_i} \right\rangle_0^{\frac{1}{r},o} \\
&= \sum_{\substack{R_1\sqcup R_2=I\setminus\{i_1,j_I\} \\ -1\le a\le r-2}} \left\langle \tau_0^a \tau_{d_{i_1}}^{a_{i_1}} \prod_{i\in R_1} \tau_{d_i}^{a_i} \right\rangle_0^{\frac{1}{r},ext} \left\langle \tau_0^{r-2-a} \tau_{d_{j_I}}^{a_{j_I}} \prod_{i\in R_2} \tau_{d_i}^{a_i} \prod_{i\in B} \sigma^{b_i} \right\rangle_0^{\frac{1}{r},o} \\
&\quad + \sum_{\substack{R_1\sqcup R_2=I\setminus\{i_1,j_I\} \\ T_1\sqcup T_2=B}} \left\langle \tau_{d_{i_1}}^{a_{i_1}} \prod_{i\in R_1} \tau_{d_i}^{a_i} \prod_{i\in T_1} \sigma^{b_i} \right\rangle_0^{\frac{1}{r},o} \left\langle \tau_{d_{j_I}}^{a_{j_I}} \prod_{i\in R_2} \tau_{d_i}^{a_i} \sigma^{r-2} \prod_{i\in T_2} \sigma^{b_i} \right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

注 4.18。 [32]构造了一种略有不同的零亏格开 r-spin 理论。 [32] 中的 $\mathfrak{h}=0$ 理论与本文中的 $g=1$ 理论非常相似；唯一的区别是我们采用了不同的相对余切线丛：在 [32] 中，该理论使用 $\mathbb{L}_i'$构造（见注 2.34）；而在本文中，我们使用 $\mathbb{L}_i$ 遗忘所有插入点。这一差异导致这些关联函数之间存在多项式关系，见 [32, 定理 5.6、注 5.7]。

5 亏格一拓扑递归关系

本节将证明，亏格一开 r-spin 关联函数也满足拓扑递归关系，并由此作为推论证明，亏格一开 r-spin 关联函数与序 γ 及典范多截面 $\boldsymbol{s}$ 的选择无关。我们还将利用拓扑递归关系证明定理 1.5 和 1.6。

5.1 关于序与多截面关联函数的亏格一 TRR

设 γ 是集合 $I^{d>0}=\{i\in I\colon\ d_i\ge 1\}$ 上的一个序。我们用 $i_1=\gamma(I)$ 表示序 γ 中的极大元。对于任意子集 $J\subseteq I$，我们用 $\gamma|_J$ 表示由 γ 诱导的 $\{i\in J\colon\ d_i\ge 1\}$ 上的序。

命题 ion 5.1. 令 $i_1=\gamma(I)$ 为关于序 γ *an* 的 $I^{d>0}$ 中的极大元 d

s 是一个 γ-典范多截面，我们有

$$\begin{aligned}
&\left\langle \tau_{d_{i_1}+1}^{a_{i_1}} \prod_{i\in I\setminus\{i_1\}} \tau_{d_i}^{a_i} \prod_{i\in B} \sigma^{b_i} \right\rangle_1^{\frac{1}{r},o,\gamma,\boldsymbol{s}} \\
&= \sum_{\substack{R_1\sqcup R_2=I\setminus\{i_1\}\\ -1\le a\le r-2}} \left\langle \tau_0^a \tau_{d_{i_1}}^{a_{i_1}} \prod_{i\in R_1} \tau_{d_i}^{a_i} \right\rangle_0^{\frac{1}{r},ext} \left\langle \tau_0^{r-2-a} \prod_{i\in R_2} \tau_{d_i}^{a_i} \prod_{i\in B} \sigma^{b_i} \right\rangle_1^{\frac{1}{r},o,\gamma|_{R_2},\boldsymbol{s}|_{1,B,R_2\sqcup\{i_I^{r-2-a}\}}} \\
&+ \sum_{\substack{R_1\sqcup R_2=I\setminus\{i_1\}\\ T_1\sqcup T_2=B}} \left\langle \tau_{d_{i_1}}^{a_{i_1}} \prod_{i\in R_1} \tau_{d_i}^{a_i} \prod_{i\in T_1} \sigma^{b_i} \right\rangle_0^{\frac{1}{r},o} \left\langle \prod_{i\in R_2} \tau_{d_i}^{a_i} \sigma^{r-2} \prod_{i\in T_2} \sigma^{b_i} \right\rangle_1^{\frac{1}{r},o,\gamma|_{R_2},\boldsymbol{s}|_{1,T_2\sqcup\{i_B^{r-2}\},R_2}} \\
&+ \frac{1}{2} \left\langle \prod_{i\in I} \tau_{d_i}^{a_i} \sigma^{r-2} \prod_{i\in B} \sigma^{b_i} \right\rangle_0^{\frac{1}{r},o},
\end{aligned} \tag{5.1}$$

其中，亏格一关联函数上标中的记号 $\boldsymbol{s}|_{1,\ I',\ B'}$ 指的是向量丛的 $\gamma|_{I'}$-典范多截面（由 $\boldsymbol{s}$确定）

$$\mathcal{W} \oplus \bigoplus_{i\in I\cap I'} \mathbb{L}_i^{\oplus d_i} \to \overline{\mathcal{PM}}_{1,B',I'}^{1/r,0},$$

记号 i_I^{r-2-a} 表示带有扭曲 $r-2-a$的内部标记， i_B^{r-2} 表示带有扭曲 $r-2$的边界标记。

证明。令

$$\boldsymbol{s} = s^{\mathcal{W}} \oplus \bigoplus_{i\in I\setminus\{i_1\}} \bigoplus_{1\le t\le d_i} s_i^t \oplus \bigoplus_{1\le t\le d_{i_1}+1} s_{i_1}^t$$

为一个 γ-典范多截面

$$E_{1,B,I} := \mathcal{W}_{1,B,I} \oplus \bigoplus_{i\in I\setminus\{i_1\}} \mathbb{L}_i^{\oplus d_i} \oplus \mathbb{L}_{i_1}^{\oplus(d_{i_1}+1)} \to \overline{\mathcal{PM}}_{1,B,I}^{1/r,0}.$$

沿用 §4 中的类似记号，我们写作

$$\boldsymbol{s} = t_0 \oplus t_1 \oplus \cdots \oplus t_D,$$

其中 t_D 是极大元 $i_1 \in I^{d>0}$对应的 $\mathbb{L}_{i_1}$ 上的一个多截面，我们记作

$$\boldsymbol{s}^{re} := t_0 \oplus t_1 \oplus \cdots \oplus t_{D-1} \tag{5.2}$$

作为.....的多截面

$$E_{1,B,I}^{re} = \mathcal{W}_{1,B,I} \oplus \bigoplus_{i\in I} \mathbb{L}_i^{\oplus d_i} \to \overline{\mathcal{PM}}_{1,B,I}^{1/r,0}.$$

对于一个 $(r,0)$-图 $\boldsymbol{G} \in \mathsf{sGPI}_{1\ B,,,I}^{r\ 0}$，我们用 $\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}} \in V(\boldsymbol{G})$ 表示 $\boldsymbol{G}$ 中满足 $i_1 = \nu(D) \in T^I(\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})$ 的唯一顶点。由于 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}^{re} \oplus t_D$ 是 γ-典范的，对于任意 $\boldsymbol{G} \in \mathsf{sGPI}_1^{r\ 0}{}_{,,B,I}$，我们有如下分解

$$\boldsymbol{s}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} = \boldsymbol{s}^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} \oplus t_{D,\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$$

对于遗忘的多截面 $t_{D,\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} {}^*_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}\to\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} \mathbb{L}_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} \to \mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$ 以及多截面 $\boldsymbol{s}^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$ 的

$$E^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} := \mathcal{W}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} \oplus \bigoplus_{i\in I\cap T^I(\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})} \mathrm{For}^*_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}\to\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} \mathbb{L}^{d_i}_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} \to \overline{\mathcal{PM}}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}},$$

使得

$$\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{G}}^{re} = \boldsymbol{s}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}^{re} \boxplus \bigboxplus_{\Gamma \in V(\boldsymbol{G}) \setminus \{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}\}} \boldsymbol{s}_{\Gamma}.$$

我们对 $\mathcal{PM}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$ 上的丛和多截面也有类似的分解，即

$$E_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} = E^{re}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} \oplus \mathrm{For}^*_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}} \to \mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} \mathbb{L}_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} \to \overline{\mathcal{PM}}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}},$$

and

$$\boldsymbol{s}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} = \boldsymbol{s}^{re}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} \oplus t_{D,\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}.$$

该证明分为五个步骤：

1. 构造 $s^{trr*}_{i_1}$of $\mathbb{L}^*_{i_1} \to \mathcal{PM}^{1/r}_{B,1}{}^{0}_{I,,}$ 的一个特定多截面。

2. 构造 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}$ of $\mathbb{L}^\vee_{i_1} \otimes \mathbb{L}^*_{i_1} \to \mathcal{PM}^{1/r}_{B,1}{}^{0}_{I,,}$ 的一个多截面。

3. 将带有“极点”的多截面 $\tilde{\mathfrak{t}}^\vee_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*} \otimes s^{trr*}_{i_1}$ 修改为一个无“极点”的多截面 $s^{trr}_{i_1}$of $\mathbb{L}_{i_1} \to \mathcal{PM}^{1/r}_{B,1}{}^{0}_{I,,\circ}$

4. 证明 $\boldsymbol{s}$ 的零点数（计重数）与 $\boldsymbol{s}^{mod} := \boldsymbol{s}^{re} \oplus s^{trr}_{i_1}$in $\mathcal{PM}^{1/r,1}_{B}{}^{0}_{I,,}$ 中的相同。

5. 计算将 $\boldsymbol{s}^{re}$ 限制到多截面 $s^{trr}_{i_1}$ 的零点集上时，零点的数量（计重数）。

步骤 1. 我们首先构造一个特定的多截面，它属于 $s^{trr*}_{i_1}$ 的 $\mathbb{L}^*_{i_1} \to \mathcal{PM}^{1/r}_{B,1}{}^{0}_{I,,\circ}$

我们需要为每个光滑的 $\boldsymbol{G}$ 构造 $\mathbb{L}^*_{i_1} \to \mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$ 的多截面 $s^{trr*}_{i_1,\mathbf{G}}$。回忆 §2.4.3 中，线丛 $\mathbb{L}^*_{i_1} \to \mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$ 是从 $\mathbb{L}_{i_1,\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} \to \overline{\mathcal{QM}}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$ 拉回的。由于 $\boldsymbol{G}$ 是亏格一的，集合

$$RT(\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}) := T(\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}) \cap \left(I^{PI}_{sp,0}(\boldsymbol{G}) \sqcup B^{PI}_{sp,0}(\boldsymbol{G}) \sqcup I^{PI}_{nsp}(\boldsymbol{G}) \sqcup B^{PI}_{nsp}(\boldsymbol{G})\right)$$

对于亏格一的 $\Gamma_{i_1,\mathbf{G}}$，$\hat{}$ 总是空集；而对于零亏格的 $\Gamma_{i_1,\mathbf{G}}$，它或者是单元素集合（此时 $RT(\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}) \subseteq T(\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}) \cap \left(I^{PI}_{sp,0}(\boldsymbol{G}) \sqcup B^{PI}_{sp,0}(\boldsymbol{G})\right)$），或者是二元素集合（此时 $RT(\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}) = T(\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}) \cap \left(I^{PI}_{nsp}(\boldsymbol{G}) \sqcup B^{PI}_{nsp}(\boldsymbol{G})\right)$）。

$\hat{}\hat{}$ 当 $RT(\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})$ 为空，即 $\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}$ 为亏格一时，我们有 $\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}} = \mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}$。我们将 $s^{trr*}_{i_1,\boldsymbol{G}}$ 对 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}} \subset \mathcal{PM}^{1/r}_{,1}{}^{0}_{B\,I}$ 的限制，取为通过投影 $\pi_{\mathbf{G}\to\Gamma_{i_1,\mathbf{G}}}$: $\mathcal{PM}_{\mathbf{G}} \to \mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\mathbf{G}}}$ 以及遗忘态射 $\mathrm{For}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}} \to \mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$: $\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} \to \mathcal{PM}_{\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$（遗忘所有插入的尾部）从 $\mathbb{L}_{\overline{i_1,\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}} \to \mathcal{PM}_{\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} = \mathcal{PM}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$ 上的 TRR 多截面 $\mathfrak{s}_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$ 拉回的多截面。

$\hat{}\hat{}$ 当 $RT(\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})$ 是单元素集合时，我们将其唯一元素记为 $r_0 \in RT(\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})$，并将 $s^{trr*}_{i_1,\mathbf{G}}$ 取为通过投影 $\pi_{\mathbf{G}\to\Gamma_{i_1,\mathbf{G}}}$: $\mathcal{PM}_{\mathbf{G}} \to \mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\mathbf{G}}}$以及遗忘态射 $\mathrm{For}^{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}} \to \hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$: $\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} \to \mathcal{PM}_{\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$（遗忘 I^{PI}_{sp},0 中插入的尾部）从 $\mathbb{L}_{i_1,\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}},r_0} \to \mathcal{PM}_{\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$ 上的 TRR 截面 $\mathfrak{s}_{i_1,\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}},r_0}$ 拉回的 $\mathbb{L}^*_{i_1} \to \mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$ 的截面。

$\hat{}\hat{}$ 当 $RT(\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})$ 是一个二元素集合时，我们用 $r_1, r_2 \in RT(\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})$ 表示其元素，并将 $\mathbb{L}^*_{i_1} \to \mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$ 的多截面 $s^{trr*}_{i_1,\mathbf{G}}$ 取为从 $\mathbb{L}_{i_1,\overline{\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}},r_1,r_2}} \to \mathcal{PM}_{\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$ 的 TRR 多截面 $\mathfrak{s}_{i_1,\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}},r_1,r_2}$ 经由投影 $\pi_{\mathbf{G}\to\Gamma_{i_1,\mathbf{G}}}$: $\mathcal{PM}_{\mathbf{G}} \to \mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\mathbf{G}}}$ 以及遗忘 I^{PI}_{sp},0 中插入尾部的态射 $\mathrm{For}^{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}} \to \hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$: $\overline{\mathcal{PM}}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}} \to \mathcal{PM}_{\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$ 拉回所得的多截面。

在每个 $\mathcal{PM}_{\mathbf{G}}$ 上定义的上述多截面 $s_{i_1}^{trr*},_{\mathbf{G}}$，可以粘合为粘合线丛 $\widetilde{\mathbb{L}}_{i_1}^{*}\to\widetilde{\mathcal{PM}}_{B,1}^{1/r}{}^{0}_{I,,}$ 的一个多截面 $s_{i_1}^{trr*}$。这源于边界分层处多截面 $\mathfrak{s}$ 的行为，即 (3.3)、(3.3) 和 (3.5)。

由上述构造和观察 3.4 可知，多截面 $s_{i_1}^{trr*}$ of $\mathbb{L}_{i_1}^{*}\to\mathcal{PM}_{B,1}^{1/r}{}^{0}_{I,,}$（或粘合后为 $\widetilde{\mathbb{L}}_{i_1}^{*}\to\widetilde{\mathcal{PM}}_{B,1}^{1/r}{}^{0}_{I,,}$）的零点集 $Z(s_{i_1}^{trr*})$ 具有如下形式

$$Z(s_{i_1}^{trr*})=\bigcup_{\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,g=1}}\overline{\mathcal{PM}}_{\boldsymbol{G}}\cup\bigcup_{\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,sp}}\overline{\mathcal{PM}}_{\boldsymbol{G}}\bigcup_{\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,nsp}^{1/2}}\overline{\mathcal{PM}}_{\boldsymbol{G}}\bigcup_{\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,nsp}^{1/2+1/2}}\overline{\mathcal{PM}}_{\boldsymbol{G}},\qquad(5.3)$$

其中

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1}:=\left\{\boldsymbol{G}\in\mathrm{GPI}_1^{r}{}^{0}_{,,B,I}\text{: 对于满足 }i_1\in T^I(\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})\text{ 的 }\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}\in V(\boldsymbol{G}),\ \Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}\text{由一个闭顶点 }v_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G},c}}\text{ 和一个开顶点 }v_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G},c}}\text{组成，两者由一条内部边 }e_{\boldsymbol{G}}\text{连接，其中 }\hat{}\mathcal{B}v_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G},c}}\text{是稳定的，并且所有 }\Gamma\in V(\boldsymbol{G})\setminus\{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}\}\text{ 都是光滑的}\right\},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,g=1}:=\left\{\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1}:\ \Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}\text{ is genus-one}\right\},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i}{}^{1,\ sp}:=\left\{\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1}:\ \Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}\text{是零亏格的，}\ |RT(\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}})|=1,\ \ RT(\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}})\subset T(v_{\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G},\ o}})\right\},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1}^{1/2,\ nsp}:=\left\{\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1}:\ \Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}\text{是零亏格的，}\ |RT\ (\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}})\ |=2,\ \ |RT\ (\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}})\ \cap T\ (v_{\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G},\ o}})\ |=1\ \right\},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,nsp}^{1/2+1/2}:=\left\{\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1}:\ \Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}\text{ is genus-zero, }|RT(\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})|=2,\ |RT(\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})\cap T(v_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}},o})|=2\ \right\}.$$

注5.2。 注意，$\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$ 包含于 $\mathcal{PM}_{d_e\boldsymbol{G}}$ 上 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1}$的$s_{i_1}^{trr*}$零点集中。当 $\boldsymbol{G}\in\overline{\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1}^{1/2}}_{,\ nsp}\sqcup\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1\ nsp}^{1/2+1/2}$，时，多截面 $s_{i_1}^{trr*}$在 $\mathcal{PM}_{d_e\boldsymbol{G}}$上有两个权重为 $1/2$ 的分支；对于 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1}^{1/2}{}_{,\ nsp}$，两个分支中只有一个在 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$上消失；对于 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1\ nsp}^{1/2+1/2}{}_{,}$，两个分支都在 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$上消失。

$\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,co}\subseteq\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,g=1}\sqcup\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,sp}\sqcup\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1}^{1/2}{}_{,nsp}\sqcup\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1\ nsp}^{1/2+1/2}{}_{,}$的一个子集在此证明中尤为重要，它由下式给出

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,co}:=\left\{\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,g=1}\sqcup\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,sp}\sqcup\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,nsp}^{1/2}\sqcup\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,nsp}^{1/2+1/2}\colon T(v_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G},c}})\cap I^{PI}(\boldsymbol{G})=\emptyset\right\}.$$

对每个 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1}$，令 $n_{\boldsymbol{G}}\in T(v_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G},c}})$ 为唯一的内部半边，则根据定义，$T(v_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G},c}})\setminus\{n_{\boldsymbol{G}}\}$ 始终是包含 i_1 的 I 的非空子集，对 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,co}$ 均成立，因此我们有如下分解

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,co}=\bigsqcup_{R\subseteq I\setminus\{i_1\},R\neq\emptyset}\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,co}^{R},$$

其中

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,co}^{R}:=\left\{\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,co}\colon T(v_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G},c}})=I\sqcup\{i_1,n_{\boldsymbol{G}}\}\right\}.$$

步骤 2。 我们将通过与线丛 $\mathbb{L}_{i_1}^{*\vee}\otimes\mathbb{L}_{i_1}\to\mathcal{PM}_{B,1}^{1/r}{}^{0}_{I,,}$ 的一个特定截面作张量积，把 $s_{i_1}^{trr*},_{\mathbf{G}}$ 修改为 $\mathbb{L}_{i_1}\to\mathcal{PM}_{B,1}^{1/r}{}^{0}_{I,,}$ 的多截面 $s_{i_1}^{trr},_{\mathbf{G}}$。我们先考察对偶线丛 $\mathbb{L}_{i_1}^{*}\otimes\mathbb{L}_{i_1}^{\vee}\to\mathcal{PM}_{B}^{1/r,1}{}^{0}_{I,,\circ}$ 将其限制到 $\mathcal{PM}_{\mathbf{G}}\subseteq\mathcal{PM}_{,1\ B}^{1/r}{}^{0}_{I,,}$ 上时，根据定义，它是从线丛拉回的

$$\mathbb{L}_{i_1,\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\otimes\mathrm{For}^{*}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}\to\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\mathbb{L}^{\vee}_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\to\overline{\mathcal{PM}}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$$

经由 $\pi_{\mathbf{G}\to\Gamma_{i_1,\ \mathbf{G}}}\colon\overline{\mathcal{PM}}_{\mathbf{G}}\to\overline{\mathcal{PM}}_{\Gamma_{i_1,\ \mathbf{G}}}$ 并遗忘$\Gamma_{i_1,\ \mathbf{G}}\to\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \mathbf{G}}\colon\overline{\mathcal{PM}}_{\Gamma_{i_1,\ \mathbf{G}}}\to\overline{\mathcal{PM}}_{\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \mathbf{G}}\circ}$ 注意，$\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}$可以通过遗忘$\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}$中 $T^I(\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}})\cap RT(\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}})$的所有内部尾而得到，

我们有线丛 $\mathbb{L}_{i_1,\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1}}$的一个截面（见 §3.1）$\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G}\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G}}$ 遗忘$\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G}\to\mathcal{B}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G}$ $\mathbb{L}^{\vee}_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G}}$。我们将 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G}\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G}}$ 拉回为 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*,\mathbf{G}}$ 在 $\mathbb{L}^*_{i_1}\otimes\mathbb{L}^{\vee}_{i_1}\to\mathcal{PM}_{\mathbf{G}}$ 上的一个截面，也就是说，

$$\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*,\mathbf{G}}:=\pi^*_{\mathbf{G}\to\Gamma_{i_1},\mathbf{G}}\,\mathrm{For}^*_{\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G}\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G}}\,\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G}\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G}}.$$

这些截面 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*,\mathbf{G}}$ 粘合成截面 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}$，属于 $\widetilde{\mathbb{L}}^*_{i_1}\otimes\widetilde{\mathbb{L}}^{\vee}_{i_1}\to\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}_{B,1}{}^{0}_{I,,\circ}$ 事实上，假设 $\mathbf{G_1}$ 和 $\mathbf{G_2}$ 是光滑的 $(r,0)$-图，且 $\mathcal{PM}_{\mathbf{G_1}}$ 和 $\mathcal{PM}_{\mathbf{G_2}}$ 沿其已识别的余维 1 边界 bd_{BI} 和 bd_{AI} 粘合，则有

$$\overline{\mathrm{bd}}_{BI}=\overline{\mathcal{PM}}_{\Gamma_1^{BI}}\times\prod_{\Gamma\in V(\mathbf{G_1})\setminus\{\Gamma_1\}}\overline{\mathcal{PM}}_{\Gamma}$$

对于顶点 $\Gamma_1\in V(\mathbf{G_1})$ 和具有唯一一条（边界）边 e^{PI} 的 $\Gamma_1^{BI}\in\partial\Gamma_1$。我们假设 e^{PI} 是分离的（e^{PI} 非分离的情形类似），并将 Γ_1^{BI} 的两个顶点记为 v_0 和 v_{r-2}；其中，e^{PI} 在 v_0（分别在 v_{r-2}）上的半边扭曲为 0 时不合法（分别在扭曲为 $r-2$ 时合法）。在这种情况下，我们可以写作

$$\overline{\mathrm{bd}}_{AI}=\overline{\mathcal{PM}}_{\Gamma_2^{AI}}\times\overline{\mathcal{PM}}_{v_{r-2}}\times\prod_{\Gamma\in V(\mathbf{G_1})\setminus\{\Gamma_1\}}\overline{\mathcal{PM}}_{\Gamma},$$

其中，$\Gamma_2^{AI}\in\partial\Gamma_2$（对于 $\Gamma_2\in V(\boldsymbol{G}_2)=V(\boldsymbol{G}_1)\sqcup\{\Gamma_2,v_{r-2}\}\setminus\{\Gamma_1\}$）是一个具有两个顶点的 r-spin 图，其中一个顶点与 v_0 相同，另一个顶点 v' 只有一个（插入的）内部尾和一个边界半边，该边界半边连接到 v_0 的扭转零半边。

- 如果对于一个 $\Gamma_{i_1,\mathbf{G_1}}\in V(\mathbf{G_1})\setminus\Gamma_1$，有 $i_1\in T^I(\Gamma_{i_1,\mathbf{G_1}})$，那么 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*,\mathbf{G_1}}$ 和 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*,\mathbf{G_2}}$ 在所识别的边界上重合，因为它们二者都是从

$$\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G_1}\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G_1}}=\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G_2}\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G_2}}$$

经由 $\overline{\mathcal{PM}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G_1}}}=\mathcal{PM}_{\overline{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G_2}}}$ 拉回的。

- 如果 $i_1\in T^I(v_{r-2})$，那么 $\Gamma_{i_1,\mathbf{G_1}}=\Gamma_1$。根据定义，$\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*,\mathbf{G_1}}$ 在 bd_{AI} 上的限制是通过投影 $\pi_{\mathbf{G_1}\to\Gamma_1^{BI}}$: $\mathrm{bd}_{BI}\to\mathcal{PM}_{\Gamma_1^{BI}}$and $\mathrm{For}^{\Gamma_1^{BI}\to\mathcal{B}\Gamma_1^{BI}}$从 $\mathfrak{t}_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_1^{BI}\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_1^{BI}}$ 拉回的：$\mathcal{PM}_{\Gamma_1^{BI}}\to\mathcal{PM}_{\overline{\mathcal{B}\Gamma_1^{BI}}}$。截面 $\overline{\mathfrak{t}_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_1^{BI}\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_1^{BI}}}$ 本身是通过投影 $\pi_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_1^{BI}\to\hat{\mathcal{B}}v_{r-2}}$：$\mathcal{PM}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_1^{BI}}\cong\mathcal{PM}_{\hat{\mathcal{B}}v_0}\times\mathcal{PM}_{\hat{\mathcal{B}}v_{r-2}}\to\mathcal{PM}_{\hat{\mathcal{B}}v_{r-2}}$ 从 $\overline{\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathcal{B}v_{r-2}\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{r-2}}}$ 拉回的；根据 §3.1 中的构造，在 $\pi^*_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_1^{BI}\to\hat{\mathcal{B}}v_{r-2}}\mathbb{L}_{i_1,\hat{\mathcal{B}}v_{r-2}}$ 与 $\mathbb{L}_{i_1,\hat{\mathcal{B}}\Gamma_1^{BI}}$ 之间存在自然同一，并且在二者之间

$$\pi^*_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_1^{BI}\to\hat{\mathcal{B}}v_{r-2}}\mathrm{For}^*_{\hat{\mathcal{B}}v_{r-2}\to\mathcal{B}v_{r-2}}\mathbb{L}_{i_1,\mathcal{B}v_{r-2}}=\mathrm{For}^*_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_1^{BI}\to\mathcal{B}\Gamma_1^{BI}}\pi^*_{\mathcal{B}\Gamma_1^{BI}\to\mathcal{B}v_{r-2}}\mathbb{L}_{i_1,\mathcal{B}v_{r-2}}$$

以及遗忘$^*_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_1^{BI}\to\mathcal{B}\Gamma_1^{BI}}\mathbb{L}_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_1^{BI}}$。

另一方面，$\mathfrak{t}_{i_1}$的限制$\mathfrak{t}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*,\mathbf{G_2}}$到 bd_{BI} 的限制，根据定义，也通过同一个映射从$\mathfrak{t}_{i_1,\mathcal{B}v_{r-2}\to\hat{\mathcal{B}}v_{r-2}}$拉回（在识别 bd_{BI} 与 bd_{AI}之后），因此在这个所识别的边界上，它与$\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*,\mathbf{G_1}}$ 重合。

- 如果 $i_1\in T^I(v_0)$，与前一项类似，$\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*,\mathbf{G_1}}$ 在 bd_{BI} 上的限制是从 $\mathfrak{t}_{i_1,\overline{\mathcal{B}v_0\to\hat{\mathcal{B}}v_0}}$ 拉回的，而 $\mathfrak{t}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*,\mathbf{G_2}}$ 在 bd_{AI} 上的限制，也是在将 bd_{BI} 与 bd_{BI} 识别后，通过同一个态射从 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathcal{B}v_0\to\hat{\mathcal{B}}v_0}$ 拉回的。

根据引理 3.2 和上述构造，截面 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}$ of $\mathbb{L}_{i_1}^*\otimes\mathbb{L}_{i_1}^\vee\to\mathcal{PM}_{B,1}^{1/r,0}$（或在粘合后为 $\widetilde{\mathbb{L}}_{i_1}^*\otimes\widetilde{\mathbb{L}}_{i_1}^\vee\to\widetilde{\mathcal{PM}}_{B,1}^{1/r,0}$）的零点 $Z(\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*})$ 轨迹为

$$Z(\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*})=\bigcup_{\mathbf{G}\in\boldsymbol{\mathcal{F}}_{i_1,sp}}\overline{\mathcal{PM}}_{\mathbf{G}}\cup\bigcup_{\mathbf{G}\in\boldsymbol{\mathcal{F}}^1_{i_1,nsp}}\overline{\mathcal{PM}}_{\mathbf{G}}\cup\bigcup_{\mathbf{G}\in\boldsymbol{\mathcal{F}}^2_{i_1,nsp}}\overline{\mathcal{PM}}_{\mathbf{G}},$$

其中，按照步骤 1 中的记号，

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_{i_1,sp}:=\left\{\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1}:\ RT(\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})=\{i_{sp}^{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\}\subseteq I^{PI}_{sp,0}(\boldsymbol{G}),\,T(v_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}},c})=\{i_1,n_{\boldsymbol{G}},i_{sp}^{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\}\right\},$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}^1_{i_1,nsp}:=\left\{\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1}:|RT(\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})|=2,\,T(v_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}},c})=\{i_1,n_{\boldsymbol{G}},i_{nsp}^{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\}\text{ for }i_{nsp}^{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\in I^{PI}_{nsp}(\boldsymbol{G})\right\}$$

and

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}^2_{i_1,nsp}:=\left\{\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1}:|RT(\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})|=2,\,RT(\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})\subseteq I^{PI}_{nsp}(\boldsymbol{G}),\,T(v_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}},c})=\{i_1,n_{\boldsymbol{G}}\}\sqcup RT(\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})\right\}.$$

注意，对每个 $a\in I^{PI}_{sp,\,0}(\boldsymbol{G})$，它会以下述方式诱导出 $I=I_{a,\,0}\sqcup I_{a,\,1}$ 和 $B=B_{a,\,0}\sqcup B_{a,\,1}$ 的划分：移除 $\boldsymbol{G}$ 中对应于 a 与 $\delta(a)$ 之间虚线的边（见定义 2.27）后，我们得到两个连通分支 $\boldsymbol{G}_1$ 和 $\boldsymbol{G}_0$，其中 a 位于 $\boldsymbol{G}_0$ 一侧。对于 $s=0,\,1$，我们定义 $I_s(a):=I\cap\sqcup_{\Gamma\in V(\check{}\boldsymbol{G}_s)}T^I(\Gamma)$ 和 $B_s(a):=B\cap\sqcup_{\Gamma\in V(\check{}\boldsymbol{G}_s)}T^B(\Gamma)$。这样的划分诱导出一个分解

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_{i_1,sp}=\bigsqcup_{R\subseteq I\setminus\{i_1\},T\subseteq B}\boldsymbol{\mathcal{F}}^{R,T}_{i_1,sp},$$

其中

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}^{R,T}_{i_1,sp}:=\{\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{F}}_{i_1,sp}\colon I_0(i_{sp}^{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}})=R\sqcup\{i_1\},B_0(i_{sp}^{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}})=T\}.$$

我们考虑 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}$ 的对偶截面 $\tilde{\mathfrak{t}}^\vee_{i_1,\,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}$，它是 $\mathbb{L}_{i_1}^{*\vee}\otimes\mathbb{L}_{i_1}\to\mathcal{PM}_{B,\,1}^{1/r,0}{}_{I,,}$ 的一个截面（或粘合后 $\widetilde{\mathbb{L}}_{i_1}^{*\vee}\otimes\widetilde{\mathbb{L}}_{i_1}\to\widetilde{\mathcal{PM}}_{B,\,1}^{1/r,0}{}_{I,,}$ 的一个截面），定义在零点集 $Z(\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*})$ 之外，而 $Z(\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*})$ 的作用类似于它的“极点”（见注记 3.3）。于是 $\tilde{\mathfrak{t}}^\vee_{i_1,\,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}\otimes s_{i_1}^{trr*}$ 是 $\mathbb{L}_{i_1}\to\mathcal{PM}_{B,\,1}^{1/r,\,0}{}_{I,,}$ 的一个多截面（或粘合后 $\widetilde{\mathbb{L}}_{i_1}\to\widetilde{\mathcal{PM}}_{B,\,1}^{1/r,0}{}_{I,,}$ 的一个多截面），定义在 $Z(\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*})$ 之外。

$s_{i_1}^{trr*}$的部分零点与$\tilde{\mathfrak{t}}^\vee_{i_1,\,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}$的“极点”重合：我们有 $\mathrm{F}^1_{i_1,nsp}\subseteq\mathrm{G}^{1/2}_{i_1,nsp}$。对于任意$\boldsymbol{G}\in\mathrm{F}^1_{i_1,nsp}$，我们将 $\boldsymbol{H}:=d_{e_{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{G}\in\mathrm{sGPI}^{r\,0}_1{}_{B,I}$ 记为 $r_1=i^{\Gamma_{i_1}}_{nsp}{}^{\boldsymbol{G}}$和 r_2在$RT(\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})=RT(d_{e_{\boldsymbol{G}}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})=RT(\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}})$中的两个根。$\tilde{\mathfrak{t}}^\vee_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}\otimes s_{i_1}^{trr*}$对 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{H}}$的限制有两个权重为 $1/2$的分支。其中一个是从

$$\tilde{\mathfrak{t}}^\vee_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}}\otimes\mathfrak{s}_{i_1,\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}},r_2},\tag{5.4}$$

另一个是从

$$\tilde{\mathfrak{t}}^\vee_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}}\otimes\mathfrak{s}_{i_1,\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}},r_1}.\tag{5.5}$$

注意，根据构造，我们有

$$\mathfrak{s}_{i_1,\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}},r_2}=\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathrm{for}_{r_1}(\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}})\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}}\otimes\mathrm{For}^*_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}\to\mathrm{for}_{r_1}(\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}})}\mathfrak{s}_{i_1,\mathrm{for}_{r_1}(\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}),r_2},$$

and

$$\tilde{\mathfrak{t}}^\vee_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}}\otimes\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathrm{for}_{r_1}(\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}})\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}}=\mathrm{For}^*_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}\to\mathrm{for}_{r_1}(\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}})}\tilde{\mathfrak{t}}^\vee_{i_1,\mathrm{for}_{r_1}(\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}})\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}},$$

因此，(5.4) 可以扩展为一个多截面

$$\mathrm{For}^*_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}\to \mathrm{for}_{r_1}(\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}})}(\tilde{\mathfrak{t}}^{\vee}_{i_1,\mathrm{for}_{r_1}(\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}})\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}}\otimes \mathfrak{s}_{i_1,\mathrm{for}_{r_1}(\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}),r_2}) \tag{5.6}$$

其在 $\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\subset\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}}$ 上没有零点或“极点”。因此，$\tilde{\mathfrak{t}}^{\vee}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}\otimes s^{trr*}_{i_1}$ 对应分支的零点与“极点”沿 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}\subset\mathcal{PM}_{\boldsymbol{H}}$ 相互抵消：我们可以将其延拓为 (5.6) 的拉回，而它在 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$ 上处处不为零。与此同时，对应 (5.5) 的另一分支沿 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$ 有“极点”，因为 $\tilde{\mathfrak{t}}^{\vee}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}$ 有“极点”，而 $s^{trr*}_{i_1}$ 不为零。

经过上述自然延拓后，$\tilde{\mathfrak{t}}^{\vee}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}\otimes s^{trr*}_{i_1}$ 作为 $\mathbb{L}_{i_1}\to\mathcal{PM}^{1/r,1}_{B,\overset{0}{I},,}$（或粘合后作为 $\mathbb{L}_{i_1}\to\overline{\mathcal{PM}}^{1/r,1}_{B,\overset{0}{I},,}$）的多截面，在以下位置有零点

$$\bigcup_{\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,g=1}}\overline{\mathcal{PM}}_{\boldsymbol{G}}\cup\bigcup_{\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,sp}}\overline{\mathcal{PM}}_{\boldsymbol{G}}\bigcup_{\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}^{1/2}_{i_1,nsp}\setminus\boldsymbol{\mathcal{F}}^{1}_{i_1,nsp}}\overline{\mathcal{PM}}_{\boldsymbol{G}}\bigcup_{\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{G}}^{1/2+1/2}_{i_1,nsp}}\overline{\mathcal{PM}}_{\boldsymbol{G}}$$

并沿着“极点”

$$\bigcup_{\mathbf{G}\in\boldsymbol{\mathcal{F}}_{i_1,sp}}\overline{\mathcal{PM}}_{\mathbf{G}}\cup\bigcup_{\mathbf{G}\in\boldsymbol{\mathcal{F}}^{1}_{i_1,nsp}}\overline{\mathcal{PM}}_{\mathbf{G}}\cup\bigcup_{\mathbf{G}\in\boldsymbol{\mathcal{F}}^{2}_{i_1,nsp}}\overline{\mathcal{PM}}_{\mathbf{G}}.$$

步骤 3. 以下观察不仅有助于消除 $\tilde{\mathfrak{t}}^{\vee}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}\otimes s^{trr*}_{i_1}$ 的“极点”，也有助于下文步骤 5 中的计算。

观察 5.3. 对于任意 $\boldsymbol{G}\in\left(\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,g=1}\sqcup\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,sp}\sqcup\boldsymbol{\mathcal{G}}^{1/2}_{i_1},_{nsp}\sqcup\boldsymbol{\mathcal{G}}^{1/2+1/2}_{i_1\ nsp},)\right)\setminus(\boldsymbol{\mathcal{G}}_{i_1,co}\cup\boldsymbol{\mathcal{F}}^{1}_{i_1,nsp})$，或任意 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{F}}^{2}_{i_1,nsp}$，多截面 $\boldsymbol{s}^{re}$（见 (5.2)）在 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$ 上的限制处处非零。 ——

为此，我们写作 $\boldsymbol{H}=d_{e_{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{G}$和$\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}=d_{e_{\boldsymbol{G}}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}$。由于 $\boldsymbol{s}$ 是 γ-典范的，$\boldsymbol{s}^{re}$ 在 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{H}}$ 上的限制具有如下形式

$$\pi^*_{\boldsymbol{H}\to\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}}\boldsymbol{s}^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}}\oplus\bigoplus_{\Gamma\in V(\boldsymbol{G})\setminus\{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}\}}\pi^*_{\boldsymbol{H}\to\Gamma}\boldsymbol{s}_{\Gamma}.$$

根据横截性，对于 $\Gamma\in V(\boldsymbol{G})\setminus\{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}\}$，多截面 $\boldsymbol{s}_{\Gamma}$ 处处不为零，除非 $\mathrm{rank}\,E_{\Gamma}\le\dim\mathcal{PM}_{\Gamma}$，因此我们可以聚焦于 $\mathrm{rank}\,E_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}}\ge\dim\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}}$ 的情形。

$\hat{}$ 我们将稳定化 $\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}$ 后得到的图记为 $\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}\in\partial^*\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}$（即 收缩每个不稳定顶点 $\hat{}$ $\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}$）；它是稳定的，因为它有 i_1，且至少有一个内部根作为尾。由于横截可分解性，$\boldsymbol{s}^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}}$ 在 $\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\subset\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}}$ 上的限制是从 $E^{re}_{\mathcal{T}_S\bar{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\to\mathcal{PM}_{\mathcal{T}_S\bar{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$ 的一个横截多重截面拉回的（见 §4.1），其中$S=RT(\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})\cap T^I(\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})$。我们总有

$$\mathrm{rank}\,E^{re}_{\mathcal{T}_S\bar{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}=\mathrm{rank}\,E^{re}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}}=\mathrm{rank}\,E_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}}-2,$$

and

$$\dim\overline{\mathcal{PM}}_{\mathcal{T}_S\bar{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\le\dim\overline{\mathcal{PM}}_{\bar{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\le\dim\overline{\mathcal{PM}}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}}-2,$$

但对于 $\boldsymbol{G}\in\mathrm{F}^{2}_{i_1,nsp}$，第一个不等式是严格的；而对于 $\boldsymbol{G}\in\left(\mathrm{G}_{i_1,g=1}\sqcup\mathrm{G}_{i_1,sp}\sqcup\mathrm{G}^{1/2}_{i_1},_{nsp}\sqcup\mathrm{G}^{1/2+1/2}_{i_1\ nsp},)\right)\setminus(\mathrm{G}_{i_1,co}\cup\mathrm{F}^{1}_{i_1,nsp})$，第二个不等式是严格的。因此，对于这些集合中的所有 $\boldsymbol{G}$，我们都有 $\mathrm{rank}\,E^{re}_{\mathcal{T}_S\bar{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}>\dim\overline{\mathcal{PM}}_{\mathcal{T}_S\bar{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$，所以 $\boldsymbol{s}^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}}$ 在 $\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$ 上处处不为零。

根据上述观察，我们可以取一个开邻域 U^2_{nsp}，

$$Z^2_{nsp}:=\bigcup_{\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{F}}^{2}_{i_1,nsp}}\overline{\mathcal{PM}}_{\boldsymbol{G}}\subset\overline{\mathcal{PM}}^{1/r,0}_{1,B,I}$$

它们粘合成 $\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}_{,1\ B\ \overset{0}{I},,}$ 中的一个开集，使得 $\boldsymbol{s}^{re}$ 在 U^2_{nsp} 中处处不为零。

对于固定的 $R\subseteq I\setminus\{i_1\}$ 和 $T\subseteq B$，该子空间

$$Z_{sp}^{R,T}:=\bigsqcup_{\boldsymbol{G}\in\mathcal{F}_{i_1,sp}^{R,T}}\overline{\mathcal{PM}}_{\boldsymbol{G}}\subset\overline{\mathcal{PM}}_{1,B,I}^{1/r,0}$$

参数化所有带有未配对标记（B,I）的（$r,0$）圆柱，其中有一条分离虚线连接扭曲为零的内部点 $i^{\Gamma_{i_1}}{}_{,sp}{}^{\boldsymbol{G}}\in I^{PI}(\boldsymbol{G})$ 和扭曲为（$r-2$）的边界点 $b^{R}{}_{,sp}{}^{T}\in B^{PI}(\boldsymbol{G})$；其中，$i^{\Gamma_{i_1}}{}_{,sp}{}^{\boldsymbol{G}}$ 连同 R 和 T 中的所有未配对标记都位于亏格零部分，而 $i^{\Gamma_{i_1}}{}_{,sp}{}^{\boldsymbol{G}}$ 位于一个闭不可约分支上，该分支只有三个特殊点：标记点 i_1、半节点 $n_{\boldsymbol{G}}$ 以及 $i^{\Gamma_{i_1}}{}_{,sp}{}^{\boldsymbol{G}}$。若将 $a^{R}{}_{,sp}{}^{T}$ 记为 $n_{\boldsymbol{G}}$ 的另一个半节点（其扭曲与 i_1 相同），那么在分离边 $e_{\boldsymbol{G}}$ 后，从上述数据中除去带有 $\{i_1,n_{\boldsymbol{G}},i_{sp}^{\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G}}\}$ 中三个标记的闭 r-旋球面，我们得到一个带有未配对标记（$T,R\sqcup\{a_{sp}^{R,T}\}$）的（$r,0$）圆盘，以及一个带有未配对标记（$B\sqcup\{a_{sp}^{R,T}\setminus T\},I\setminus(R\sqcup\{i_1\})$）的（$r,0$）圆柱，因此我们有一个分离态射

$$\mathrm{Detach}_{sp}^{R,T}\colon Z_{sp}^{R,T}\to\overline{\mathcal{PM}}_{1,B\sqcup\{b_{sp}^{R,T}\}\setminus T,I\setminus(R\sqcup\{i_1\})}^{1/r,0}\times\overline{\mathcal{PM}}_{0,T,R\sqcup\{a_{sp}^{R,T}\}}^{1/r,0}\times\overline{\mathcal{M}}_{v_{sp,c}^{R,T}},\tag{5.7}$$

其中，$v^{R}{}_{,sp}{}^{T}{}_{,c}$ 是一个带有三个尾 i_1，$n_{\boldsymbol{G}}$ 和 $i^{\Gamma_{i_1}}{}_{,sp}{}^{\boldsymbol{G}}$ 的闭合单顶点 r-spin 图。注意，$\overline{\mathcal{M}}_{v^{R}{}_{,sp}{}^{T}{}_{,c}}$ 是一个零维轨形，其同伦群的阶为 r，且 Witten 丛秩为零。此外，点插入过程将 $Z^{R}{}_{,sp}{}^{T}$ 粘合到子空间 $\widetilde{Z}^{R}{}_{,T}\subset\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}{}_{,1\;B\;I,,}$；分离态射 $\mathbf{Detach}_{e_{\boldsymbol{G}}}$ 也粘合成一个态射

$$\mathrm{Detach}_{sp}^{R,T}\colon\widetilde{\mathcal{PM}}_{1,B\sqcup\{b_{sp}^{R,T}\}\setminus T,I\setminus(R\sqcup\{i_1\})}^{1/r,0}\times\widetilde{\mathcal{PM}}_{0,T,R\sqcup\{a_{sp}^{R,T}\}}^{1/r,0}\times\overline{\mathcal{M}}_{v_{sp,c}^{R,T}}.$$

类似地，子空间

$$Z_{nsp}^{1}:=\bigsqcup_{\boldsymbol{G}\in\mathcal{F}_{i_1,nsp}^{1}}\overline{\mathcal{PM}}_{\boldsymbol{G}}\subset\overline{\mathcal{PM}}_{1,B,I}^{1/r,0}$$

也有一个分离态射

$$\mathrm{Detach}_{nsp}\colon Z_{nsp}^{1}\to\overline{\mathcal{PM}}_{0,B\sqcup\{b_{nsp}\},I\sqcup\{a_{nsp}\}\setminus\{i_1\}}^{1/r,0}\times\overline{\mathcal{M}}_{v_{nsp,c}},\tag{5.8}$$

其中，$\mathcal{M}_{v_{nsp,\,c}}$ 是一个零维轨形，其同伦群的阶为 r，且 Witten 丛秩为零；新的扭曲-$(r-2)$ 边界标记 b_{nsp} 与 $i^{\Gamma_{i_1}}{}_{,nsp}{}^{\boldsymbol{G}}$ 配对，而新的内部标记 a_{nsp} 是 $n_{\boldsymbol{G}}$ 的另一个半节点，其扭曲与 i_1 相同。在点插入过程中，$\mathbf{Detach}_{nsp}$ 也粘合成

$$\mathrm{Detach}_{nsp}\colon\widetilde{Z}_{nsp}^{1}\to\widetilde{\mathcal{PM}}_{0,B\sqcup\{b_{nsp}\},I\sqcup\{a_{nsp}\}\setminus\{i_1\}}^{1/r,0}\times\overline{\mathcal{M}}_{v_{nsp,c}}.$$

轨迹 $\widetilde{Z}^{R}{}_{,sp}{}^{T}$ 是 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}^{\vee}\otimes s_{i_1}^{trr*}$ 的“极点”，因为它是 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}^{\vee}$ 的“极点”。注意，根据注记 3.3 中的方法，$\widetilde{Z}^{R}{}_{,sp}{}^{T}$ 不与任何其他“极点”相交；我们可以在 $U^{R}{}_{,sp}{}^{T}\subset\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}{}_{B,1\quad I}{}^{0}$、$\widetilde{Z}^{R}{}_{,sp}{}^{T}$ 的小邻域内，将 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}^{\vee}$ 修改为一个在 $\widetilde{Z}^{R}{}_{,sp}{}^{T}$ 处具有零点的截面，但其消失阶的顺序与 $\mathfrak{t}_{i_1,\,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}$ 相反。

类似地，轨迹 $\widetilde{Z}_{nsp}^{1}$ 是 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}^{\vee}\otimes s_{i_1}^{trr*}$ 其中一个分支的“极点”，因为它是 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}^{\vee}$ 的“极点”；并且在这个分支中，$s_{i_1}^{trr*}$ 不消失（回想一下，在另一个分支中，$s_{i_1}^{trr*}$ 的零点与 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}^{\vee}$ 的“极点”相消）。注意，$\widetilde{Z}_{nsp}^{1}$ 与邻域 $U_{nsp}^{2}\subset\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}{}_{B,1\quad I,,}{}^{0}$ 之外的任何其他“极点”都不相交。根据注记 3.3 中的方法，我们可以找到一个 $\widetilde{Z}_{nsp}^{1}$ 的小邻域 $U_{nsp}^{1}\subset\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}{}_{B,1\quad I,,}{}^{0}$，并将 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}^{\vee}\otimes s_{i_1}^{trr*}$ 的分支修改为带有

“极点”的分支：在 $U^1_{nsp}\setminus U^2_{nsp}$中，将此分支里的$\tilde{\mathfrak{t}}^{\vee}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}$修改为一个在 $\widetilde{Z}^{R}{}_{,sp}{}^{T}\setminus U^2_{nsp}$处有零点的截面，~但其消失阶与$\mathfrak{t}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*}$相反。

经过这些修改，我们得到 $\mathbb{L}_{i_1}$在 $\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}{}_{,1\ B\ I}{}^{0}{}_{,,}\setminus U^2_{nsp}$ 上的一个多截面。随后，我们可以将其延拓为整个 $\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}{}_{,1\ B\ I}{}^{0}{}_{,,}$上 $\mathbb{L}_{i_1}$ 的任意多截面。我们将这样的延拓记为$s^{trr}_{i_1}$。由于这些修改和延拓都可以先在 $\mathcal{PM}^{\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{H}}}$上完成，再拉回到$\mathcal{PM}_{\boldsymbol{H}}$，因此我们要求，对于每个 $\boldsymbol{H}\in \mathrm{sGPI}^{r\ 0}_{1\ ,,\cancel{B,I,}}$

$$s^{trr}_{i_1,\boldsymbol{H}}:=s^{trr}_{i_1}|_{\overline{\mathcal{PM}}_{\boldsymbol{H}}}=\left(\mathrm{For}_{\Gamma_{i_1},\boldsymbol{H}\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{H}}\circ\pi_{\boldsymbol{H}\to\Gamma_{i_1},\boldsymbol{H}}\right)^{*}s^{trr}_{i_1,\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{H}},$$

其中 s 是 $\mathrm{For}^{*}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{H}\to\mathcal{B}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{H}}\mathbb{L}_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{H}}\to\mathcal{PM}^{\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{H}}$的一个多截面；它是 $\tilde{\mathfrak{t}}^{\vee}_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{H}\to\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{H}}\otimes\mathfrak{s}_{i_1,\hat{}\mathcal{B}\Gamma_{i_1},\boldsymbol{H}}$ 的一个修改，在其“极点”附近进行。该要求通过一个与§6.2非常相似的归纳过程得以满足，细节从略。

步骤 4. 现在我们通过在 $\mathcal{PM}^{1/r}{}_{、1\ B\ I}{}^{0}{}_{、,}$中构造 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{s}^{mod}$之间的同伦，证明 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{s}^{mod}$的零点数相同。

我们将由光滑的（r，0）图 $\boldsymbol{G}$组成、且具有一个亏格一顶点$\Gamma_{g=1,\ \mathbf{G}}=\Gamma_{i_1,\ \mathbf{G}}$的子集记为$\boldsymbol{\mathcal{H}}\subseteq \mathrm{sGPI}^{r\ 0}_{1\ B,\ ,\ ,\ I}$。注意，对于任意 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{H}}$，若 $\Gamma\in V(\boldsymbol{G})$是零亏格，则 $|RT(\Gamma)|=1$。我们还将满足$\Gamma_{g=1,\ \mathbf{G}}=\Gamma_{i_1,\ \mathbf{G}}$的子集记为$\boldsymbol{\mathcal{H}}_1$，并定义$\boldsymbol{\mathcal{H}}_0:=\boldsymbol{\mathcal{H}}\setminus\boldsymbol{\mathcal{H}}_1$。

观察 *5.4.* 注意，对于任意 $\boldsymbol{G}\in H1,\ \mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$ 与 $Z^{R}{}_{、sp}{}^{T}{}_{、}Z^{1}_{nsp}$或 Z^{2}_{nsp}均不相交，因此在这种情况下，$s^{trr}_{i_i}$在$\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$ 上的限制$s^{trr}_{i_i}{}_{、\boldsymbol{G}}$ 就是$\tilde{\mathfrak{t}}^{\vee}_{i_1,\ \mathbb{L}\to\mathbb{L}^*,\boldsymbol{G}}\otimes s^{trr*}_{i_1}{}_{、\boldsymbol{G}}$，因为我们取 $U^{R}{}_{、sp}{}^{T}{}_{、}U^{1}_{nsp}$和 U^{2}_{nsp}都足够小。此外，由于$\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}$是亏格一，我们有$\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}=\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G},}{}^{\sim}$，因此$\mathfrak{t}_{i_1,\ \mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}\to\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}$以及$\mathfrak{t}_{i_1,\ \mathbb{L}\to\mathbb{L}^*,\boldsymbol{G}}$都是平凡复线丛的恒等常截面，所以我们有$s^{trr}_{i_i}{}_{、\boldsymbol{G}}=s^{trr*}_{i_i}{}_{、\boldsymbol{G}}$，且它们二者都是$\mathfrak{s}_{i_1,\ \mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}$的拉回。另一方面，由于 $\boldsymbol{s}$ 是 γ-典范的，根据定义，t_D 在 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$上的限制 $t_{D,\ \boldsymbol{G}}$ 是通过$\pi_{\boldsymbol{G}\to\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}$从多截面$t_{D,\ \mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}$拉回的，并且遗忘$\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}\to\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}$以及$t_{D,\ \mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}$在 $\mathcal{PM}^{\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}\setminus K^{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}$中与$\mathfrak{s}_{i_1,\ \mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}$重合，其中 $K^{\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}$是$\mathfrak{s}_{i_1,\ \mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}$的零点集的一个邻域。注意，根据定义 *4.6* 中的第 *5* 项，只要秩 $E^{\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}\geq \underline{\dim\mathcal{PM}^{\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}}$，多截面 $\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}$在 $K^{\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}\subseteq\mathcal{PM}^{\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}$中处处不为零

现在，我们构造一个同伦 H，使其连接$s^{trr}_{i_1}$与 t_D，并将其视为

$$\pi^{*}_{\mathcal{M}}\mathbb{L}_{i_1}\to\overline{\mathcal{PM}}^{r,0}_{1,B,I}\times[0,1];$$

其中 $\pi_{\mathcal{M}}$ 是到第一分量的投影；我们要求 H 满足以下条件。

1. H 粘合成 $\pi^{*}_{\mathcal{M}}\mathbb{L}_{i_1}\to\widetilde{\mathcal{PM}}^{r}{}_{,\ 1\ B,\ ,\ I}{}^{0}\times[0,1]$的一个全局多重截面。

2. 对每个 $\boldsymbol{G}\in\mathrm{sGPI}^{r\ 0}_{1\ B,\ ,\ ,\ I}$，$H$到$\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}\times[0,1]$的限制$H_{\boldsymbol{G}}$具有如下形式

$$H_{\boldsymbol{G}}=(\pi_{\boldsymbol{G}\to\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\times\mathrm{Id}_{[0,1]})^{*}H_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}},\tag{5.9}$$

其中$H_{\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}$是 $\pi^{*}_{\mathcal{M}}$遗忘$^{*}_{\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}\to\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}\mathbb{L}_{i_1,\ \mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}\to\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}\times[0,1]$的一个多截面。

3. 当秩 $E_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}>$维数 $\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}},}$或秩 $E_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}=$维数$\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$且情形 $\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}$为亏格一时，同伦 $H_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$在 $Z\left(\boldsymbol{s}^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\right)\times[0,1]\subset\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G}}\times[0,1]$上处处不消失，其中 $Z\left(\boldsymbol{s}^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\right)\subset\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G}}$是 $\boldsymbol{s}^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$的零点集。

为构造这样的 H，我们首先令 H' 为 $s_{i_1}^{trr}$与 t_D之间的线性同伦，即，$H'(p,\lambda) := (1-\lambda)\cdot s_{i_1}^{trr}+\lambda\cdot t_D$ 对于任意 $\lambda\in[0,1]$。注意， H' 满足前两个要求。若 $\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}$ 为亏格一，则第三个要求也得到满足：由观察 5.4 可知

$$Z\left(\boldsymbol{s}^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\right)\subset\overline{\mathcal{PM}}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\setminus \mathrm{For}^{-1}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\left(K_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\right),$$

而对于任意的 $p\in\overline{\mathcal{PM}}_{\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}\setminus$遗忘$_{\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}\to\hat{\ }\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}\left(K_{\hat{\ }\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}\right)$ 和 $\lambda\in[0,1]$，

我们有

$$H'_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}(p,\lambda)=(1-\lambda)\cdot\mathrm{For}^*_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\mathfrak{s}_{i_1,\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}(p)+\lambda\cdot t_{D,\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}(p)=\mathrm{For}^*_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}\to\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\mathfrak{s}_{i_1,\hat{\mathcal{B}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}(p)\neq 0$$

因为 $\mathfrak{s}_{i_1,\ \hat{\ }\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}$的零点集包含于 $K_{\hat{\ }\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}$中。

当 $\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}$为零亏格且秩 $E_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}>$维数$\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$时，同伦 $H'_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$可能在 $Z\left(\boldsymbol{s}^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\right)\times[0,1]$上消失；然而，这只有在秩$E_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}=$维数 $\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}+2$时才会发生，因为否则我们有秩 $E^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}=$秩$E_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}-2>$维数 $\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$,[6] 而 $\boldsymbol{s}^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$ 的横截性蕴含 $Z\left(\boldsymbol{s}^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\right)=\emptyset$。因此，我们只需修改 $H'_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$，使其适用于秩为 $E^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}=$维数$\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$的零亏格 $\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}$。根据 $\boldsymbol{s}^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$的横截可分解性（定义 4.9 中的第 4 项），以及对其 $\mathcal{W}$-部分的正约束（定义 4.9 中的第 5 项），零点集 $Z\left(\boldsymbol{s}^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\right)$ 是 $\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$中的有限个零维点的并。随后，我们在每个点的小邻域内将 $H'_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$扰动为同伦 $H_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$，使其在$\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\times\{0,1\}$ 上与$H'_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$ 重合，并且在 $Z\left(\boldsymbol{s}^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\right)\times[0,1]$ 上处处不消失。这总是可行的，因为 $\boldsymbol{s}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$ 的横截性和 $\boldsymbol{s}^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$ 的横截可分解性保证 $H'_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$ 在端点处不消失，而

$$\mathrm{rank}\left(\pi^*_{\mathcal{M}}\,\mathrm{For}^*_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}\to\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\mathbb{L}_{i_1,\mathcal{B}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\right)=2>1=\dim\left(Z\left(\boldsymbol{s}^{re}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\right)\times[0,1]\right),$$

确保我们可以在端点之外进行扰动，以避免其消失。

这些经过扰动的 $H_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$与那些无需扰动的 $H'_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$ 一起，通过 (5.9) 确定了一个新的同伦 H between$s_{i_1}^{trr}$and t_D。由于扰动仅在 $\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$ 的内部进行，并且没有改变 $\partial\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}$上的任何内容，因此仍满足第一个要求。

现在我们得到了所需的同伦 H，那么 $\pi^*_{\mathcal{M}}\boldsymbol{s}^{re}\oplus H$就是 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}^{re}\oplus t_D$与 $\boldsymbol{s}^{mod}$之间的一个同伦：$=\boldsymbol{s}^{re}\oplus s_{i_1}^{trr}$。我们可以证明，对于每个 $\boldsymbol{G}\in\mathrm{sGPI}^{r\ 0}_{1\ B,,,I}$，都存在一个开邻域 $U_{\boldsymbol{G}}\subseteq\mathcal{M}_{\boldsymbol{G}}$ of

$$\partial^R\overline{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{G}}\cup\partial^{NS+}\overline{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{G}}\cup\mathcal{Z}^{dj}_{\boldsymbol{G}}\subset\overline{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{G}},$$

使得 $\pi^*_{\mathcal{M}}\boldsymbol{s}^{re}\oplus H$ 在其上处处不消失

$$\left((U_{\boldsymbol{G}}\cup\partial^{CB}\overline{\mathcal{M}}_{\boldsymbol{G}})\cap\overline{\mathcal{PM}}_{\boldsymbol{G}}\right)\times[0,1].$$

事实上，对于任意 $\boldsymbol{G}\in\boldsymbol{\mathcal{H}}$，我们可以取 $U_{\boldsymbol{G}}=\mathcal{M}_{\boldsymbol{G}}$。这是因为秩 $E_{\boldsymbol{G}}=\dim\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$意味着（见观察 4.11），必定存在一个顶点 $\Gamma\in V(\boldsymbol{G})$，使得秩 $E_\Gamma>\dim\ \mathcal{PM}_\Gamma$，或秩 $E_\Gamma=\dim\ \mathcal{PM}_\Gamma$且 Γ为亏格一。若 $i_1\notin T^I(\Gamma)$，则根据横截性或注 4.8， $\boldsymbol{s}_\Gamma$在 $\mathcal{PM}_\Gamma$上处处不消失；若 $i_1\in T^I(\Gamma)$，则根据上述第三个要求， $\pi^*_{\mathcal{M}}\boldsymbol{s}^{re}_\Gamma\oplus H$在 $\mathcal{PM}_\Gamma\times[0,1]$ 上处处不消失。无论哪种情况， $\pi^*_{\mathcal{M}}\boldsymbol{s}^{re}\oplus H$ 都有一个处处不消失的直和项，因此它在整个 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$上处处不消失。

[6]由于 e $\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}$边界标记是合法的，根据 (2.7)、(2.14) 和 (2.10)，我们有秩$E_{\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}\equiv$维数 $\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1}}$ $_{\boldsymbol{G}}$ 模 2。

如果 $\boldsymbol{G}\in \mathrm{sGPI}^{r\ 0}_{1\ B,\ ,\ ,\ I}$，那么 $\boldsymbol{G}$ 的任意顶点都是零亏格的，因此 $\mathcal{Z}^{dj}_{\boldsymbol{G}}=\emptyset$。在此情况下，这种 $U_{\boldsymbol{G}}$ 的存在性源于 $\boldsymbol{s}_\Gamma$ 的$\mathcal{W}$-部分或$\boldsymbol{s}^{re}_\Gamma$对所有（零亏格）顶点 $\Gamma\in V(\boldsymbol{G})$所施加的正性约束（定义 4.9 中的第 5 项）。

由于粘合后我们有 $\partial\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}{}^{\ 0}_{,1\ B\ ,,I}=\partial^{CB}\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}{}^{\ 0}_{B,1\ \ I\ ,,}$，集合 $\{U_{\boldsymbol{G}}\}$ 给出了 $\widetilde{U}\subset\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}{}^{\ 0}_{,1\ B\ I\ ,,}$的一个开邻域，其中 $\mathcal{M}^{1/r}{}^{\ 0}_{,1\ B\ ,,I}\setminus\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}{}^{\ 0}_{B,1\ \ I\ ,,}$，使得粘合后的同伦 H 在粘合后的 $\boldsymbol{s}$ 与粘合后的 $\boldsymbol{s}^{re}$ 之间处处不为零

$$\left(\left(\widetilde{U}\cap\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r,0}_{1,B,I}\right)\cup\partial\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r,0}_{1,B,I}\right)\times[0,1].$$

注意，$\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}{}^{\ 0}_{,1\ B\ ,,I}\setminus\left(\widetilde{U}\cap\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}_{B,0\,1,,I}\right)=\mathcal{M}^{1/r}_{B,0\,1,,I}\setminus U$是紧的。根据 [4, 引理 4.12]，$\boldsymbol{s}$ 在 $\widetilde{\mathcal{PM}}^{1/r}{}^{\ 0}_{,1\ B\ I\ ,,}$ 中的零点计数（含重数）与 $\boldsymbol{s}^{mod}$ 相同，即，

$$\#Z(\boldsymbol{s})=\#Z(\boldsymbol{s}^{mod}). \tag{5.10}$$

步骤 5. 最后，我们计算多截面 $\boldsymbol{s}^{mod}:=\boldsymbol{s}^{re}\oplus s^{trr}_{i_1}\mathrm{in}_{\mathcal{PM}^{1/r}{}^{\ 0}_{,1\ B\ I\ ,,}}$ 的零点 $Z(\boldsymbol{s}^{mod})$ 的个数。根据观察 5.3，$\boldsymbol{s}^{mod}$ 的零点包含于以下轨迹

$$Z^{R,T}_{sp}:=\bigsqcup_{\boldsymbol{G}\in\mathcal{F}^{R,T}_{i_1,sp}}\overline{\mathcal{PM}}_{\boldsymbol{G}}\subset\overline{\mathcal{PM}}^{1/r,0}_{1,B,I}$$

对于 $R\subseteq I\setminus\{i_1\}$ 和 $T\subseteq B$,

$$Z^{1}_{nsp}:=\bigsqcup_{\boldsymbol{G}\in\mathcal{F}^{1}_{i_1,nsp}}\overline{\mathcal{PM}}_{\boldsymbol{G}}\subset\overline{\mathcal{PM}}^{1/r,0}_{1,B,I},$$

以及

$$Z^{R}_{co}:=\bigsqcup_{\boldsymbol{G}\in\mathcal{G}^{R}_{i_1,co}}\overline{\mathcal{PM}}_{\boldsymbol{G}}\subset\overline{\mathcal{PM}}^{1/r,0}_{1,B,I}$$

对于 $R\subseteq I\setminus\{i_1\}$、$R\neq\emptyset$。

横截可分解性保证了将 $\boldsymbol{s}^{re}$ 限制在这些轨迹上时是横截的，并且在任意两个轨迹的交集上都不消失。

我们首先计算多截面 $\boldsymbol{s}^{re}$ 在轨迹 $Z^{R,sp\ \ T}$ 上的零点个数（计重数），其中 $R\subseteq I\setminus\{i_1\}$ 和 $T\subseteq B$。回忆一下，我们有一个分离态射

$$\mathrm{Detach}^{R,T}_{sp}\colon Z^{R,T}_{sp}\to\overline{\mathcal{PM}}^{1/r,0}_{1,B\sqcup\{b^{R,T}_{sp}\}\setminus T,I\setminus(R\sqcup\{i_1\})}\times\overline{\mathcal{PM}}^{1/r,0}_{0,T,R\sqcup\{a^{R,T}_{sp}\}}\times\overline{\mathcal{M}}_{v^{R,T}_{sp,c}}.$$

我们用 π_o 表示投影

$$\overline{\mathcal{PM}}^{1/r,0}_{1,B\sqcup\{b^{R,T}_{sp}\}\setminus T,I\setminus(R\sqcup\{i_1\})}\times\overline{\mathcal{PM}}^{1/r,0}_{0,T,R\sqcup\{a^{R,T}_{sp}\}}\times\overline{\mathcal{M}}_{v_{nsp,c}}\to\overline{\mathcal{PM}}^{1/r,0}_{1,B\sqcup\{b^{R,T}_{sp}\}\setminus T,I\setminus(R\sqcup\{i_1\})}\times\overline{\mathcal{PM}}^{1/r,0}_{0,T,R\sqcup\{a^{R,T}_{sp}\}}$$

到前两个因子的映射，它是一个次数为 $1/r_T$的态射。

另一方面，注意对于任意 $\boldsymbol{G}\in\mathcal{F}^{R}_{,i_1\ sp,,}$，若我们采用步骤 2 中的记号并取$S=\left\{i^{\Gamma_{i_1,}}_{sp\ \ \boldsymbol{G}}\right\}$，根据 §4.1 中的构造，我们有 $\mathcal{T}_S\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}=$对于$_S(d_{e_{\boldsymbol{G}}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})$，因此

$$\mathrm{For}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}\to\mathcal{T}_S\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\colon\overline{\mathcal{PM}}_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}\to\overline{\mathcal{PM}}_{\mathcal{T}_S\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}}=\overline{\mathcal{PM}}_{\mathrm{for}_S(d_{e_{\boldsymbol{G}}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}})}$$

只是 $\mathrm{For}_{d_{e_{\boldsymbol{G}}}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}\to\text{对于}_S\ (d_{e_{\boldsymbol{G}}}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}})}$ 到 $\mathcal{PM}_{\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}\subset\mathcal{PM}_{\overline{d_{e_{\boldsymbol{G}}}\Gamma_{i_1,\ \boldsymbol{G}}}}$ 的限制。这些针对所有 $\boldsymbol{G}\in\mathcal{F}^{R,\ \ T}_{i_1\ ,\ sp}$ 的遗忘态射诱导出一个态射

$$\mathrm{For}^{R,T}_{i_{sp}}\colon Z^{R,T}_{sp}\to\overline{\mathcal{PM}}^{1/r,0}_{1,B\sqcup\{b^{R,T}_{sp}\}\setminus T,I\setminus(R\sqcup\{i_1\})}\times\overline{\mathcal{PM}}^{1/r,0}_{0,T,R\sqcup\{a^{R,T}_{sp}\}},$$

并且我们有

$$\mathrm{For}_{i_{sp}}^{R,T} = \pi_o \circ \mathrm{Detach}_{sp}^{R,T}$$

将 $\mathcal{PM}^{1/r}{}_{,0\,T}{}^{0}{}_{,,R\sqcup\{a_{sp}^{R,T}\}}$ 中的内部标记 $a^{R}{}_{,sp}{}^{T}$ 识别为 $\mathcal{PM}^{1/r,0\,T}{}^{0}{}_{,,R\sqcup\{i_1\}}$ 中的内部标记 i_1 后，它是一个次数为 $1/r$ 的态射。

由横截可分解性，$\boldsymbol{s}^{re}$ 对 Z^1_{nsp} 的限制具有如下形式

$$\boldsymbol{s}^{re}|_{Z_{sp}^{R,T}} = \mathrm{For}_{i_{sp}}^{R,T*}\left(\boldsymbol{s}|_{1,B\sqcup\{b_{sp}^{R,T}\}\setminus T,I\setminus(R\sqcup\{i_1\})} \boxplus \boldsymbol{s}|_{0,T,R\sqcup\{i_1\}}\right), \tag{5.11}$$

其中 $\boldsymbol{s}|_{1,B\sqcup\{b_{sp}^{R,T}\}\setminus T,I\setminus(R\sqcup\{i_1\})}$ 是 的多截面

$$E_{1,B\sqcup\{b_{sp}^{R,T}\}\setminus T,I\setminus(R\sqcup\{i_1\})} := \mathcal{W}_{1,B\sqcup\{b_{sp}^{R,T}\}\setminus T,I\setminus(R\sqcup\{i_1\})} \oplus \bigoplus_{i\in I\setminus(R\sqcup\{i_1\})} \mathbb{L}_i^{\oplus d_i} \to \overline{\mathcal{PM}}^{1/r,0}_{1,B\sqcup\{b_{sp}^{R,T}\}\setminus T,I\setminus(R\sqcup\{i_1\})}$$

且 $\boldsymbol{s}|_{0,T,R\sqcup\{i_1\}}$ 是 的多截面

$$E_{0,T,R\sqcup\{i_1\}} := \mathcal{W}_{0,T,R\sqcup\{i_1\}} \oplus \bigoplus_{i\in R\sqcup\{i_1\}} \mathbb{L}_i^{\oplus d_i} \to \overline{\mathcal{PM}}^{1/r,0}_{0,T,R\sqcup\{i_1\}}.$$

此外，由于 $\boldsymbol{s}$ 是 γ-典范的，多截面 $\boldsymbol{s}|_{0,T,R\sqcup\{i_1\}}$ 是典范的，而多截面 $\boldsymbol{s}|_{1,B\sqcup\{b_{sp}^{R,T}\}\setminus T,I\setminus(R\sqcup\{i_1\})}$ 是 $\gamma|_{I\setminus(R\sqcup\{i_1\})}$-典范的（见注 4.7）。

现在我们证明，由 $E_{1,B,I} \to \mathcal{PM}^{r}{}_{,1\,B}{}^{0}{}_{,,I}$ 和 $s_{i_1}^{trr}$（远离 U^2_{nsp}）的典范相对定向（见（2.23））所诱导的 $E_1^{re}{}_{,B,I}|_{Z^R}{}_{,,sp}{}^{T} \to Z^R{}_{,sp}{}^{T}$ 的相对定向，与通过遗忘 $i_{sp}^{R\,T*}$，所得到的 $E_{1,B\sqcup\{b_{sp}^{R,T}\}\setminus T,I\setminus(R\sqcup\{i_1\})} \to \mathcal{PM}^{1/r}{}_{,0\,1,B\sqcup\{b_{sp}^{R,T}\}\setminus T,I\setminus(R\sqcup\{i_1\})}{}^{0}{}_{,,R\sqcup\{i_1\}}$ 和 $E_{0,T,R\sqcup\{i_1\}} \to \mathcal{PM}^{1/r}{}_{,0\,0,T}{}^{0}{}_{,,R\sqcup\{i_1\}}$ 的典范相对定向所诱导的定向相同。事实上，我们只需检验相应 Witten 丛的相对定向，因为所有相对余切线都由其复结构定向。对于 $\boldsymbol{G} \in \mathcal{F}^{R}{}_{,i_1\,sp,}{}^{T}$，$\mathcal{W}_{d_{e_{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{G}} \to \mathcal{PM}_{d_{e_{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{G}}$ 的相对定向为（见（2.23））

$$(-1)^{|E(d_{e_{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{G})|} \bigboxtimes_{\Gamma\in V(d_{e_{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{G})} o_\Gamma,$$

根据引理 3.2、[31, 命题 3.1 和推论 3.20]，由 $s_{i_1}^{trr}{}_{,d_{e_{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{G}}$ 在 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}} \subset \mathcal{PM}_{d_{e_{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{G}}$ 上诱导的相对定向是

$$(-1)^{|E(d_{e_{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{G})|+1} o_{v_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G},c}}} \boxtimes o_{v_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G},o}}} \boxtimes \bigbigboxtimes_{\Gamma\in V(d_{e_{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{G})\setminus\{d_{e_{\boldsymbol{G}}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}\}} o_\Gamma, \tag{5.12}$$

这里有一个额外因子 -1，因为 $s_{i_1}^{trr}{}_{,\boldsymbol{G}}$ 在 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$ 上诱导的定向与 $\tilde{\mathfrak{t}}_{i_1,\mathbb{L}\to\mathbb{L}^*,\boldsymbol{G}}$ 诱导的定向相反。另一方面，假设遗忘 $\mathrm{For}_{i_{sp}}^{R\,T}{}_{,}(\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}) = \mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}_1} \times \mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}_0}$，对 $\boldsymbol{G}_1 \in \mathrm{sGPI}^{r\,0}_{1}{}_{,,B\sqcup\{b_{sp}^{R,T}\}\setminus T,I\setminus(R\sqcup\{i_1\})}$ 以及 $\boldsymbol{G}_0 \in \mathrm{sGPI}^{r\,0}_{0\,T}{}_{,,,R\sqcup\{i_1\}}$ 成立，则 $\mathcal{PM}_{\boldsymbol{G}}$ 上的定向由 $o_{\boldsymbol{G}_1}$ 和 $o_{\boldsymbol{G}_0}$ 诱导

$$(-1)^{|E(\boldsymbol{G}_1)|} \bigbigboxtimes_{\Gamma\in V(\boldsymbol{G}_1)} o_\Gamma \boxtimes (-1)^{|E(\boldsymbol{G}_0)|} \bigbigboxtimes_{\Gamma\in V(\boldsymbol{G}_0)} o_\Gamma. \tag{5.13}$$

两个相对定向 (5.12) 和 (5.13) 相同，因为我们有

$$V(\boldsymbol{G}_1) \sqcup V(\boldsymbol{G}_2) = \{v_{\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G},o}}\} \sqcup V(d_{e_{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{G}) \setminus \{d_{e_{\boldsymbol{G}}}\Gamma_{i_1,\boldsymbol{G}}\},$$

$\overline{\mathcal{M}}_{v_{\Gamma_{i_1},\boldsymbol{G},c}}$ 是零维的，且具有秩零 Witten 丛；并且，由于我们移除了一条虚线 e，

$$|E(\boldsymbol{G}_1)|+|E(\boldsymbol{G}_0)|=|E(d_{e_{\boldsymbol{G}}}\boldsymbol{G})|-1.$$

在此相对定向下，(5.11)意味着（回忆一下，遗忘$_{i_{sp}}^{R\,T}$，是次数为$1/r$的）

$$\#Z\left(\boldsymbol{s}^{re}|_{Z_{sp}^{R,T}}\right)=\frac{1}{r}\#Z(\boldsymbol{s}|_{1,B\sqcup\{b_{sp}^{R,T}\}\setminus T,I\setminus(R\sqcup\{i_1\})})\cdot\#Z(\boldsymbol{s}|_{0,T,R\sqcup\{i_1\}}).$$

由于 $s_{i_1}^{trr}$沿着 $Z^{R,\ {sp}^T}$的消失阶为 r （见注 3.5），$\boldsymbol{s}^{mod}=\boldsymbol{s}^{re}\oplus s_{i_1}^{trr}$在轨迹 $Z^{R,\ {sp}^T}$中的零点计数（按重数计算）为

$$\left\langle\tau_{d_{i_1}}^{a_{i_1}}\prod_{i\in R}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in T}\sigma^{b_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}\left\langle\prod_{i\in I\setminus(R\sqcup\{i_1\})}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^{r-2}\prod_{i\in B\setminus T}\sigma^{b_i}\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o,\gamma|_{I\setminus(R\sqcup\{i_1\})},\boldsymbol{s}|_{1,B\sqcup\{b_{sp}^{R,T}\}\setminus T,I\setminus(R\sqcup\{i_1\})}}.\tag{5.14}$$

同理，$\boldsymbol{s}^{mod}=\boldsymbol{s}^{re}\oplus s_{i_1}^{trr}$在轨迹 Z_{nsp}^1 中的零点计数（按重数计算）为

$$\frac{1}{2}\left\langle\prod_{i\in I}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^{r-2}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o},\tag{5.15}$$

还需乘以一个系数 $1/2$，因为 Z_{nsp}^1 只是 $s_{i_1}^{trr}$的一个分支的零点集，其权重为 $1/2$。

$\boldsymbol{s}^{mod}=\boldsymbol{s}^{re}\oplus s_{i_1}^{trr}$在轨迹 Z_{co}^R 中的零点计数为

$$\left\langle\tau_0^a\tau_{d_{i_1}}^{a_{i_1}}\prod_{i\in R}\tau_{d_i}^{a_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},\mathrm{ext}}\left\langle\tau_0^{r-2-a}\prod_{i\in I\setminus(R\sqcup\{i_1\})}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o,\gamma|_{I\setminus(R\sqcup\{i_1\})},\boldsymbol{s}|_{1,B,I\sqcup\{a_{co}^R\}\setminus(R\sqcup\{i_1\})\}}}.\tag{5.16}$$

事实上，与 (5.7) 和 (5.8) 类似，我们有一个分离态射

$$\mathrm{Detach}_{co}^R\colon Z_{co}^R\to\overline{\mathcal{M}}_{v_{co,c}^R}\times\overline{\mathcal{PM}}_{1,B,I\sqcup\{a_{co}^R\}\setminus(R\sqcup\{i_1\})}^{1/r,0},\tag{5.17}$$

其中 $v_{co,c}^R$ 是一个带有 $R\sqcup\{i_1,n_{\boldsymbol{G}}\}$、$n_{\boldsymbol{G}}$ 中尾的闭合单顶点 r-旋图，a_{co}^R 是分离 $e_{\boldsymbol{G}}$ 后与两个半节点对应的内部标记。然后，通过与 (5.14) 和 (5.15) 类似的论证即可得到 (5.16)；亏格零情形的完整详细论证（与此相同）可见于 [4, 引理 4.14] 的证明。

将 (5.16)、(5.14) 和 (5.15) 对所有可能的划分求和，即可计算 $\#Z(\boldsymbol{s}^{mod})$，从而得到 (5.1) 的右侧。根据定义，(5.1) 的左侧等于 $\#Z(\boldsymbol{s})$，因此由 (5.10) 可得 (5.1)。

□

注记 5.5。 在亏格零情形下，可以用与上文类似的论证直接证明定理 4.17。

5.2 亏格一开 r-旋关联函数与选择无关

定理 5.6。 对于集合 $\{i\in I$上的任意两个序 γ_1 和 γ_2： $d_i\geq 1\}$，以及γ_1-典范多截面 $\boldsymbol{s}^1$ 和 γ_2-典范多截面 $\boldsymbol{s}^2$的任意两个选择，我们有

$$\left\langle\prod_{i\in I}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o,\gamma_1,\boldsymbol{s}^1}=\left\langle\prod_{i\in I}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o,\gamma_2,\boldsymbol{s}^2}.\tag{5.18}$$

定理 5.6（我们将在本小节末尾证明）表明，关于 γ 和 $\boldsymbol{s}$的亏格一r-spin 关联函数实际上与序 γ 或γ-典范多截面 $\boldsymbol{s}$的任何选择无关，因此我们可以作如下定义。

定义 5.7。 亏格一 r-旋不变量（或关联函数）定义如下 be

$$\left\langle \prod_{i\in I}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o} := \left\langle \prod_{i\in I}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o,\gamma,\boldsymbol{s}}$$

对于集合 $\{i\in I$ 上任意的序 γ： $d_i\geq 1\}$ 以及选择 γ-典范多截面 $\boldsymbol{s}$。

注 5.8。 由于本文中每个边界扭曲 b_i 都为 $r-2$，我们可以直接用 σ 代替 σ^{b_i}。按照 [4], 中的约定（并滥用一下记号），为简便起见，§1 中的开关联函数 $\left\langle \prod_{i\in I}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_{g}^{\frac{1}{r},o}$ 也写作 $\left\langle \prod_{i=1}^{|I|}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^{|B|}\right\rangle_{g}^{\frac{1}{r},o}$。

作为命题 5.1 和定理 5.6 的推论，我们得到以下关于 $g=1$ r-旋理论的拓扑递归关系。

定理 5.9（ $g=1$ r-spin 理论的拓扑递归关系）。 遗忘任意 $i_1\in I$，我们都有关于 i_1 的 ***TRR***:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \tau_{d_{i_1}+1}^{a_{i_1}}\prod_{i\in I\setminus\{i_1\}}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o}\\
&=\sum_{\substack{R_1\sqcup R_2=I\setminus\{i_1\}\\ -1\leq a\leq r-2}}\left\langle \tau_0^a\tau_{d_{i_1}}^{a_{i_1}}\prod_{i\in R_1}\tau_{d_i}^{a_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},ext}\left\langle \tau_0^{r-2-a}\prod_{i\in R_2}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o}\\
&+\sum_{\substack{R_1\sqcup R_2=I\setminus\{i_1\}\\ T_1\sqcup T_2=B}}\left\langle \tau_{d_{i_1}}^{a_{i_1}}\prod_{i\in R_1}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in T_1}\sigma^{b_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}\left\langle \prod_{i\in R_2}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^{r-2}\prod_{i\in T_2}\sigma^{b_i}\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o}\\
&+\frac{1}{2}\left\langle \prod_{i\in I}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^{r-2}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}.
\end{aligned}\tag{5.19}$$

定理 *5.6* 和定理 *5.9* 的证明。 我们通过对 $D=\sum_{i\in I}d_i$ 进行归纳来证明（5.18），从而证明（5.19）。

当 $D=0$ 时，结论显然成立：根据注 4.14，此时的关联函数总是零点。

在 $D=1$ 的情形下，只有一个满足 $d_{i_1}=1>0$ 的元素 $i_1\in I$。注意，在这种情形下，$I^{d>0}=\{i_1\}$ 是单元素集合，因此 σ 的序的选择是唯一的。我们将 (5.1) 应用于关联函数 $\left\langle \tau_1^{a_{i_1}}\prod_{i\in I\setminus\{i_1\}}\tau_0^{a_i}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_{g}^{\frac{1}{r},1}$，并将其表示为

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{R_1\sqcup R_2=I\setminus\{i_1\}\\ -1\leq a\leq r-2}}\left\langle \tau_0^a\tau_0^{a_{i_1}}\prod_{i\in R_1}\tau_0^{a_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},\mathrm{ext}}\left\langle \tau_0^{r-2-a}\prod_{i\in R_2}\tau_0^{a_i}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o,\gamma|_{R_2},\boldsymbol{s}|_{R_2\sqcup\{i_I^{r-2-a}\},B}}\\
&+\sum_{\substack{R_1\sqcup R_2=I\setminus\{i_1\}\\ T_1\sqcup T_2=B}}\left\langle \tau_0^{a_{i_1}}\prod_{i\in R_1}\tau_0^{a_i}\prod_{i\in T_1}\sigma^{b_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}\left\langle \prod_{i\in R_2}\tau_0^{a_i}\sigma^{r-2}\prod_{i\in T_2}\sigma^{b_i}\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o,\gamma|_{R_2},\boldsymbol{s}|_{R_2,B\sqcup\{i_B^{r-2}\}}}\\
&+\frac{1}{2}\left\langle \prod_{i\in I}\tau_0^{a_i}\sigma^{r-2}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}.
\end{aligned}\tag{5.20}$$

根据注 4.14，(5.20) 中所有亏格一因子都消失了，唯一剩下的项是

$$\frac{1}{2}\left\langle \prod_{i\in I}\tau_0^{a_i}\sigma^{r-2}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}$$

它与 $\boldsymbol{s}$ 的选择无关。

假设我们已经证明了在 $\sum_i d_i \le D_0$ 为整数 $D_0\ge 1$ 的所有情况下，(5.18) 和 (5.19) 均成立，现在证明 $\sum_i d_i = D_0+1$ 的情况。取 $i_1=\gamma_1(I)$，并对 (5.18) 左侧的关联函数 $\left\langle \tau_{d_{i_1}}^{a_{i_1}}\prod_{i\in I\setminus\{i_1\}}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_{\quad o\,\gamma_1\,\boldsymbol{s}^1,\ ,}^{1,r}$ 应用 (5.1)，得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{R_1\sqcup R_2=I\setminus\{i_1\}\\ -1\le a\le r-2}}\left\langle \tau_0^a\tau_{d_{i_1}}^{a_{i_1}-1}\prod_{i\in R_1}\tau_{d_i}^{a_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},\mathrm{ext}}\left\langle \tau_0^{r-2-a}\prod_{i\in R_2}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o,\gamma_1|_{R_2},\boldsymbol{s}^1|_{R_2\sqcup\{i_I^{r-2-a}\},B}}\\
&+\sum_{\substack{R_1\sqcup R_2=I\setminus\{i_1\}\\ T_1\sqcup T_2=B}}\left\langle \tau_{d_{i_1}}^{a_{i_1}-1}\prod_{i\in R_1}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in T_1}\sigma^{b_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}\left\langle \prod_{i\in R_2}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^{r-2}\prod_{i\in T_2}\sigma^{b_i}\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o,\gamma_1|_{R_2},\boldsymbol{s}^1|_{R_2,B\sqcup\{i_B^{r-2}\}}}\\
&+\frac{1}{2}\left\langle \tau_{d_{i_1}}^{a_1-1}\prod_{i\in I\setminus\{i_1\}}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^{r-2}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}.
\end{aligned}\tag{5.21}$$

注意，由归纳假设 $\sum_{i\in R_2} d_i \le D_0$，(5.21) 中每个亏格一因子都与序的任何选择或典范多截面无关，因此我们可以将 (5.21) 改写为

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{R_1\sqcup R_2=I\setminus\{i_1\}\\ -1\le a\le r-2}}\left\langle \tau_0^a\tau_{d_{i_1}}^{a_{i_1}-1}\prod_{i\in R_1}\tau_{d_i}^{a_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},\mathrm{ext}}\left\langle \tau_0^{r-2-a}\prod_{i\in R_2}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o}\\
&+\sum_{\substack{R_1\sqcup R_2=I\setminus\{i_1\}\\ T_1\sqcup T_2=B}}\left\langle \tau_{d_{i_1}}^{a_{i_1}-1}\prod_{i\in R_1}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in T_1}\sigma^{b_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}\left\langle \prod_{i\in R_2}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^{r-2}\prod_{i\in T_2}\sigma^{b_i}\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o}\\
&+\frac{1}{2}\left\langle \tau_{d_{i_1}}^{a_1-1}\prod_{i\in I\setminus\{i_1\}}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^{r-2}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}.
\end{aligned}\tag{5.22}$$

这意味着关联函数 $\left\langle \tau_{d_{i_1}}^{a_{i_1}}\prod_{i\in I\setminus\{i_1\}}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_{\quad o\,\gamma_1\,\boldsymbol{s}^1,\ ,}^{1,r}$ 与 $\boldsymbol{s}^1$ 的选择无关。请注意，目前它仍然依赖于 γ_1，因为 (5.22) 中的 i_1 选为 $i_1\overset{1}{=}\gamma_1(I)$。

我们还可以取 $i_2:=\gamma_2(I)$ 并将关联函数 $\left\langle \tau_{d_{i_2}}^{a_{i_2}}\prod_{i\in I\setminus\{i_2\}}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_{r,o,\gamma_2,\boldsymbol{s}^2 1}^{\quad 1}$

利用 (5.1) 将 (5.18) 右侧写为

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{R_1\sqcup R_2=I\setminus\{i_2\}\\ -1\le a\le r-2}}\left\langle \tau_0^a\tau_{d_{i_2}}^{a_{i_2}-1}\prod_{i\in R_1}\tau_{d_i}^{a_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},\mathrm{ext}}\left\langle \tau_0^{r-2-a}\prod_{i\in R_2}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o}\\
&+\sum_{\substack{R_1\sqcup R_2=I\setminus\{i_2\}\\ T_1\sqcup T_2=B}}\left\langle \tau_{d_{i_2}}^{a_{i_2}-1}\prod_{i\in R_1}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in T_1}\sigma^{b_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o}\left\langle \prod_{i\in R_2}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^{r-2}\prod_{i\in T_2}\sigma^{b_i}\right\rangle_1^{\frac{1}{r},o} \qquad (5.23)\\
&+\frac{1}{2}\left\langle \tau_{d_{i_2}}^{a_{i_2}-1}\prod_{i\in I\setminus\{i_2\}}\tau_{d_i}^{a_i}\sigma^{r-2}\prod_{i\in B}\sigma^{b_i}\right\rangle_0^{\frac{1}{r},o},
\end{aligned}$$

它只取决于 $i_2=\gamma_2(I)$。因此，当 $\gamma_1(I)=\gamma_2(I)$ 时，(5.18) 得证。

为完成证明，我们需要证明，即使 $i_1=\gamma_1(I)\neq\gamma_2(I)=i_2$，(5.22) 仍与 (5.23) 一致。具体做法是，分别对 (5.22) 和 (5.23) 中的闭扩展关联函数、开零亏格关联函数和开一亏格关联函数应用拓扑递归关系 (2.28)、(4.8) 和 (5.19)，如下所示。

- 对于 (5.22) 中的闭扩展关联函数 $\left\langle \tau_0^a\tau_{d_{i_1}}^{a_{i_1}-1}\prod_{i\in R_1}\tau_{d_i}^{a_i}\right\rangle_{,0}^{1/r,\ \mathrm{ext}}$，若 $i_2\notin R_1$，则保持不变；若 $i_2\in R_1$，则针对 $(i_2,\{i_1,i_I^a\})$ 应用 (2.28)，其中 i_I^a 是关联函数中对应于 τ_0^a 的内部尾。
- 对于 (5.22) 中形如 $\left\langle \tau_{d_{i_1}}^{a_{i_1}-1}\prod_{i\in I'}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in B'}\sigma^{b_i}\right\rangle_{,0}^{1/r,\ o}$ 的零亏格开关联函数，若 $i_2\notin I'$，则保持不变；若 $i_2\in I'$，则对 (i_2,i_1) 应用 (4.8)。
- 对于 (5.22) 中形如 $\left\langle \prod_{i\in I'}\tau_{d_i}^{a_i}\prod_{i\in B'}\sigma^{b_i}\right\rangle_{,1}^{1/r,\ o}$ 的亏格一开关联函数，若 $i_2\notin I'$，则保持不变；若 $i_2\in I'$，则对 i_2 应用 (5.19)。注意，根据归纳假设，此情形下 (5.19) 已经得到证明。

将这些关联函数替换为应用 TRR 后得到的结果，我们便得到 (5.22) 的一个新表达式。注意，在该表达式中，i_1 和 i_2 是对称的。

交换 i_1 和 i_2 的角色后，我们也可以用相同的方法对 (5.23) 中的关联函数应用 TRR。这样便得到 (5.23) 的一个新表达式，它与 (5.22) 的新表达式完全相同。这就证明了 (5.18)。

□

5.3 定理 1.5 和 1.6 的证明

定理 *1.5* 的证明。文献 [7, §3.4] 已证明，(1.14) 右端满足开 TRR，即定理 1.4。TRR 显然确定了 ϕ_1，的所有系数，因此定理 1.5 由定理 1.4 得证。

□

定理 *1.6* 的证明。文献 [7, §3.3] 已证明，猜想 1 给出的猜想性全亏格势满足开弦方程和稀释子方程。由于我们已在定理 1.5 中证明了这一猜想对 $g=1$，成立，因此这些方程确实适用于开r-旋柱面理论。

□

6 命题 4.10 的证明

在本节中，我们构造一个 γ典范多截面（定义 4.9），其定义在

$$E=\mathcal{W}\oplus\bigoplus_{i\in I}\mathbb{L}_i^{\oplus d_i}\to\overline{\mathcal{PM}}_{1,B,I}^{1/r,0}$$

集合 $I^{d>0}=\{i\in I$ 上任意序为 γ 的情形：$d_i\geq 1\}$。这将证明 $g=1$情形下的命题 4.10。请注意，$g=0$ 情形已包含在命题 4.16 中。

6.1 在 γ上构造 $\mathcal{PM}^{1/r}_{1,B,,I}$

根据定义 4.9 中的第 6 项，我们需要为每个亏格一 $\Gamma\in V(\boldsymbol{G})$、$\boldsymbol{G}\in \mathsf{sGPI}^{r,0}_{1,B,,,I}$构造一个 $\gamma|_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$-温和扰动 TRR。本小节将针对以下情形构造这样的扰动：$\boldsymbol{G}$ 只有一个顶点 Γ，它是一个带有内部与边界标记 I 和 B 的光滑分次 r-spin 图。换言之，我们将构造一个多截面 $\mathcal{W}\oplus\bigoplus_{i\in I}\mathbb{L}_i^{\oplus d_i}\to\mathcal{PM}^{1/r}_{1,B,,I}$，因为 $\mathcal{PM}^{1/r}_{1,B,,I}$ 的每个连通分支都只是这类 Γ中的一个 $\mathcal{PM}_\Gamma$。注意，在这些情形下，我们有 $\hat{}\mathcal{B}\Gamma=\Gamma$ 和 $I^{d>0}\subseteq T^I(\hat{}\mathcal{B}\Gamma)$，因此为简便起见，可以将 $\gamma|_{\hat{}\mathcal{B}\Gamma}$记作 γ。

$\mathcal{W}\oplus\bigoplus_{i\in I}\mathbb{L}_i^{\oplus d_i}\to\mathcal{PM}^{1/r}_{1,B,,I}$ 的多截面具有如下形式

$$\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}\oplus\bigoplus_{i\in I}\bigoplus_{j=1}^{d_i}s_i^j$$

其中，$\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}$ 是 $\mathcal{W}$ 的多截面，且每个 s_i^j 都是 $\mathbb{L}_i$的多截面。我们将先构造$\mathcal{W}$部分 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}$，然后按以下顺序逐一构造 $\mathbb{L}$部分 s_i^j

$$s^1_{\gamma(1)},s^2_{\gamma(1)},\dots,s^{d_{\gamma(1)}}_{\gamma(1)},s^1_{\gamma(2)},\dots,s^{d_{\gamma(2)}}_{\gamma(2)},\dots,s^1_{\gamma(|I^{d>0}|)},\dots,s^{d_{\gamma(|I^{d>0}|)}}_{\gamma(|I^{d>0}|)},$$

其中，我们将 γ视为一个双射 $\gamma\colon\{1,2,\dots,|I^{d>0}|\}\to I^{d>0}$。

记号 6.1。我们用$G^*_{1,B,I}$ 表示满足 $\mathcal{PM}_\Delta\subseteq\mathcal{PM}^{1/r}_{1,B,I}$ 和 $\mathcal{PM}_\Delta\neq\emptyset$ 条件且没有非分离内部边的分次 r-旋图 Δ的集合（因此 Δ 没有正边界边）。注意，$\Delta\in G^*_{1,B,I}$ 中的每个零亏格顶点都有自然的有根或双根结构（见注 2.2）。我们用$\mathcal{V}^{root}_{1,B,I}$ 表示所有图$\Delta\in G^*_{1,B,I}$ 的顶点（视为单顶点图）构成的集合；这些图是在遗忘一组（可能为空的）非根零扭非法半边之后得到的。我们还用$\mathcal{V}_{1,B,I}$ 表示所有图$\Delta\in G^*_{1,B,I}$ 的顶点构成的集合；这些图是在遗忘开零亏格顶点的有根或双根结构以及任意一组零扭非法半边之后得到的。

6.1.1 TRR 的 γ-tame 扰动的 $\mathcal{W}$ 部分的构造

我们首先构造满足以下要求的 $\mathcal{W}$ 部分 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}$。

1. 对于每个图 $\Delta\in G^*_{1,B,I}$，我们要求 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_\Delta$（即 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}$ 在 $\mathcal{PM}_\Delta$上的限制）具有如下形式

$$\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_\Delta=\boxplus_{u\in V^O(\Delta)}\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_u\maltese\boxtimes_{u\in V^C(\Delta)}\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_u,\tag{6.1}$$

其中，对于 $u\in V^C(\Delta)$，$\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_u$ 是 $\mathcal{W}_u\to\mathcal{R}_u$ 的相容多重截面（见第 2.2.4 节），且 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_u$ 作为 $\mathcal{W}_u\to\mathcal{M}_u$ 的多重截面是横截的；对于 $u\in V^O(\Delta)$，$\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_u$ 是 $\mathcal{W}_u\to\mathcal{PM}_u$ 的横截多重截面。回想一下，除非 u 是闭的且具有扭曲为 -1 的锚点，否则我们有 $\mathcal{R}_u=\mathcal{M}_u$，并且 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_u=\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_u$ 是 $\mathcal{W}_u\to\mathcal{PM}_u$ 的横截多重截面。

2. 对于 $u\in V^O(\Delta)$，我们将通过遗忘所有零扭非法半边得到的（单顶点）图记为 $\mathcal{B}u$。该多重截面是通过遗忘态射 $\mathcal{PM}_u\to\mathcal{PM}_{\mathcal{B}u}$ 从丛 $\mathcal{W}_{\mathcal{B}u}\to\mathcal{PM}_{\mathcal{B}u}$ 的多重截面 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{B}u}$ 拉回得到的。

3. 如果 $u\in V^O(\Delta)$ 是零亏格，我们进一步要求 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{B}u}$ 在 BCT 意义下为正 .

我们将以一致的方式为所有 $u \in \mathcal{V}_{1、B、I}$ 构造多截面 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{B}u}$（因此也构造 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_{u}$）。我们只在 $\mathcal{B}u$ 稳定时这样做，因为否则 $\mathcal{W}_u$ 的秩为零。

我们从 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{B}u}$ 遗忘（闭或开）零亏格 u 开始。注意，这种多截面在 BCT 意义下是特殊典范 的，它们通过 [4,§6.2] 中的归纳过程构造。

在构造了 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{B}u}$ 遗忘零亏格 u之后，我们现在构造 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{B}u}$ 遗忘亏格一开 u。我们按 $\mathcal{PM}_{\mathcal{B}u}$ 的维数归纳。假设我们已经为所有维数为 $\dim \mathcal{PM}_{\mathcal{B}u} \leq n-1$ 的开零亏格 u 构造了 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{B}u}$ 遗忘。当 $\dim \mathcal{PM}_{\mathcal{B}u} = n$ 时，对于所有 $\Delta \in \partial^* \mathcal{B}u$，受限多截面 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_{\Delta} := \boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{B}u}|_{\mathcal{PM}_{\Delta}}$ 由 (6.1) 确定；由于归纳过程，这些受限多截面彼此相容，即可以粘合成 $\bigcup_{\overline{\Delta \in \partial^* \mathcal{B}u}} \mathcal{PM}_{\Delta} \subset \mathcal{PM}_{\mathcal{B}u}$ 上的一个多截面。我们利用引理 6.2 将这个粘合后的多截面延拓为整个 $\mathcal{PM}_{\mathcal{B}u}$ 上的横截多截面，从而得到 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{B}u}$。

引理 6.2。设 M 为一个光滑轨形，$E \to M$ 为一个向量丛。对于横截相交的光滑子轨形 S_1、S_2、$\ldots S_k \subset M$，假设 s 是 $E \to \bigcup_{i=1}^k S_i$ 的一个截面，且对于每个子集 $J \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$，限制 $s|_{\bigcap_{j \in J} S_j}$ 都是横截的，则我们可以将 s 延拓为整个 M 上的横截截面。

证明。将 s 延拓到 $\bigcup_{i=1}^k S_i$ 的一个足够小的邻域上的任意延拓都是横截的。然后，我们将其延拓为 M 上的整体截面，并在远离 $\bigcup_{i=1}^k S_j$ 的地方进行扰动，使其变为横截的。 □

6.1.2 $\mathbb{L}$-部分的 γ-温和扰动的构造（TRR）

现在我们逐一构造多截面 s_i^j。为简化记号，与定义 4.6 一样，我们将这些多截面称为

$$s^1_{\gamma(1)}, s^2_{\gamma(1)}, \ldots, s^{d_{\gamma(1)}}_{\gamma(1)}, s^1_{\gamma(2)}, \ldots, s^{d_{\gamma(2)}}_{\gamma(2)}, \ldots, s^1_{\gamma(|I^{d>0}|)}, \ldots, s^{d_{\gamma(|I^{d>0}|)}}_{\gamma(|I^{d>0}|)}$$

as

$$t_1, t_2, \ldots, t_D,$$

其中 $D = \sum_{i \in I} d_i$，我们将 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}$ 称为 t_0。我们还将 T_s 记作：$= \bigoplus_{j=0}^s t_j$. 我们定义映射 ν: $\{1, 2, \ldots, D\} \to I^{d>0}$，使得 t_j 是 $\mathbb{L}_{\nu(j)}$的多截面。

我们构造满足以下要求的多截面 t_j，这些要求比定义 4.6 中的要求更强。

1. 对于每个图 $\Delta \in G^*_{1,\ B,\ I}$ 和 $1 \leq j \leq D$，我们要求 $t_{j,\ \Delta}$（t_j 在$\mathcal{PM}_{\Delta}$上的限制）具有如下形式

$$t_{j,\Delta} = \pi^*_{\Delta \to u^{\Delta}_{\nu(j)}} t_{j,u^{\Delta}_{\nu(j)}}, \tag{6.2}$$

其中 $u^{\Delta}_{\nu(j)}$ 是 Δ 中包含内部标记 $\nu(j) \in I$的唯一顶点，而 $t_{j,\ u^{\Delta}_{\nu(j)}}$是 $\mathbb{L}_{\nu(j)} \to \mathcal{PM}_{u^{\Delta}_{\nu(j)}}$ 的多截面。注意，如果我们形式上将不包含 $\nu(j)$ 的顶点$u \in V(\Delta)$所对应的 $t_{j,\ u} = 0$ 设为秩零丛的一个截面，那么我们可以写成

$$t_{j,\Delta} = \boxplus_{u \in V(\Delta)} t_{j,u}. \tag{6.3}$$

2. 如果 $u^{\Delta}_{\nu(j)}$ 是开，则我们进一步要求

$$t_{j,\nu(j)} = \mathrm{For}^*_{u^{\Delta}_{\nu(j)} \to \hat{\mathcal{B}} u^{\Delta}_{\nu(j)}} t_{j,\hat{\mathcal{B}} u^{\Delta}_{\nu(j)}} \tag{6.4}$$

作为 $\mathbb{L}_{j,\ u^{\Delta}_{\nu(j)}} \cong$ 遗忘$^*_{u^{\Delta}_{\nu(j)} \to \hat{}\mathcal{B} u^{\Delta}_{\nu(j)}} \mathbb{L}_{j,\ \hat{\mathcal{B}} u^{\Delta}_{\nu(j)}}$（见注 3.1）上的多截面，其中 $\hat{}\mathcal{B}u^{\Delta}_{\nu(j)}$ 是通过遗忘$u^{\Delta}_{\nu(j)}$ 的所有扭曲度为零的非法边界半边（根除外）得到的单顶点图，而遗忘$_{u^{\Delta}_{\nu(j)} \to \hat{} \mathcal{B} u^{\Delta}_{\nu(j)}}$：$\mathcal{PM}_{u^{\Delta}_{\nu(j)}} \to \mathcal{PM}_{\hat{}\mathcal{B} u^{\Delta}_{\nu(j)}}$ 是相应的遗忘态射。注意，$\overline{\hat{}\mathcal{B}u^{\Delta}_{\nu(j)}}$ 总是稳定的，因为它有一个内部标记ν（j）；若其为零亏格，则至少有一个根。

3. 对所有$\Delta \in G^{*}_{1,\ B,\ I}$、所有 $u \in V$（Δ）以及 $0 \le j \le D$，多截面

$$T_{j,u} := \overline{\boldsymbol{s}_u^{\mathcal{W}}} \oplus t_{1,u} \oplus t_{2,u} \oplus \cdots \oplus t_{j,u}$$

of

$$E_{j,u} := \mathcal{W}_u \oplus \bigoplus_{i \in T^I(u) \cap \nu(\{1,2,\ldots,j\})} \mathbb{L}_i \to \overline{\mathcal{PM}_u}$$

与零横截。

4. 对于上述所有开顶点 $u \in V(\Delta)$，若 $\nu(j) \in T^I(u)$，则存在零点集的一个开邻域$K_{j,\ u}$（参见观察 3.4）$\left(\bigcup_{\Lambda \in \mathcal{G}_{\nu(j)}(u)} \mathcal{M}_\Lambda\right) \cap \mathcal{PM}_u \mathfrak{s}_{\nu(j),\ u}$，它包含于 $\overline{\mathcal{PM}_u}$ 中，使得对于任意 $p \in \mathcal{PM}_u \setminus K_{j,\ u}$，都有 $\overline{t_{j,\ u}(p)} = \mathfrak{s}_{\nu(j),\ u}(p)$，其中 $\mathfrak{s}_{\nu(j),\ u}$ 是 §3.2 中定义的 $\mathbb{L}_{\nu(j)} \to \mathcal{PM}_u$ 的 TRR 多截面（若 u 为零亏格，则相对于 u 的有根或双根结构）。

5. 若对于开顶点 $u \in \overline{V(\Delta)}$，有秩 $E_{s,\ u}$ >维数 $\mathcal{PM}_u$，且 $\nu(s) \in T^I(u)$，则 $T_{s-1,\ u}$在 $K_{s,\ u} \subseteq \mathcal{PM}_u$ 上处处不为零。

6. 若对于一个开的一亏格顶点 $u \in V(\Delta)$ 和 $\nu(s) \in T^I(u)$，$\operatorname{rank} E_{s,\ u} = \dim \mathcal{PM}_u$，则$T_{s-1,\ u}$ 在 $K_{s,\ u} \subseteq \mathcal{PM}_u$ 上处处不为零；因此，在这种情况下，$T_{s,\ u} = T_{j-1,\ u} \oplus t_{j,\ u}$ 在 $\mathcal{PM}_u$ 上处处不为零。

注 6.3。对于任意顶点 $u \in \mathcal{V}^{root}_{1\ B\ ,,I}$，若 $\operatorname{rank} E_{s,\ u} > \dim \overline{\mathcal{PM}_u}$，则 $T_{s,\ u}$ 在 $\mathcal{PM}_u$上也处处不为零。这是第 3 项中横截性的一个推论。

注意到，由于我们设定了 $t_0 = T_0 = \boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}$，对于亏格一开 u，我们有 $T_{0,\ u} = \boldsymbol{s}_u^{\mathcal{W}}$；根据 (2.15)，它们已经（显然）满足第 6 项，因为对于所有开的一亏格顶点 u，我们都有 $\operatorname{rank} \mathcal{W}_u < \dim \overline{\mathcal{PM}_u}$。

假设我们已经构造了满足上述要求的 $t_0 = \boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}$，$t_1$、.....、$t_{j-1}$，现在我们构造 t_j。

步骤 1. 我们从构造 $t_{j,u}$（对于闭顶点 $u \in \mathcal{V}^{root}_{1\ B\ ,,I}$）开始。如果标记 $\nu(j) \in I$ 未附着于 u，则形式上将 $t_{j,u} = 0$ 视为秩零丛的一个截面。如果 $\nu(j) \in I \cap T^I(u)$，我们通过对 $\dim \mathcal{M}_u$ 作归纳来构造 $t_{j,u}$，使得：

- 对于任意 $\Delta \in \partial u$，(6.2) 均成立。
- 多截面 $T_{j,u} := \boldsymbol{s}_u^{\mathcal{W}} \oplus \overline{t_{1,u}} \oplus \overline{t_{2,u}} \oplus \cdots \oplus t_{j,u}$ 与零横截。

对于零维的 $\mathcal{M}_u$，我们取 $t_{j,u}$ 为任意一个非零多截面。

假设我们已经为所有维数为 $\dim \mathcal{M}_v \le n-1$ 的闭 $v \in \mathcal{V}^{root}_{1\ B\ ,,I}$ 构造了 $\overline{t_{j,v}}$，现在我们为维数为 $\dim \mathcal{M}_u = n$ 的 $u \in \mathcal{V}^{root}_{1\ B\ ,,I}$ 构造一个多截面 $t_{j,u}$。对于任意 $\Delta \in \partial u$，$t_{j,u}$ 在 $\mathcal{M}_\Delta$ 上的限制$t_{j,\Delta}$ 已由 (6.2) 以一致的方式确定：对于不同的 Δ_1 和 Δ_2，根据构造，我们有 $t_{j,\Delta_1}|_{\mathcal{M}_{\Delta_1} \cap \mathcal{M}_{\Delta_2}} = \overline{t_{j,\Delta_2}}|_{\mathcal{M}_{\Delta_1} \cap \mathcal{M}_{\Delta_2}}$。因此，多截面 $t_{j,u}$ 已在 $\bigcup_{\Delta \in \partial u} \mathcal{M}_\Delta \subset \mathcal{M}_u$上定义，接着我们使用引理 6.2 将其延拓为整个 $\mathcal{M}_u$ 上的横截多重截面 $t_{j,u}$。

步骤 2. 现在我们为开顶点 $u \in \mathcal{V}^{root}_{1\ B\ ,,I}$构造 $t_{j,u}$ 和 $K_{j,u}$。同样，如果标记$\nu(j) \in I$未附着于 u，我们形式上将 $t_{j,u} = 0$视为秩零丛的一个截面，这涵盖了 $\hat{}\mathcal{B}u$ 不稳定的所有情形。如果 $\nu(j) \in I \cap T^I(u)$（因此 $\hat{}\mathcal{B}u$ 稳定），我们构造$t_{j,u}$ 和$K_{j,u}$，使得：

- 对于任意 $\Delta \in \partial^* u$，(6.2) 和 (6.4) 均成立。
- 多截面 $T_{j,u} := \boldsymbol{s}_u^{\mathcal{W}} \oplus \overline{t_{1,u}} \oplus \overline{t_{2,u}} \oplus \cdots \oplus t_{j,u}$ 与零横截。

- 零点集 $\left(\bigcup_{\Lambda\in\mathcal{G}_{\nu^{(j)}}(u)}\mathcal{M}_\Lambda\right)\cap\mathcal{PM}_u$ 在$\mathcal{PM}_u$ 中的$\mathfrak{s}_{\nu(j)\,u}$ 的开邻域 $K_{j,u}$ 满足以下条件。

——

(a) 对于任意 $p\in\overline{\mathcal{PM}_u\setminus K_{j,u}}$，有 $t_{j,u}(p)=\mathfrak{s}_{\nu(j),u}(p)$。(b) $K_{j,u}=$遗忘$^{-1}_{u\to}\,\hat{}_{\mathcal{B}u}(K_{j,\hat{\mathcal{B}}u})$。(c) 对于任意 $\Delta\in\partial^*u$，若 $^{\pi_{\Delta\to u^\Delta_{\nu(j)}}}(p)\in K_{j,u^\Delta_{\nu(j)}}$[7] 对某个 $p\in\mathcal{PM}_\Delta$ 成立，则 $p\in\mathcal{PM}_\Delta\cap K_{j,u}\subseteq\mathcal{PM}_u$，其中 $u^\Delta_{\nu(j)}$ 是包含标记 $\nu(j)$ 的 Δ 的顶点；若 $u^\Delta_{\nu(j)}$ 是闭顶点，则取 $K_{j,u^\Delta_{\nu(j)}}=\mathcal{M}_{u^\Delta_{\nu(j)}}$。(d) 若 $\operatorname{rank}E_{j,u}>\dim\mathcal{PM}_u$，则对于任意 $p\in K_{j,u}$，有 $T_{j-1,u}(p)\neq0$。(e) 对于开的一亏格 u，若 $\operatorname{rank}E_{j,u}=\dim\mathcal{PM}_u$，则对于任意 $p\in K_{j,u}$，也有$T_{j-1,u}(p)\neq0$。因此，$T_{s,u}=T_{j-1,u}\oplus t_{j,u}$ 在 $\mathcal{PM}_u$ 上处处不为零。

——

——

我们通过对 $\dim\mathcal{PM}\,\hat{}_{\mathcal{B}u}$ 进行归纳，构造 $t_{j,\,\hat{}_{\mathcal{B}u}}$ 和 $K_{j,\,\hat{}_{\mathcal{B}u}}$（因此也构造 $t_{j,\,u}$ 和 $\overline{K_{j,\,u}}$）。对于零维 $\mathcal{PM}_{\hat{\mathcal{B}}u}$（这只会在 u 为零亏格时发生），我们只需取 $K_{j,\,u}=\emptyset$，因此 $t_{j,\,\hat{\mathcal{B}}u}=\mathfrak{s}_{\nu(j),\,\hat{}_{\mathcal{B}u}}$，$t_{j,\,u}=\mathfrak{s}_{\nu(j),\,u}$。

假设对于所有开（以及在步骤 1 中构造的闭）顶点 $v\in\mathcal{V}^{root}_{1\,B,\,,\,I}$（满足 $\dim\mathcal{M}\,\hat{}_{\mathcal{B}v}\le n-1$），我们已经构造了 $t_{j,\,\hat{\mathcal{B}}v}$ 和 $K_{j,\,\overline{\hat{\mathcal{B}}v}}$。现在我们为满足 $\dim\mathcal{M}\,\hat{}_{\mathcal{B}u}=n$ 的开 $u\in\mathcal{V}^{root}_{1\,B,\,,\,I}$ 构造 $t_{j,\,\hat{}_{\mathcal{B}u}}$ 和 $K_{j,\,\overline{\hat{}_{\mathcal{B}u}}}$。

我们首先构造集合 $K_{j,\,\hat{\mathcal{B}}u}$（从而也构造 $K_{j,\,u}$），使其满足条件 (c)、(d)，并且当亏格一 u 满足 $\operatorname{rank}E_{j,\,\mathcal{B}u}=\hat{}\dim\mathcal{PM}\,\hat{}_{\mathcal{B}u}$ 时，还满足条件 (e)。$K_{j,\,\hat{}_{\mathcal{B}u}}$ 应包含 $\mathcal{PM}_{\hat{\mathcal{B}}u}$ 中 $\mathfrak{s}_{\nu(j),\,\hat{}_{\mathcal{B}u}}$ 的零点集，以及由条件 (c) 确定的一些额外部分。我们将这类子空间的并定义为

$$\tilde{K}_{j,\hat{\mathcal{B}}u}:=\left(\bigcup_{\Lambda\in\mathcal{G}_{\nu(j)}(\hat{\mathcal{B}}u)}\overline{\mathcal{M}}_\Lambda\cap\overline{\mathcal{PM}}_{\hat{\mathcal{B}}u}\right)\cup\bigcup_{\Delta\in\partial^*\hat{\mathcal{B}}u}\{p\in\overline{\mathcal{PM}}_\Delta\subset\overline{\mathcal{PM}}_{\hat{\mathcal{B}}u}\colon\pi_{\Delta\to u^\Delta_{\nu(j)}}(p)\in K_{j,u^\Delta_{\nu(j)}}\}.$$

$\hat{}$在 $\mathcal{B}u$ 为零亏格且秩 $E_{j,\mathcal{B}u}\le\hat{}\dim\mathcal{PM}\,\hat{}_{\mathcal{B}u}$ 的情形下，我们可以取 $K_{j,u}$ 为 $K\,\hat{}_{\mathcal{B}u}$ 在 $\mathcal{PM}\,\hat{}_{\mathcal{B}u}$ 中的任意开邻域。在秩 $E_{j,\mathcal{B}u}>\hat{}\dim\mathcal{PM}\,\hat{}_{\mathcal{B}u}$ 的情形下（或秩 $E_{j,\mathcal{B}u}=\hat{}\dim\mathcal{PM}\,\hat{}_{\mathcal{B}u}\hat{}$ 且 $\mathcal{B}u$ 为亏格一开情形下），我们需要选取满足条件 (d) 或 (e) 的 $K_{j,\hat{\mathcal{B}}u}$。根据以下引理，这总是可以做到。

引理 6.4. 在秩 $E_{j,u}>\dim\mathcal{PM}_u$ 对任意开 $\overline{u,}$ 或 秩$E_{j,u}=\dim\mathcal{PM}_u$ 遗忘 $\tilde{}$亏格一开 $\overline{u,}$ 对于任意 $p\in K_{j,u}$，都有 $T_{j-1,u}(p)\neq0.$

证明。我们重点讨论秩$E_{j,u}=\dim\mathcal{PM}_u$ 且 u 为亏格一开情形。对于所有开 u，秩$E_{j,u}>\dim\mathcal{PM}_u$ 的情形，论证完全相同。

若 $p\in\mathcal{M}_\Lambda\cap\mathcal{PM}_u$ 遗忘图 $\Lambda\in\mathcal{G}_{\nu(j)}(u)$，则 Λ 由一个开一属顶点 $v_{\Lambda,\,o}$和一个闭亏格零顶点$v_{\Lambda,\,c}$组成。我们有

$$\dim\overline{\mathcal{PM}}_{v_{\Lambda,o}}+\dim\overline{\mathcal{M}}_{v_{\Lambda,c}}=\dim\overline{\mathcal{PM}}_u-2,$$

and

$$\operatorname{rank}E_{j-1,v_{\Lambda,o}}+\operatorname{rank}E_{j-1,v_{\Lambda,c}}=\operatorname{rank}E_{j-1,u}=\operatorname{rank}E_{j,u}-2.$$

那么秩 $E_{j,\,u}=$维数$\overline{\mathcal{PM}_u}$蕴含我们有以下两种情况之一

$$\operatorname{rank}E_{j-1,v_{\Lambda,o}}\ge\dim\overline{\mathcal{PM}}_{v_{\Lambda,o}}$$

[7]更准确地说，所谓 $^{\pi_{\Delta\to u^\Delta_{\nu(j)}}}(p)\in K_{j,\,u^\Delta_{\nu(j)}}$ 是指 p 属于粘合态射下 $K_{j,\,u^\Delta_{\nu(j)}}\times\prod_{v\in V(\Delta)\setminus\{u^\Delta_{\nu(j)}\}}\mathcal{PM}_v$ 的像。

这意味着 $T_{j-1,\ v_{\Lambda,\ o}}\left(\pi_{\Lambda\to v_{\Lambda,\ o}}(p)\right)\neq 0$ 根据归纳假设（或横截性），o
w r

$$\operatorname{rank} E_{j-1,v_{\Lambda,c}} > \dim \overline{\mathcal{PM}}_{v_{\Lambda,c}}$$

这意味着 $T_{j-1,\ v_{\Lambda,\ c}}\left(\pi_{\Lambda\to v_{\Lambda,\ c}}(p)\right)\neq 0$ 由横截性可知。无论如何，由 (6.1)、(6.2) 和引理 2.20 可得 $T_{j-1,\ u}(p)\ \neq 0$。

若 $p\in\overline{\mathcal{PM}}_\Delta$ 对某个 $\Delta\in\partial^* u$ 成立，且 $\pi_{\Delta\to u^\Delta_{\nu(j)}}(p)\in K_{j,\ u^\Delta_{\nu(j)}}$，则有

$$\sum_{v\in\Delta}\dim\overline{\mathcal{M}}_v=\dim\overline{\mathcal{PM}}_u-|E^B(\Delta)|-2|E^I(\Delta)|<\dim\overline{\mathcal{PM}}_u,$$

and

$$\operatorname{rank} E_{j,u^\Delta_{\nu(j)}}+\sum_{v\in V(\Delta)\setminus\{u^\Delta_{\nu(j)}\}}\operatorname{rank} E_{j-1,v}=\operatorname{rank} E_{j,u}.$$

注意，若 $u^\Delta_{\nu(j)}$ 是闭的，则我们处于 $\Delta\in\mathcal{G}_{\nu(j)}(u)$ 的情形，这已由前一种情况涵盖。因此，可以假设 $u^\Delta_{\nu(j)}$ 是开的；那么由秩$E_{j,\ u}$ =维可知，我们有以下两种情形之一：

$$\operatorname{rank} E_{j,u^\Delta_{\nu(j)}} > \dim \overline{\mathcal{PM}}_{u^\Delta_{\nu(j)}}$$

这意味着由归纳假设可得 $T_{j-1,\ u^\Delta_{\nu(j)}}\left(\pi_{\Delta\to u^\Delta_{\nu(j)}}(p)\right)\neq 0$，或者存在 $v\in V(\Delta)\setminus\{u^\Delta_{\nu(j)}\}$，使得

$$\operatorname{rank} E_{j-1,v} > \dim \overline{\mathcal{M}}_v$$

这意味着 $T_{j-1,\ v}(\pi_{\Delta\to v}(p))\ \neq 0$ 由横截性得到。无论如何，根据 (6.1)、(6.2) 和引理 2.20，我们有 $T_{j-1,\ u}(p)\ \neq 0$。 □

˜因此，我们可以取 $K_{j,\ \hat{}_{\mathcal{B}u}}$ 为 $K_{j,\ \hat{\mathcal{B}}u}$ 的一个足够小的开邻域，使得 $T_{j-1,\ \hat{}_{\mathcal{B}u}}(p)$ 不消失。

现在我们构造多截面 $t_{j,\hat{\mathcal{B}}u}$（因而也构造 $t_{j,u}$）。对于每个 $\hat{}_{\mathcal{B}u}$（其中 $\overline{\mathcal{PM}_\Delta}\subset\overline{\mathcal{PM}}$），我们根据 (6.2) 取 $t_{j,\hat{\mathcal{B}}u}$。在 $\mathcal{PM}\hat{}_{\mathcal{B}u}\setminus K_{j,\hat{}_{\mathcal{B}u}}$ 上，我们取 $t_{j,\hat{}_{\mathcal{B}u}}$ 为 $\mathfrak{s}_{\nu(j),\hat{}_{\mathcal{B}u}}$。根据 $t_{j,\hat{}_{\mathcal{B}v}}$ 和 $K\hat{}_{\mathcal{B}v}$ 的归纳构造，这些选择彼此相容。我们需要将这样的多截面延拓到整个 $\mathcal{PM}\hat{}_{\mathcal{B}u}$，使其与 $T_{j-1,\hat{\mathcal{B}}u}$ 的零点集横截。注意，根据归纳构造，将 $t_{j,\hat{}_{\mathcal{B}u}}$ 限制在 $\mathcal{PM}_\Delta\subset\mathcal{PM}\hat{}_{\mathcal{B}u}$ 上时，与 $T_{j-1,\hat{}_{\mathcal{B}u}}$ 的零点集横截；将其限制在 $\mathcal{PM}\hat{}_{\mathcal{B}u}\setminus K_{j,\hat{\mathcal{B}}u}$ 上时也如此（因为 $\mathfrak{s}_{\nu(j),\hat{}_{\mathcal{B}u}}$ 在 $K_{j,\hat{\mathcal{B}}u}$ 之外不消失）。因此，对于 $t_{j,\hat{}_{\mathcal{B}u}}$ 的任意延拓 $\tilde{t}_{j,\hat{}_{\mathcal{B}u}}$，存在一个包含 $\left(\mathcal{PM}\hat{}_{\mathcal{B}u}\setminus K_{j,\hat{\mathcal{B}}u}\right)\cup\bigcup_{\Delta\in\partial^*}\hat{}_{\mathcal{B}u}\mathcal{PM}_\Delta\subset\mathcal{PM}\hat{}_{\mathcal{B}u}$ 的开集 U，使得将 $\tilde{t}_{j,\hat{}_{\mathcal{B}u}}$ 限制在 U 上时，与 $T_{j-1,\hat{}_{\mathcal{B}u}}$ 的零点集横截。然后我们可以用一个支撑在 $\mathcal{PM}\hat{}_{\mathcal{B}u}\setminus U$ 中的截面对 $\tilde{t}_{j,\hat{}_{\mathcal{B}u}}$ 进行扰动，使其在整个 $\mathcal{PM}\hat{}_{\mathcal{B}u}$ 上与 $T_{j-1,\hat{\mathcal{B}}u}$ 的零点集横截。

6.2 在 γ上构造 ,, 的典范多截面

在本小节中，我们使用 §6.1 中构造的 γ-温和扰动 TRR，构造 $E=\mathcal{W}\oplus\bigoplus_{i\in I}\mathbb{L}_i^{\oplus d_i}\to\mathcal{PM}^{1/r}_{B,}$ 1 0 I,,的 γ-典范多截面。

按照定义 4.9 中的记号，为了保证定义 4.9 中的第 3 项和第 4 项，我们需要构造一个多截面 $\tilde{\boldsymbol{s}}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$，其定义在

$$E_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}=\mathcal{W}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}\oplus\bigoplus_{i\in I\cap T^I(\hat{\mathcal{B}}\Gamma)}\operatorname{For}^*_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma\to\mathcal{B}\Gamma}\mathbb{L}^{\oplus d_i}_{i,\mathcal{B}\Gamma}$$

对每个 $\Gamma\in V(\boldsymbol{G})$，以横截可分解的方式进行 $\boldsymbol{G}\in\mathrm{sGPI}^{r\ 0}_{1\ B,,,I}$。

注记 6.5. 注意，每个这样的（单顶点） r-旋图 Γ 都可以由某个（不一定唯一的）图 $\mathcal{P}\Gamma \in \mathcal{V}^{root}_{1\,B^{\prime},,I}$ 得到（见记号 6.1）：将 $\mathcal{P}\Gamma$ 的每个扭转为零的非法边界尾转变为插入的扭转为零的内部尾（即，点插入过程）。遗忘这些扭转为零的尾后，图 Γ与 $\mathcal{P}\Gamma$ 重合。

回顾一下（见 §2.4.3），$\mathcal{B}\Gamma$是从 $I^{PI}(\boldsymbol{G})\cap T^{I}(\Gamma)$ 中遗忘所有插入的内部尾后得到的图，而 $\hat{}\mathcal{B}\Gamma$是从 $I^{PI}_{sp^{\prime},1}(\boldsymbol{G}) \cap T^{I}(\Gamma)$ 中遗忘所有插入的内部尾后得到的图。这些记号与 §6.1.1 和 §6.1.2 中的记号（其中遗忘了扭转为零的非法边界尾）是一致的，具体而言，$I^{PI}(\boldsymbol{G})$ 中所有插入的内部尾都来自扭转为零的非法尾，而 $I^{PI}_{sp^{\prime},1}(\boldsymbol{G}) \subseteq I^{PI}(\boldsymbol{G})$ 对应于并非根的扭转为零的非法边界尾。

此外，对于任意 $\Lambda \in \partial^{*}\Gamma$ 以及任意 $u \in V(\Lambda)$，我们将从 Λ 或 u 中遗忘 $I^{PI}_{sp^{\prime},1}$ 中的所有内部尾，以及所有并非根的扭转为零的非法边界尾（即 点插入后位于 $I^{PI}_{sp^{\prime},1}$ 中）后得到的图记为 $\mathcal{B}\Lambda$ 或 $\mathcal{B}u$。注意，如果 $T^{I}(u) \cap I \neq \emptyset$，则 $\hat{}\mathcal{B}u$ 总是稳定的。我们还将从 Λ 或 u 中遗忘 I^{PI} 中的所有内部尾以及所有扭转为零的非法边界尾后得到的图记为 $\mathcal{B}\Lambda$ 或 $\mathcal{B}u$。

注意，我们总可以将 $\mathcal{B}u$ 视为 $\mathcal{V}_{1,B,I}$中的元素。如果 u 没有内部根（当 Γ为亏格一时，若 u 的半边位于 $RT(\Gamma)$中，或连接 u 与一个包含 $RT(\Gamma)$中尾的分支，则将这些半边视为根），我们也可以将 $\hat{}\mathcal{B}u$ 视为 $\mathcal{V}^{root}_{1\,B^{\prime},,I}$中的元素。

我们将 $\tilde{\boldsymbol{s}}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$ 分解为 $\mathcal{W}$-部分和 $\mathbb{L}$-部分，如 $\tilde{\boldsymbol{s}}_{\hat{}\mathcal{B}\Gamma} = \tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathcal{W}}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma} \oplus \tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathbb{L}}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$所示。若 $\mathcal{B}u$ 不稳定，则无需构造 $\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathcal{W}}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$，因为 $\mathcal{W}_{\hat{\mathcal{B}}u}$ 的秩为零。若 $\mathcal{B}u$ 稳定，我们只需令$\mathcal{W}$-部分 $\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathcal{W}}_{\hat{\mathcal{B}}u}$ 为

$$\hat{\boldsymbol{s}}^{\mathcal{W}}_{\hat{\mathcal{B}}u} := \mathrm{For}^{*}_{\hat{\mathcal{B}}u\to\mathcal{B}u}\, \boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{B}u}$$

作为 Witten 纤维丛的一个多截面。对于$^{*}_{\hat{\mathcal{B}}u\to\mathcal{B}u}\mathcal{W}_{\mathcal{B}u} \cong \mathcal{W}_{\hat{\mathcal{B}}u} \to \mathcal{PM}_{\hat{}\mathcal{B}u}$，其中$\overline{\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_{\mathcal{B}u}}$是将 $\mathcal{B}u$ 视为 $\mathcal{V}_{1,B,I}$ 中的元素后，按照注 6.5 在§6.1.1 中构造的 $\mathcal{W}_{\mathcal{B}u} \to \mathcal{PM}_{\mathcal{B}u}$ 的多截面。这样的选择将保证定义 4.9 中的第 5 项。

然后，我们需要为每个 Γ 构造 $\mathbb{L}$-部分 $\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathbb{L}}_{\hat{\mathcal{B}}\Gamma}$，使得 $\hat{}\mathcal{B}\Gamma$ 稳定（否则该丛的秩为零）。事实上，我们将构造一族多截面 $\{\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathbb{L}}_{j,v}\}$，其定义在

$$\mathrm{For}^{*}_{v\to\mathcal{B}v}\,\mathbb{L}_{\nu(j),\mathcal{B}v} \to \overline{\mathcal{PM}}_{v}$$

对每个 $v \in V(\mathcal{T}_{RT(\Gamma)\cap T^{I}(\Gamma)}\Delta)$，$\Delta \in \partial^{*}\hat{}\mathcal{B}\Gamma$, $\Gamma \in V(\boldsymbol{G})$，$\boldsymbol{G} \in \mathrm{sGPI}^{r\,0}_{1}{}_{,,B,I}$，
$1 \le j \le D = \sum_{i\in I} d_i\nu(j) \in T^{I}(v)$，其中 $\mathcal{T}_{RT(\Delta\cap T^{I}(\Delta))}\Delta$ 是取 $S = RT(\Gamma)\cap T^{I}(\Gamma)$时 §4.1 中定义的图，$\mathcal{B}v$是遗忘 $T^{I}(v) \cap I^{PI}(\boldsymbol{G})$ 中所有尾和不合法的扭转零半边所得的图，而ν：$\{1,2,\dots,D\} \to I^{d>0}$是 §6.1.2 中的同一个映射。根据 §4.1 中的构造，这样的 v总是稳定的。

$\hat{}$ 注意，每个亏格零顶点 $u \in V(\mathcal{B}\Gamma)$ 都有一个或两个半边作为根：当 Γ 为亏格一时，这些根由圆柱的拓扑结构确定，如注 2.2 所述；当 Γ 为亏格一时，则以类似方式由 $RT(\Gamma)$ 确定。此外，$v \in V(\mathcal{T}_{S}\Delta)$ 也有有根或双根结构：每当一个带有根的顶点被收缩时（通过收缩不稳定顶点构造 $\mathcal{T}_{S}\Delta$ 的方法见 §4.1），邻近的半边就会成为新的根（必要时先进行分离）。

集合 $\{\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathbb{L}}_{j,v}\}$ 将满足以下条件。

1. 对任意 $1 \le s \le D$，多截面

$$\bigoplus_{\substack{1\le j\le s\\ \nu(j)\in T^{I}(v)}} \tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathbb{L}}_{j,v}$$

当 v 为开时，限制在 $\mathcal{PM}_{\xi^{-1}(v)}$ 中 $\boldsymbol{s}^{\mathcal{W}}_{\xi^{-1}(v)}$ 的零点轨迹上时，与零横截（参见注$\overline{4.2}$）；而限制在以下零点轨迹上时，与零横截：

当 v 为闭时，$s^{\mathcal{W}}_{\xi^{-1}(v)}$ 在 $\mathcal{M}_v$ 中。这样便可保证满足定义 4.9 第 2 项和第 4 项中的横截性要求。

2. 若 v （当 v 为闭时，锚点除外）没有任何内部尾是内部根，则我们要求

$$\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathbb{L}}_{j,v} = t_{j,\xi^{-1}(v)}, \tag{6.5}$$

对于任意满足 j 使得 $\nu(j) \in T^I(v)$ 的 $t_{j,\,\xi^{-1}(v)}$，其中 $t_{j,\,\xi^{-1}(v)}$ 是 $\mathbb{L}_{\nu(j),\,\xi^{-1}(v)} \to \mathcal{PM}_{\xi^{-1}(v)} \cong \mathcal{PM}_v$，它是在 §6.1.2 中构造的，构造时将 $\xi^{-1}(v)$ 视为 $\mathcal{V}^{root}_{1\,B},_I$ 中的一个元素，如注 6.5 所述。注意，在此情况下，遗忘 $^*_{v\to\mathcal{B}v}\mathbb{L}_{\nu(j),\,\mathcal{B}v}$ 与 $\mathbb{L}_{\nu(j),\,\xi^{-1}(v)} = \mathbb{L}_{\nu(j),\,v}$ 重合。此要求将保证定义 4.9 中的第 6 项。

3. 对于任意 $\Lambda \in \partial^* v$，我们将 $S' = T^I(v) \cap RT(\Gamma)$ 记为 Γ 在 v 上的原始内部根集合（不包括收缩产生的新根）；我们要求 $\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathbb{L}}_{j,\,v}$ 在 $\mathcal{PM}_\Lambda \subseteq \mathcal{PM}_v$ 上的限制满足

$$\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathbb{L}}_{j,\Lambda} := \tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathbb{L}}_{j,v}|_{\overline{\mathcal{PM}}_\Lambda} = \mathrm{For}^*_{\Lambda\to\mathcal{T}_{S'}\Lambda}\,\pi^*_{\mathcal{T}_{S'}\Lambda\to w}\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathbb{L}}_{j,w} \tag{6.6}$$

作为……的多截面

$$\mathrm{For}^*_{v\to\mathrm{for}_{S'}(v)}\,\mathbb{L}_{\nu(j),\mathrm{for}_{S'}(v)}\big|_{\overline{\mathcal{PM}}_\Lambda} \cong \mathrm{For}^*_{\Lambda\to\mathcal{T}_{S'}\Lambda}\,\pi^*_{\mathcal{T}_{S'}\Lambda\to w}\,\mathrm{For}^*_{w\to\mathcal{B}w}\,\mathbb{L}_{\nu(j),\mathcal{B}w} \to \overline{\mathcal{PM}}_\Lambda,$$

其中，$w \in V(\mathcal{T}_{S'}\Lambda)$ 是 $\mathcal{T}_{S'}\Lambda$ 的唯一顶点，使得 $\nu(j) \in T^I(w)$。这将保证定义 4.9 中的第 1 项和第 4 项。

类似于前面的小节，我们通过对 j 和 $\dim \mathcal{PM}_v$ 进行归纳来构造 $\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathbb{L}}_{j,\,v}$。

假设我们已为所有 $s < j$ 和任意 w 构造了 $\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathbb{L}}_{s,\,w}$，以及为所有维数为 $\mathcal{PM}_w \le n$ 的 w 构造了 $s = j$，并且满足 (6.5) 和 (6.6)。现在，我们为一个维数为 $\mathcal{PM}_v = n+1$ 的 v 构造 $\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathbb{L}}_{j,\,v}$。注意，(6.6) 已经确定了 $\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathbb{L}}_{j,\,v}$ 在……上的限制

$$\bigcup_{\Lambda\in\partial^* v} \overline{\mathcal{PM}}_\Lambda \subset \overline{\mathcal{PM}}_v,$$

我们需要将这样的多截面延拓到整个 $\mathcal{PM}_v$ 上。

若 v 的所有内部尾（当 v 为闭合时，锚点除外）都不是内部根，则根据 (6.5)，我们必须取 $\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathbb{L}}_{j,v}$。注意，在这种情况下，对于 (6.6) 右侧出现的所有 $w \in V(\mathcal{T}_{S'}\Lambda)$，$w$ 也没有内部根（当 w 为闭合时，锚点除外），这意味着 $\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathbb{L}}_{j,w}$ 同样由 (6.5) 确定。因此，根据 (6.2) 和 (6.4)，在此情况下 (6.5) 与 (6.6) 相容，因为 $S' = \emptyset$。在这种情况下，$\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathbb{L}}_{j,v}$ 在零点轨迹上的横截性，等价于 §6.1.2 中多截面 $T_{j,v}$ 或 $T_{j,v}$ 的横截性。

若 v 至少有一个非锚点的内部根，我们将 $Z \subseteq \mathcal{PM}_v$ 记作 $\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathcal{W}}_v$ 的零点轨迹，或记作 $\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathcal{W}}_v$ 与 $\bigoplus_{\substack{1\le s\le j-1\\ \nu\,s\,\in T^I\,v\,()()}} \tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathbb{L}}_{s,v}$ 的直和；我们先延拓 $\tilde{\boldsymbol{s}}^{\mathbb{L}}_{j,\,v}$ 到 $Z \cap \bigcup_{\Lambda\in\partial^* v}\overline{\mathcal{PM}}_\Lambda \subset \overline{\mathcal{PM}}_v$（根据归纳假设以及遗忘 $^{\Lambda\to\mathcal{T}_{S'}\Lambda}$ 是浸没这一事实，它是横截的），利用引理 6.2 将其延拓为 Z 上的横截多重截面，然后再将其延拓为整个 $\mathcal{PM}_v$ 上的任意光滑多重截面。

参考文献

[1] A. Alexandrov、A. Basalaev 和 A. Buryak。《各属开后代势的构造》。《国际数学研究通知》，2023年(17):14840–14889，2023年。

[2] M. Bertola 和 D. Yang。扩展的 r-约化 Kadomtsev-Petviashvili 层级的配分函数。《物理学杂志 A》，48(19):195205，20，2015年。

[3] A. Buryak。KdV 层级的开交数与波函数。莫斯科数学杂志，16(1):27–44，2016年。[4] A. Buryak、E. Clader 和 R. J. Tessler。开 r-自旋理论 II：Witten 猜想关于 r-自旋圆盘的类比。即将在《微分几何杂志》发表，arXiv:1809.02536v4，2018年。[5] A. Buryak、E. Clader 和 R. J. Tessler。闭的扩展 r-自旋理论与 Gelfand-Dickey 波函数。《几何物理杂志》，137:132–153，2019年。[6] A. Buryak、E. Clader 和 R. J. Tessler。开 r-自旋理论 I：基础。《国际数学研究通知》，(14):10458–10532，2022年。[7] A. Buryak、E. Clader 和 R. J. Tessler。开 r-自旋理论 III：对高亏格情形的预测。《几何物理杂志》，192:论文编号 104960，12，2023年。[8] A. Buryak 和 R. J. Tessler。矩阵模型与 Witten 猜想的开类比的证明。《数学物理通讯》，353(3):1299–1328，2017年。[9] A. Buryak、A. N. Zernik、R. Pandharipande 和 R. J. Tessler。开 $\mathbb{CP}^1$ 后代理论 I：平稳扇区。《数学进展》，401:论文编号 108249，93，2022年。[10] H.-L. Chang、J. Li 和 W.-P. Li。通过余截面局部化构造 Witten 顶陈类。《数学发明》，200(3):1015–1063，2015年。[11] A. Chiodo。通过 K-理论构造 Witten 顶陈类。《代数几何杂志》，15(4):681–707，2006年。[12] R. Dijkgraaf 和 E. Witten。拓扑引力的发展。《国际现代物理杂志 A》，33(30):1830029，63，2018年。[13] C. Faber、S. Shadrin 和 D. Zvonkine。重言关系与 r-自旋 Witten 猜想。《巴黎高等师范学院科学年刊》(4)，43(4):621–658，2010年。[14] H. Fan、T. Jarvis 和 Y. Ruan。Witten 方程、镜像对称与量子奇点理论。《数学年刊》(2)，178(1):1–106，2013年。[15] O. B. Gomez 和 A. Buryak。一亏格中的开拓扑递归关系与可积系统。《高能物理学杂志》，2021(1):1–15，2021年。[16] M. Gross、T. L. Kelly 和 R. J. Tessler。开 r-自旋不变量的镜像对称。即将在《纯粹与应用数学季刊》发表，arXiv:2203.02423，2022年。[17] M. Gross、T. L. Kelly 和 R. J. Tessler。开 FJRW 理论与镜像对称。arXiv 预印本 arXiv:2203.02435，2022年。[18] K. Hori。私人通信。[19] K. Hori。 $N = 2$ 极小模型的边界重整化群流。载于《镜像对称 V》，AMS/IP 高等数学研究第38卷，第381–404页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2006年。[20] T. J. Jarvis、T. Kimura 和 A. Vaintrob。引力后代与高自旋曲线模空间。载于《受物理学启发的代数几何进展》（马萨诸塞州洛厄尔，2000年），当代数学第276卷，第167–177页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2001年。[21] M. Kontsevich。曲线模空间上的交叉理论与矩阵艾里函数。《数学物理通讯》，147(1):1–23，1992年。

[22] T. Mochizuki. 稳定 r-旋曲线模空间叠的虚拟类。数学物理通讯，264(1):1–40，2006年。[23] R. Pandharipande、J. P. Solomon 和 R. J. Tessler。圆盘模空间上的交理论、开放 KdV 与 Virasoro。几何与拓扑，28(6):2483–2567，2024年。[24] A. Polishchuk 和 A. Vaintrob。Witten 顶陈类的代数构造。载于受物理学启发的代数几何进展（马萨诸塞州洛厄尔，*2000*年），第276卷当代数学，第229–249页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2001年。[25] J. Solomon。开放 Gromov-Witten 势的一个微分方程。预印本，2007年10月。[26] J. P. Solomon 和 R. J. Tessler。未发表。[27] J. P. Solomon 和 R. J. Tessler。带边界分次黎曼曲面的模空间上的交理论。编写中。[28] J. P. Solomon 和 S. B. Tukachinsky。相对量子上同调。欧洲数学会杂志，2023年。[29] R. J. Tessler。编写中。[30] R. J. Tessler。开放引力后代类的组合公式。几何与拓扑，27(7):2497–2648，2023年。[31] R. J. Tessler 和 Y. Zhao。点插入技巧与开放 r-旋理论 I：模空间与定向。arXiv 预印本 arXiv:2310.13185，2023年。[32] R. J. Tessler 和 Y. Zhao。点插入技巧与开放 r-旋理论 II：零亏格交理论。arXiv 预印本 arXiv:2311.11779，2023年。[33] E. Witten。二维引力与模空间上的交理论。载于微分几何综述（马萨诸塞州剑桥，*1990*年），第243–310页。利哈伊大学，宾夕法尼亚州伯利恒，1991年。[34] E. Witten。与二维引力矩阵模型相关的代数几何。载于现代数学中的拓扑方法（纽约州石溪，*1991*年），第235–269页。Publish or Perish，得克萨斯州休斯敦，1993年。

R. J. Tessler:Department of Mathematics, Weizmann Institute of Science, POB 26, Rehovot 7610001, Israel*E-mail address*: ran.tessler@weizmann.ac.ilY. Zhao: Institut de Mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche, 75005 Paris, France*E-mail address*: yizhen.zhao@imj-prg.fr