arXiv:2601.04119v1 [math.NA] 7 Jan 2026

球面稳定采样的定量约束

¨MARTIN EHLER 和 KARLHEINZ GROCHENIG

ABSTRACT. 我们推导出满足 t阶 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式的单位球面 $\mathbb{S}^d$ 上采样测度 μ_t的定量体积约束。利用雅可比多项式的精确局部化估计，我们得到了自然尺度 t^{-1}下测地球的 μ_t-质量的显式上下界。文献中通常将常数保持为隐式形式，而我们特别强调给出完全显式的常数，因此所得结果具有真正的定量性。此外，这些界还给出了 Marcinkiewicz-Zygmund 采样集的 s维 Hausdorff 体积的定量约束，并特别给出了 Marcinkiewicz-Zygmund 曲线长度的最优下界。

1. INTRODUCTION

Marcinkiewicz-Zygmund 不等式常被称为“采样不等式”，是稳定采样的基础，参见 [12, 28] 及其中的参考文献。它们出现在数学的多个领域，有时名称各异。例如，在逼近理论中，它们也称为近似求积公式或近似 t-设计，并且是框架不等式的一种特殊类型。在复分析中，这些条件对应于 Logvinenko-Sereda 集和 Carleson 测度 [26]。

关于环面和球面 [21, 25, 30],，以及更一般的黎曼流形 [26, 27] 和度量测度空间 [9, 24]上的 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式，必要条件早已为人所知。然而，这些结果通常是定性的，相关常数要么未予明确说明 [3, 9, 26]，要么没有出现在密度表述中 [11, 13, 21, 27]。对于数值计算，明确的估计至关重要，尤其是在 d球面上，因为维数 d 的影响起着关键作用。

球面上 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式的若干定量充分条件已为人所知 [8, 10, 20, 23]。相比之下，必要条件的情况有所不同，其定量图景仍不完整。

在本文中，我们通过给出球面上的完全定量估计，并明确说明常数对维数的依赖，补全了这一图景。尽管这些结果建立在经典思想之上，并受到 [21, 22], 中发展出的定性密度框架的启发，但推导显式界确实颇具难度，因为许多标准论证会在关键步骤中略去常数。此外，针对曲线和一般 s 维采样集的定量约束构成了一项重要的新贡献，远远超出了经典的点采样框架。

T为精确陈述我们的结果，现引入必要的技术框架 k.
采样不等式。 设 Π_t 为次数不超过 t的球谐函数的 $\binom{t+d}{t} + \binom{t-1+d}{t-1}$维空间。给定球面 $\mathbb{S}^d$上的有限博雷尔测度 μ_t ，阶为 t （或针对 Π_t）的 Marcinkiewicz-Zygmund 下界和上界不等式对应于双边界

$$a\|f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^d)} \overset{\text{lower}}{\leq} \int_{\mathbb{S}^d} |f(x)|^2 \, d\mu_t(x) \overset{\text{upper}}{\leq} A\|f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^d)}, \qquad f \in \Pi_t. \tag{1}$$

此类不等式保证 μ_t 以稳定的方式对 Π_t 进行采样， [25], 且稳定性常数由 a和 A 控制。在相关的应用场景中， f 的函数值要么 (i) 在有限集合上采集，此时 μ_t 是离散测度；要么 (ii) supp μ_t 是一个 s维集合，且具有 $0 < s < d$。

曲线。 撇开病态情形不谈，球面 $\mathbb{S}^d$ 上的一维子集是曲线，沿曲线采样称为球面上的移动采样。它已成为基于点的求积公式的一种替代方案：信息沿移动的传感器轨迹采集，而非在离散位置采集 [4, 14, 15, 17, 29,33, 34]。此类曲线自然出现在扫描和传感应用中，包括卫星路径、无人机扫描路径和断层扫描。在此情形下，式 (1) 中的积分$\int_{\mathbb{S}^d} |f(x)|^2 \, d\mu_t(x)$变为沿曲线 γ_t 的归一化线积分，其权函数为 w_t,

$$\int_{\mathbb{S}^d} |f(x)|^2 \, d\mu_t(x) = \frac{1}{\ell(\gamma_t)} \int_{\gamma_t} |f|^2 w_t \, ,$$

其中 $\ell(\gamma_t)$ 表示 γ_t 的弧长。在特殊情形 $a = A = 1$ and $w_t \equiv 1$ 下，我们称其为球面 t-设计曲线 [5, 18, 35] ，而 Marcinkiewicz-Zygmund不等式 (1) 等价于球面上的求积公式。

正如我们在先前的工作 [5], 中所示，球面 t-设计曲线在 $\mathbb{S}^d$上的长度必须满足*

$$\ell(\gamma_t) \gtrsim t^{d-1} \, . \tag{2}$$

我们注意到 $\dim \Pi_t \asymp t^d$，因此该界还表明 $\ell(\gamma_t) \gtrsim \dim \Pi_t/t$。这一估计引出了一个问题：我们能否确定显式常数，以及类似的约束是否也适用于一般的 Marcinkiewicz-Zygmund 曲线和更高维的采样集。

问题。 我们受到两个问题的指引，尽管(2)提供了最初的动机，我们仍从更一般的问题开始：

（Q.1）：阶为 t 的 Marcinkiewicz-Zygmund 采样测度 μ_t 在分辨率尺度 t^{-1} 上能够集中到什么程度？换言之，半径为 $\mathcal{O}(t^{-1})$ 的球冠的最大 μ_t-测度是多少？

*如果 $f \leq Cg$，我们记作 $f \lesssim g$ 。如果 $\lesssim$ 和 $\gtrsim$ 都成立，则记作 $\asymp$。在某些情况下，写作 $f = \mathcal{O}(g)$ 表示 $f \lesssim g$ 更为方便，我们也会采用这一约定。其他领域的研究者会分别使用 Ω 和 Θ。

（Q.2）：Marcinkiewicz-Zygmund 不等式对具有固定豪斯多夫维数的采样集施加了哪些体积限制？具体而言，阶为 t的 Marcinkiewicz-Zygmund 采样集的最小 s维体积是多少；在 $s = 1$的情形下，其最小长度是多少？

解答。 虽然这些问题的定性解答已为人所知，但我们将针对这两个问题给出精确的定量估计，并提供显式常数。具体而言，我们证明，球面 t-设计曲线的定性长度约束 (2) 可推广至一般的 Marcinkiewicz-Zygmund 测度族。我们首次获得了 s 维采样集的定量界。更具体地说，我们给出以下解答：

(A.1) 每个满足 上 Marcinkiewicz-Zygmund不等式的测度 μ_t ，在尺度 t^{-1} 下，不能将过多的质量赋予半径为 r 的单个球冠 B_r ，

$$\mu_t(B_r) \le C_1 \frac{A}{\dim \Pi_t} \qquad \text{for } r \le C_2 t^{-1} .$$

常数 $C_1 = C_1(d)$ $C_2 = C_2(d)$ 仅取决于维数 d，并将在定理 4.1 中明确给出。特别地，在球面上，这为 [9, 定理 5.5 (a)] 中的一般估计提供了定量对应结果。

我们建议读者参阅 Marzo 和 Ortega-Cerd`a 的工作 [22] ，其中通过相对密度刻画了满足 Marcinkiewicz-Zygmund 上不等式的测度。尽管证明和结果确实相关，另请参见 [21], ，我们的重点是给出明确的常数。请注意，这些作者也将此类测度称为 Logvinenko-Sereda 测度，或称之为 Carleson 族。

(A.2a) 若 (γ_t, w_t) 是一条加权 Marcinkiewicz-Zygmund 曲线，且 $t \ge d \ge 2$，则其长度有如下下界

$$\ell(\gamma_t) \ge \frac{\dim \Pi_t}{t} \frac{\sqrt{d+2}}{4} \left(\frac{a}{A}\right)^{1+\frac{1}{2t}} .$$

由于 $\frac{\text{维数}\,\Pi_t}{t} \asymp t^{d-1}$，这一估计也回答了 Lindblad [19,第 6] 节提出的问题： t-设计曲线长度的下界是否适用于近似设计曲线。我们的结果不仅与 (2) 相符，还明确给出了其中涉及的常数及其对 Marcinkiewicz-Zygmund 常数和维数的依赖关系。

(A.2b) 设 $X_t \subseteq \mathbb{S}^d$ 是一个 s 维子集， w_t 是其对应的非负权函数。假设将积分替换为以下表达式时，(1) 中的上界不等式仍成立：

$$\int_{\mathbb{S}^d} |f(x)|^2 \, d\mu_t(x) = \frac{1}{h_s(X_t)} \int_{X_t} |f(x)|^2 w_t \, dh_s(x) ,$$

其中 h_s 是 s 维豪斯多夫测度。如果 $(X_t,\ w_t)$ 在单点处满足一个温和的 Ahlfors 正则条件，那么豪斯多夫体积

必须满足

$$h_s(X_t) \geq c\,\frac{\dim \Pi_t}{t^s}\,.$$

常数 c 在定理 6.1 中给出。对于点集，正则性条件自动满足；对于曲线，该条件则由下 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式保证，参见注释 6.2 和 6.3。

虽然 (A.1) 对 (Q.1) 给出了定量回答，但 (A.2) 解决了 (Q.2) 在曲线上的情形，甚至更一般地，适用于豪斯多夫维数为 s 的集合。由于 $\frac{\text{维数}\,\Pi_t}{t^s} \asymp t^{d-s}$，它将 (2) 扩展到了维数 s 的完整范围。此外，(A.2a) 在相差一个与维数相关的常数的意义下是最优的：存在 Marcinkiewicz-Zygmund 曲线γ_t，其长度满足 $\ell(\gamma_t) \asymp t^{d-1}$，见 [6, 19]。

基于定量局部化的证明。我们指出，文献 [5] 中对 (2) 的原始证明依赖于求积公式的精确性，无法推广到 Marcinkiewicz-Zygmund 测度。本文提出了一种新方法，其关键在于球谐函数再生核在自然尺度 t^{-1} 下的定量局部化原理；这一原理由雅可比多项式的显式估计得到。将这些局部化良好的核用作 Π_t 中的测试函数后，我们导出了上体积界 (A.1)。(A.2a) 和 (A.2b) 的证明则以 (A.1) 为基础。

在最后一部分，我们建立了与 (A.1) 互补的体积下界，并证明每个 Marcinkiewicz-Zygmund 测度 μ_t 都必须为每个球冠分配足够的质量，

$$\mu_t(B_R) \geq C_3 \frac{a}{\dim \Pi_t}\,, \qquad \text{for } R \geq C_4 t^{-1}\,, \tag{3}$$

其中常数 $C_3 = C_3(d)$ $C_4 = C_4(d)$ 在定理 7.2 中给出显式表达。特别地，这得到了 [9, 定理 5.5 (b)]，的部分结论，不过此处给出了球面上的显式常数。

界 (3) 和 (A.1) 控制了 Marcinkiewicz-Zygmund 测度的局部质量分布：(A.1) 防止质量集中，而 (3) 则排除了采样流形上的大空洞。综合来看，它们意味着 Marcinkiewicz-Zygmund 测度在尺度 t^{-1} 上定量地近似于归一化表面测度。然而，值得注意的是，常数 C_4 会随维数 d 快速增长，参见定理 7.2 中的 (44)。乍看之下，这或许令人不满意，但同样可以将其视为一个值得关注的难点，也是只有通过显式追踪常数才会出现的新问题。

对 (3) 的分析依赖于 Erd´elyi-Magnus-Nevai [7]关于雅可比多项式的深刻界估计。这些估计对于以所需精度控制相关核的非对角衰减至关重要，这也是核局部化的又一例证。

本文组织如下。 第2节介绍研究框架，并回顾以雅可比多项式 Π_t 表示的多项式空间再生核。第3节推导雅可比多项式的定量局部化估计。第4节将作为上 Marcinkiewicz-Zygmund不等式的推论，推导上体积界 (A1)

，并记录下 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式的一些基本推论。第 5 节确立加权 Marcinkiewicz-Zygmund 曲线长度的下界，而第 6 节讨论 s 维采样集。最后，第7.1节给出必要的非对角核估计，随后在第7.2节利用这些估计推导体积下界 (3)。

2. Preliminaries

本节固定记号，并总结关于球面上多项式子空间的基本事实。

2.1. 记号与球面几何。 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的标准内积记为 $x \cdot y$。它诱导出范数 $\|x\|^2 = x \cdot x$，因此单位球面为$\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}$。球面上的标准度量通过角度 $\phi \in [0, \pi]$ 来测量 x 与 y 在 $\mathbb{S}^d$ 中的距离，其中该角度满足 $\cos \phi = x \cdot y$。于是，球面上以 x 为中心、半径为 $r \in [0, \pi]$ 的闭球就是球冠

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{S}^d : x \cdot y \geq \cos r\}.$$

因此，当且仅当 x 与 y 之间的角度 ϕ 满足 $0 \leq \phi \leq r$时，$y \in B_r(x)$。

我们在 $\mathbb{S}^d$ 上赋予归一化表面测度，因此子集$S \subseteq \mathbb{S}^d$ 的体积可记为 $|S| = \int_S 1 dx$，其中 $|\mathbb{S}^d| = 1$。$f, g \in L^2(\mathbb{S}^d)$ 的内积写作 $\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{S}^d)} = \int_{\mathbb{S}^d} f(x) g(x) dx$，并诱导出范数$\|f\|_{L^2(\mathbb{S}^d)}$。

我们考虑的所有函数 f 都是球面多项式，下面总结次数为 t 的球面多项式空间的基本代数性质。

2.2. 球面上的多项式与再生核。子空间 $\Pi_t \subseteq L^2(\mathbb{S}^d)$由限制在球面上的、关于 $d+1$ 个变量且次数至多为 $t \in \mathbb{N}$ 的所有代数多项式组成。其维数为

$$\dim \Pi_t = \binom{d+t}{t} + \binom{d+t-1}{t-1} = \binom{d+t}{t} \frac{2t+d}{t+d}. \tag{4}$$

令 $k^t : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$ 表示 Π_t 的再生核。按照约定 $k_x^t(y) := k^t(x, y)$，该核可再生任意 $f \in \Pi_t$，即

$$f(x) = \langle f, k_x^t \rangle_{L^2(\mathbb{S}^d)}.$$

由于空间 Π_t 是正交不变的，因此其再生核 k^t 也是正交不变的。它可以表示为雅可比多项式 $P_t^{(\alpha,\beta)}$；这些多项式关于权函数 $(1-u)^\alpha (1+u)^\beta$ 在 $[-1, 1]$ 上正交，并通过 † 进行归一化

$$P_t^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{t+\alpha}{t}.$$

†我们采用二项式系数的伽马函数推广，并对实数 x, y 定义 $\binom{x}{y} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)}$，只要右端有限。

使用（重新）归一化的雅可比多项式

$$\widetilde{P}_t^{(\alpha,\beta)} := P_t^{(\alpha,\beta)} / P_t^{(\alpha,\beta)}(1)$$

对于参数 $(\alpha,\ \beta) = (\frac{d}{2},\ \frac{d}{2}-1)$，再生核有如下简洁表示

$$k^t(x,y) = \dim \Pi_t \, \widetilde{P}_t^{(\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)}(x\cdot y)\,, \qquad x,y\in\mathbb{S}^d\,, \tag{5}$$

参见 [30, (4.31)]。多项式 $k_x^t \in \Pi_t$ 的 L^2-范数为

$$\|k_x^t\|^2_{L^2(\mathbb{S}^d)} = \langle k_x^t, k_x^t\rangle_{L^2(\mathbb{S}^d)} = k^t(x,x) = \dim\Pi_t\,, \qquad \forall\, x\in\mathbb{S}^d\,. \tag{6}$$

有时直接使用归一化 Jacobi 多项式比使用 k^t 更方便

$$f^t(x,y) := \widetilde{P}_t^{(\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)}(x\cdot y) = \frac{k^t(x,y)}{\dim\Pi_t}$$

它满足 $f^t(x,\ x) = 1$，并且

$$\|f_x^t\|^2_{L^2(\mathbb{S}^d)} = \frac{1}{\dim\Pi_t}\,. \tag{7}$$

在确立了这些代数特征之后，我们现在转向 Jacobi 多项式的解析性质。

3. Localization of the Jacobi polynomials

本节将量化生成再生核 k^t of Π_t 的雅可比多项式的局部化性质，参见式 (5)。这些估计刻画了核在对角线附近的集中程度，并为后续各节建立的体积界提供关键的解析依据。尽管对于我们的目的并非严格必需，我们仍给出参数α,β取遍完整范围时的论证。

引理 3.1. 若 $\alpha\ge\beta>-1$ *and* $t\in\mathbb{N}$，则有

$$\left|\widetilde{P}_t^{(\alpha,\beta)}(\cos\phi) - 1\right| \le \frac{t\,(t+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+1)}\,\phi^2\,. \tag{8}$$

证明。当 $t=0$ 时，由于 $\widetilde{P}_0^{(\alpha,\beta)}\equiv 1$，该不等式显然成立。现在假设 $t\ge 1$ and 并定义函数 $p(\phi) = \widetilde{P}_t^{(\alpha,\beta)}(\cos\ \phi)$。微分学的中值定理给出

$$\begin{aligned} |p(\phi)-p(0)| &\le |\phi| \sup_{|\theta|\le|\phi|} |p'(\theta)| \\ &= |\phi| \sup_{|\theta|\le|\phi|} \left|\big(\widetilde{P}_t^{(\alpha,\beta)}\big)'(\cos\theta)\ \sin\theta\right|. \end{aligned}$$

由于 $p(0) = \widetilde{P}_t^{(\alpha,\beta)}(1) = 1$ 且 $|\sin\ \theta|\le|\theta|$，我们有

$$\left|\widetilde{P}_t^{(\alpha,\beta)}(\cos\phi) - 1\right| \le |\phi|^2 \sup_{|\theta|\le|\phi|} \left|\big(\widetilde{P}_t^{(\alpha,\beta)}\big)'(\cos\theta)\right|. \tag{9}$$

$P_t^{(\alpha,\beta)}$ 的导数是缩放后的雅可比多项式

$$\big(P_t^{(\alpha,\beta)}\big)' = \frac{t+\alpha+\beta+1}{2} P_{t-1}^{(\alpha+1,\beta+1)},$$

见 [32, 18.9.15]。若 $\alpha+1 \geq \beta+1 > -1$ 且 $\max(\alpha+1,\ \beta+1) \geq -\frac{1}{2}$，那么根据 [31, 定理 7.32.1],，$\big|P_{t-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}\big|$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值在 1 处取得，即

$$\max_{u\in[-1,1]} \big|P_{t-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(u)\big| = P_{t-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(1) = \binom{t+\alpha}{t-1}.$$

因此，归一化雅可比多项式的导数满足

$$\begin{aligned}\Big|\big(\widetilde{P}_t^{(\alpha,\beta)}\big)'(\cos\theta)\Big| &= \Big|\frac{1}{\binom{t+\alpha}{t}} \frac{t+\alpha+\beta+1}{2} P_{t-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\cos\theta)\Big| \\ &\leq \Big|\frac{(t+\alpha+\beta+1)\binom{t+\alpha}{t-1}}{2\binom{t+\alpha}{t}}\Big| \\ &= \Big|\frac{t\,(t+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+1)}\Big|.\end{aligned}$$

将此估计代入 (9)，即可得到结论 (8)。 ■

在 $(\alpha,\ \beta) = (\frac{d}{2},\ \frac{d}{2}-1)$ 的情形下，雅可比多项式诱导出再生核 $k^t(x,\ y) = \dim \Pi_t\, \widetilde{P}_{(\frac{d}{2},\ \frac{d}{2}-1)t}(x\cdot y)$，见 (5)。现在引入半径 r，使得对于所有角度 $\phi \leq r$，归一化雅可比多项式都保持在目标水平 ν 之上。

命题 3.2。令 $\nu \in (0,\ 1)$。若半径 $r = r(d,\ t,\ \nu) > 0$ 取为

$$r^2 = (1-\nu)\frac{(d+2)}{t(t+d)}, \tag{10}$$

则归一化 *Jacobi* 多项式满足下界

$$\widetilde{P}_t^{(\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)}(\cos\phi) \geq \nu \qquad \forall\, 0 \leq \phi \leq r\,.$$

该命题给出了对角线附近再生核 k^t 的一致下界，并表明自然尺度的阶为 t^{-1}。

证明。根据引理 3.1，通过将 $r > 0$ 取为方程的解，可得对于 $0 \leq \phi \leq r$，有 $\widetilde{P}_t^{(\alpha,\beta)}(\cos\ \phi) \geq \nu$

$$1 - \frac{t\,(t+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+1)}\, r^2 = \nu\,.$$

这将得到

$$r^2 = (1-\nu)\frac{2(\alpha+1)}{t(t+\alpha+\beta+1)},$$

且 $(\alpha,\beta) = (\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$ 得到 r，如式 (10) 所示。 ■

4. Consequences of Marcinkiewicz-Zygmund inequalities

本节提取 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式的定量推论。由此得到的质量和支集约束构成了后续各节中长度和体积估计的基础。

回顾一下，如果球面上的博雷尔测度 μ_t on the sphere $\mathbb{S}^d$ 满足存在常数 $a, A > 0$ 使得

$$a\|f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^d)} \overset{\text{lower}}{\leq} \int_{\mathbb{S}^d} |f(x)|^2 \, d\mu_t(x) \overset{\text{upper}}{\leq} A\|f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^d)} \qquad \text{for all } f \in \Pi_t \, .$$

我们将这些估计称为下 Marcinkiewicz-Zygmund不等式和上 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式。满足上不等式的测度在复分析中也称为 Carleson 测度。

4.1. 上 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式的推论。

对于满足上 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式的测度 μ_t，我们将推导出 $\mu_t\big(B_r(x)\big)$ 的上界。

这样的上界可以通过一个简单的想法推导出来：对于每个闭的非空子集 $S \subseteq \mathbb{S}^d$ 以及每个 $f \in \Pi_t$，以下不等式链成立：

$$\begin{aligned} \min_{y \in S} \left(|f(y)|^2\right) \mu_t(S) &\leq \int_S |f(y)|^2 \, d\mu_t(y) \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^d} |f(y)|^2 \, d\mu_t(y) \\ &\leq A\|f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^d)} \, , \end{aligned}$$

其中，最后一个估计来自上 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式。因此，体积 $\mu_t(S)$ 必须满足

$$\mu_t(S) \leq \frac{A\|f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^d)}}{\min_{y \in S} |f(y)|^2} \qquad \forall f \in \Pi_t \, . \tag{11}$$

右端与 μ_t 无关；如果代入一个在 S 中良好局部化的多项式 $f \in \Pi_t$，它或许能构成一个合理的界。自然的选择是球冠 $B_r(x)$，其中 S。

定理 4.1 (体积上界)。 设 $\nu \in (0,\ 1)$，并假设 μ_t 满足 t 阶的上 *Marcinkiewicz-Zygmund* 不等式。若半径 $r > 0$ 取为

$$r^2 = (1 - \nu)\frac{(d+2)}{t(t+d)} \, , \tag{12}$$

则体积上界

$$\mu_t\big(B_r(x)\big) \leq \frac{A}{\nu^2 \dim \Pi_t} \tag{13}$$

对所有 $x \in \mathbb{S}^d$ 均成立。

定理 (4.1) 可以从不同层面来理解。从 (12) 中提取出 ν 可得

$$\nu = 1 - r^2 \frac{t(t+d)}{d+2},$$

因此，上界就是

$$\mu_t\big(B_r(x)\big) \le \frac{A}{\dim \Pi_t} \frac{1}{(1 - r^2 \frac{t(t+d)}{d+2})^2}.$$

该不等式对所有满足 r 且 $\nu \in (0,\ 1)$ 的情形都成立，但只有当 r 较小或 ν 接近 1 时才有意义。取 $r = \rho\sqrt{d}/(2t)$ 后，右端被 A 维 $\Pi_t(1-2\rho^2)^{-2}$ 所界。因此，在尺度 $r \asymp t^{-1}$ 下，所得上体积界的阶为 A/t^d。这显著改进了第 6 节 [30, Section 6.5], 中的必要求积界；该节仅处理有限支撑测度的特殊情形，且没有给出显式常数。我们的结果适用于范围广得多的测度论情形，只需用到单侧的上 Marcinkiewicz-Zygmund不等式，并给出了完全定量的界。

证明基于选取核 $k_x^t = \dim\ \Pi_t \widetilde{P}_{(\frac{d}{2},\ \frac{d}{2}-1)t}(x\cdot y)$，或等价地，选取雅可比多项式 $f_x^t(y) = \widetilde{P}_{(\frac{d}{2},\ \frac{d}{2}-1)t}(x \cdot y)$ 作为 (11) 的右端。

证明。 设 $f^t(x,y) = \widetilde{P}_{(\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)t}(x \cdot y)$。由 (7)， L^2-范数的 f_x^t 为

$$\|f_x^t\|^2_{L^2(\mathbb{S}^d)} = \frac{1}{\dim \Pi_t}.$$

对于 $\cos\phi = x \cdot y$，条件 $y \in B_r(x)$ 等价于 $0 \le \phi \le r$。由命题 3.2 可得下界

$$|f_x^t(y)| = |\widetilde{P}_t^{(\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)}(\cos\phi)| \ge \nu, \qquad \forall\, y \in B_r(x). \tag{14}$$

因此，(11) 推出 $\mu_t\big(B_r(x)\big) \le \nu^2$ $\frac{A}{\text{维}\,\Pi_t}$。 ∎

近最优选择。 与最佳值相比，再生核是 (11) 中的近最优选择

$$\min_{f \in \Pi_t} \frac{A\|f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^d)}}{\min_{y\in S}|f(y)|^2} \ge \frac{A}{\dim \Pi_t}.$$

为说明这一点，固定 $S \subseteq \mathbb{S}^d$，并令 $f \in \Pi_t$ 任意。由于对于所有 $x \in S$，且 $|f(x)|^2 = |\langle f, k_x^t\rangle|^2 \le \|f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^d)}$维 Π_t，均有 $\min_{y\in S}|f(y)| \le |f(x)|$，因此我们总有

$$\frac{A\|f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^d)}}{\min_{y\in S}|f(y)|^2} \ge \frac{A\|f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^d)}}{|f(x)|^2} \ge \frac{A}{\dim \Pi_t}.$$

相比之下，对于满足 r 与 $\nu \in (0,\ 1)$ 相关的小球冠 $B_r(x)$，定理 4.1 给出的界为 $\nu^2\ \frac{A}{\text{维数}\,\Pi_t}$。因此，在估计 (11) 的背景下，核 k_x^t （或等价地，f_x^t）是关于球冠 $B_r(x)$ 达到上界的近最优选择。

次优选择。 在 (11) 中， f 的另一种自然选择是

$$K^t(x,y) = K_x^t(y) = (x\cdot y)^t\,. \tag{15}$$

它在 $y = x$ 处达到峰值，且是正交不变的，正如 k^t 一样。由于 $\mathbb{S}^d$ 上的曲面测度具有旋转不变性， L^2-范数 K_x^t 不依赖于 $x\in\mathbb{S}^d$ 的具体选取，因此我们可以定义

$$\Lambda_{d,t} := \|K_x^t\|^2_{L^2(\mathbb{S}^d)} = \int_{\mathbb{S}^d} (x\cdot y)^{2t}\,dy\,. \tag{16}$$

对于所有 $y\in B_r(x)$，我们有 $x\cdot y \ge \cos r$ ，因此 $|K_x^t(y)|^2 \ge (\cos r)^{2t}$。于是，将 $f = K_x^t$ 代入 (11)，得到

$$\mu_t\big(B_r(x)\big) \le \frac{A\,\Lambda_{d,t}}{(\cos r)^{2t}}\,. \tag{17}$$

我们仍需将 $\Lambda_{d,t}$ 与定理 4.1 中的因子 $1/\dim \Pi_t$ 进行比较。按照 [1] 中的做法，例如，在球坐标下反复应用拉普拉斯算子，可得

$$\Lambda_{d,t} = \frac{1\cdot 3\cdots(2t-1)}{(d+1)(d+3)\cdots(d+2t-1)} = \frac{(\frac12)_t}{(\frac{d+1}{2})_t}\,,$$

其中 $(u)_t$ 是波赫哈默符号 $(u)_t = \frac{\Gamma(t+u)}{\Gamma(u)} = u(u+1)\cdots(u+t-1)$。固定维数 d，考虑较大的 t，并选择 $r\asymp t^{-1}$，这与 (12) 中的选择一致。由于

$$\Lambda_{d,t} = \frac{\Gamma(t+\frac12)\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac12)\Gamma(t+\frac{d+1}{2})} \sim \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac12)} t^{-\frac{d}{2}}\,,$$

而 $1/\dim \Pi_t \sim \frac{2}{d!}t^{-d}$，定理 4.1 中的 (13) 比 (17) 精确了几个数量级。这表明，核 K^t 的局部化程度不足，无法在尺度 t^{-1}下采用方法 (11)。尽管如此，它的简洁性也有其优点，我们将在下一步加以利用。

4.2.下 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式的基本推论。现在我们验证下 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式成立所必需的支撑条件。在这里，(15) 中 K^t 的简洁性十分有利，因此利用它在 Π_t中生成测试函数。

回顾 (16) 中勒贝格测度在 $\mathbb{S}^d$上的矩 $\Lambda_{d,\,t} = \int_{\mathbb{S}^d}(x\cdot y)^{2t}\,dy$。对于 $t=1$，我们得到 $\Lambda_{d,\,1} = \frac{1}{d+1}$，而 $g(y) := (x\cdot y)^2$ 导致 $\Lambda_d^{1/t}{}_{,\,t} = \|g\|_{L^t(\mathbb{S}^d)}$。为了估计 $\Lambda_{d\,t}^{1/t}{}_{,}$，对于 $1\le t\le\infty$，H¨older 不等式给出

$$\frac{1}{d+1} = \Lambda_{d,1} = \|g\|_{L^1(\mathbb{S}^d)} \le \|g\|_{L^t(\mathbb{S}^d)} \le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{S}^d)} = 1\,.$$

因此， $\Lambda_{d\,t}^{1/t}{}_{,}$ 介于

$$\frac{1}{d+1} \le \Lambda_{d,t}^{1/t} \le 1\,. \tag{18}$$

并且满足 $\lim_{t\to\infty}\Lambda_d^{1/t}{}_{,\,t} = 1$。

我们推导出马尔钦凯维奇-齐格蒙德测度的以下基本覆盖性质。该性质表明，马尔钦凯维奇-齐格蒙德测度的支撑集不可能包含在过小的球冠中。

引理 4.2. 假设 μ_t 满足阶为 t 的下 *Marcinkiewicz-Zygmund* 不等式，且 $r \in (0, \frac{\pi}{2}]$. 若 支集 $\mu_t \subseteq B_r(x)$，则

$$(\sin r)^{2t} \geq \frac{a}{\mu_t(\mathbb{S}^d)}\,\Lambda_{d,t}\,. \tag{19}$$

换言之，若 (19) 不成立，则 μ_t 的支集不能包含在任何半径为 r的球内。另请注意条件 $0 < r \leq \frac{\pi}{2}$，因此引理 4.2 不适用于互补球冠 $\mathbb{S}^d \setminus B_r(x) = B_{\pi-r}(-x)$。

证明。 我们首先假设 $z = e_{d+1}$ 是北极，且 $\operatorname{supp}\mu_t \subseteq B_r(e_{d+1})$。考虑 $f(y) = y_1^t$，于是下 Marcinkiewicz-Zygmund 界给出

$$a\,\Lambda_{d,t} \leq \int_{\mathbb{S}^d} |y_1|^{2t}\,d\mu_t(y)\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{N}\,. \tag{20}$$

由于 $y \in B_r(e_{d+1})$ 蕴含 $y_{d+1} \geq \cos r$ 且 $\cos r \geq 0$ 对 $0 < r \leq \pi/2$成立，我们推得 $y_{d+1}^2 \geq (\cos r)^2$，因此，

$$|y_1|^2 \leq 1 - |y_{d+1}|^2 \leq 1 - (\cos r)^2 = (\sin r)^2\,.$$

因此，在 $\operatorname{supp}\mu_t$ 上，函数 $|y_1|^{2t}$ 受 $(\sin r)^{2t}$ 控制，从而得到

$$a\Lambda_{d,t} \leq \int_{\mathbb{S}^d} |y_1|^{2t}\,d\mu_t(y) \leq (\sin r)^{2t}\mu_t(\mathbb{S}^d)\,.$$

这直接转化为 $(\sin r)^{2t} \geq \frac{a}{\mu_t(\mathbb{S}^d)}\Lambda_{d,t}$。——

对于一般情形 $x \in \mathbb{S}^d$，我们施加一个旋转 O，使得 $Oe_{d+1} = x$。推前测度 $\tilde{\mu}_t := O_*\mu_t$ 定义为：对于每个可测子集 $S \subseteq \mathbb{S}^d$，$\tilde{\mu}_t(S) = \mu_t(O^*S)$。条件 $\operatorname{supp}\mu_t \subseteq B_r(x)$ 直接推出 $\operatorname{supp}\tilde{\mu}_t \subseteq B_r(e_{d+1})$。由于空间 Π_t 是正交不变的，$\tilde{\mu}_t$ 也满足具有相同常数 a 的下马尔可夫-齐格蒙德不等式。上述分析现在推出了关于 r 的条件。

■

5. Bounds on the length of Marcinkiewicz-Zygmund curves

我们将定理 4.1 中的体积上界专门化到由曲线诱导的测度，并推导出马尔可夫-齐格蒙德曲线长度的定量下界。

曲线是一个连续的分段光滑函数 $\gamma:\ [0, L] \to \mathbb{S}^d$，我们可以将其视为 $\mathbb{R}^{d+1}$ 中的空间曲线。我们始终假设 γ 是一条闭曲线，即 $\gamma(0) = \gamma(L)$，并且按弧长参数化，因此速度 $\|\dot{\gamma}\|$ 几乎处处等于 1，长度满足 $\ell(\gamma) = L$，而线积分为

$$\int_\gamma f := \int_0^L f(\gamma(u))\,du\,.$$

下面我们还考虑加权版本。对于正整数 t，令 w_t 为定义在曲线 γ_t 的轨迹上且可积的非负权函数。每条加权曲线 $(\gamma_t,\ w_t)$ 都诱导出一个测度 μ_t，满足 $\mu_t(B_r(x)) = \ell^{-1}(\gamma_t) \int_{\gamma_t} 1_{B_r}(x)\, w_t$，并且

$$\int_{\mathbb{S}^d} |f(x)|^2\, d\mu_t = \frac{1}{\ell(\gamma_t)} \int_{\gamma_t} |f|^2 w_t\,. \tag{21}$$

这使我们能够定义 Marcinkiewicz-Zygmund 曲线。

定义 5.1. 若 (γ_t, w_t) 满足以下条件，则称其为（加权）Marcinkiewicz-Zygmund 曲线（阶数为 t 或针对 Π_t）：

$$a\|f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^d)} \overset{\text{lower}}{\leq} \frac{1}{\ell(\gamma_t)} \int_{\gamma_t} |f|^2 w_t \overset{\text{upper}}{\leq} A\|f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^d)}$$

对所有 $f \in \Pi_t$ 均成立。

相关概念请参见 [5, 6, 18]。定理 4.1 中的上体积界和引理 4.2 中的支撑估计，给出了 Marcinkiewicz-Zygmund 曲线长度的以下下界。

定理 5.1（加权曲线）。假设 $t \geq d \geq 2$。若 (γ_t, w_t) 是 $\mathbb{S}^d$ 上的一条阶数为 t 的加权 *Marcinkiewicz-Zygmund* 曲线，则其长度必须满足

$$\ell(\gamma_t) \geq \frac{\dim \Pi_t}{t} \frac{\sqrt{d+2}}{4} \left(\frac{a}{A}\right)^{1+\frac{1}{2t}}. \tag{22}$$

由于维数 $\dim \Pi_t = \binom{d+t}{t} + \binom{d+t-1}{t-1}$ 有界于

$$\dim \Pi_t = \frac{(t+1)\cdots(t+d)}{d!} + \frac{t\cdots(t+d-1)}{d!} \geq \frac{2}{d!} t^d\,, \tag{23}$$

主估计 (22) 得出 $\ell(\gamma_t) \gtrsim t^{d-1}$，其定量形式为

$$\ell(\gamma_t) \geq \left(\frac{a}{A}\right)^{1+\frac{1}{2t}} \frac{\sqrt{d+2}}{2\,d!}\, t^{d-1}\,. \tag{24}$$

作为一个重要的特例，我们给出以下推论。

推论 5.2。假设 $t \geq d \geq 2$。若 γ_t 是一条 t-设计曲线，则

$$\ell(\gamma_t) \geq \frac{\sqrt{d+2}}{2\,d!}\, t^{d-1}\,.$$

推论 *5.2* 的证明。任意 t-设计曲线的 Marcinkiewicz-Zygmund 常数为 $a = A = 1$，因此 (24) 给出了该估计。 ∎

采用另一种需要精确求积的方法，文献 [5] 对一般常数情形证明了这一点。这里的新意在于给出了显式常数，揭示了其对维数的依赖关系。

定理 *5.1* 的证明。我们将应用定理 4.1，并使用式 (12) 中的关系 $r^2 = (1-\nu)\frac{(d+2)}{t(t+d)}$，其中取值为 $r = r(d,t,\nu) \in (0, \frac{\pi}{2}]$，其值由 $\nu \in (0,1)$ 确定。

上体积界的推论:
定理 4.1 中的上体积界给出

$$\mu_t(B_r(x)) = \frac{1}{\ell(\gamma_t)} \int_{\gamma_t} 1_{B_r(x)} w_t \leq \frac{A}{\nu^2 \dim \Pi_t},$$

从而得到不等式

$$\ell(\gamma_t) \geq \frac{\nu^2 \dim \Pi_t}{A} \int_{\gamma_t} 1_{B_r(x)} w_t . \tag{25}$$

仍需对某个 $x \in \mathbb{S}^d$ 求出 $\int_{\gamma_t} 1_{B_r(x)} w_t$ 的估计。接下来，通过选择 ν 使得 γ_t 不包含于 $B_r(x)$ 中，我们确定半径 r 。

通过选择 ν 使得 $\gamma_t \not\subseteq B_r(x)$，确定 r：

为确保 γ_t 不包含于任何球冠 $B_r(x)$ 中，我们必须确保半径 $r = r(d, t, \nu)$ 违反引理 4.2 中的不等式 (19)，即需要满足 $(\sin r)^{2t} < \mu_t^a(\mathbb{S}^d)\Lambda_{d,t}$，其中 $\Lambda_{d,t}$ 与 (16) 中的定义相同。由 (18) 可得 $(\sin r)^{2t} \leq r^{2t}$, $\Lambda_{d,t} \geq \left(\frac{1}{d+1}\right)^t$，且上 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式给出 $\mu_t(\mathbb{S}^d) \leq A$，因此只需满足稍强的不等式

$$r^{2t} < \frac{a}{A}\left(\frac{1}{d+1}\right)^t .$$

这就要求

$$r^2 = (1-\nu)\frac{(d+2)}{\big(t(t+d)\big)} < \left(\frac{a}{A}\right)^{1/t} \frac{1}{d+1},$$

这等价于

$$1 - \nu < \left(\frac{a}{A}\right)^{1/t} \frac{t(t+d)}{(d+2)(d+1)} . \tag{26}$$

对于 $t \geq d \geq 2$，我们得到

$$\frac{t(t+d)}{(d+2)(d+1)} \geq \frac{2}{3}, \tag{27}$$

现在我们可以选择 ν 作为

$$1 - \nu = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{A}\right)^{1/t} .$$

对于这个 ν 值，我们知道 $(\sin r)^{2t} < \mu_t^a(\mathbb{S}^d)\Lambda_{d,t}$。因此，$\gamma_t$ 不可能包含在半径为 r 的任何球内。

求满足 $\int_{\gamma_t} 1_{B_r(x_t)} w_t \geq 2ra$ 的 x_t：

设 x 位于 γ_t的轨迹上。由于 γ_t 是一条不包含在$B_r(x)$中的闭曲线，它必然会进入并离开该球，因此至少有一段长度为 $2r$ 的部分包含在 $B_r(x)$中。如果 $w_t \equiv 1$，那么结论即得，因为 $\int_{\gamma_t} 1_{B_r(x_t)}\, w_t \geq 2r$。然而，如果 w_t 不是常数，那么它在该特定线段上可能相当小，因此我们无法立即推出 $\int_{\gamma} 1_{B_r(x)}\, w_t \geq 2r$。下面我们将论证，在 γ_t 的轨迹上至少存在一个 x_t，使得 $\int_{\gamma_t} 1_{B_r(x_t)}\, w_t$ 足够大。

回顾 $L = \ell(\gamma_t)$，并将闭曲线 γ_t 的弧长参数化以周期方式延拓到区间 $[0, L]$ 之外。我们也将特征函数 $1_{[-r,r]}$ 视为一个 L-周期函数，并通过循环卷积 $v = (w_t \circ \gamma_t) * 1_{[-r,r]}$ 定义 $v\colon [0, L] \to \mathbb{R}$，其定义为

$$v(u) := \int_0^L w_t(\gamma_t(p))\, 1_{[-r,r]}(p-u)\, dp\,.$$

对 $[0, L]$ 和 $2r \leq L$ 积分，得到

$$\begin{aligned}\int_0^L v(u)\, du &= \int_0^L \int_0^L w_t(\gamma_t(p))\, 1_{[-r,r]}(p-u)\, dp\, du \\ &= \int_0^L w_t(\gamma_t(p)) \int_0^L 1_{[-r,r]}(p-u)\, du\, dp \\ &= 2r \int_0^L w_t(\gamma_t(p))\, dp \\ &= 2r \int_{\gamma_t} w_t\,.\end{aligned}$$

下 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式蕴含 $\int_{\gamma_t} w_t \geq a\, L$，因此得到 $\int_0^L v(u)\, du \geq 2raL$。于是，存在 $u_t \in [0, L]$ 使得 $v(u_t) \geq 2ra$。现在选取 $x_t := \gamma_t(u_t)$。由于对于 $p \in [u_t - r, u_t + r]$ 和 $w_t \geq 0$，有 $\gamma_t(p) \in B_r(x_t)$，我们得到

$$\int_{\gamma_t} 1_{B_r(x_t)} w_t \geq \int_{u_t - r}^{u_t + r} w_t(\gamma_t(p))\, dp = v(u_t) \geq 2ra\,. \tag{28}$$

最终估计：
采用指定的 r 和 ν 后，下界 (25) 化为

$$\ell(\gamma_t) \geq \nu^2 \dim \Pi_t\, \frac{a}{A}\, 2r. \tag{29}$$

由于 $\frac{a}{A} \leq 1$，我们有 $\nu^2 = \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{A}\right)^{1/t}\right)^2 \geq \frac{1}{4}$，因此

$$r^2 = (1-\nu)\, \frac{d+2}{t(t+d)} = \frac{1}{t^2}(1-\nu)\, \frac{d+2}{1+d/t} \geq \frac{1}{t^2} \frac{(1-\nu)}{2}\, (d+2)\,.$$

现在将 r 代入界（29），并代入 $1-\nu=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{A}\right)^{1/t}$，得到

$$\begin{aligned}\ell(\gamma_t) &\geq \frac{1}{4}\frac{\dim \Pi_t}{t}\,\frac{a}{A}\,2\sqrt{\frac{(1-\nu)}{2}(d+2)}\\ &= \frac{1}{4}\frac{\dim \Pi_t}{t}\,\frac{a}{A}\,\sqrt{d+2}\left(\frac{a}{A}\right)^{\frac{1}{2t}},\end{aligned}$$

由此证明得证。 ■

讨论渐近性时，我们将维数 d 视为固定值，并令次数 t 增大。不过，较大的 t 并非这些界限成立的必要条件；稍作调整常数后，证明仍然成立，线性函数的极端情形 $t=1$ 便说明了这一点。

注 5.1. 如果 (γ_1, w_1) 是球面$\mathbb{S}^d$上阶为 1 的加权 Marcinkiewicz-Zygmund 曲线，那么其长度必须满足

$$\ell(\gamma_1) \geq 2\sqrt{d+1}\,\frac{d+1}{d+2}\left(\frac{a}{A}\right)^{3/2}. \tag{30}$$

证明这一点时，我们可以根据 $t=1$稍作调整，沿用定理 5.1 的证明。首先，我们有 $\dim \Pi_1 = d+2$，并按常规定义半径 r：$r^2=(1-\nu)\,(d+2)\,t(t+d)=(1-\nu)\frac{d+2}{d+1}$。对于任意参数 $\delta\in(0,1)$，我们取$1-\nu=\delta\,\frac{a}{A}\,\frac{1}{d+2}$。于是，对于 $t=1$，条件 (26) 成立。因此，γ_1 不包含在任何半径为 r的球内，其中 $r^2=\delta\,\frac{a}{A}\,\frac{1}{d+1}$。由此，不等式 (29) 成立，即

$$\ell(\gamma_1) \geq \nu^2\,(d+2)\,\frac{a}{A}\,2r\,.$$

由于 $\nu^2=(1-\delta\,\frac{a}{A}\,\frac{1}{d+2})^2 \geq \left(\frac{d+1}{d+2}\right)^2$和 $r=\sqrt{\delta\,\frac{a}{A}\,\frac{1}{d+1}}$，最终我们推导得出

$$\ell(\gamma_1) \geq \frac{(d+1)^{3/2}}{d+2}\left(\frac{a}{A}\right)^{3/2}2\sqrt{\delta}\,.$$

由于该不等式对所有 $\delta\in(0,\,1)$ 都成立，我们得到 (30)。

6. Sets of arbitrary Hausdorff dimension

虽然分段光滑曲线的豪斯多夫维数为 1，但我们也可以考虑支撑在球面上 s 维子集上的测度。本节针对任意维数 $s<d$，建立其豪斯多夫测度的下界。

6.1. s维 Marcinkiewicz-Zygmund 集。对于 $0\leq s\leq d$，我们用 h_s 表示 s 维豪斯多夫测度。每个 s维豪斯多夫可测子集 $X_t\subseteq\mathbb{S}^d$，若其豪斯多夫测度 $0<h_s(X_t)<\infty$ 为正且有限，并具有可积权函数 $w_t\colon X_t\to[0,\infty)$，则会在 $\mathbb{S}^d$ 上诱导出测度 μ_t，其定义为 $\mu_t(B_r(z))=\frac{1}{h_s(X_t)}\int_{X_t\cap B_r(z)} w_t(x)\,dh_s(x)$，并且

$$\int_{\mathbb{S}^d}|f(x)|^2\,d\mu_t(x)=\frac{1}{h_s(X_t)}\int_{X_t}|f(x)|^2 w_t(x)\,dh_s(x)\,.$$

这使我们能够定义 Marcinkiewicz-Zygmund 集 X_t。

定义 6.1. 我们称一个 s 维豪斯多夫可测子集 $X_t \subseteq \mathbb{S}^d$ （其权函数为 $w_t : X_t \to [0,\infty)$）满足 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式（阶为 t，或对 Π_t 而言），如果

$$a\|f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^d)} \overset{\text{lower}}{\leq} \frac{1}{h_s(X_t)} \int_{X_t} |f(x)|^2 w_t(x)\, dh_s(x) \overset{\text{upper}}{\leq} A\|f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^d)}$$

对所有 $f \in \Pi_t$ 均成立。

对于这类 Marcinkiewicz-Zygmund 集，我们可以将定理 5.1 推广到豪斯多夫维数 $0 \leq s \leq d$ 的整个范围。

定理 6.1 (s维集)。 假设 $X_t \subseteq \mathbb{S}^d$ 是一个 s 维的豪斯多夫可测子集，其权函数为 $w_t \geq 0$，并满足上 *Marcinkiewicz-Zygmund* 阶 t 不等式。若存在一点 $x_t \in X_t$、参数 $\nu \in (0,\ 1)$ 和 $q > 0$，使得

$$\int_{X_t \cap B_r(x_t)} w_t(x)\, dh_s(x) \geq q\, r^s\,, \qquad r^2 = (1-\nu)\frac{(d+2)}{t(t+d)}\,, \tag{31}$$

则 X_t 的豪斯多夫体积满足

$$h_s(X_t) \geq c\, \frac{\dim \Pi_t}{t^s}\,,$$

其中“常数”为 $c = c(d,\ t,\ q,\ \nu,\ A,\ s) = \frac{q\,\nu^2}{A}\left(\frac{1-\nu}{1+d/t}(d+2)\right)^{s/2}$。

在 $t = 1$ 的情况下，我们有 $c = \frac{q\,\nu^2}{A}\left((1-\nu)^{d+2}_{d+1}\right)^{s/2}$。对于标准情形 $t \geq d$，我们可以用其下界估计 $c \geq \frac{q\,\nu^2}{A}\left(\frac{1-\nu}{2}(d+2)\right)^{s/2}$ 替换 c。

定理 *6.1* 的证明。 半径 r 是应用定理 4.1 于μ_t时所需的半径，我们得到

$$\mu_t(B_r(x_t)) = \frac{1}{h_s(X_t)} \int_{X_t \cap B_r(x_t)} w_t(x)\, dh_s(x) \leq \frac{A}{\nu^2 \dim \Pi_t}\,.$$

假设 (31) 导出

$$\begin{aligned} h_s(X_t) &\geq \int_{X_t \cap B_r(x_t)} w_t(x)\, dh_s(x)\, \frac{\nu^2 \dim \Pi_t}{A} \\ &\geq q\, r^s\, \frac{\nu^2 \dim \Pi_t}{A}\,. \end{aligned}$$

由于 $r = \frac{1}{t}\sqrt{(1-\nu)\frac{d+2}{1+d/t}}$，我们可以定义常数 $c := \frac{q\,\nu^2}{A}\left(\frac{1-\nu}{1+d/t}(d+2)\right)^{s/2}$，并推出

$$h_s(X_t) \geq c\, \frac{\dim \Pi_t}{t^s}\,,$$

由此完成证明。 ∎

注 6.1. 技术条件 (31) 与几何测度论中的 Ahlfors 正则性概念有关。若豪斯多夫可测子集 $X \subseteq \mathbb{S}^d$ 配有权函数 $w\colon X \to [0,\infty)$，则称其为下 Ahlfors s-正则的，如果存在常数 $q > 0$ 使得

$$\int_{X\cap B_r(x)} w(y)\, dh_s(y) \geq q\, r^s\,, \qquad \forall\, x \in X\,, \quad 0 < r < \operatorname{diam}(X)\,. \tag{32}$$

不过请注意，我们只需要在单个点 $x_t \in X_t$ 和单个半径 r 处满足此条件。由于 q，ν，r 并非相互独立，因此可以在满足 qr^s =const 以及 r 与 ν 之间关系的条件下，进一步优化常数 c。

点集和曲线自动满足正则性条件。

注 6.2（点）。对于有限点集 X_t，权重的最大值 $w_{\max} = \max_{x\in X_t} w_t(x)$ 在满足 $w_{\max} = w_t(x_{\max})$ 的 $x_{\max} \in X_t$ 处取得。于是，权函数为 w_t 的 X_t 在 $x_{\max}$ 处对于 $q = w_{\max}$ 和所有 $r \in (0,\ \pi]$ 都是下 Ahlfors 0-正则的。

注 6.3（曲线）。对于 $s = 1$，豪斯多夫测度 h_1 对应于弧长，且 $\underset{t}{\text{维数}}^{\Pi_t} \asymp t^{d-1}$。这与定理 5.1 中关于 Marcinkiewicz-Zygmund 曲线的结果一致。

鉴于第 5 节的结果，对于曲线而言，正则性假设可直接由下 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式推出。事实上，定理 5.1 的证明表明，下 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式迫使加权曲线至少在某一点 x_t for $q = 2a$ 满足下 Ahlfors 1-正则性，参见（28）；其中半径 r 由定理 4.1 的（12）指定。

6.2. **Marcinkiewicz-Zygmund 点**。现在让我们更仔细地考察 $s = 0$ 的情形。若有限子集 $X_t \subseteq \mathbb{S}^d$ 配有权函数 w_t，并满足阶为 t 的下Marcinkiewicz-Zygmund 不等式，那么一个初等且众所周知的维数计数可推出，X_t 的基数必须满足

$$\#X_t \geq \dim \Pi_t\,. \tag{33}$$

商 $\underset{\text{维数}\,\Pi_t}{\#X_t}$ 通常称为过采样因子。

通常，人们普遍认为下Marcinkiewicz-Zygmund 不等式更为重要，因此上 Marcinkiewicz-Zygmund 界在文献中往往相对较少受到关注。与 $\mathbb{R}^d$ 或其他非紧流形不同，球面 $\mathbb{S}^d$ 是紧致的，因此空间范围有限；在其中，上 Marcinkiewicz-Zygmund 点的局部密度不能超过（缩放后的）过采样因子 $\underset{\text{维数}\,\Pi_t}{\#X_t}$ A。这也给出了基数的下界。

推论 6.2。如果有限子集 $X_t \subseteq \mathbb{S}^d$ 及其权函数 $w_t\colon X_t \to [0,\infty)$满足 t 阶上 *Marcinkiewicz-Zygmund* 不等式，则

$$w_{\max} = \max_{x\in X_t} w_t(x) \leq \frac{\#X_t}{\dim \Pi_t}\, A\,.$$

等价地，必须满足

$$\#X_t \geq \dim \Pi_t\, \frac{w_{\max}}{A}\,. \tag{34}$$

因此，我们得到了一个与（33）相当的基数下界。值得注意的是，我们无需假设下 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式。

证明。 如注 6.2 所述，点$x_{\max}$ 处的 Ahlfors 正则性假设，在 $w_{\max} = w_t(x_{\max})$ 下对 $q = w_{\max}$ 以及所有 $r \in (0, \pi]$ 始终成立。因此，定理 6.1 给出

$$\#X_t \geq \frac{w_{\max}\,\nu^2}{A} \dim \Pi_t \,,$$

对所有 $\nu \in (0,1)$ 都成立。于是，该不等式对 $\nu = 1$ 也必然成立，因此

$$w_{\max} \leq \frac{\#X_t}{\dim \Pi_t}\, A$$

必然成立。 ∎

7. Lower volume bounds

本节通过给出（几乎）匹配的下界，对定理 4.1 的体积上界作补充。论证较为复杂，我们将使用核的精确非对角衰减估计。

作为准备，我们注意到，通过公式 [30]，对 $\mathbb{S}^d$ 上旋转不变函数的积分可化为一维积分

$$\int_{\mathbb{S}^d} f(x \cdot y)\, dy = \frac{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{d-1})}{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^d)} \int_0^\pi f(\cos\theta)\, (\sin\theta)^{d-1}\, d\theta \,, \tag{35}$$

其中 $\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{d-1}) := \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ 表示整个 $d-1$ 维球面的欧几里得非归一化曲面测度。为跟踪众多常数，我们将积分前的系数简记为

$$\Theta_d := \frac{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{d-1})}{\mathrm{vol}(\mathbb{S}^d)} = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d}{2})} \,. \tag{36}$$

于是，球冠上的积分可以写为

$$\int_{B_r(x)} f(x \cdot y)\, dy = \Theta_d \int_0^r f(\cos\theta)\, (\sin\theta)^{d-1}\, d\theta \,. \tag{37}$$

特别地，球冠的体积为

$$|B_r(x)| = \Theta_d \int_0^r (\sin\theta)^{d-1}\, d\theta \,.$$

由于对于 $0 \leq \theta \leq r$，有 $\sin\theta \geq \theta - \theta^3/6 \geq \theta(1 - \frac{r^2}{6})$，因此可得以下初等下界估计

$$|B_r(x)| \geq \Theta_d \frac{\left(1 - \frac{r^2}{6}\right)^{d-1}}{d}\, r^d \tag{38}$$

供我们后续使用。

7.1. 再生核的非对角衰减。接下来，我们将通过一项关于再生核非对角衰减的结果，补充命题 3.2 中关于再生核局部集中的内容。

在证明中，我们将使用来自 [7], 的雅可比多项式的非常强的统一估计， [16] 亦可参见。这些估计针对正交归一雅可比多项式给出，并包含归一化因子

$$\kappa^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2t+\alpha+\beta+1}\,\frac{\binom{t+\alpha}{t}}{\binom{t+\alpha+\beta}{t+\beta}},$$

使得这些多项式

$$\frac{1}{\sqrt{\kappa^{(\alpha,\beta)}(t)}}P_t^{(\alpha,\beta)}$$

关于权函数 $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ 在 $[-1,1]$ 上正交归一。此时，Erdélyi-Magnus-Nevai 对 $P_t^{(\alpha,\beta)}$ （其中 $\alpha,\beta>-1/2$）的界 [7] 为

$$(1-u^2)^{1/2}(1-u)^\alpha(1+u)^\beta\frac{1}{\kappa^{(\alpha,\beta)}(t)}\left|P_t^{\alpha,\beta}(u)\right|^2 \le \frac{2e}{\pi}(2+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})\,. \tag{39}$$

对于 $(\alpha,\beta) = (\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$，我们将右端的常数简记为

$$M_d = \frac{2e}{\pi}\Big(2+\sqrt{\frac{d^2}{2}-d+1}\Big) \tag{40}$$

并注意到 $M_d \le \frac{e}{\pi}(4+\sqrt{2}\,d)$ 和 $M_d \asymp d$。

此外，我们引入常数

$$\Omega_{d,t} := \frac{2\,\kappa^{(\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)}(t)}{\binom{t+\frac{d}{2}}{t}^2} \tag{41}$$

并回顾 $\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d}{2})} \asymp \sqrt{d}$，见式 (36)。利用所有这些常数，再生核的非对角衰减可描述如下。

引理 7.1。 对于所有 $0<r\le\pi$，我们有

$$\int_{\mathbb{S}^d\setminus B_r(x)}\left|\widetilde{P}_t^{(\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)}(x\cdot y)\right|^2 dy \le M_d\,\Theta_d\,\frac{\Omega_{d,t}}{r}\,. \tag{42}$$

在证明中，我们将得到

$$\Omega_{d,t} = \frac{2^{d+1}}{\binom{d}{\frac{d}{2}}}\,\frac{1}{(t+\frac{d}{2})\dim\Pi_t}\,, \tag{43}$$

使得 $\Omega_{d,\,t} = \mathcal{O}(t^{-(d+1)})$。因此，半径为 r 的球冠外部的归一化雅可比核质量为 $t^{-(d+1)}$ 阶。

证明。 Erd´elyi-Magnus-Nevai 界（39）对标准雅可比多项式 $P_t^{(\alpha,\beta)}$ 意味着

$$\begin{aligned}\left|P_t^{(\alpha,\beta)}(u)\right|^2 &\le \kappa^{(\alpha,\beta)}(t)\, M_d (1-u)^{-\alpha-\frac{1}{2}}(1+u)^{-\beta-\frac{1}{2}} \\ &= \kappa^{(\alpha,\beta)}(t)\, M_d (1-u)^{\beta-\alpha}(1-u^2)^{-\beta-\frac{1}{2}}\,.\end{aligned}$$

对于归一化 Jacobi 多项式 $\widetilde{P}_t^{(\alpha,\beta)}$ 和 $x\cdot y = \cos\,\phi$，可得

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{P}_t^{(\alpha,\beta)}(x\cdot y)\right|^2 &= \frac{1}{\binom{t+\alpha}{t}^2}\left|P_t^{(\alpha,\beta)}(\cos\phi)\right|^2 \\ &\le M_d\,\frac{\kappa^{(\alpha,\beta)}(t)}{\binom{t+\alpha}{t}^2}\,(1-\cos\phi)^{\beta-\alpha}(\sin\phi)^{-2\beta-1}\,.\end{aligned}$$

注意， $y\in\mathbb{S}^d\setminus B_r(x)$ 可化为 $r<\phi<\pi$。将积分变量从 y 换为 ϕ，并利用 (37)，可得

$$\int_{\mathbb{S}^d\setminus B_r(x)}\left|\widetilde{P}_t^{(\alpha,\beta)}(x\cdot y)\right|^2 dy \le M_d\,\Theta_d\,\frac{\kappa^{(\alpha,\beta)}(t)}{\binom{t+\alpha}{t}^2}\int_r^\pi (1-\cos\phi)^{\beta-\alpha}(\sin\phi)^{-2\beta-1}(\sin\phi)^{d-1}\,d\phi\,.$$

For $(\alpha,\beta) = (\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$ 中，正弦项相互抵消，因此积分化简为

$$\int_r^\pi (1-\cos\phi)^{-1}\,d\phi = \tfrac{1}{2}\int_r^\pi (\sin\tfrac{\phi}{2})^{-2}\,d\phi = \big(-\cot(\tfrac{\pi}{2})+(\cot\tfrac{r}{2})\big) = \cot\tfrac{r}{2}\le 2/r\,.$$

所关注的因子为

$$\frac{\kappa^{(\alpha,\beta}(t)}{\binom{t+\alpha}{t}^2} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2t+\alpha+\beta+1}\,\frac{1}{\binom{t+\alpha}{t}\binom{t+\alpha+\beta}{t+\beta}}\,,$$

对于 $(\alpha,\beta) = (\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)$，经过对二项式系数的一些变换后，可化简为

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_{d,t} := \frac{\kappa^{(\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)}(t)}{\binom{t+\frac{d}{2}}{t}^2} &= \frac{2^d}{(2t+d)\binom{t+\frac{d}{2}}{t}\binom{t+d-1}{t+\frac{d}{2}-1}} \\ &= \frac{2^d}{(2t+d)}\,\frac{(t+d)}{(t+\frac{d}{2})}\,\frac{1}{\binom{t+d}{t}\binom{d}{\frac{d}{2}}} \\ &= \frac{2^d}{\binom{d}{\frac{d}{2}}}\,\frac{1}{(t+\frac{d}{2})\dim\Pi_t}\,,\end{aligned}$$

其中，后一等式由（4）中所述的 $\dim\Pi_t^{\cdot} = \binom{t+d}{t}\,\underline{\frac{2t+d}{t+d}}$ 得出。

使用这三个常数的简写，我们得到

$$\int_{\mathbb{S}^d\setminus B_r(x)}\left|\widetilde{P}_t^{(\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)}(x\cdot y)\right|^2 dy \le M_d\,\Theta_d\,\tilde{\Omega}_{d,t}\,\frac{2}{r}\,.$$

˜最后，令 $\Omega_{d,\,t} = 2\Omega_{d,\,t}$。 ∎

7.2. 定量体积下界。 现在我们验证，Marcinkiewicz-Zygmund 测度在任何尺寸足够大的球冠中都必须具有足够的质量。证明依赖于引理 7.1 中的非对角衰减估计，也用到了定理 4.1 中的体积上界。

定理 7.2 (体积下界)。 对于 $\epsilon \in (0,1)$，我们定义常数

$$V_d = \frac{A/a}{(1-\epsilon)}\,\pi\, M_d\, d^2\, 2^{\frac{d}{2}+6}(\sqrt{d}/e)^d\,, \tag{44}$$

其中 M_d 是式(40)中的 ***Erd´elyi-Magnus-Nevai*** 界。若 μ_t 是 $\mathbb{S}^d$ 上的 t阶 ***Marcinkiewicz-Zygmund*** 测度，并且

$$R \geq \frac{V_d}{t}\,,$$

那么 μ_t 满足体积下界

$$\mu_t\big(B_R(z)\big) \geq \frac{a\,\epsilon}{\dim \Pi_t}\,, \qquad \forall\, z \in \mathbb{S}^d\,.$$

定理 7.2 补充了定理 4.1 中的体积上界。特别是，对于半径 $R \asymp t^{-1}$，体积下界按 t^{-d} 的量级变化，这与定理 4.1 中互补的上界一致。

注 7.1 （需要 $t \gg d$）。 为确保 $R < \pi$，项 t 必须抵消V_d。然而， V_d 随 d迅速增长；事实上，它关于 d呈超指数增长。因此， t必须相对于 d足够大，否则下界将变得平凡，因为每个半径至少为 π 的球冠都包含整个球面。

定理 7.2 的证明需要一些准备工作。我们首先将 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式应用于归一化 Jacobi 多项式 $f_y^t \in \Pi_t$,

$$f_y^t(x) = \widetilde{P}_t^{(\frac{d}{2},\frac{d}{2}-1)}(x\cdot y)\,. \tag{45}$$

由 Marcinkiewicz-Zygmund不等式可得

$$\frac{a}{\dim \Pi_t} \leq \int_{\mathbb{S}^d} |f_y^t(x)|^2\, d\mu_t(x) \leq \frac{A}{\dim \Pi_t}\,. \tag{46}$$

现在，我们对参数 y 在一个小球 $B_r(z)$ 上积分，其中 $r > 0$待定，并得到

$$\frac{a|B_r|}{\dim \Pi_t} \leq \int_{B_r(z)}\int_{\mathbb{S}^d} |f_y^t(x)|^2\, d\mu_t(x)\, dy \leq \frac{A|B_r|}{\dim \Pi_t}\,. \tag{47}$$

对于 $r \leq R \leq \pi$，我们将关于中心变量 x 的积分分解为 $\mathbb{S}^d = B_R(z) \cup \big(\mathbb{S}^d \setminus B_R(z)\big)$，并定义

$$I_{r,R}(z) := \int_{B_r(z)}\int_{B_R(z)} |f_y^t(x)|^2\, d\mu_t(x)\, dy, \tag{48}$$

$$I\!I_{r,R}(z) := \int_{B_r(z)}\int_{\mathbb{S}^d\setminus B_R(z)} |f_y^t(x)|^2\, d\mu_t(x)\, dy\,. \tag{49}$$

上述对近区与远区的分解，是通过对 $\mu_t(B_R(z))$ 进行适当估计，并整理各项，从而得到定量下界估计的第一步$I_{r,\ R}$。

引理 7.3. 若 μ_t 满足在 $\mathbb{S}^d$上的 t阶 *Marcinkiewicz-Zygmund*下不等式，则对每个 $r \le R \le \pi$,

$$\mu_t\big(B_R(z)\big) \ \ge \ \frac{a}{\dim \Pi_t} \ - \ \frac{I\!I_{r,R}(z)}{|B_r|}\,.$$

证明. 由于 $|f_y^t(x)|^2 \le 1$，我们得到

$$I_{r,R}(z) \le \mu_t(B_R(z))\,|B_r(z)|\,.$$

(47)中的下界给出

$$\frac{a|B_r|}{\dim \Pi_t} - I\!I_{r,R}(z) \le I_{r,R}(z) \le \mu_t(B_R(z))\,|B_r|\,,$$

因此，除以 $|B_r|$ 即可得到所需结论。 ∎

根据引理 7.3，我们现在需要对 $I\!I_{r,R}$给出一个合适的上界。

引理 7.4。 假设 $\nu \in (0,\ 1)$与 $r > 0$通过 $r^2 = (1-\nu)^{\,(d+2)\,t(t+d)}$如式 *(12)* 所示相关联，且令 $r \le R \le \pi$。若 μ_t 在 $\mathbb{S}^d$上满足 t阶的上 *Marcinkiewicz-Zygmund*不等式，则

$$I\!I_{r,R}(z) \le \frac{A}{\nu^2 \dim \Pi_t} \int_{\mathbb{S}^d \setminus B_{R-r}(z)} |f_z^t(x)|^2\,dx\,.$$

证明。 我们首先改写式 (49) 中的 $I\!I_{r,R}(z)$。先处理在 y 上的积分，改写过程依赖于应用一个合适的反射。

对于 $v \in \mathbb{S}^d$，Householder 变换 $U = I - 2vv^\top \in \mathcal{O}(d+1)$ 是关于与 v正交的超平面的反射。因此，给定 $x, z \in \mathbb{S}^d$ 并选择 $v = (z-x)/\|z-x\|$，该反射满足 $Uz = U^\top z = x$。 $f^t(y,x)$ 的正交不变性 $= \widetilde{P}_{(\frac{d}{2},\,\frac{d}{2}-1)\,t}(x \cdot y)$ 随即推出

$$f^t(Uy, x) = f^t(y, U^\top x) = f^t(y, z)\,,$$

且 $U^\top B_r(z) = B_r(U^\top z) = B_r(x)$ 意味着

$$\begin{aligned}\int_{B_r(z)} |f^t(y,x)|^2\,dy &= \int_{U^\top B_r(z)} |f^t(Uy,x)|^2\,dy \\ &= \int_{B_r(U^\top z)} |f^t(y,z)|^2\,dy \\ &= \int_{B_r(x)} |f^t(y,z)|^2\,dy\,.\end{aligned}$$

恒等式 $1_{B_r(x)}(y) = 1_{B_r(y)}(x)$ 给出了 $I\!I_{r,R}$ 的完整表达式：

$$\begin{aligned} I\!I_{r,R}(z) &= \int_{\mathbb{S}^d \setminus B_R(z)} \int_{B_r(x)} |f^t(y,z)|^2 \, dy \, d\mu_t(x) \\ &= \int_{\mathbb{S}^d \setminus B_R(z)} \int_{\mathbb{S}^d} |f^t(y,z)|^2 1_{B_r(x)}(y) \, dy \, d\mu_t(x) \\ &= \int_{\mathbb{S}^d \setminus B_R(z)} \int_{\mathbb{S}^d} |f^t(y,z)|^2 1_{B_r(y)}(x) \, dy \, d\mu_t(x) \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} |f^t(y,z)|^2 \int_{\mathbb{S}^d \setminus B_R(z)} 1_{B_r(y)}(x) \, d\mu_t(x) \, dy \, . \end{aligned}$$

若 $B_r(y) \cap \big(\mathbb{S}^d \setminus B_R(z)\big) \neq \emptyset$，则 $y \in \mathbb{S}^d \setminus B_{R-r}(z)$。因此，$x$上的积分可由以下量控制：

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^d \setminus B_R(z)} 1_{B_r(y)}(x) \, d\mu_t(x) &\leq 1_{\mathbb{S}^d \setminus B_{R-r}(z)}(y) \int_{\mathbb{S}^d} 1_{B_r(y)}(x) \, d\mu_t(x) \\ &= 1_{\mathbb{S}^d \setminus B_{R-r}(z)}(y) \, \mu_t(B_r(y)) \, . \end{aligned}$$

代入 $I\!I_{r,\,R}$，并应用定理 4.1 估计 $\mu_t(B_r(y))$，于是对于任意给定的 $\nu \in (0,\ 1)$，只要满足 $r \leq R \leq \pi$，就有

$$\begin{aligned} I\!I_{r,R}(z) &\leq \int_{\mathbb{S}^d} |f^t(y,z)|^2 1_{\mathbb{S}^d \setminus B_{R-r}(z)}(y) \, \mu_t(B_r(y)) \, dy \\ &\leq \frac{A}{\nu^{2\dim \Pi_t}} \int_{\mathbb{S}^d \setminus B_{R-r}(z)} |f^t(y,z)|^2 \, dy \, . \end{aligned}$$

证明至此完成。 ■

为验证定理 7.2，我们现在利用引理 7.1 中的非对角衰减估计，适当地估计积分 $\int_{\mathbb{S}^d \setminus B_{R-r}(z)} |f_z^t(x)|^2 \, dx$。

定理 7.2 的证明。 证明的关键在于确定 r 和 R，使其满足以下要求

$$\frac{I\!I_{r,R}}{|B_r|} \leq \frac{a}{\dim \Pi_t}(1-\epsilon), \tag{50}$$

成立，因为引理 7.3 随即推出

$$\mu_t\big(B_R(z)\big) \ \geq \ \frac{a}{\dim \Pi_t} - \frac{I\!I_{r,R}(z)}{|B_r|} \geq \epsilon \frac{a}{\dim \Pi_t} \, .$$

为验证 (50)，我们使用引理 7.4 和核的非对角衰减 (42)。对于 $0 < R - r < \pi$ 和 $r^2 = (1-\nu)^{\frac{1}{(d+2)\,t(t+d)}}$，我们有

$$\int_{\mathbb{S}^d \setminus B_{R-r}(z)} \big|f_z^t(x)\big|^2 \, dx \leq \frac{M_d \, \Theta_d \, \Omega_{d,t}}{R-r} \, ,$$

而引理 7.4 得出

$$\mathit{II}_{r,R} \le \frac{A}{\nu^2 \dim \Pi_t} \frac{M_d\, \Theta_d\, \Omega_{d,t}}{R - r} .$$

考虑到如式（38）所推导的 $|B_r(x)| \ge \Theta_d \big(1 - \frac{r^2}{6}\big)^{d-1} r^d$，根据更强的要求选择 R

$$\frac{\mathit{II}_{r,R}}{|B_r|} \le \frac{A}{\nu^2 \dim \Pi_t} \frac{M_d\, \Theta_d\, \Omega_{d,t}}{R - r} \frac{d}{\Theta_d \big(1 - \frac{r^2}{6}\big)^{d-1} r^d} \le \frac{a(1-\epsilon)}{\dim \Pi_t} .$$

这可简化为

$$\frac{A\, M_d\, \Omega_{d,t}\, d}{\nu^2\, (R - r)\, \big(1 - \frac{r^2}{6}\big)^{d-1} r^d} \le a(1-\epsilon) ,$$

解出 $R - r$，得到

$$\frac{A\, d\, M_d}{\nu^2\, a(1-\epsilon)\, \big(1 - \frac{r^2}{6}\big)^{d-1}} \frac{\Omega_{d,t}}{r^d} \le R - r . \tag{51}$$

如上文所述，式（51）意味着 $\mu_t\big(B_R(z)\big) \ge$ $a\,\epsilon$ 维数 Π_t 。

接下来需要简化式（51）的左边，消除其对 t 的依赖，并通过适当选择 ν 和 r 找到一个明确的常数。

确定 ν, r, $(t\,r)^d$，并估计 $\big(1 - \frac{r^2}{6}\big)^{d-1}$：

对于 $t \ge d+1$，我们根据 $(1-\nu) = \frac{1}{2}(1 + d/t)$ 选择 ν。约束 $t \ge 2d$ 随即给出

$$\nu^2 = \Big(1 - \tfrac{1}{2}(1 + d/t)\Big)^2 \ge \Big(\frac{1}{4}\Big)^2 = 2^{-4} .$$

对于 ν 的这一选择，半径 r 为

$$r = \frac{1}{t} \sqrt{(1-\nu) \frac{d+2}{1 + d/t}} = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{d+2}{2}} .$$

因此，我们得到 $(t\,r)^d = \big(\frac{d}{2} + 1\big)^{d/2}$。

为了给出 $\big(1 - \frac{r^2}{6}\big)^{d-1}$ 的下界，我们使用 $t \ge d+2$，并将 r^2 上界估计为

$$r^2 = \frac{1}{t^2} \frac{d+2}{2} \le \frac{1}{2(d+2)} \le \frac{1}{2d} .$$

因此，我们有

$$\big(1 - \tfrac{r^2}{6}\big)^{d-1} \ge \big(1 - \tfrac{1}{12d}\big)^{d-1} \ge e^{-\frac{1}{12}} .$$

估计Ω $\frac{d\,t}{r^d}$。

现在考虑 Ω $\frac{d\,t}{r^d} = \Omega_{d,t} t^d (t\,r)^d$，其中 $\Omega_{d,t}$ 由 (43) 给出。为了估计分子 $\Omega_{d,t} t^d$，我们利用 (23) 中的 $\dim \Pi_t \geq \frac{2}{d!} t^d$，得到

$$\Omega_{d,t}\, t^d = \frac{2^{d+1}}{\binom{d}{\frac{d}{2}}} \frac{1}{(t+\frac{d}{2})} \frac{t^d}{\dim \Pi_t} \leq \frac{2^d\, \Gamma(\frac{d}{2}+1)^2}{(t+\frac{d}{2})}\,.$$

将上述结果与 $(t\,r)^d = \left(\frac{d}{2}+1\right)^{d/2}$结合，我们验证了

$$\frac{\Omega_{d,t}}{r^d} = \frac{\Omega_{d,t} t^d}{(t\,r)^d} \leq \frac{2^d\, \Gamma(\frac{d}{2}+1)^2}{\left(\frac{d}{2}+1\right)^{d/2}} \frac{1}{t+\frac{d}{2}}\,.$$

汇总所有估计：

现在汇总 (51) 中各项的所有估计，使用 $\frac{1}{t+\frac{d}{2}} \leq \frac{1}{t}$，并选择 R使得

$$\left(\frac{A\, e^{\frac{1}{12}}\, d\, M_d}{a(1-\epsilon)} \frac{2^{d+4}\, \Gamma(\frac{d}{2}+1)^2}{\left(\frac{d}{2}+1\right)^{d/2}} + \sqrt{\frac{d+2}{2}} \right) \frac{1}{t} \leq R\,.$$

由于被加项 $\sqrt{\frac{d+2}{2}}$ 被其左侧的项控制，我们只需将因子 2^{d+4} 替换为 2^{d+5}，从而将其吸收。现在可以选择 $R \geq \frac{V_d}{t}$，其中

$$\widetilde{V}_d = \frac{A\, e^{\frac{1}{12}}\, d\, M_d}{a(1-\epsilon)} \frac{2^{d+5}\, \Gamma(\frac{d}{2}+1)^2}{\left(\frac{d}{2}+1\right)^{d/2}}\,.$$

为进一步展开各常数，我们使用伽马函数的斯特林公式。

$\frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)^2}{(\frac{d}{2}+1)^{d/2}}$的斯特林估计：

定理中的常数 V_d是通过对$\frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)^2}{(\frac{d}{2}+1)^{d/2}}$取上界得到的。使用带余项的斯特林公式进行估计，

$$\Gamma(x+1) \leq \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\frac{1}{12x}}\,, \quad x>0\,,$$

在 $x = d/2$ 处可得

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)^2}{\left(\frac{d}{2}+1\right)^{d/2}} &\leq \pi d\, \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^{\frac{d}{2}} \left(\frac{d}{2}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-d} e^{\frac{1}{3d}}}{\left(\frac{d}{2}+1\right)^{d/2}} \\ &\leq \pi d\, 2^{-\frac{d}{2}} (\sqrt{d}/e)^d\, e^{\frac{1}{3d}}\,. \end{aligned}$$

将此表达式代入 V_d，得到

$$\widetilde{V}_d \leq \frac{A/a}{(1-\epsilon)}\, \pi\, M_d\, d^2\, 2^{\frac{d}{2}+5}\, e^{\frac{1}{12}+\frac{1}{3d}}\, (\sqrt{d}/e)^d\,.$$

由于 $e^{\frac{1}{12}+\frac{1}{3d}} \leq 2$，(44) 中的右端由 V_d 有界。

上述推导中作出的辅助假设 $t \geq d+2$ 和 $t \geq 2d$ 可以舍弃，因为体积下界仅在 $R < \pi$ 时才是非平凡的。在这种情况下，我们有 $\pi t \geq V_d$，而这一条件已经远强于那些辅助条件。证明完毕。 ∎

References

[1] C. Bachoc, M. Ehler. 紧 p-融合框架。应用与计算调和分析，35 (2013), 1-15.[2]D. Bilyk, J.S. Brauchart. 关于球冠差异下界。arXiv:2502.15984. 2025.[3] J.S. Brauchart, J. Dick, E.B. Saff, I.H. Sloan, Y.G. Wang, R.S. Womersley. 用球冠覆盖球面及 Sobolev 空间中等权求积的最坏情形误差。数学分析及其应用杂志，431 (2015), no. 2, 782-811.[4] M. Ehler, M. Gr¨af, S. Neumayer, G. Steidl. 通过差异最小化对流形上的测度进行基于曲线的逼近。计算数学基础, 21(6):1595-1642, 2021.[5] M. Ehler, K. Gr¨ochenig. t-设计曲线与球面上的移动采样。Foru m Math. Sigma, 11 (2023), Paper No. e105, 25 pp.[6]M. Ehler, K. Gr¨ochenig, C. Karner. 球面上的测地循环：t-设计与 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式。arXiv:2501.06120, 2025.[7] T. Erd´elyi, A.P. Magnus, P. Nevai. 广义 Jacobi 权、Christoffel 函数与雅可比多项式。SIAM 数学分析杂志 25 (1994), 602-614.[8] F. Filbir, R. Hielscher, T. Jahn, T. Ullrich. q球面上散布数据与随机数据的 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式。应用与计算调和分析，71 (2024), 101651.[9] F. Filbir, H. N. Mhaskar. 流形上的 Marcinkiewicz–Zygmund 测度。J. Complexity, 27 (2011), no. 6, 568-596.[10] F. Filbir, W. Themistoclakis. 利用散布数据进行球面上的多项式逼近。Math. Nachr., 281, No. 5, 650-668 (2008).[11] H. F¨uhr, K. Gr¨ochenig, A. Haimi, A. Klotz, J.L. Romero. 再生核希尔伯特空间中的采样与插值密度。J. Lond. Math. Soc. (2), 96(3):663-686, 2017.[12] K. Gr¨ochenig, 采样、Marcinkiewicz–Zygmund 不等式、逼近与求积公式。逼近理论杂志，257 (2020), 105455, 20 pp.[13] K. Gr¨ochenig, J.L. Romero, J. St¨ ockler. 平移不变空间、Gabor 框架与全正函数的采样定理。数学发明，211(3):1119-1148, 2018.[14] K. Gr¨ochenig, J.L. Romero, J. Unnikrishnan, M. Vetterli. 带限场移动采样的最短轨迹。应用与计算调和分析，39(3):487-510, 2015.[15] T. Hastie, W. Stuetzle. 主曲线。美国统计学会杂志，84(406):502-512, 1989.[16] I. Krasikov. 关于 Erd´elyi–Magnus–Nevai 雅可比多项式猜想。构造性逼近，28:113–125, 2008.[17] J. Lee, J.-H. Kim, H.-S. Oh. 球面主曲线。IEEE 模式分析与机器智能汇刊，43(6):2165-2171, 2021.[18] A. Lindblad. 球面上的渐近最优 t-设计曲线。ArXiv:2408.04044, 2024.[19] A. Lindblad. t-设计曲线的渐近短推广。ArXiv:2505.03056, 2025.[20] A. Lindblad. 通过射影映射与 Hopf 映射相关联的设计。离散与计算几何，(2025). https://doi.org/10.1007/s00454-025-00805-7.[21] J. Marzo. Marcinkiewicz–Zygmund 不等式与球谐函数插值。泛函分析杂志，250 (2007), no. 2, 559-587.[22] J. Marzo and J. Ortega-Cerd`a. 球面上多项式的等价范数。国际数学研究通知，(5):Art. ID rnm 154, 18, 2008.[23] J. Marzo, B. Pridhnani. 球面上采样与插值的充分条件。构造性逼近，40 (2014), no. 2, 241–257.

[24] H.N. Mhaskar. 数据定义空间上的近似求积测度。当代计算数学——庆祝 *Ian Sloan* 八十华诞，第 1、2 卷，931-962.[25] H.N. Mhaskar, F.J. Narcowich, J.D. Ward. 球面 Marcinkiewicz-Zygmund 不等式与正求积。*Math. Comp.*，70:1113-1130, 2001.[26] J. Ortega-Cerd`a, B. Pridhnani. 紧流形上的 Carleson 测度与 Logvinenko-Sereda 集。*Forum Math.*，25 (2013), no. 1, 151–172.[27] J. Ortega-Cerd`a and B. Pridhnani. 紧流形上的 Beurling-Landau 密度。泛函分析杂志，263 (2012), no. 7, 2102–2140.[28] J. Ortega-Cerd`a, J. Saludes. Marcinkiewicz-Zygmund 不等式。逼近理论杂志，145 (2007), no. 2, 237–252.[29] A. Rashkovskii, A. Ulanovskii, I. Zlotnikov. 关于二维移动采样。*Appl. Comput.Harmon. Anal.*，62:1-23, 2023.[30]M. Reimer. 多元多项式逼近，Internat. Ser. Numer. Math., 144, Birkh¨auser Verlag, 巴塞尔，2003.[31] G. Szeg¨o. 正交多项式，第四版，美国数学学会 Colloquium Publications，第 XXIII 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛，1975.[32] NIST 数学函数数字图书馆。https://dlmf.nist.gov/.[33] J. Unnikrishnan, M. Vetterli. 使用移动传感器对空间场进行采样与重建。*IEEE Trans. Signal Process.*，61(9):2328-2340, 2013.[34]J. Unnikrishnan, M. Vetterli. 在低维流形上对高维带限场进行采样。*IEEE Trans. Inform. Theory*，59(4):2103-2127, 2013.[35] X. Yang, J. Leng, J. Li. 用于普适鲁棒量子控制的连续酉设计。*ArXiv:2601.01988*，2026.

Faculty of Mathematics, University of Vienna, Oskar-Morgenstern-Platz 1, A-1090 Vienna, Austria电子邮箱地址：martin.ehler@univie.ac.at

Faculty of Mathematics, University of Vienna, Oskar-Morgenstern-Platz 1, A-1090 Vienna, Austria电子邮箱地址：karlheinz.groechenig@univie.ac.at