arXiv:2601.04125v1 [math.CO] 7 Jan 2026

从非退化子空间子图恢复格拉斯曼图

马克·潘科夫

Abstract. 设 $\mathbb{F}$ 是一个（不一定是有限的）域。若向量空间 $\mathbb{F}^n$ 的一个子空间不包含于任何坐标超平面中，则称其为 *non-degenerate*。我们证明，当 $|\mathbb{F}| > n-k$ 时， k维子空间的格拉斯曼图$\mathbb{F}^n$可由其非退化子空间子图恢复，其中 $1 < k < n-1$。当 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ 是含有 q 个元素的域时，这个子图称为非退化线性 $[n,k]_q$ 码图。

1. Introduction

线性 $[n,k]_q$ 码是向量空间 $\mathbb{F}_q^n$的 k维子空间，其中$\mathbb{F}_q$ 是含有 q 个元素的域，参见 [13, 第1.1]节。实际上，只有非退化的此类码才可能有用；也就是说，它不包含于任何坐标超平面中，因为退化码实际上长度小于 n。非退化线性 $[n,k]_q$ 码图 $\Gamma(n, k)_q$ 是k维子空间的格拉斯曼图 $\mathbb{F}_q^n$ 的子图，由非退化子空间集合诱导而成；当且仅当两个不同的码具有最多数量的公共码字时，它们才是 $\Gamma(n,\ k)_q$ 的相邻顶点。该图最早在 [4] 中提出，相关研究在 [5, 9, 10]中继续开展。 $\Gamma(n,\ k)_q$ 的结构性质在很大程度上取决于参数 $n,\ k,\ q$ （例如参见 [4, 9]）。此外，与格拉斯曼图不同，这里不存在对偶性： k维子空间与$(n-k)$维子空间的格拉斯曼图 $\mathbb{F}_q^n$ 是同构的，但对于非退化线性码图，这一结论不成立。

[1, 2, 6, 7, 8, 11]研究了由各种类型的线性码诱导的格拉斯曼图子图。

本文证明，对于 $\mathbb{F}^n$ 中的 k 维子空间，若 $\mathbb{F}$ 是不一定有限的域，且 $1 < k < n-1$，那么当 $|\mathbb{F}| > n-k$ 时，其格拉斯曼图可以从非退化子空间子图中恢复。我们的思路与从仿射空间恢复射影空间的思路类似。回想一下，仿射空间可以通过从射影空间中去掉一个超平面得到。要恢复射影空间，只需将平行直线的等价类作为无穷远点添加到仿射空间中，这些点构成被去掉的超平面。为了恢复格拉斯曼图，我们确定非退化子空间子图中若干特殊的互不相交的极大团类，并证明此类中的团扩展为格拉斯曼图的极大团后，彼此交于一个顶点，该顶点是一个退化子空间。因此，可以通过将这些

2020 *Mathematics Subject Classification.* 51E20, 51E22.
Key words and phrases. 格拉斯曼图，线性码。

团类作为顶点添加到非退化子空间子图中，从而得到格拉斯曼图。对于 $n = 4$，存在一些技术上的差异，因此我们单独讨论这种情形。

第7节中的例子表明，如果$|\mathbb{F}| \leq n - k$，则所给出的构造是不可能的。我们猜想，在这种情况下，可以通过更复杂的方式恢复格拉斯曼图。

2. Grassmann graph and the subgraph of non-degenerate subspaces

设 $\mathbb{F}$ 是一个域（不一定是有限域）。考虑 n维向量空间$V = \mathbb{F}^n$。第 i个坐标泛函（x_1，$\ldots$，x_n）的核 $\to x_i$ 记为 C_i。V的子空间称为退化的，如果存在 C_i 包含该子空间；换言之，某个坐标泛函在此子空间上的限制为零；否则，称其为非退化。

设 $k \in \{1, \ldots, n-1\}$。格拉斯曼图 $\Gamma_k(V)$是一个简单图，其顶点为 V 的 k维子空间；当且仅当两个这样的子空间的交集为$(k-1)$维时，它们才是该图中相邻的顶点（由一条边连接的顶点）。因此，若两个 k维子空间的交集为$(k-1)$维，则称它们相邻；这等价于它们的和为$(k+1)$维。

用 $\Delta_k(V)$ 表示由非退化k维子空间集合诱导的 $\Gamma_k(V)$ 子图。换言之，$\Delta_k(V)$ 的顶点集是非退化 k维子空间的集合，并且当且仅当两个这样的子空间是 $\Gamma_k(V)$ 中的相邻顶点时，它们才是 $\Delta_k(V)$ 中的相邻顶点。若 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ 是一个含 q 个元素的域，则 k维子空间可与线性的 $[n,k]_q$码对应（见第 1.1 节），而 $\Delta_k(V)$ 是非退化线性的 $[n,k]_q$码 $\Gamma(n,\ k)_q$ 的图，相关研究见 [4, 5, 9, 10]。

对于 $k = 1$，$n-1$，图 $\Gamma_k(V)$ 和 $\Delta_k(V)$ 是完全图（任意两个不同顶点均相邻）。下文中，我们始终假设 $1 < k < n-1$，这意味着 $n \geq 4$。

定理 1. 若 $|\mathbb{F}| > n - k$，则可从非退化子空间子图 $\Delta_k(V)$恢复格拉斯曼图 $\Gamma_k(V)$。

3. Maximal cliques

3.1. 格拉斯曼图的极大团。 众所周知，$\Gamma_k(V)$ 恰有以下两类极大团：

- 由所有包含某个 $(k-1)$ 维子空间 X 的 k 维子空间组成的星 $\mathcal{S}(X)$；
- 由所有包含于某个 $(k+1)$ 维子空间 Y 的 k 维子空间组成的顶 $\mathcal{T}(Y)$。

两个不同的星或两个不同的顶的交集为空或仅含一个顶点。两个不同的星有非空交集，当且仅当相应的 $(k-1)$ 维子空间相邻。类似地，两个不同的顶有非空交集，当且仅当相应的 $(k+1)$ 维子空间相邻。

星与顶的交集为空，或包含多个顶点（当且仅当相应的 $(k-1)$ 维子空间与 $(k+1)$ 维子空间关联时，后一种情况才会出现）。在后一种情况下，该交集称为 $\Gamma_k(V)$ 的一条直线；当 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ 时，它恰好包含 $q+1$ 个顶点；而当 $k-1$ 为无限时，

则包含无穷多个顶点。星和顶以及其中包含的直线分别构成（射影）维数为 $n-k$ 和 k 的射影空间。若 $\mathbb{F}=\mathbb{F}_q$，则星和顶分别包含 $[n-k+1]_q$ 个和 $[k+1]_q$ 个顶点，其中

$$[t]_q=\frac{q^t-1}{q-1}=q^{t-1}+\cdots+q+1$$

是 PG$(t-1,q)$ 中点的数量。

3.2. 非退化子空间子图中的极大团。按照惯例，对于每个 $(k-1)$ 维子空间 X 和每个 $(k+1)$ 维子空间 Y，我们用 $\mathcal{S}^c(X)$ 和 $\mathcal{T}^c(Y)$ 分别表示星 $\mathcal{S}(X)$ 和顶 $\mathcal{T}(X)$ 与非退化子空间集合的交集。这些交集各自都是 $\Delta_k(V)$ 的团（不一定是极大团），前提是它们非空。例如，若 Y 退化，则 $\mathcal{T}^c(Y)$ 为空。只有当 $\mathcal{S}^c(X)$ 或 $\mathcal{T}^c(Y)$ 是 $\Delta_k(V)$ 的极大团时，我们才称其为 $\Delta_k(V)$ 的星或顶。如果 X 非退化，那么包含 X 的每个子空间都是非退化的，并且 $\mathcal{S}(X)=\mathcal{S}^c(X)$ 是 $\Gamma_k(V)$ 和 $\Delta_k(V)$ 中的极大团；此类团称为 $\Delta_k(V)$ 的极大星。由于 $\Delta_k(V)$ 的每个团都是 $\Gamma_k(V)$ 的团，因此 $\Delta_k(V)$ 的每个极大团都是星或顶。

命题 2。 如果 $|\mathbb{F}|\geq 3$，那么对于每个 $(k-1)$维子空间 X，$\mathcal{S}^c(X)$ 都是 $\Delta_k(V)$ 的星，并且不存在满足 $\mathcal{S}^c(X)=\mathcal{T}^c(Y)$ 的 $(k+1)$ 维子空间 Y。

证明。注意，对于每个真子空间 $Y\subset V$，都存在一个不包含于 Y中的非退化一维子空间。如果 Y不包含非退化一维子空间，这是显然的。设 $x=(x_1,\ldots,x_n)\in Y$，且每个 x_i 都非零。由于 Y由一组线性方程定义，并且 $|\mathbb{F}|\geq 3$，对于某个 i，存在非零的 x_i'，其不同于 x_i，并且将 x 中的 x_i 替换为 x_i' 所得的向量不属于 Y。

对于每个包含 X 的（$k+1$）维子空间 Y，我们取一个不包含于 Y中的非退化一维子空间 P。于是 $X+P$属于 $\mathcal{S}^c$（X），而不属于 $\mathcal{T}^c$（Y）。因此，不存在包含 $\mathcal{S}^c$（X）的 $\mathcal{T}^c$（Y）。特别地，$\mathcal{S}^c$（X）包含不止一个顶点（事实上，如果 $\mathcal{S}^c$（X）$=\{A\}$，那么对于每个包含 A 的（$k+1$）维子空间 Y，都有 $\mathcal{S}^c$（X）$\subset\mathcal{T}^c$（Y））。由于 Γ_k（V）的两个不同星的交集至多包含一个顶点，$\mathcal{S}^c$（X）是 Δ_k（V）的极大团。□

注 3. 若 $|\mathbb{F}|=2$，则只有当 X 至多包含在 $n-k-1$ 个不同的 C_i 中时，$\mathcal{S}^c(X)$ 才是 $\Delta_k(V)$ 的星，参见 [5, 命题 2]。

设 Y 是域 F 中一个维数为 $(k+1)$ 的非退化子空间。那么，从 $\mathcal{T}(Y)$ 中移除后即可得到 $\mathcal{T}^c(Y)$

$$Y\cap C_1,\ldots,Y\cap C_n$$

（对于某些不同的 i,j，$Y\cap C_i=Y\cap C_j$ 有可能成立）。由 [5, 引理 2],，我们有

$$\max\{0,[k+1]_q-n\}\leq|\mathcal{T}^c(Y)|\leq[k+1]_q-k-1.$$

命题 4. 以下断言成立：

(1) 如果 $\mathbb{F}=\mathbb{F}_q$，那么对于每个非退化(Y) 维子空间 Y， $\mathcal{T}^c(V)$ 是 $\Delta_k(k+1)$的一个顶，当且仅当

$$[k+1]_q-(q+1)>n.$$

(2) 如果 $\mathbb{F}$ 是无限的，那么对于每个非退化$(k+1)$维子空间 Y， $\mathcal{T}^c(Y)$ 都是 $\Delta_k(V)$ 的一个顶。

证明。第一个结论是已知的，参见 [5, 推论 1]。

如果 $\mathbb{F}$ 是无限的，那么 $\mathcal{T}^c(Y)$ 含有无穷多个顶点，而 Y 中退化的 k 维子空间至多有 n 个不同的，因此它们不属于 $\mathcal{T}^c(Y)$。对于每个 $(k-1)$ 维子空间 $X\subset Y$，存在无穷多个不包含 X 的 k 维子空间 Y；其中几乎所有（除有限个之外）都是非退化的，这意味着 $\mathcal{T}^c(Y)$ 不包含于 $\mathcal{S}^c(X)$。因此，不存在包含 $\mathcal{T}^c(Y)$ 的 $\mathcal{S}^c(X)$；特别地， $\mathcal{T}^c(Y)$ 含有多个顶点。由于 $\Gamma_k(V)$ 的两个不同顶的交集至多包含一个顶点， $\mathcal{T}^c(Y)$ 是 $\Delta_k(V)$ 的一个极大团。□

注意，星不是顶，反之亦然（当 $|\mathbb{F}|\geq 3$且 [9, 时参见命题 2，当一般情形时参见命题 5]）。这意味着 $\Delta_k(V)$ 的每个极大团（星或顶）至少包含三个顶点。

与格拉斯曼图中一样， $\Delta_k(V)$ 中两个不同的星或两个不同的顶的交集至多包含一个顶点。如果 $\Delta_k(V)$ 的两个不同极大团的交集包含多个顶点，则称其为 $\Delta_k(V)$ 的一条直线。只有当极大团分别为一个星和一个顶时，这才可能发生。下面的例子展示了交集恰好为一个顶点的星与顶对。

例 5。 假设 $\mathbb{F}=\mathbb{F}_q$且 $q=n-k+1\geq 3$。考虑星 $\mathcal{S}^c(X)$，其中

$$X=C_1\cap\cdots\cap C_{n-k+1}$$

（根据命题 2，这是 $\Delta_k(V)$ 的一个星）。令 P 为包含向量 $(1,\dots,1)$ 的一维子空间，并令 Q 为任意一个一维子空间，该子空间包含一个向量，其前 $n-k+1=q$ 个坐标是 $\mathbb{F}_q$ 中互不相同的元素。该 $(k+1)$- 维子空间

$$Y=X+P+Q$$

是非退化的，并且 $\mathcal{T}^c(Y)$ 是 $\Delta_k(V)$ 的一个顶（稍后将证明，对于每个非退化的 $(k+1)$ 维子空间 Y，若 $|\mathbb{F}|>n-k$，则 $\mathcal{T}^c(Y)$ 是 $\Delta_k(V)$ 的一个顶，见引理 10 ）。若 t_1、.....、t_{n-k+1}是 $\mathbb{F}_q$的元素，那么 $P+Q$ 中每个不同于 P 的一维子空间都包含向量

$$(t_i,\dots,t_i)-(t_1,\dots,t_{n-k+1},\dots)$$

对于某个 $i\in\{1,\dots,n-k+1\}$。这意味着，超平面 C_1、.....、C_{n-k+1}与 $P+Q$ 相交于彼此不同的一维子空间。属于 $\mathcal{S}(X)\cap\mathcal{T}(Y)$ 的每个 k 维子空间都是 $X+P'$，其中 P' 是 $P+Q$ 的一个一维子空间。因此， $\mathcal{S}^c(X)\cap\mathcal{T}^c(Y)$ 仅包含 $X+P$。

$\Delta_k(V)$ 的每个极大团都可以视为一种点线几何，其中直线由邻接关系定义。如果 $\mathbb{F}$ 是无限的，我们利用这一概念来刻画 $\Delta_k(V)$ 的极大星。

命题6。 以下断言成立：

(1) 当 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ 时， $\Delta_k(V)$ 的一个极大团是极大星，当且仅当它恰好包含 $[n-k+1]_q$ 个顶点。(2) 当 $\mathbb{F}$ 为无限集时， $\Delta_k(V)$ 的一个极大团是极大星，当且仅当该团连同其包含的所有直线构成一个射影空间。

证明。 $\Delta_k(V)$ 的每个极大星都是 $\Gamma_k(V)$ 的一个星，并且包含在极大星中的 $\Delta_k(V)$ 的每条直线都是 $\Gamma_k(V)$ 的一条直线，即 $\Delta_k(V)$ 的每个极大星连同其包含的所有直线构成域 $\mathbb{F}$ 上的一个 $(n-k)$ 维射影空间。

(1). 假设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$。那么， $\Delta_k(V)$ 的极大星和非极大星分别恰好包含 $[n-k+1]_q$ 个顶点和少于 $[n-k+1]_q$ 个顶点。根据 $[5, \text{引理 } 2]$, ， $\Delta_k(V)$ 的一个顶由某个 $l \in \{k+1, \ldots, n\}$ 的 $[k+1]_q - l$ 个顶点组成。如果 $2k \leq n$，那么

$$[n-k+1]_q \geq [k+1]_q,$$

即 $\Delta_k(V)$ 中不同于极大星的每个极大团都包含少于$[n-k+1]_q$ 个顶点。如果 $2k > n$，那么

$$[k+1]_q - n > [n-k+1]_q$$

（详见 $[5, \text{引理 } 4]$ ）这意味着 Δ_k（V）的每个顶都包含多于 $[n-k+1]_q$ 个顶点；因此，由 $[n-k+1]_q$ 个顶点组成的 Δ_k（V）的每个极大团都是极大星。

（2）。假设 $\mathbb{F}$ 是无限的。每个非极大星 $\mathcal{S} = \mathcal{S}^c$（$X$）及其包含的所有直线，构成了从与 $\mathcal{S}$（X）相关的射影空间中去除有限个超平面 H_1、.....、 H_m后得到的点线几何。在这个射影空间中，我们取由属于$\mathcal{S}$的点 X_1、 X_2、 X_3 张成的平面。令 ℓ_1、 ℓ_2、 ℓ_3 为射影空间中连接不同的 X_i 和 X_j的直线。由于$\mathbb{F}$ 是无限的，该平面包含两条不同的直线 ℓ、 ℓ' ，它们经过某个超平面 H_i 上的一点，并且与每个 ℓ_j 相交于一个属于 $\mathcal{S}$的点。考虑点线几何 $\mathcal{S}$ 中由 X_1、 X_2、 X_3张成的子空间 $\mathcal{X}$ 。它包含直线 $\ell_j \cap \mathcal{S}$、 $j \in \{1,2,3\}$。这两条直线中的每一条都与 $\ell \cap \mathcal{S}$和 $\ell' \cap \mathcal{S}$相交，这意味着后两条直线包含在 $\mathcal{X}$中。由于 $\ell \cap \mathcal{S}$ 和 $\ell' \cap \mathcal{S}$不相交， $\mathcal{X}$ 不是射影平面，因此点线几何 $\mathcal{S}$ 不是射影空间。

类似地，每个顶 $\mathcal{T} = \mathcal{T}^c(Y)$ 连同其包含的所有直线，都是由与 $\mathcal{T}(Y)$ 相关的射影空间去掉有限个点 Y_1、.....、 Y_m 后得到的点线几何。由于 $\mathbb{F}$是无限的，这个射影空间包含一个平面 $\mathcal{Y}$，其中恰有一个 Y_i。于是 $\mathcal{Y} \setminus \{Y_i\}$ 是 $\mathcal{T}$的一个子空间，但它不是射影平面；也就是说，点线几何 $\mathcal{T}$不是射影空间。□

$\Delta_k(V)$ 的顶和非极大星可以通过它们与极大星的交集来刻画。

命题 7。 $\Delta_k(V)$ 中不同于极大星的极大团是顶，当且仅当它与每个极大星的交集为空集或是一条直线。 $\Delta_k(V)$ 中不同于极大星的极大团是非极大星，当且仅当存在一个极大星与该团的交集恰好为一个顶点。

证明。 如果顶 $\mathcal{T}^c(Y)$ 与极大星 $\mathcal{S}(X)$ 的交集非空，那么非退化的 $k-1$ 维子空间 X 包含于 Y 中，这意味着该交集是一条直线。

我们需要证明，对于每个非极大星 $\mathcal{S}^c(X)$，都存在一个极大星与 $\mathcal{S}^c(X)$ 相交且恰好只有一个顶点。任取一个向量 x，使得 x 的所有坐标都非零。于是 $x \notin X$（因为 X 是退化的），并且存在一个包含 x、与 X 相交于一个 $k-2$ 维子空间的非退化 $k-1$ 维子空间 X'。极大星 $\mathcal{S}(X')$ 即符合要求。□

4. Recovering of the Grassmann graph via stars or tops of the graph of non-degenerate subspaces

考虑简单图 Δ_s 和 Δ_t，其顶点分别是$\Delta_k(V)$的星和顶；其边定义如下：两个不同的极大团 $\mathcal{X}_1$ 和 $\mathcal{X}_2$（类型相同）是图 $\Delta_x, x \in \{s,t\}$中的相邻顶点，当且仅当对于每个 $i \in \{1,2\}$，$\mathcal{X}_i$ 的每个顶点都与 $\mathcal{X}_{3-i}$的至少一个顶点相邻。例如，若 $\mathcal{X}_1$ 和 $\mathcal{X}_2$ 有非空交集（由于它们是类型相同的不同极大团，该交集是一个顶点），则满足此条件。从 Δ_x 中删除连接这类团对的所有边后，我们得到一个简单图，记作 Δ'_x。因此，Δ_x 和 Δ'_x具有相同的顶点集；两个不同的极大团（相应类型）是 Δ'_x 中的相邻顶点，当且仅当它们在 Δ_x 中相邻且交集为空。由于 Δ'_x 是 Δ_x的子图，Δ'_x 的每个极大团都是 Δ_x的一个团（不一定是极大的）。

$\Delta_k(V)$ 的一组星或一组顶被称为特殊的，如果它在 Δ_s 和 Δ'_s 或 Δ_t 和 Δ'_t 中分别是一个极大团。

现在考虑简单图 Γ_s 和 Γ_t，它们的顶点分别是非退化的 k 维子空间（$\Delta_k(V)$ 的顶点）以及星特殊集或顶特殊集。Γ_x、$x \in \{s,t\}$ 的边定义如下：

- 两个非退化的 k 维子空间是 Γ_x 的相邻顶点，当且仅当它们相邻。
- 一个非退化的 k 维子空间与一个星或顶的特殊集之间存在一条边，当且仅当该子空间是属于该特殊集的某个团中的顶点。
- 两个不同的星特殊集是 Γ_s 的相邻顶点，当且仅当有一颗星同时属于这两个特殊集。
- 当且仅当存在一个 $\Delta_k(V)$的星与属于 $\mathfrak{T}_i$的每个顶都有非空交集时，$\mathfrak{T}_1$ 和 $\mathfrak{T}_2$ 这两个不同的顶集才是 Γ_t 的相邻顶点 $i \in \{1,2\}$。

定理 8. 设 $|\mathbb{F}| > n-k$。则以下断言成立：
(1) 若 $k \geq 3$，则图 Γ_s 与 $\Gamma_k(V)$之间存在一个同构，其在 $\Delta_k(V)$ 上的限制为恒等映射。(2) 若 $k \leq n-3$，则图 Γ_t 与 $\Gamma_k(V)$之间存在一个同构，其在 $\Delta_k(V)$ 上的限制为恒等映射。

由于可以根据相邻关系、基数和交集确定 $\Delta_k(V)$的极大团类型（命题 6 和 7），若 $|\mathbb{F}| > n-k$ 和 $n \geq 5$，定理 8 就给出了从 $\Delta_k(V)$恢复 $\Gamma_k(V)$的两种可能。因此，若 $n \geq 5$，定理 1 可由定理 8 及命题 6 和 7 推出。

我们假设 $|\mathbb{F}| > n-k$。在第 5 节中，我们证明图 Δ_s 和Δ_t 分别同 $\Gamma_{k-1}(V)$ 和 $\Delta_{k+1}(V)$ 同构。特别地，Δ_s 在 $k=2$ 时是一个完全图，而 Δ_t 在 $k=n-2$时是一个完全图。因此，

当 $n = 4$ 时，不存在特殊星集，也不存在特殊顶集。在这种情况下，可以通过 Δ'_t 的一类极大团恢复格拉斯曼图（第 6 节）。

5. Proof of Theorem 8

本节中，我们始终假设 $|\mathbb{F}| > n - k$。回顾一下， $1 < k < n - 1$，因此 $n \geq 4$。

5.1. 引理。

为证明定理 8，我们将使用以下引理。

引理9。 对于任意非退化的$(k+1)$维子空间 Y以及任意$(k-1)$维子空间 $X \subset Y$，存在一个非退化的 k维子空间 A，满足 $X \subset A \subset Y$。

证明。 取任意一个满足 $L + X = Y$ 的二维子空间 L。令 I 为所有满足 X 包含于坐标超平面 C_i 的 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 的集合。若 $i \in I$，则 C_i 不包含 L（否则 $Y = L + X$ 包含于 C_i，这与 Y 非退化的假设矛盾），也就是说， C_i 与 L 相交于一个一维子空间。注意， L 恰好包含 $|\mathbb{F}| + 1$ 个不同的一维子空间。由于

$$|I| \leq n - \dim X = n - k + 1 < |\mathbb{F}| + 1,$$

存在一个一维子空间 $P \subset L$，当 $i \in I$ 时，它不包含于 C_i。k 维子空间 $A = X + P$ 是非退化的。事实上，若 $A \subset C_i$，则 $X \subset C_i$，这意味着 $i \in I$，因而 $P \not\subset C_i$，矛盾。□

引理 10. 对于每个非退化的$(k+1)$维子空间 Y，集合 $\mathcal{T}^c(Y)$ 是 $\Delta_k(V)$ 的一个顶。

证明。 若 $\mathbb{F}$ 是无限的，则由命题 4 的陈述 (2) 可得此结论。设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$。根据命题 4 的陈述 (1)，只需证明条件 $|\mathbb{F}| = q > n - k$ 能保证

$$[k+1]_q - (q+1) > n.$$

若 $k = 2$，则

$$q^2 > (n-2)^2 \geq n$$

（因为 $n \geq 4$），由此可得所需的不等式。此处我们不再证明 $k \geq 3$ 的情形，而是采用一些简单的几何推理。

由引理9， $\mathcal{T}^c(Y)$非空。若 $\mathcal{T}^c(Y)$不是 $\Delta_k(V)$的极大团，则它包含于 $\Delta_k(V)$的某个极大团中，即一个星或一个顶。在第二种情况下，$\mathcal{T}^c(Y)$恰好包含一个顶点。因此，存在一个$(k-1)$维子空间 X，包含于属于 $\mathcal{T}^c(Y)$的所有 k维子空间中。我们任取一个$(k-1)$维子空间 $X' \subset Y$，使得

$$\dim(X \cap X') = k - 3$$

（回想一下，根据我们的假设， $k \geq 3$）。引理9意味着存在一个包含 X'的 $A \in \mathcal{T}^c(Y)$。于是， X 和 X' 都包含于 k维子空间A 中，这意味着

$$\dim(X \cap X') \geq k - 2,$$

矛盾。 □

引理11。 如果 $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}^c(X_i)$、 $i \in \{1,2\}$ 是 $\Delta_k(V)$ 的不同星，则以下条件等价:

(1) X_1 和 X_2 相邻，(2) 对于任意的 $A \in \mathcal{S}_i$、 $i \in \{1,2\}$，都存在与 A相邻的 $B \in \mathcal{S}_{3-i}$。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2)。若 $A \in \mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_{3-i}$，则(2)显然成立。设 $A \in \mathcal{S}_i \setminus \mathcal{S}_{3-i}$。由于 X_1 和 X_2 相邻，子空间 $A + X_{3-i}$ 的维数为$(k+1)$。它也是非退化的（因为包含非退化子空间 A）。根据引理9，存在一个包含 X_{3-i}的非退化 k维子空间 $B \subset A + X_{3-i}$。于是$B \in \mathcal{S}_{3-i}$ 与 A相邻。

(2) $\Rightarrow$ (1)。若 $k = 2$，这显然成立（任意两个不同的一维子空间都相邻）。设 $k \geq 3$。证明若 X_1 和 X_2 不相邻，则(2)不成立。假设

$$\dim(X_1 \cap X_2) \leq k - 3$$

且满足 (2)。那么 $A \in \mathcal{S}_1$ 与 $B \in \mathcal{S}_2$ 相邻，这意味着X_1 和 X_2 包含在维数为 $(k+1)$ 的子空间 $A + B$中。因此,

$$\dim(X_1 \cap X_2) = k - 3$$

这意味着

$$\dim(X_1 + X_2) = k + 1.$$

由于 $\mathcal{S}_i$ 是 $\Delta_k(V)$ 的一个星，因此存在不包含在维数为 $(k+1)$ 的子空间 $X_1 + X_2$ 中的 $A \in \mathcal{S}_i$。根据 (2)， A 与某个 $B \in \mathcal{S}_{3-i}$相邻。维数为 $(k+1)$ 的子空间 $A + B$ 包含 X_1， X_2，因此与 $X_1 + X_2$重合。这与 A 不包含在 $X_1 + X_2$中的事实矛盾。□

引理 12。 若 $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}^c(Y_i)$、 $i \in \{1,2\}$ 是 $\Delta_k(V)$的不同顶，则以下条件等价:

(1) Y_1 与 Y_2 相邻，(2) 对于任意 $A \in \mathcal{T}_i$、 $i \in \{1,2\}$，都存在一个与 A相邻的 $B \in \mathcal{T}_{3-i}$。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2)。若 $A \in \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_{3-i}$，则 (2) 显然成立。设 $A \in \mathcal{T}_i \setminus \mathcal{T}_{3-i}$。那么，$A$ 和 $Y_1 \cap Y_2$ 是 Y_i 中两个不同的 k 维子空间，它们的交集是一个 $(k-1)$ 维子空间 X'。由于 $X' \subset Y_{3-i}$，引理9表明存在一个包含 X'的非退化 k 维子空间 $B \subset Y_{3-i}$。因此， $B \in \mathcal{T}_{3-i}$与 A相邻。

(2) $\Rightarrow$ (1)。若 $k = n - 2$，则显然成立（任意两个不同的 $(n-1)$ 维子空间都相邻）。设 $k \leq n - 3$。证明: 若 Y_1 和 Y_2 不相邻，则 (2) 不成立。假设

$$\dim(Y_1 \cap Y_2) < k$$

且 (2) 成立。那么存在相邻的 $A \in \mathcal{T}_1$ 和 $B \in \mathcal{T}_2$。它们的交集是一个包含于 $Y_1 \cap Y_2$ 中的 $(k-1)$ 维子空间，这意味着

$$\dim(Y_1 \cap Y_2) = k - 1.$$

由于 $\mathcal{T}_i$ 是 $\Delta_k(V)$ 的一个顶，因此存在不包含 $Y_1 \cap Y_2$ 的 $A \in \mathcal{T}_i$。于是， A 与 Y_{3-i} 的交是一个维数小于 $k-1$ 的子空间，因此不存在与 A 相邻的 $B \in \mathcal{T}_{3-i}$，矛盾。□

5.2. **通过星恢复**。 由于 $1 < k < n-1$，我们有 $|\mathbb{F}| > n-k \geq 2$，而命题 2 表明，对于每个 $(k-1)$ 维子空间 X， $\mathcal{S}^c(X)$ 都是 $\Delta_k(V)$ 的一个星。

回顾一下，图 Δ_s 和 Δ'_s 的顶点集是 Δ_k（V）的星的集合。当且仅当对于每个$i \in \{1,2\}$， $\mathcal{S}_i$ 的每个顶点都与 $\mathcal{S}_{3-i}$的至少一个顶点相邻时，两个不同的星 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 才是 Δ_s 的相邻顶点。根据引理11，这等价于相应的（$k-1$）维子空间相邻。因此，图 Δ_s 同构于 Γ_{k-1}（V）；特别地，当 $k = 2$时， Δ_s 是一个完全图。

当且仅当两个不同的星在 Δ_s 中相邻且其交集为空时， Δ_k（V）的两个不同的星才是 Δ'_s 的相邻顶点；等价地，相应的（$k-1$）维子空间的和是一个退化的 k 维子空间。后者意味着这些星是非极大的。因此， Δ_k（V）的每个极大星都是 Δ'_s 的孤立顶点，而 Δ'_s 中包含多个顶点的团由非极大星构成。

对于一个退化的 k维子空间 X，记 $\mathfrak{S}_X$ 为Δ_k（V）的所有星的集合，其中相应的（$k-1$）维子空间都包含于X，换言之，它们构成由 X定义的 Γ_{k-1}（V）的顶。当 $k \geq 3$时，这是 Δ_s 和 Δ'_s中的极大团，即一个特殊星集。对于 $k = 2$，该团在 Δ_s中不是极大的。

引理13. 若 $k \geq 3$ 且 $\mathfrak{S}$ 是一个特殊星集，则对于某个退化的 k维子空间 X，有 $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_X$。

证明. 由于 $\mathfrak{S}$ 是 Δ_s的极大团，与 $\mathfrak{S}$ 中各星相对应的（$k-1$）维子空间在 Γ_{k-1}（V）中构成一个极大团 $\mathcal{X}$。于是， $\mathfrak{S}$ 是 Δ'_s 的一个包含多个顶点的团，因此它由非极大星构成，这意味着 $\mathcal{X}$ 由退化子空间组成。由于$k \geq 3$， $\mathcal{X}$是 Γ_{k-1}（V）的一个星或顶。

设 $\mathcal{X}$ 是由 X 这个 k 维子空间定义的 $\Gamma_{k-1}(V)$ 的顶。对于任意不同的 A， $B \in \mathcal{X}$，$\Delta_k(V)$ 中对应的星在 Δ'_s 中相邻，这意味着 $A + B = X$ 是退化的。因此， $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_X$。

设 $\mathcal{X}$ 是由 Z 这个 $(k-2)$ 维子空间定义的 $\Gamma_{k-1}(V)$ 的星。那么 Z 是退化的（因为它包含于退化子空间中）。若 P 是一个非退化的一维子空间，则 $P \not\subset Z$，且 $Z + P$ 这个 k 维子空间是非退化的。极大星 $\mathcal{S}(Z + P)$ 不属于 $\mathfrak{S}$，但它在 Δ_s 中与 $\mathfrak{S}$ 的所有星都相邻。因此，团 $\mathfrak{S}$ 不是 Δ_s 中的极大团。□

如上所述，设 $k \geq 3$。令 f 为 Γ_s 与 $\Gamma_k(V)$ 的顶点集之间的双射，它将每个非退化的 k 维子空间映到自身，并将每个特殊集 $\mathfrak{S}_X$ 映到 X。显然， f 在所有非退化的 k 维子空间构成的集合上的限制双向保持邻接。非退化的 k 维子空间 A 与特殊集 $\mathfrak{S}_B$ 在 Γ_s 中相邻，当且仅当 A 属于 $\mathfrak{S}_B$ 中的某个星。两个不同的特殊集 $\mathfrak{S}_A$ 和 $\mathfrak{S}_B$ 在 Γ_s 中相邻，当且仅当存在一个同时属于 $\mathfrak{S}_A$ 和 $\mathfrak{S}_B$ 的星。这些条件中的每一个都等价于存在一个包含于二者之中的 $(k-1)$ 维子空间 A，B，而这当且仅当 A 与 B 相邻。因此， f 是一个图同构。

5.3. **通过顶恢复**。 根据引理 10，对于每个非退化的 Y 维子空间， $\mathcal{T}^c(Y)$ 都是 $\Delta_k(V)$ 的一个顶。

图 Δ_t 和 Δ'_t 的顶点集是 $\Delta_k(V)$ 的顶的集合。两个不同的顶 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 是 Δ_t 的相邻顶点，当且仅当对于每个 $i \in \{1,2\}$， $\mathcal{T}_i$ 的每个顶点都与 $\mathcal{T}_{3-i}$ 的至少一个顶点相邻。根据引理 12，这等价于对应的 $k+1$ 维子空间相邻。因此，图 Δ_t 与 $\Delta_{k+1}(V)$ 同构；特别地，当 $k = n-2$ 时， Δ_t 是完全图。

$\Delta_k(V)$ 的两个不同顶是 Δ'_t 的相邻顶点，当且仅当它们在 Δ_t 中相邻，且它们的交集为空；等价地，对应的 $(k+1)$ 维子空间的交集是一个退化的 k 维子空间。

对于一个退化的 k 维子空间 X，记 $\mathfrak{T}_X$ 为 $\Delta_k(V)$ 中所有满足以下条件的顶的集合：对应的非退化 $(k+1)$ 维子空间包含 X。若 $k \le n-3$，则 $|\mathbb{F}| > n-k \ge 3$；命题 2 表明，包含 X 的非退化 $(k+1)$ 维子空间构成 $\Delta_{k+1}(V)$ 的一个星，这意味着 $\mathfrak{T}_X$ 在 Δ_t 和 Δ'_t 中都是极大团，即一个特殊顶集。对于 $k = n-2$，该团在 Δ_t 中不是极大的。

引理 14. 若 $k \le n-3$ 和 $\mathfrak{T}$ 是一个特殊顶集，则对于某个退化的 k维子空间 X，有 $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_X$。

证明。由于 $\mathfrak{T}$ 是 Δ_t的极大团，与 $\mathfrak{T}$ 中的顶对应的非退化（$k+1$）维子空间在 $\Delta_{k+1}(V)$中构成一个极大团 $\mathcal{X}$。根据 $k \le n-3$，它是 $\Delta_{k+1}(V)$的一个星或一个顶。

假设 $\mathcal{X}$ 是由 k维子空间 X定义的 $\Delta_{k+1}(V)$的星。对于任意不同的 A， $B \in \mathcal{X}$，对应的 $\Delta_k(V)$的顶在 Δ'_t中相邻，这意味着 $A \cap B = X$ 是退化的。因此， $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_X$。

假设 $\mathcal{X}$ 是由非退化（$k+2$）维子空间 Z定义的 $\Delta_{k+1}(V)$的顶。设 $\mathcal{T}^c(Y)$是属于 $\mathfrak{T}$ 的一个顶，并设 $A \in \mathcal{T}^c(Y)$。取任意满足 $A \subset Y' \subset Z$ 且不同于 Y的（$k+1$）维子空间 Y'。于是 Y' 是非退化的（因为它包含非退化子空间 A）。由于$Y \cap Y' = A$，顶 $\mathcal{T}^c(Y)$和 $\mathcal{T}^c(Y')$在 Δ'_t 中不相邻，因此，$\mathcal{T}^c(Y')$不属于 $\mathfrak{T}$。另一方面， $Y' \subset Z$，因此 $\mathcal{T}^c(Y')$与 $\mathcal{T}$中的所有顶在 Δ_t中相邻。所以，团 $\mathcal{T}$不是 Δ_t中的极大团。□

如上所述，我们假设 $k \le n-3$。设 f 为 Γ_t 与 $\Gamma_k(V)$ 的顶点集之间的双射，它将每个非退化的 k 维子空间映到自身，并将每个特殊集 $\mathfrak{T}_X$ 映到 X。 f 在所有非退化的 k 维子空间组成的集合上的限制在两个方向上都保持邻接。非退化的 k 维子空间 A 与特殊集 $\mathfrak{T}_B$ 在 Γ_t 中相邻，当且仅当 A 属于 $\mathfrak{T}_B$中的某个顶。这等价于存在一个同时包含 A， B 的 $(k+1)$ 维子空间；而这当且仅当A 与 B 相邻。

两个不同的特殊集 $\mathfrak{T}_A$ 与 $\mathfrak{T}_B$ 在 Γ_t 中相邻，当且仅当 A 与 B 相邻。

若 $\mathfrak{T}_A$ 和 $\mathfrak{T}_B$ 在 Γ_t中相邻，则存在一个 Δ_k（V）的星 $\mathcal{S}^c$（Z），它与来自 $\mathfrak{T}_A$ 和 $\mathfrak{T}_B$的所有顶相交。因此， Z 包含于每个包含 A的非退化（$k+1$）维子空间中。这样的子空间至少有两个，这意味着 $Z \subset A$。类似地，我们得到 $Z \subset B$。由于 Z 是（$k-1$）维的， A 和 B 相邻。

假设 A 和 B 相邻。根据引理9，每个包含 A 的非退化（$k+1$）维子空间都包含一个含有 $A \cap B$ 的非退化 k 维子空间。因此，星 $\mathcal{S}^c$（$A \cap B$）与来自 $\mathfrak{T}_A$ 的每个顶相交。同样，该星也与来自 $\mathfrak{T}_B$ 的每个顶相交。由此可得， $\mathfrak{T}_A$ 和 $\mathfrak{T}_B$ 在 Γ_t 中相邻。

6. Proof of Theorem 1 for $n = 4$

假设 $n = 4$ 和 $k = 2$。那么 $|\mathbb{F}| > n - k = 2$。图 Δ_s 和 Δ_t是完全图，并且我们确定了 Δ'_s 和 Δ'_t的极大团。

格拉斯曼图 Δ'_s 中的两个不同的 $\Delta_k(V)$ 是相邻顶点，当且仅当对应的一维子空间的和是退化的。这表明， Δ'_s恰有以下两类极大团：

- 一个孤立顶点，它是一个极大星，
- 所有星的集合，其中对应的一维子空间都包含在某个 C_i中。

因此，很难利用图 Δ'_s 来恢复 $\Gamma_k(V)$。

考虑图 Δ'_t。如上一节所述，对于每个退化的 2 维子空间 X ，我们用 $\mathfrak{T}_X$ 表示 $\Delta_k(V)$ 的所有顶的集合，其中相应的 3 维子空间包含 X。这是 Δ'_t 的一个团。我们将证明这类团是极大的，并根据基数和交集对其进行刻画。

设 $\mathcal{P}^*$ 是与 V 相关联的射影空间的对偶射影空间。回顾一下， $\mathcal{P}^*$ 的点和直线分别对应于 V 的 3 维和 2 维子空间。与坐标超平面 C_1, C_2, C_3, C_4 对应的 $\mathcal{P}^*$ 的点将分别记为 c_1, c_2, c_3, c_4，并称为退化点。注意， $\mathcal{P}^*$ 由所有退化点张成，且任意三个彼此不同的退化点都不共线。

$\mathcal{P}^*$ 中的其余点称为非退化点。此类点与 $\Delta_k(V)$ 的顶相对应，也就是 Δ'_t 的顶点。 $\mathcal{P}^*$ 的一条直线包含退化点，当且仅当 V 中对应的二维子空间是退化的。因此， $\mathcal{P}^*$ 中两个不同的非退化点是 Δ'_t 中相邻的顶点，当且仅当连接它们的直线包含退化点。

命题 15. 对于每个退化的2维子空间 X ，团 $\mathfrak{T}_X$ 是极大的。

证明。 由于 $|\mathbb{F}| \geq 3$， $\mathcal{P}^*$ 的每条直线至少包含四个点。设 $\mathcal{P}^*$ 中与 X 对应的直线为 ℓ 。

假设 ℓ 恰好包含一个退化点。那么 ℓ 上至少有三个非退化点。如果点 $p \notin \ell$ 在 Δ'_t 中与这三个点相邻，那么连接这些点与 p 的直线包含其余三个退化点。这意味着所有退化点都位于由 ℓ 和 p 张成的平面内，这与 $\mathcal{P}^*$ 由所有退化点张成这一事实矛盾。

如果 ℓ 包含两个退化点，那么 ℓ上至少有两个非退化点。如果点 $p \notin \ell$ 在 Δ'_t中与这两个点相邻，那么连接这两个点与 p的直线上包含其余两个退化点。由上可知，这会导致矛盾。□

由 V 的退化二维子空间（经过退化点的 $\mathcal{P}^*$ 的直线）定义的 Δ'_t 极大团称为线性的。证明存在

Δ_t' 的非线性极大团，即不包含于 $\mathcal{P}^*$ 的直线中的极大团。

考虑由 c_1、c_2、c_3 张成的平面，以及该平面内一条经过 c_1 、但不包含 c_2 和 c_3的直线 ℓ 。取不同于 c_1 且不属于连接 c_2 和 c_3 的直线的不同点 p_2、$p_3 \in \ell$（这样的点存在，因为 $|\mathbb{F}| \geq 3$ 和 ℓ 至少包含四个点）。若 p_1 分别是连接 c_2 与 c_3 、 p_2 与 p_3 的直线的交点，则 p_1、p_2、p_3 在 $\mathcal{P}^*$ 中不共线，且在 Δ_t'中两两相邻。包含这些点的 Δ_t' 的极大团即为所需。

引理 16. Δ_t' 的每个非线性极大团都满足以下断言：

(1) 它包含于由三个退化点张成的某个平面中；(2) 它至多包含四个顶点；
(3) 它不与连接任意一对退化点的直线相交。

证明。令 $\mathcal{X}$ 为包含三个不共线点p_1、p_2、p_3的 Δ_t' 极大团。由于由 p_1、p_2、p_3 张成的平面至多包含三个退化点，因此连接任意两个不同p_i的直线上恰有一个退化点。这保证了连接成对退化点的直线上不包含p_1、p_2、p_3。

因此， p_1、p_2、p_3 属于由三个退化点张成的平面。不失一般性，假设这些退化点为 c_1、c_2、c_3。若 $p \in \mathcal{X}$ 不在此平面上，则连接 p 与 p_1、p_2、p_3 的每条直线都经过 c_4，这是不可能的。因此， $\mathcal{X}$ 包含于由 c_1、c_2、c_3张成的平面中。

假设 $p \in \mathcal{X}$ 与 p_1、p_2、p_3不同。证明命题 15 时所用的论证表明， $\mathcal{X}$的任意三个互不相同的顶点都是 $\mathcal{P}^*$中的不共线点。于是，连接 p 与 p_1、p_2、p_3 的直线互不相同，且每条直线上恰有一个 c_1、c_2、c_3。若 $q \in \mathcal{X}$与 p_1、p_2、p_3、p不同，则连接 p 和 q 的直线上包含 c_1、c_2、c_3 中的一个，因此这条直线上包含 p_1、p_2、p_3中的一个，这是不可能的。因此， $\mathcal{X} = \{p_1, p_2, p_3, p\}$。

上文已证明，连接成对退化点的直线不包含 p_1， p_2， p_3。对不共线的点 p_1，p_2， p应用相同的论证，可得这些直线不包含 p。□

命题 17。 设 $|\mathbb{F}| \geq 6$。那么， Δ_t' 的一个极大团是线性的，当且仅当它至少包含五个顶点。

证明。 $\mathcal{P}^*$ 的一条直线至少包含 $|\mathbb{F}| - 1$ 个非退化点。因此，每个线性极大团至少包含五个顶点。根据引理 16，非线性极大团至多包含四个顶点。□

对于一条经过退化点的 $\mathcal{P}^*$ 直线，以下几种情况之一成立：

(1) 它不包含在由三个退化点张成的平面内；(2) 它经过两个不同的退化点；
(3) 它包含在由三个退化点张成的某个平面内，且情况 (2) 不成立。

Δ_t'的一个线性极大团称为型，如果 $\mathcal{P}^*$ 中对应的直线满足 (m)。

命题18。 若 $\mathbb{F}=\mathbb{F}_q$，则以下断言成立：

(1) 当且仅当 Δ_t' 的一个极大团与 Δ_t' 的任意其他极大团的交集至多包含一个顶点时，它是类型为 1 或 2 的线性极大团。(2) 类型为 1 或 2 的线性极大团，当且仅当它由 $q-1$ 个顶点组成时，是类型为 2 的线性极大团。(3) 当且仅当 Δ_t' 的一个极大团与类型为 2 的线性极大团相交时，且该极大团不是类型为 1 或2 的线性极大团，它是类型为 3 的线性极大团。

证明。 (1). 两个不同的 Δ_t' 线性极大团的交集至多包含一个顶点。

类型 1 的线性极大团对应于 $\mathcal{P}^*$ 中一条不包含在由三个退化点张成的平面内的直线。根据引理 16 的陈述 (1)，这样的团与 Δ_t' 的每个非线性极大团的交集至多包含一个顶点。因此，类型 1 的每个线性极大团与 Δ_t' 的任意其他极大团的交集至多包含一个顶点。

类型 2 的线性极大团也同样如此，因为根据引理 16 的陈述 (3)，它们与非线性极大团不相交。

对于每个类型 3 的线性极大团，都存在一个非线性极大团与该团恰好交于两个顶点（参见引理 16 之前非线性极大团的构造）。类似地，对于每个非线性极大团，都存在一个类型 3 的线性极大团与该团恰好交于两个顶点。

(2). 这是显然的。

(3). 不是类型 1 或 2 的线性极大团的极大团，要么是类型 3 的线性极大团，要么是非线性极大团。引理 16 的陈述 (3) 给出了所需结论。

命题17和命题18通过基数和交集刻画了线性极大团。考虑一个简单图，其顶点为非退化二维子空间和线性极大团，边的定义与第4节中的图相同。第5.3小节中的论证表明，将每个非退化二维子空间映射到其自身，并将每个映射到的映射，是与之间的同构。

7. Final remarks

本节将说明为什么我们的方法不适用于一般情形。最后两条备注阐述了与 [5] 和 [12] 中所得结果的关系。

对例 5 作如下修改，可以看出当 $|\mathbb{F}|\leq n-k$时，引理9不成立。

例19。 设 $\mathbb{F}=\mathbb{F}_q$和 $q=n-k$。与例 5 中一样，我们取

$$X=C_1\cap\cdots\cap C_{n-k+1}.$$

令 P为包含向量 (0，1，.....，1) 的一维子空间，并令 Q为任意一个包含某个向量的一维子空间

$$(1,t_1,\ldots,t_{n-k},\ldots),$$

其中 $t_1,\ldots,t_{n-k}$是 $\mathbb{F}_q$的元素。因此， P包含于 C_1中。 $P+Q$ 中每个不同于 P 的一维子空间都包含向量

$$(0,t_i,\ldots,t_i)-(1,t_1,\ldots,t_{n-k},\ldots)$$

对于某个 $i \in \{1, \ldots, n-k\}$，因此，该子空间包含于某个 $j \in \{2, \ldots, n-k+1\}$对应的 C_j中。$(k+1)$ 维子空间

$$Y = X + P + Q$$

是非退化的（因为 $P+Q$ 是非退化的）。 $P+Q$的每个包含 X的 k维子空间都是 $X+P'$，其中 P'是 $P+Q$的一个一维子空间。上文已证明，对于某个 $j \in \{1, \ldots, n-k+1\}$， P'包含于 C_j中。于是$X + P' \subset C_j$。因此， Y中所有包含 X 的 k维子空间都是退化的。

如果 $|\mathbb{F}| \leq n-k$，那么引理11中的蕴含关系（1） $\Rightarrow$ （2）不成立。

例 20。 设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$且 $q = n-k \geq 3$。令 X， P， Q， Y如例19中所述。考虑以下（$k-1$）维子空间

$$X_1 = X \text{ and } X_2 = X' + P,$$

其中 X'是 X的一个（$k-2$）维子空间。这些子空间相邻。 k维子空间

$$A_2 = X_2 + Q = X' + P + Q$$

是非退化的，并且属于星 $\mathcal{S}^c(X_2)$。注意到

$$X_1 + A_2 = X + A_2 = X + P + Q = Y.$$

如果 $A_1 \in \mathcal{S}^c(X_1)$ 与 A_2 相邻，那么 $A_1 + A_2$ 是一个包含 X_1 和 A_2 的（$k+1$）维子空间。这意味着 $A_1 + A_2 = Y$，从而 $A_1 \subset Y$。于是， A_1 是 Y 的一个包含 $X_1 = X$ 的非退化 k维子空间，这与例19矛盾。因此，不存在与 A_2 相邻的 $A_1 \in \mathcal{S}^c(X_1)$。

注记 21。 如果 $|\mathbb{F}| \leq n-k$，那么对于 $\Delta_k(V)$ 的星 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$，它们分别对应于（$k-1$）维子空间 X_1 和 X_2，我们无法区分以下两种可能性：

- X_1， X_2 是退化的，且 $\dim(X_1 \cap X_2) = k-2$;
- X_1， X_2 是非退化的，且 $\dim(X_1 \cap X_2) = k-3$。

对于这些情形中的每一种，我们都有 $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$，并且存在相邻的 $A_1 \in \mathcal{S}_1$ 和 $A_2 \in \mathcal{S}_2$。在第一种情形中，对于任意非退化一维子空间 $P \not\subset X_1 + X_2$，我们取 $A_i = X_i + P$, $i \in \{1, 2\}$。在第二种情形中， $X_1 + X_2$ 是一个非退化的（$k+1$）维子空间，且包含于该子空间中的任意 $A_i \in \mathcal{S}_i$, $i \in \{1, 2\}$ 都符合要求。

注 22. 根据定理 1，若 $|\mathbb{F}| > n-k$，则 $\Delta_k(V)$ 的每个自同构都是 $\Gamma_k(V)$ 的自同构。格拉斯曼图的自同构已有所研究（例如，见 [3]）。 $\Gamma_k(V)$ 的每个自同构都由 V 的半线性自同构或从 V 到 V^* 的半线性同构诱导（仅当 $n = 2k$ 时，后一种情形才会出现）。利用这些事实，我们可以证明，在假设 $|\mathbb{F}| > n-k$ 的条件下，$\Delta_k(V)$ 的每个自同构都由 V 的单项式半线性自同构诱导。在 [5], 中，对于非退化线性 $[n, k]_q$ 码的图，无需任何假设也得到了同样的结果。利用极大团，可将一般情形归结为 $k = 2$ 的情形；在后一情形中，则运用了若干类似射影几何基本定理的论证。见 [9, 10], 其中有更强的结果。

注 23. 关于从点线几何的子集恢复点线几何的一些结果，可见 [12]。设 $\mathcal{W}$ 是点线几何的一个子集。$\mathcal{W}$ 的指标定义为满足以下条件的数 λ：存在一条直线恰好包含 λ 个属于 $\mathcal{W}$ 的点，并且每条直线至多包含 λ 个属于 $\mathcal{W}$ 的点，或者该直线包含于 $\mathcal{W}$ 中。从 $\mathcal{W}$ 的补集恢复点线几何所用的主要条件之一是：每条直线至少包含 $2\lambda+2$ 个点，参见 [12, 定理 3.1 和 5.1]。若 $\mathbb{F}=\mathbb{F}_q$ 且 $q=n-k+1$，则例 5 表明，退化的 k 维子空间集合的指标为 q，上述条件并不成立（每条直线恰好包含 $q+1$ 个点）。因此，[12] 的结果并不适用。

References

[1] I. Cardinali, L. Giuzzi, M. Kwiatkowski, *On the Grassmann graph of linear codes*, 有限域应用 75(2021), 101895. [2] I. Cardinali, L. Giuzzi, *Grassmannians of codes*, 有限域应用 94(2024), 102342. [3] W. L. Chow, *On the geometry of algebraic homogeneous spaces*, 数学年刊 50(1949), 32-67. [4] M. Kwiatkowski, M. Pankov, *On the distance between linear codes*, 有限域应用 39(2016), 251-263. [5] M. Kwiatkowski, M. Pankov, *Chow's theorem for linear codes*, 有限域应用 46(2017), 147-162. [6] M. Kwiatkowski, M. Pankov, A. Pasini, *The graphs of projective codes*, 有限域应用 54(2018), 15-29. [7] M. Kwiatkowski, M. Pankov, *The graph of 4-ary simplex codes of dimension 2*, 有限域应用 67(2020), 101709. [8] M. Kwiatkowski, M. Pankov, *On maximal cliques in the graph of simplex codes*, 几何学杂志 115(2024), 10. [9] M. Pankov, *The graphs of non-degenerate linear codes*, 组合理论杂志 A辑 195(2023), 105720. [10] M. Pankov, *On the graph of non-degenerate linear $[n,2]_2$ codes*, 有限域应用 92(2023), 102282. [11] M. Pankov, K. Petelczyc, M. Żynel, *Point-line geometries related to binary equidistant codes*, 组合理论杂志 A辑 210(2025), 105962. [12] K. Petelczyc, M. Żynel, *The complement of a point subset in a projective space and a Grassmann space* 13 2015 169 187 , 应用逻辑杂志 ( ), - . [13] M. Tsfasman, S. Vl˘adut., D. Nogin, *Algebraic Geometry Codes. Basic notions*, 美国数学学会，普罗维登斯，2007。

Faculty of Mathematics and Computer Science、 University of Warmia and Mazury、 Słoneczna 54、 10-710 Olsztyn、 Poland*Email address*: pankov@matman.uwm.edu.pl