arXiv:2601.04130v1 [math.GR] 7 Jan 2026

广义仿射建筑的态射

RAPHAEL APPENZELLER、XENIA FLAMM、VICTOR JAECK

Abstract. 我们为广义仿射建筑（亦称仿射 Λ-建筑）定义了一种态射概念，扩展了现有定义，并由此构造出广义仿射建筑范畴。对于配备传递群作用的仿射 Λ-建筑，我们给出了它们之间存在态射的充分条件。作为应用，我们研究了如何在何种条件下，才能在文献中通过格、范数、非标准对称空间或 Bruhat–Tits 方式定义的各种广义仿射建筑之间构造态射或同构。此外，对于源自非标准对称空间的广义仿射建筑，我们进一步证明了其关于子群以及赋值域变更的函子性。

1. Introduction

广义仿射建筑，例如（可能非离散的）欧几里得建筑，出现在广泛的数学背景中，包括对称空间的渐近几何 [KL97]，、赋值域上 Kac–Moody 群的结构理论 [Tit87, R´em99]，以及特征簇的紧化 [BIPP23]。仿射建筑理论历史悠久，始于 Bruhat 和 Tits 的奠基性工作 [BT72, BT84a]。随后，该理论从离散情形扩展到非离散情形，产生了欧几里得建筑 [KL97]、 $\mathbb{R}$-建筑 [BT72, Par00, Rou23]，，最终发展出由 Bennett 引入Λ-建筑 [Ben94]，并由众多作者进一步发展 [KT02, Sch09, Ben09, SS11, BS14, HIL23, App24]。然而，目前仍没有一种能统一适用于这些情形的态射通论。主要困难在于，不同背景会产生不同的广义仿射建筑模型，且其类型往往各异，因此难以系统地定义态射或子建筑。

本文提出了广义仿射建筑之间态射的一种新概念，以应对这一挑战。这些态射保持公寓结构，并采用一种新的公寓态射概念，使不同类型的根系之间也能建立态射，同时仍保持仿射魏尔群的作用。态射的复合仍是态射，由此定义出两个范畴，其对象分别为公寓和广义仿射建筑。我们的理论尤其适用于其图册上带有自然群作用的建筑。在这一情形下，我们在较弱的假设下构造态射，并找出保证这些态射为单射、满射或同构的附加条件；参见定理 C。我们的方法的主要优点是，这些条件在具体例子中很容易验证。这一结果适用于若干广为人知的广义仿射建筑构造，这些构造通过格、范数、非标准对称空间或 `Bruhat–Tits 型方法定义，并使它们之间能够建立联系。由于相关术语存在不少混淆，这有助于澄清这一主题。

Date：2026年1月8日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 20E42, 51E24, 20G15。*Key words and phrases.* 仿射 Λ建筑、非阿基米德域、代数群、根系、态射。

此外，这种新的态射概念使我们能够证明，通过赋值域扩张（定理D）以及单射群态射（定理F）时，借助非标准对称空间定义的广义仿射建筑具有函子性。尽管我们的结果是在仿射 Λ-建筑的一般框架下表述的，但最重要的情形是 $\Lambda = \mathbb{R}$，在这种情形下，即使对于非离散仿射建筑，这些结果也是新的。下面我们将更详细地介绍主要结果。

1.1. 公寓与建筑的新态射概念。我们首先定义公寓与广义仿射建筑的新态射概念。回顾一下，广义仿射建筑，或简称建筑，是一个集合 B，连同一套从模型公寓 $\mathbb{A}$ 到B 的映射图册 $\mathcal{A}$，并满足某些相容性公理；精确条件见定义 2.2 。模型公寓由 $\mathbb{A} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Phi) \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda$给出，其中 Φ是根系， Λ是有序阿贝尔群，并配有由 $W_{T,\Phi} := T \rtimes W_s(\Phi)$ 定义的仿射魏尔群作用。这里 $W_s(\Phi)$ 是与 Φ相关联的（球面）Weyl 群，而 T 是阿贝尔群 $\mathbb{A}$ 的一个子群，它在 $\mathbb{A}$上通过平移作用。当 T 和 Φ 可由上下文推知时，我们将仿射魏尔群记作 W_a 。此时，公寓$\mathbb{A}$ （以及建筑 $(B, \mathcal{A})$）称为类型为 $\mathbb{A}(\Phi, \Lambda, T)$。

我们定义的主要动机，是能够涵盖不同类型的建筑，尤其是在根系不同时。例如，对于与代数群相关的建筑，子群的根系通常无法包含映射到环境群的根系中；参见例如包含映射 $\mathrm{Sp}_2 < \mathrm{SL}_4$ ，其中根系的类型分别为 B_2和 A_3。

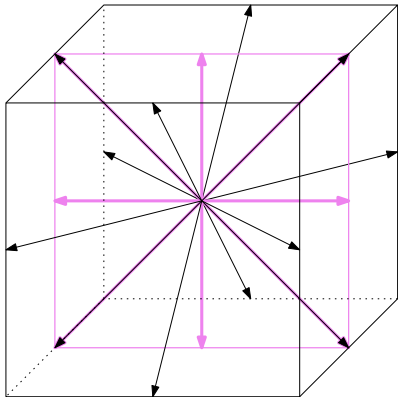

FIGURE 1. 类型为 B_2 （粉色）和 A_3 （黑色）的根系。

现在设 Φ 和 Φ' 是两个晶体根系， Λ 和 Λ' 是两个有序阿贝尔群，它们同时也是 $\mathbb{Q}$-向量空间。

定义 *A*（定义 *3.1*）。设 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Phi, \Lambda, T)$ 和 $\mathbb{A}' = \mathbb{A}(\Phi', \Lambda', T')$ 是两个模型公寓。公寓态射是一个三元组 (L, γ, σ)，其中 $L\colon \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Phi) \to \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Phi')$ 是一个 $\mathbb{Q}$-线性映射， $\gamma\colon \Lambda \to \Lambda'$ 是有序阿贝尔群的态射（保序群同态），而 $\sigma\colon W_a \to W'_a$ 是群同态，使得对所有 $x \in \mathbb{A}$ 和$w \in W_a$

$$\tau(w.x) = \sigma(w).\tau(x)$$

对于 $\tau := L \otimes \gamma\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$。

由于建筑由模型公寓的副本构成，公寓态射的概念自然延伸为以下建筑态射的概念。

定义 *B*（定义 *3.5*）。设 $B = (B, \mathcal{A})$ 是一个类型为 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Phi, \Lambda, T)$ 的建筑，$B' = (B', \mathcal{A}')$ 是一个类型为 $\mathbb{A}' = \mathbb{A}(\Phi', \Lambda', T')$ 的建筑。广义仿射建筑的态射是一个三元组 (ψ, φ, τ)，其中 $\psi\colon B \to B'$ 和 $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ 是映射，且 $\tau\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 是公寓态射，使得对所有 $f \in \mathcal{A}$，都有

$$\psi \circ f = \varphi(f) \circ \tau.$$

我们称建筑的一个态射是单射（分别是满射），如果 ψ、φ和 τ 是单射（分别是满射）。一方面，与文献中现有的建筑态射概念相比，这一定义提供了相当大的灵活性；例如，它足够灵活，可以关联具有不同根系的建筑。另一方面，它仍然足够严格，能够避免病态映射：例如，从 $\mathbb{R}$-建筑 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{Q}$-建筑 $\mathbb{Q}$ 的唯一态射是平凡的，这反映了不存在非平凡保序群同态 $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}$（例3.9）。

自 Tits 和 Bruhat–Tits 的早期著作以来，建筑之间的同构概念便一直受到研究；例如参见 [Tit74、Tit86、BT72]，以及关于仿射 Λ-建筑的 [Sch09、SS11]。在离散情形下——当Λ 是 $\mathbb{R}$ 的离散子群，因而该建筑是单纯的——人们提出并研究了各种态射和子建筑的概念，参见[Lan00、KP23]。文献 [KL97、Rou23], 采用了更偏重度量的视角，将态射视为赋有建筑结构的空间之间的等距变换。更详细的讨论见第3.3节。

1.2. **将公寓态射扩张为建筑态射**。当群在建筑的图册上传递地作用时，我们将利用公寓态射构造广义仿射建筑的态射。其思路是借助群作用，将标准公寓之间的态射平移过去。现在我们将这一思路精确表述。

设 G 是一个群，且$(B, \mathcal{A})$是一个类型为 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Phi, \Lambda, T)$的仿射 Λ-建筑。如果 G 以相容方式作用于 B 和 $\mathcal{A}$，即对于所有的 $g \in G$、$f \in \mathcal{A}$ 和 $x \in \mathbb{A}$，均有

$$(g.f)(x) = g.f(x).$$

若 G' 是另一个群，且 $\rho\colon G \to G'$ 是一个群同态，则从一个 G-建筑到一个 G'-建筑的态射(ψ, φ, τ)称为 ρ-等变的，如果 ψ和 φ都是 ρ-等变的。

主要结果是以下定理，它给出了公寓态射能够扩张为（单射或满射）建筑等变态射的充分条件。在这个版本的定理中，我们假设 G在 B 和 $\mathcal{A}$上都传递地作用，但另有一个定理不需要假设 G 在 B上传递地作用，见定理4.14。点和图表的稳定子发挥着重要作用。

定理 *C*（定理 *4.10*）。设 $(B, \mathcal{A})$ 是一个 G-建筑，$(B', \mathcal{A}')$ 是一个 G'-建筑。设 $\rho\colon G \to G'$ 是一个群同态，$\tau\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 是 B 和 B' 的相应模型公寓之间的一个态射。若 G 在 B 和 $\mathcal{A}$ 上都传递作用，并且存在图表 $f \in \mathcal{A}$ 和 $f' \in \mathcal{A}'$，使得

(1) ρ(稳定子$_G(f(0))) \subseteq$稳定子$_{G'}(f'(0))$，且 *(2)* ρ(稳定子$_G(f)) \subseteq$ 稳定子$_{G'}(f')$，且 *(3)* 对所有 $x \in \mathbb{A}$，存在 $g \in G$ 使得

$$g.f(0) = f(x) \quad \text{and} \quad \rho(g).f'(0) = f'(\tau(x)),$$

那么存在一个 ρ-等变态射 $m := (\psi, \varphi, \tau)\colon B \to B'$。

此外，

(a) 若 τ 和 ρ 是单射，且 $\rho(\mathrm{Stab}_G(f)) = \mathrm{Stab}_{G'}(f')$，则 m 是单射；*(b)* 若 G' 在 B' 和 $\mathcal{A}'$ 上传递地作用，且 τ 和 ρ 是满射，则 m 是满射；*(c)* 若 τ 是同构，G' 在 B' 和 $\mathcal{A}'$ 上传递地作用，ρ 是群同构，且包含映射 *(1)* 和 *(2)* 都是等式，则存在一个逆态射。也就是说，$(B, \mathcal{A})$ 与 $(B', \mathcal{A}')$ 同构。

我们称上面定理中构造的 ρ-等变态射由群同态 ρ诱导。诱导态射是唯一的，见注4.15。

这一结果的优势在于其适用性：在具体例子中，公寓态射 τ很容易定义，而所需条件通常可以直接验证。下面的结果将对此加以说明，它们展示了该定理如何应用于若干明确的情形。

1.3. 应用与例子。 上述结果的主要应用有两个方面。首先，它可以联系文献中各种各样的广义仿射建筑模型。其次，它可以证明对称建筑的函子性性质。

1.3.1. 不同建筑模型之间的关系。 本文重点讨论建筑（族）的四种模型，即 范数建筑 B_N[GI63、Par00、Rou23], 、格建筑 B_L [Ben94], 、*Bruhat–Tits* 建筑 B_{BT} （针对分裂代数群） [BT72、BT84a、HIL23] ，以及 对称建筑 B_S ，它们由非标准对称空间 [KT02、App26a]得到。它们的精确定义见第 2.3节。

上述四种模型都是借助某个代数群$\mathbf{G}$、某个域 $\mathbb{F}$ 以及某个赋值 v构造的：$\mathbb{F}^\times \twoheadrightarrow \Lambda$。在第 4.2 节中，我们证明所有这些建筑都是适当的 $\mathbf{G}(\mathbb{F})$- 建筑，其中 $\mathbf{G}$和 $\mathbb{F}$均适当。在第 5节中，我们利用定理 C构造态射

$$B_L \xrightarrow[\cong]{\text{(Theorem 5.9)}} B_S \xhookrightarrow{\text{(Theorem 5.14)}} B_{\mathrm{BT}} \xhookrightarrow{\text{(Theorem 5.19)}} B_N$$

，只要对于给定的群和赋值域，源建筑与目标建筑均存在。当 $\Lambda = \mathbb{R}$时，所有这些态射都是同构，这是一个我们予以精确表述的民间已知结果。通过个人通信，我们得知当 B_{BT}与 B_N 之间的同构的证明（见定理 5.19）在 $\Lambda = \mathbb{R}$ 时已为 Anne Parreau 所知。早在更早的时候，Bruhat–Tits 就观察到了这两个建筑之间的紧密关系，参见 [BT72，Note ajout´ee sur ´epreuves] 以及 [BT84b]。

我们相信，也可以找到 $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F})$-等变态射$B_L \to B_{\mathrm{BT}}$ 和 $B_L \to B_N$，尽管一般而言，这并不能直接由复合上述态射得到（因为对称建筑只有在 $\mathbb{F}$ 为实闭时才有定义）。

应用定理C需要对建筑中的稳定子有充分了解。对于建筑 B_S、 B_{BT} 和 B_N ，相关理论在文献中已相当成熟；但对于格建筑 B_L ，我们将在第 5.1.1 节补充缺失的论述。尤其是，命题 5.4 描述了这一情形下公寓的稳定子，据我们所知，这是新的结果。

1.3.2. 函子性性质。 现在我们使用态射的概念，来处理对称建筑中的某些函子性问题（例 2.8）。对称建筑与半单自伴连通线性代数群 $\mathbb{F}$的 $\mathbf{G}$ $<\mathrm{SL}_n$ 上定义的有 $\mathbb{Q}$ 约化根的

体系，以及一个极大 $\mathbb{R}$-分裂环面$\mathbf{S}$ 相关，其中其所有元素均为自伴元素； $\mathbb{F}$ 是一个带有序相容赋值的实闭域。本节中所有代数群和域都假定具有这种形式，因此对称建筑是有定义的。

关于赋值域扩张的函子性，Bruhat–Tits 建筑方面此前已有研究 [Rou 77], ，其中所探讨的是：在什么条件下，赋值域态射会在相应的建筑之间诱导出等变单射。一般而言，这种函子性并不成立 [Rou77, III.§5], ；但在分裂和准分裂情形下成立，更一般地，在域满足额外技术性假设时也成立，参见 [Rou77, 5.1.2 及勘误] 或[RTW10, 1.3。4]。

对于对称建筑，我们得到关于有序赋值域态射的如下函子性性质。

定理 D （定理 6.2）。设 $\eta\colon\ \mathbb{F} \to \mathbb{F}'$ 是有序赋值域之间的态射，且 $\rho\colon$ $\mathbf{G}(\mathbb{F}) \to \mathbf{G}(\mathbb{F}')$ 是所诱导的群同态。那么存在建筑的等变态射 $m\colon$ $B \to B'$，其中 B 和 B' 分别是与 $\mathbf{G}(\mathbb{F})$ 和 $\mathbf{G}(\mathbb{F}')$ 相关的对称建筑。

此外，如果 $\gamma\colon\ \Lambda \to \Lambda'$ 表示由 η诱导的赋值群态射，那么

(a) 如果 γ 是单射的，那么 m 是单射的；*(b)* 如果 η 是满射的，那么 m 是满射的；*(c)* 如果 η 和 γ 是同构，那么 m 是同构。

证明使用定理C ，将其应用于形如（Id γ， σ）的公寓态射，其中 σ 是球面 Weyl 群上的单位元，并且在平移上由 Id $\otimes\gamma$ 给出。

在更一般的设定下，上述定理的类似结论已由 Schwer–Struyve [SS11]证明；更多细节另见第 3.3.5 节。给定一个仿射 Λ-建筑 B 以及一个有序阿贝尔群态射 $\gamma\colon\ \Lambda \to \Lambda'$，他们构造了一个仿射 Λ'-建筑 B'以及一个态射 $B \to B'$。当 B 是与 $\mathbf{G}(\mathbb{F})$ 相关的对称建筑时，我们预期他们的态射 $B \to B'$与定理 D中构造的态射相同，并且 B' 同构于与 $\mathbf{G}(\mathbb{F}')$ 相关的对称建筑。

其次，一个自然的问题是：代数群的（满射、单射）态射 $\rho\colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$，其中 $\mathbf{G}'$ 是另一个如上所述的半单线性代数群，是否分别诱导出相应对称建筑之间自然的（满射、单射）态射 B 。关于拟局部域上的（离散）Bruhat–Tits 建筑，Landvogt 针对其态射概念，在 [Lan00] 中对类似问题给出了肯定回答。第一个例子是 $\mathbf{G}$ 是 $\mathbf{G}'$ 的子群，且 ρ 是包含映射。在这种情况下，我们有以下结果。

定理 E （定理 6.13）。 设 ι 表示包含映射 $\mathbf{G}(\mathbb{F}) \hookrightarrow \mathbf{G}'(\mathbb{F})$，并假设存在极大 $\mathbb{R}$-分裂环面 $\mathbf{S} < \mathbf{S}'$ ，它们分别属于 $\mathbf{G}$、$\mathbf{G}'$ ，且其中所有元素都是自伴的。若 $\mathbf{G}$ 是 $\mathbb{R}$-分裂的，则 ι 诱导出相应对称建筑之间的等变单射态射 $B \to B'$ 。

这个定理凸显了我们对公寓态射这一概念所赋予的充分灵活性，因为它要求改变模型公寓的根系。关键步骤是利用实闭域上半单代数群的 Cartan 分解，关联$\mathbf{G}$ 和$\mathbf{G}'$ 的根系，参见引理6.10。接下来的主要技术难点是证明映射 $\sigma\colon\ W_s \to W'_s$的存在性，参见命题6.7。结果由此得出：

定理C (a)。对于更一般的单态射，我们得到以下定理，它推广了上述结果。

定理 F (定理 6.16)。 设 $\rho\colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ 是代数群的转置不变单态射。若 $\mathbf{G}$ 是 $\mathbb{R}$-分裂的，则存在一个等变单射态射 $B \to B'$，将相应的对称建筑映射到一起。

注 1.1. 先验地说，对称建筑的构造 B_S 不仅取决于群 $\mathbf{G}$ 和赋值域 $\mathbb{F}$，还取决于一个极大$\mathbb{R}$-分裂环面 $\mathbf{S}$的选取，其中所有元素都是自伴的。然而，这样的 $\mathbf{S}$ 总是存在的 [App24，定理 5。17] 并且彼此共轭 [Bor91，定理 20。9]。定理 F 的推论是，同构意义下，建筑 B_S不依赖于 $\mathbf{S}$。特别是，定理E 中关于极大环面的条件并非必要。

定理 F 的证明依赖定理E。我们首先证明，若$\mathbf{G}$ 与$\mathbf{G}'$ 同构，则它们相应的对称建筑之间存在一个同构，见命题6.15。首先需要对相应的模型公寓证明这一点（命题 6.12），然后我们再次使用定理C (c)。

我们尚未解决这样一个问题：半单代数群$\mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ 的每个（不一定是单态）态射是否都会诱导相应建筑之间的态射。在这种情况下，对称建筑（针对某个特定的赋值实闭域 $\mathbb{F}$）将是一个从半单代数群范畴到仿射建筑范畴的函子。

问题 1.2。 能否将对称建筑视为从某个半单代数群范畴到仿射建筑范畴的函子?

注 1.3。 我们认为，对称建筑的大多数这类函子性性质都可以推广到其他建筑模型，例如 Bruhat–Tits 建筑。然而，我们的证明使用了对称空间理论和实代数几何；对于一般的域，可能需要采用不同的证明技巧。

另一个尚未解决的问题是与仿射建筑相关的球面建筑。我们可以问，广义仿射建筑的态射是否会在各自的无穷远处的建筑（或等价地，局部建筑）之间诱导一个单纯态射。一般来说，答案是否定的：当仿射建筑并非基于同一个根系构造时，这未必成立，例如 $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}) < \mathrm{SL}_4(\mathbb{F})$。在这种情况下，较小公寓中的一个室不会映射到较大公寓中的任何韦伊单形（无论维数如何）。然而，当根系相同时，我们认为，我们对广义仿射建筑之间态射的定义会在球面建筑之间诱导一个单纯态射。

1.4. **文章结构**。 本文的组织如下。在第 2 节中，我们回顾广义仿射建筑的定义。第 2.2节概述赋值域的相关背景。随后，我们在第 2.3节继续介绍本文将研究的所有建筑实例。我们在第 3节定义公寓与建筑的态射。为了在第 4.3节证明定理 C，我们在第 G-建筑。 4节引入这一概念，并在这一新背景下研究态射的概念以及上述建筑实例。随后，我们在第C节和第5节、第 6 节应用定理 D、定理 E和定理 F，以及关于不同实例之间关系的结果。关于序域和实代数几何的必要背景仅用于介绍

对称建筑的实例，见附录 A ，可随时查阅。

致谢。作者谨向 Jacques Audibert、Marc Burger、Auguste H´ebert、Anne Parreau、Jos´e Pedro Quintanilha、Bertrand R´emy、Guy Rousseau 和 Petra Schwer 致谢，感谢他们进行的有益讨论。作者尤其感谢 Anne Parreau 分享她对建筑的渊博知识。她的见解对于找到合适的公寓态射定义尤为宝贵。

R.A. 感谢 Procope项目“建筑、画廊及其他”的支持。X.F. 获得马克斯·普朗克数学科学研究所和 Labex Carmin项目的资助。本项目获得了欧洲研究理事会（ERC）在欧盟“地平线2020”研究与创新计划框架下的资助（资助协议编号 101018839），ERC GA 101018839。

Contents

1. 引言 1 1.1. 公寓与建筑态射的新概念 2 1.2. 将公寓态射延拓为建筑态射 3 1.3. 应用与示例 4 1.4. 论文结构 6 2. 广义仿射建筑 8 2.1. 定义 8 2.2. 赋值域 10 2.3. 文献中的示例 10 3. 广义仿射建筑的态射 14 3.1. 公寓态射 14 3.2. 建筑的态射 16 3.3. 与文献中现有概念的关系 17 4. G-建筑及其态射 19 4.1. G- 建筑的传递性 19 4.2. G- 建筑的示例 20 4.3. 延拓公寓的态射 I 22 4.4. 延拓公寓的态射 II 24 5. 不同建筑之间的关系 27 5.1. 格与对称建筑 27 5.2. 对称建筑与 Bruhat–Tits 建筑 31 5.3. Bruhat–Tits 建筑与范数建筑 33 6. 对称建筑的函子性 36 6.1. 域态射下的函子性 36 6.2. 单射群态射下的函子性 39 附录 A. 实代数几何基础 48 A.1. 有序阿贝尔群与有序域 48 A.2. 半代数几何 49 参考文献 50

2. Generalized affine buildings

本节回顾广义仿射建筑的定义，并给出若干示例。

2.1. **定义**。关于广义仿射建筑的更多详细介绍，我们建议参阅例如 [Ben94、Sch09、App24]。

定义 2.1. ([Bou02，第 VI 章§1] 和 [Bor91，14。7]) 设 V 为一个 $\mathbb{Q}$- 向量空间，且 $V^\star$ 为其对偶空间。子集 $\Phi \subseteq V$ 称为 根系，如果

($\mathrm{RS_I}$) Φ 是有限的，$0 \notin \Phi$，且 Φ 生成 V；并且 ($\mathrm{RS_{II}}$) 对所有 $\alpha \in \Phi$，都存在 $\alpha^\vee \in V^\star$，使得 $\alpha^\vee(\alpha) = 2$，且 $r_\alpha(\Phi) = \Phi$ 对于由 $r_\alpha(x) = x - \alpha^\vee(x)\alpha$定义的反射。

反射 r_α 和余根 $\alpha^\vee$ 由 $\alpha \in \Phi$ 唯一确定，并且在 V上存在一个标量积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，使得 $\alpha^\vee(x) = 2\langle \alpha, x\rangle / \langle \alpha, \alpha\rangle$。根系 Φ 称为可结晶的，如果

($\mathrm{RS_{III}}$) for all $\alpha \in \Phi$, $\alpha^\vee(\Phi) \subseteq \mathbb{Z}$.

我们只考虑晶体根系，因为所有源自代数群的根系都是晶体根系；不过，仿射 Λ建筑的定义更为一般 [Sch09]。设 Φ 是向量空间 V 中的一个晶体根系，且 Λ 是一个非平凡的有序阿贝尔群。按照惯例，我们假设 Λ 是一个 $\mathbb{Q}$-向量空间，否则我们可以用 $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$。特别地，$\Lambda$ 和 $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Phi)$ 都具有 $\mathbb{Q}$-向量空间的结构，我们将模型公寓 定义为

$$\mathbb{A} := \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Phi) \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda.$$

若 $\Delta \subseteq \Phi$ 是 Φ的一组基，则公寓的一个模型由下式给出

$$\mathbb{A} = \left\{ \sum_{\alpha \in \Delta} \lambda_\alpha \alpha \colon \lambda_\alpha \in \Lambda \right\},$$

因此，对于 $n = |\Delta| \in \mathbb{N}$，$\mathbb{A}$ 作为群同构于 Λ^n，这称为公寓的维数。此外，根系 Φ定义了一个球面魏尔群 W_s。设 T 是 $\mathbb{A} \cong \Lambda^n$ 的一个子群，它在 $\mathbb{A}$ 上通过平移作用，且由 W_s规范化。我们将相对于 T的仿射魏尔群定义为 $W_a := T \rtimes W_s$。形式上，我们称组合数据（Φ，Λ，T）为一个公寓。一个公寓确定模型公寓 $\mathbb{A}$ 以及仿射魏尔群 W_a的作用。通常记作 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Phi, \Lambda, T)$。

标量积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 在 V 上延拓为一个双线性配对

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{A} \times \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Phi) \to \Lambda, \quad \left\langle \sum_{\alpha \in \Delta} \lambda_\alpha \alpha, \sum_{\delta \in \Delta} q_\delta \delta \right\rangle := \sum_{\alpha, \delta \in \Delta} \lambda_\alpha q_\delta \langle \alpha, \delta \rangle,$$

但一般无法将其延拓到整个 $\mathbb{A} \times \mathbb{A}$，因为 Λ只是一个 $\mathbb{Q}$-向量空间，可能没有乘法。公寓可以赋予一个 W_s-不变的、取值于 Λ的范数，其定义为

$$\|x\| := \sum_{\alpha \in \Phi} |\langle x, \alpha \rangle|,$$

以及由此诱导的 Λ值距离，不过也可以考虑 $\mathbb{A}$ 上的其他范数。每个根 $\alpha \in \Phi$ 都确定一个反射 $r_\alpha \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ 定义为

$$r_\alpha \left(\sum_{\delta \in \Delta} \lambda_\delta \delta \right) := \sum_{\delta \in \Delta} \lambda_\delta r_\alpha(\delta) = \sum_{\delta \in \Delta} \lambda_\delta \left(\delta - 2 \frac{\langle \delta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha \right).$$

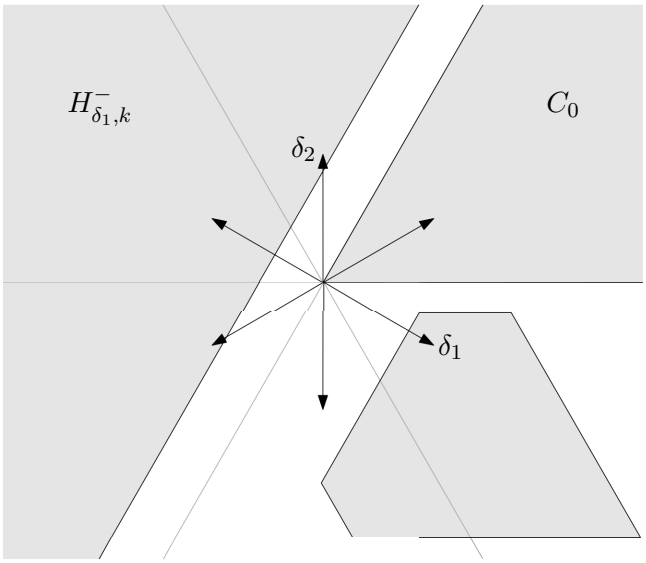

FIGURE 2. 一个类型为 $\mathbb{A}(\Phi,\ \mathbb{R},\ \mathbb{R}^2)$ 的公寓，其中 Φ 是类型为 A_2的根系。图中描绘了与基 $\Delta = \{\delta_1, \delta_2\}$相关联的基本 Weyl 室 C_0 、一个半公寓$H^-_{\delta_1,\ k}$ 以及一个闭子集。

仿射魏尔群 W_a 中与 r_α 共轭的元素称为反射。每个反射 r 都确定一个超平面

$$M_r \coloneqq \{x \in \mathbb{A} \colon r(x) = x\},$$

它也称为墙。如果对于某个 $\alpha \in \Sigma$ 和 $t \in T$， $r = tr_\alpha t^{-1}$ 是一个平移，则 $M_r = \{x \in \mathbb{A} \colon \langle x,\ \alpha\rangle = k\}$ 对于 $k \colon = \langle t,\ \alpha\rangle$。因此，与每面墙相关联的有两个半公寓，它们属于 $\mathbb{A}$，形式为

$$H^+_{\alpha,k} \coloneqq \{x \in \mathbb{A} \colon \langle x, \alpha\rangle \geq k\} \quad \text{and} \quad H^-_{\alpha,k} \coloneqq \{x \in \mathbb{A} \colon \langle x, \alpha\rangle \leq k\}$$

对于 $\alpha \in \Phi$ 和 $k \in \Lambda$。与基 $\Delta \subseteq \Phi$ 相关联的基本 ***Weyl* 室** 由下式给出

$$C_0 \coloneqq \bigcap_{\alpha\in\Delta} H^+_{\alpha,0}.$$

$\mathbb{A}$ 的一个***Weyl* 室** 是集合 $w(C_0)$ 中任意一个，其中 $w \in W_a$。

依照 [Ben94, §2.5], ，我们称子集 $\Omega \subset \mathbb{A}$ 为凸的，若它是若干半公寓的交集。凸集 $\Omega \subset \mathbb{A}$ 是闭的，若它是有限个半公寓的交集。仿射 Λ-建筑的定义类似于流形：我们有一个集合 B 以及一个图册 $\mathcal{A}$，由将模型公寓映射到 B中的图表组成。模型公寓、墙、半公寓、魏尔室和闭集在图表下的像分别称为公寓、墙、半公寓、扇区和闭集。若扇区 s 是另一个扇区 s'的子集，则 s 称为 s'的子扇区。我们采用 [Ben94, §3.1], 中的定义，该定义基于 Tits [Tit86]的思想，并推广了 Morgan–Shalen [MS84]中的 Λ-树的概念。

定义 2.2。设 B 是一个集合，且 $\mathcal{A}$ 是从 $\mathbb{A}$ 到 B的一组映射。若它满足以下六条公理，则称 $(B, \mathcal{A})$ 为类型为 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Phi, \Lambda, T)$ 的仿射 Λ-建筑：

(A1) 对所有 $f \in \mathcal{A}$ 和 $w \in W_a$，我们都有 $f \circ w \in \mathcal{A}$。(A2) 对所有 $f,\ f' \in \mathcal{A}$, 集合 $\Omega \coloneqq f^{-1}(f(\mathbb{A}) \cap f'(\mathbb{A})) \subseteq \mathbb{A}$是闭集，并且存在 $w \in W_a$ 使得 $f|_\Omega = f' \circ w|_\Omega$。

(A3) B 中的任意两点都包含在某个公寓中。也就是说，对任意 $p,\ q \in B$，存在 $f \in \mathcal{A}$ 使得 $p,\ q \in f(\mathbb{A})$。(A4) 给定扇区 $s_1,\ s_2$，存在子扇区 $s_1' \subseteq s_1, s_2' \subseteq s_2$，使得$s_1'$ 和 s_2' 包含在同一个公寓中。(A5) 如果三个公寓两两交于一个半公寓，那么它们的交集非空。(A6) 对任意图表 $f \in \mathcal{A}$ 和任意点 $p \in f(\mathbb{A})$，存在一个距离不增的收缩 $r_{f,\ p}\colon B \to f(\mathbb{A})$，满足 $(r_{f,\ p})^{-1}(p) = \{p\}$。

注意，公理 (A6) 是有意义的，因为公理 (A1)-(A3)可用于定义一个 Λ-距离 d 在 B 上，它由 Λ-距离诱导于 $\mathbb{A}$，不过其是否满足三角不等式尚不清楚，参见 [Ben94，注释 3.1 和 3.2]。公理 (A6) 意味着 d 实际上满足三角不等式，因此定义了 Λ-距离 B。

如果可以从上下文推知 Λ，我们就称 B 为一个广义仿射建筑，有时也简称建筑。集合 $\mathcal{A}$ 称为广义仿射建筑的图册，而 $\mathcal{A}$ 中的元素称为图表。

广义仿射建筑的一个重要来源是赋值域上的代数群。

2.2. **赋值域**。关于赋值和赋值域理论的全面介绍，请参阅 [EP05]。设 $\mathbb{K}$ 为一个域，Λ 为一个有序阿贝尔群，即 Λ 是一个带有全序且该序与群运算相容的阿贝尔群。

定义 2.3. 映射 $v\colon \mathbb{K} \to \Lambda \cup \{\infty\}$ 称为 Λ-赋值（或简称赋值），如果 v 是满射，并且对所有$x, y \in \mathbb{K}$满足以下三个条件：

- $v(x) = \infty \iff x = 0$,
- $v(xy) = v(x) + v(y)$,
- $v(x + y) \geq$ 分钟$\{v(x)\ v(y)\}$。

若 $\Lambda = \{0\}$，则称 v 为平凡赋值；若 Λ的秩为 1（即它作为有序阿贝尔群同构于 $\mathbb{R}$的一个子群），则称 v 为秩1赋值。更一般地，我们将 v 的秩定义为值群 $\Lambda = v(\mathbb{K}^\times)$ 作为无挠阿贝尔群的秩。子集

$$\mathcal{O} \coloneqq \{x \in \mathbb{K}^\times : v(x) \geq 0\}$$

构成一个子环，它是 $\mathbb{K}$的赋值环，也就是说，它是 $\mathbb{K}$ 的一个子环，且对所有 $x \in \mathbb{K}^\times$，都有 $x \in \mathcal{O}$ 或 $x^{-1} \in \mathcal{O}$。域与赋值一起称为赋值域。

例 2.4. 赋值域的例子包括 p-进数。只要$\mathbb{F}$ 是任意一个域，系数取自 $\mathbb{F}$ 的有理函数域便自然成为一个赋值域，其中赋值由 v给出：$\mathbb{F}(X)^\times \xrightarrow{\text{—}} \mathbb{Z},\ \frac{P}{Q} \mapsto \deg Q - \deg P$。

2.3. **文献中的例子**。现在我们给出文献中的广义仿射建筑例子，即范数建筑 B_N、格建筑 B_L、对称建筑 B_S 和 Bruhat–Tits 建筑 B_{BT}。所有这些构造都使用一个约化代数群 $\mathbf{G}$ 以及一个域 $\mathbb{F}$，并在其上赋予赋值 v：$\mathbb{F} \to \Lambda \cup \{\infty\}$。在第 5 节中，我们将联系这些不同背景下的各种模型。现在来定义相关建筑。

例 2.5（范数建筑 B_N，另见例 4.5）。这种仿射建筑模型已在 [GI63、G´er81、BT84b、BT87、Par00、Rou23] 等文献的不同背景下得到研究；我们遵循 [Par23, §3]。设 $\mathbb{F}$ 为任意带有秩 1 赋值 v：$\mathbb{F}^\times \to \Lambda \subseteq \mathbb{R}$ 的域。对于 $a \in \mathbb{F}$，令 $|a| \coloneqq \exp(-v(a)) \in \mathbb{R}$，并令

$V := \mathbb{F}^n$。超度量范数 是一个函数 $\eta\colon V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，对所有$a \in \mathbb{F}$ 和 $v,\ w \in V$ 均满足

- $\eta(v) = 0$ 当且仅当 $v = 0$,
- $\eta(av) = |a|\eta(v)$, 且
- $\eta(v + w) \leq$ 最大值$\{\eta(v)\ \eta(w)\}$。

超度量范数 η关于基 $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ 是适配的，该基属于 V，当

$$\eta\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \max\{|a_1|\eta(e_1), \ldots, |a_n|\eta(e_n)\},$$

且 η 是适配的当且仅当存在一个它适配的基。范数建筑 B_N 是所有 $\mathbb{R}^{\times}$-相似类的适配超度量范数构成的集合。

类型为 A_{n-1} 的模型公寓可识别为

$$\mathbb{A} \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{R}(1, \ldots, 1) \cong \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\colon \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$$

球面 Weyl 群是作用于 $\mathbb{A}$ 上、通过置换各项而作用的 n 元对称群。

对于基 $\mathcal{E}$ 和与之相适配的超度量范数 η 的相似类 $[\eta]$，我们关联一个 图表 $f_{[\eta],\ \mathcal{E}}\colon\ \mathbb{A} \to B_N$，定义如下:

$$f_{[\eta],\mathcal{E}}(x_1, \ldots, x_n)\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\Big) := \max_i \left\{e^{-x_i}|a_i|\eta(e_i)\right\}.$$

令 $\mathcal{A}$ 表示所有这些图表构成的集合。对 $(B_N, \mathcal{A})$ 而言，它是一个类型为 $(A_{n-1}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^n/\mathbb{R}(1, \ldots, 1))$ 的仿射 $\mathbb{R}$-建筑，参见 [Par23 第 3B–3F 节]。注意，B_N 还具有另一个图册 $\mathcal{A}'$，因此 $(B_N, \mathcal{A}')$ 是一个类型为 $(A_{n-1}, \mathbb{R}, \Lambda^n/\Lambda(1, \ldots, 1))$ 的仿射 $\mathbb{R}$- 建筑，参见 [Par23 第 3B 节中的注记 4]。

例 2.6 (格建筑 B_L，另见例 4.6)。现在我们回顾一下我们所说的格建筑，即由 $\mathbb{F}^n$ 的格的相似类构成的空间。它由 [Ron09 第 9 节在2] 离散情形[Ben94 的例 3 中对一般2]情形作了定义 Λ。我们沿用后者的叙述。

设 Λ 为一个有序阿贝尔群（秩不一定为一），$\mathbb{F}$ 为一个带有 Λ-赋值 $v\colon \mathbb{F}^{\times} \to \Lambda$ 的域。记 $\mathcal{O} := \{x \in \mathbb{F}\colon v(x) \geq 0\}$ 为赋值环。$\mathbb{F}^n$ 的一个格（有时称为 $\mathcal{O}$-格）是集合 $\mathcal{O}e_1 + \ldots + \mathcal{O}e_n$，其中 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的一个基。若存在 $x \in \mathbb{F}$ 使得 $xL_1 = L_2$，则称两个格 L_1 和 L_2 相似。我们用 $[L]$ 表示格 L 的相似类。格建筑 B_L 是 $\mathbb{F}^n$ 中所有格的相似类的集合，即

$$B_L := \{[L]\colon L \text{ is a lattice}\}.$$

类型为 A_{n-1} 的模型公寓可与 $\mathbb{A} \cong \Lambda^{n-1}$ 识别。一个基 $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ 确定了 $\mathbb{F}^n$ 的格 $\mathcal{O}^n$。对于一个基，我们定义一个图表$f_{\mathcal{E}}\colon\ \Lambda^{n-1} \to B_L$，如下。对于 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \Lambda^{n-1}$，令

$$f_{\mathcal{E}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) := \\ [\mathcal{O}(x_{\lambda_1}e_1) + \mathcal{O}(x_{\lambda_2-\lambda_1}e_2) + \ldots + \mathcal{O}(x_{\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2}}e_{n-1}) + \mathcal{O}(x_{-\lambda_{n-1}}e_n)],$$

其中 $x_{\lambda_i} \in \mathbb{F}$ 满足 $v(x_{\lambda_i}) = \lambda_i$。注意，由此得到的格的相似类与 x_{λ_i} 的选择无关。

令 $\mathcal{A}$ 表示所有这些图表的集合。二元组 $(B_L,\ \mathcal{A})$ 是类型为 $(A_{n-1},\ \Lambda,\ \Lambda^{n-1})$ 的广义仿射建筑，参见 [Ben94，例 3。2]。

例 2.7（Bruhat–Tits 建筑 B_{BT}，另见例 4.7）。在其奠基性著作 [BT72、BT84a]，中，Bruhat–Tits 从相对于赋值域 $\mathbb{F}$且具有值群 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ 准分裂的约化代数群构造了仿射建筑。多年来，人们研究了 Bruhat–Tits 建筑存在的更一般情形，例如 [MSVM14、Str14]。最近，这一构造被推广到 Λ 不一定是 $\mathbb{R}$ [HIL23] 的子群的值群。为简单起见，我们将自身限制在代数群为半单且分裂的情形 [Bor91，18.6],但允许一般的值群。我们关于 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ 即[BT72 的主要参考文献是第 6 章， 7], 尤其是其中的例 6.1.3 b) 和 6.2.3 b)；对于一般情形，则参考 Λ [HIL23], ，尤其是其中的 §7.44。若想更温和地入门，我们推荐 Izquierdo 关于该主题的迷你课程讲义 [Izq24] 。

设 $\mathbb{F}$ 是一个带有赋值 $v\colon \mathbb{F}^\times \to \Lambda$ 的域。根据 Hahn 嵌入定理，见定理 A.1，存在一个有序阿贝尔群 $\mathfrak{R}$，它包含 Λ 作为有序子群，且是一个 $\mathbb{R}$-向量空间。在经典情形下， [BT72],$\Lambda \subseteq \mathbb{R} = \mathfrak{R}$。设 G 是一个在 $\mathbb{F}$ 上分裂的半单、连通、单连通代数$\mathbb{F}$-群（例如 SL_n）。设 S 是一个极大环面。由于 G 是 $\mathbb{F}$-分裂的，S 也是 $\mathbb{F}$-分裂的；又由于 G 是半单的，因此 $\mathrm{S} = \mathrm{Cent}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$。对于相对根系 $\Sigma := {}_{\mathbb{F}}\Phi$ 中的一个根 $\alpha \in \Sigma$，我们考虑根群 U_α。设 $G := \mathrm{G}(\mathbb{F})$，且 $U_\alpha := \mathrm{U}_\alpha(\mathbb{F})$，其中 $\alpha \in \Sigma$。由 [BT72, (6.1.3)b)] 和 [HIL23, 第 7.19], 节可知，存在 G 的子群 M_α，使得 $(\mathrm{S}(\mathbb{F}), (U_\alpha, M_\alpha)_{\alpha\in\Sigma})$ 是一个赋有赋值$\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to \mathfrak{R} \cup \{\infty\}$ 的生成根群数据，对所有 $\alpha \in \Sigma$ 均成立；见 [BT72, (6.2.3)b)], [BT84a, (4.1.19)(ii)], 和 [HIL23, 命题 7.24]；关于经典群，见 [BT72, 第 10 章，第 208 页及后续页]。

我们考虑欧几里得向量空间 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$，其对偶空间 $(V^\star, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 由 Σ 张成。群 $N := \mathrm{Nor}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S})(\mathbb{F})$ 通过共轭作用于根群 $nU_\alpha n^{-1} = U_{n.\alpha}$，且此作用下降为球面魏尔群 ${}_{\mathbb{F}}W := N/\mathrm{S}(\mathbb{F})$ 在 $\Sigma \subseteq V^\star$ 上的作用。 $\Sigma \subset V^\star$ 的对偶根系 $\Sigma^\vee \subseteq V$由对偶根 $\alpha^\vee \in \Sigma^\vee$ 构成，定义如下：

$$\langle \alpha^\vee, x\rangle = 2\frac{\alpha(x)}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \quad \text{for all } x \in V,$$

其中 $\alpha \in \Sigma$。注意，线性映射 $\alpha \in V^\star$ 可扩展为 $\mathbb{R}$-向量空间 $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{R}$ 上的线性映射$\alpha\colon V \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$，且球面魏尔群 ${}_{\mathbb{F}}W$ 的作用可扩展至 $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{R}$。空间 $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{R} \cong \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma^\vee) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathfrak{R}$ 可识别为根群赋值的仿射空间

$$\mathfrak{A} := \{(\varphi_\alpha^x\colon U_\alpha \to \mathfrak{R}\cup\{\infty\})_\alpha\colon \exists x \in V \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{R}, \forall \alpha \in \Sigma, \\ \forall u \in U_\alpha\colon \varphi_\alpha^x(u) = \varphi_\alpha(u) + \alpha(x)\},$$

并将根群赋值 $(\varphi_\alpha^x)_{\alpha\in\Sigma}$ 简记为 $\varphi + x$。对于 $n \in N$,

$$(n.\varphi)_\alpha(u) = \varphi_{n^{-1}.\alpha}(n^{-1}un)$$

定义一个根群赋值以及 ν 在 N 上的作用 $\mathfrak{A}$，其定义为

$$\nu(n)(\varphi + x) := n.\varphi + n.x,$$

其中 $n.x$ 来自球面魏尔群在 $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{R}$上的作用。该作用的核记为 H，而 N/H 称为仿射魏尔群。对于 $x \in \mathfrak{A} \cong V \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{R}$，令

$$P_x := \langle u \in U_\alpha\colon \exists \lambda \in \Lambda \text{ such that } \varphi_\alpha(u) \geq \lambda \geq -\alpha(x)\rangle \cdot H \subseteq G.$$

现在将 *Bruhat–Tits* 建筑 定义为商集

$$B_{\mathrm{BT}} := (G \times \mathfrak{A})/\!\sim$$

当且仅当满足等价关系 $(g,x)\sim(h,y)$

$$\exists n\in N\colon g^{-1}hn\in P_x \quad \text{and} \quad \nu(n)(x)=y.$$

(g,x) 的等价类记作 $[g,x]$。

现在我们解释 B_{BT} 是一个类型为 $(\Sigma^\vee,\mathfrak{R},\Lambda^n)$ 的仿射 $\mathfrak{R}$建筑，参见[HIL23, 定理 3.30、记号 4.37、事实 7。45]。模型公寓 $\mathbb{A}\colon=\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma^\vee)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathfrak{R}$ 可以与 $\mathfrak{A}$ 相识别，因而带有一个由 N/H给出的作用，其中 W_a是仿射魏尔群T。注意，W_a 的平移部分仅由 $\Lambda^n\subseteq\mathfrak{R}^n$中的平移构成。我们有标准图表

$$f_0\colon\mathbb{A}\to B_{\mathrm{BT}},\quad x\mapsto[\mathrm{Id},x].$$

G 在 $G\times\mathfrak{A}$ 上的自然作用下降为 B_{BT} 上由 $g.[h,x]=[gh,x]$给出的作用。B_{BT} 的图册定义为 $\mathcal{A}\colon=\{g.f_0\colon\ g\in G\}$，其中对所有 $x\in\mathfrak{A}$，$g.f_0(x)\colon=[g,x]$。

我们指出，根群赋值（φ_α）$_\alpha$ 与域赋值相容 v，参见 [BT84a，4.2.7(2)]以及 [HIL23，第 7.44 节，事实 7。12],具体而言，对所有 $t\in\mathbf{S}(\mathbb{F})$ 和 $\alpha\in\Sigma$，都有

$$(C_{\mathrm{BT}})\qquad \varphi_\alpha(tut^{-1})=\varphi_\alpha(u)+v(\alpha(t)).$$

特别地，对所有 $t\in\mathbf{S}(\mathbb{F})$ 和 $x\in\mathfrak{A}\cong V\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{R}$，都有 $[t,0]=[\mathrm{Id}\ x]\in B_{\mathrm{BT}}$ 当且仅当 $(-v)(\chi_\alpha(t))=\alpha(x)$ 对所有 $\alpha\in\Sigma$ 都成立。

例 2.8 (对称建筑 B_S，另见例4.8)。对于这个例子，我们需要假设所讨论的域是实闭的，并且赋值与序相容。关于有序域和实代数几何的精确定义及简要介绍，请参阅附录A。

沿用 [KT02]（以及针对 SL_2 的 [Bru88]）的思路，第一作者在 [App24, App26a, App26b] 中定义了一个与以下数据相关联的建筑。设 G 是一个半单、连通、自伴的线性代数群 $\mathbb{Q}$-group $\mathrm{G}<\mathrm{SL}_n$，其中 $n\in\mathbb{N}$ 是某个域，并设 $\mathbb{F}$ 是一个实闭域。要定义一个建筑，我们需要在 $\mathbb{F}$ 上赋予一个序相容赋值 $v\colon\ \mathbb{F}^\times\to\Lambda$（其秩不必为一）；不过暂且设 $\mathbb{F}$ 只是一个实闭域，且可能是 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$。记 $G\coloneqq\mathrm{G}(\mathbb{F})$ 为代数群 G 的 $\mathbb{F}$-点。

群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ 通过合同作用传递地作用于行列式为一的正定对称矩阵集合上，即 $_n\mathbb{F}$。

$$P_1(n,\mathbb{F})\coloneqq\{M\in\mathbb{F}^{n\times n}\colon M=M^T,\det(M)=1,M\gg0\}$$

令 $X_{\mathbb{F}}$ 为 Id 在 $G.\mathrm{Id}$ 下的轨道，其中 $\mathrm{Id}\in P_1(n,\mathbb{F})$。若 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $X_{\mathbb{R}}$ 是与 $\mathrm{G}(\mathbb{R})$ 相关联的非紧型对称空间的一个模型，则它是对称空间 $P_1(n,\mathbb{R})$ 的全测地子流形。当 $\mathbb{F}$ 不是 $\mathbb{R}$ 的子域时，我们称 $X_{\mathbb{F}}$ 为非标准对称空间。给定一个序相容赋值 $v\colon\ \mathbb{F}^\times\to\Lambda$，便可以定义一个 G-不变、Λ-值的伪距离 $d\colon X_{\mathbb{F}}\times X_{\mathbb{F}}\to\Lambda$。将所有距离为 0 的点视为等价后所得的商空间 $B_S=X_{\mathbb{F}}/\sim$，是如下意义下的一个仿射 Λ-建筑[App26a]。

令 $\mathrm{K}\coloneqq\mathrm{G}\cap\mathrm{SO}_n$。令 $\mathrm{S}<\mathrm{G}$ 为极大 $\mathbb{R}$-分裂环面（等价地，对任意实闭域，它都是极大 $\mathbb{F}$-分裂环面，见 [App24，定理 5.17]），其元素均为自伴的（$g=g^T$对所有 $g\in\mathrm{S}$）。令 $A_{\mathbb{F}}$ 为 $\mathrm{S}(\mathbb{F})$ 中单位元所在的半代数连通分支。当 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$时，G 的李代数 $\mathfrak{g}$有嘉当分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$，其中 $\mathfrak{k}$ 是 $\mathrm{K}(\mathbb{R})$ 的李代数，由 Cartan 对合 θ给出：$X\mapsto-X^T$。于是群 $A_{\mathbb{R}}$是一个连通实李群，其李代数 $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}$ 可用于得到

限制根空间分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Sigma} \mathfrak{g}_\alpha$$

对于一个根系 $(\Sigma,\ \mathfrak{a}^\star)$，其球面魏尔群为 $W_s \cong N_{\mathbb{R}}/M_{\mathbb{R}}$，其中

$$N_{\mathbb{R}} := \mathrm{Nor}_{\mathbf{K}(\mathbb{R})}(A_{\mathbb{R}}) \quad \text{and} \quad M_{\mathbb{R}} := \mathrm{Cent}_{\mathbf{K}(\mathbb{R})}(A_{\mathbb{R}}).$$

对每个根 $\alpha \in \Sigma$，都有一个代数特征 $\chi_\alpha\colon A_{\mathbb{F}} \to \mathbb{F}_{>0}$[App24，引理 6。1]。

嘉当分解 $G = \mathbf{K}(\mathbb{F})\mathbf{A}(\mathbb{F})\mathbf{K}(\mathbb{F})$ [App24，定理 6。8] 于是可用于定义一个 嘉当投影

$$\delta_{\mathbb{F}}\colon X_{\mathbb{F}} \to \{a \in A_{\mathbb{F}}\colon \chi_\delta(a) \geq 1 \text{ for all } \delta \in \Delta\}, \quad kak'.\mathrm{Id} \mapsto a,$$

其中 Δ 是 Σ的一个基。于是，由下式定义的 $\|\cdot\|_{\mathbb{F}}\colon A_{\mathbb{F}} \to \mathbb{F}_{>0}$

$$\|a\|_{\mathbb{F}} := \prod_{\alpha\in\Sigma} \max\left\{\chi_\alpha(a), \chi_\alpha(a)^{-1}\right\}$$

是 $A_{\mathbb{F}}$上的一个半代数乘法 $\mathbb{F}_{\geq 1}$-值范数。范数 $\|\cdot\|_{\mathbb{F}}$ 和$\delta_{\mathbb{F}}$ 连同序相容赋值 v，可用于定义点 $x \in X_{\mathbb{F}}$ 到基点 Id 的距离：

$$d(\mathrm{Id}, x) := -v(\|\delta_{\mathbb{F}}(x)\|_{\mathbb{F}}).$$

实数域 G作用将其扩展为一个 Λ值伪度量 d 在 $X_{\mathbb{F}}$上，并且是一个 Λ值度量在 B_S 上：$= X_{\mathbb{F}}/\!\sim$，其中 $\sim$ 将距离为 0 [App26a，定理 4。5]。

令 $o = [\mathrm{Id}] \in B_S$ 为一个基点。由此可以证明，$A_{\mathbb{F}}.o$具有与 $\mathbb{A}$ 同构的 $\mathbb{Q}$向量空间结构：$=\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma^\vee)\otimes_{\mathbb{Q}}\Lambda$，其中$\Sigma^\vee \subseteq \mathfrak{a}$ 是余根系。若 $f_0\colon \mathbb{A} \to B_S$ 表示先作识别 $\mathbb{A} \cong A_{\mathbb{F}}.o$ 再作包含映射 $A_{\mathbb{F}}.o \subseteq B_S$，则图册由 $\mathcal{A} = \{g.f_0\colon \mathbb{A} \to B_S\colon g \in G\}$ 给出。取 $T := \mathbb{A} \cong \Lambda^r$，则在 $\Sigma^\vee$ 为约化的情形下，$(B_S, \mathcal{A})$ 是一个类型为 $(\Sigma^\vee, \Lambda, T)$ 的仿射 Λ 建筑 [App26a，定理 5.1]。

以下刻画性的相容条件将会很有用 [App26a，命题 4。13]：对于每个 $x \in \mathbb{A}$ 和 $a \in A_{\mathbb{F}}$，有 $f_0(x) = a.o$ 当且仅当

$$(C_S) \qquad (-v)(\chi_\alpha(a)) = \alpha(x) \quad \text{for all } \alpha \in \Sigma.$$

3. Morphisms of generalized affine buildings

本节的目标是定义广义仿射建筑的态射。为此，我们首先定义公寓态射。

3.1. **公寓态射**。设 Φ 和 Φ' 是两个晶体根系，Λ 以及 Λ' 有序阿贝尔群，且 T 和 T' 平移群满足 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Phi,\ \Lambda,\ T)$ 和 $\mathbb{A}' = \mathbb{A}(\Phi',\ \Lambda',\ T')$ 是第 2.1 节意义下的模型公寓。

定义 3.1. 一个公寓态射 是由映射构成的三元组 (L, γ, σ)，其中$L\colon \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Phi) \to \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Phi')$ 是一个 $\mathbb{Q}$-线性映射，$\gamma\colon \Lambda \to \Lambda'$是有序阿贝尔群之间的态射，$\sigma\colon W_a \to W_a'$是一个群同态，并且对所有 $w \in W_a$，下图均交换

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \xrightarrow{L\otimes\gamma} & \mathbb{A}' \\ {\scriptstyle w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma(w)} \\ \mathbb{A} & \xrightarrow[L\otimes\gamma]{} & \mathbb{A}' \end{array}.$$

我们用 $\tau = (L, \gamma, \sigma)$ 表示公寓态射；为方便起见，我们也会稍微滥用记号，写作 τ: $\mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 和 $\tau = L \otimes \gamma$。

我们称 τ 为单射（分别为满射），如果 L 和 γ 是单射（分别为满射）。这是一个线性代数练习，可以看出 τ 是单射（分别为满射）当且仅当 $L \otimes \gamma$ 是单射（分别为满射）。如果 τ是单射，则 σ也是单射；但如果 τ 是满射， σ 则不一定是满射，见图 3。

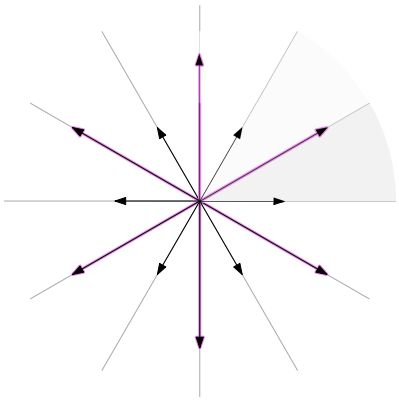

FIGURE 3. 类型为 G_2 的根系 Φ'（黑色）包含一个类型为 A_2 的子系统 Φ（粉色），该子系统由 Φ'的长根构成。包含映射 σ: $W_s \to W_s'$产生了一个公寓的满态射（Id，Id σ），但 σ不是满射。

例 3.2。设 $\Phi = \Phi'$ 和 γ: $\Lambda \to \Lambda'$ 是有序阿贝尔群的一个态射，满足 $\gamma(T) \subseteq T'$。那么 Id $\otimes\gamma$: $\mathbb{A} \to \mathbb{A}'$定义了一个公寓态射。这恢复了 [SS11]中隐含的定义。

注记 3.3. 恒等态射由 $L = \mathrm{Id}_{\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Phi)}$ 给出， $\gamma = \mathrm{Id}_{\Lambda}$ 其中 $\sigma = \mathrm{Id}_{W_a}$，而态射的复合由 L、 γ 和 σ 的复合给出。不难验证，按照这些定义，模型公寓构成一个范畴。态射 τ: $\mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 若存在态射 τ^{-1}: $\mathbb{A}' \to \mathbb{A}$，使得 $\tau^{-1} \circ \tau = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}}$ 且 $\tau \circ \tau^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}'}$，则称为公寓同构。

根据下面的引理，只需验证定义中关于 $w \in W_s$ 的图表。

引理 3.4. 设 $L: \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Phi) \to \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Phi')$ 是一个 $\mathbb{Q}$-线性映射， γ: $\Lambda \to \Lambda'$是有序阿贝尔群的态射，并令 $\tau = L \otimes \gamma$。若 $\tau(T) \subseteq T'$，且σ_s: $W_s \to W_s'$ 是一个群同态（仅针对球面魏尔群），使得图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{A}' \\ {\scriptstyle w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_s(w)} \\ \mathbb{A} & \xrightarrow[\tau]{} & \mathbb{A}' \end{array}$$

对所有 $w \in W_s$ 都可交换，则 $\sigma := \tau|_T \times \sigma_s$: $W_a \to W_a'$ 是一个群同态，使得 (L, γ, σ) 是一个公寓态射 $\mathbb{A} \to \mathbb{A}'$。

证明。我们用 t^x: $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ 表示平移 $x \in \mathbb{A}$。令 $t^x, t^{x_1}, t^{x_2} \in T, w, w_1, w_2 \in W_s$。定义映射 σ: $W_a \to W_a'$，使得 $\sigma(t^x w) := t^{\tau(x)} \sigma_s(w)$。根据

由 $W_a = T \rtimes W_s$, $w_1 t^{x_2} = t^{w_1(x_2)} w_1$的半直积结构可知,

$$\begin{aligned}\sigma(t^{x_1}w_1 \cdot t^{x_2}w_2) &= \sigma\left(t^{x_1}t^{w_1(x_2)}w_1w_2\right) = t^{\tau(x_1+w_1(x_2))}\sigma_s(w_1w_2)\\ &= t^{\tau(x_1)}t^{\tau(w_1(x_2))}\sigma_s(w_1)\sigma_s(w_2)\\ &= t^{\tau(x_1)}t^{\sigma_s(w_1)(\tau(x_2))}\sigma_s(w_1)\sigma_s(w_2)\\ &= t^{\tau(x_1)}\sigma_s(w_1)t^{\tau(x_2)}\sigma_s(w_2) = \sigma(t^{x_1}w_1)\cdot\sigma(t^{x_2}w_2)\end{aligned}$$

表明 σ 是群同态。若 $y \in \mathbb{A}$，则有

$$\tau(t^x w(y)) = \tau(x + w(y)) = \tau(x) + \tau(w(y)) = t^{\tau(x)}(\sigma_s(w)(y)) = \sigma(t^x w)(y),$$

因此该图表可交换。 □

3.2. **建筑的态射**。 由于建筑由公寓组成，公寓态射由此引出广义仿射建筑态射的定义如下。

定义 3.5。 设 $B = (B, \mathcal{A})$ 是类型为 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Phi, \Lambda, T)$ 的仿射 Λ-建筑，且 $B' = (B', \mathcal{A}')$ 是类型为 $\mathbb{A}' = \mathbb{A}(\Phi', \Lambda', T')$ 的仿射 Λ'-建筑。广义仿射建筑态射 是由三个映射构成的三元组

$$\psi\colon B \to B', \quad \varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}', \quad \tau\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}',$$

其中 τ 是公寓态射，使得对所有 $f \in \mathcal{A}$，下图均可交换

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{A} & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{A}' \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varphi(f)} \\ B & \xrightarrow[\psi]{} & B'\ .\end{array}$$

我们将广义仿射建筑的态射写作 $m = (\psi, \varphi, \tau)$；为方便起见，也会稍微滥用记号，写作 $m\colon (B, \mathcal{A}) \to (B', \mathcal{A}')$ 或 $m\colon B \to B'$。我们称态射 (ψ, φ, τ) 为单射（分别为满射），如果 ψ、φ 和 τ 是单射（分别为满射）。

例 3.6。 若 $(B, \mathcal{A})$ 是类型为 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Phi, \Lambda, T)$ 的广义仿射建筑，则任意 $f \in \mathcal{A}$ 都定义了一个广义仿射建筑之间的单射态射$\psi = f\colon \mathbb{A} \to B$，其中我们将 $\mathbb{A}$ 自身视为带有图册 W_a的广义仿射建筑。事实上，我们定义 $\varphi\colon W_a \to \mathcal{A}$为与 f复合；根据公理 (A1)，它包含于 $\mathcal{A}$中；并定义 $\tau\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ 为单位元。于是上面的图表可交换。

例 3.7。 对于一个固定的有序阿贝尔群 Λ，带有乘积图册且为乘积类型的仿射 Λ-建筑的乘积到其中一个因子的投影，是仿射 Λ-建筑之间的满态射。

例 3.8。若 $(B, \mathcal{A})$ 是类型为 (Φ, Λ, T) 的广义仿射建筑，令$T' := \mathbb{A} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Phi) \otimes \Lambda$为全平移群，$W'_a = \mathbb{A} \rtimes W_s$且$\mathcal{A}' := \{f \circ w\colon f \in \mathcal{A}, w \in W'_a\}$。则 $(B, \mathcal{A}')$ 是类型为 $(\Phi, \Lambda, \mathbb{A})$ 的广义仿射建筑，并且包含映射 $\sigma\colon W_a \to W'_a$, $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ 与 $\mathbb{A}$ 和 B 上的恒等映射一起定义了一个单射态射 $(B, \mathcal{A}) \to (B, \mathcal{A}')$。

例 3.9。 我们可以将 $\mathbb{R}$ 视为一个仿射 $\mathbb{R}$-建筑，并将 $\mathbb{Q}$ 视为一个仿射 $\mathbb{Q}$-建筑。包含映射 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ 导出了广义仿射建筑的一个单射态射 $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$（对于适当选取的图册）。然而，由于从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{Q}$ 的唯一保序群同态是平凡同态，因此从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{Q}$ 的广义仿射建筑态射只有平凡态射（其中 ψ 为常值映射）。

注释 3.10。 恒等态射由 $\psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$、 $\varphi = \mathrm{Id}_B$ 和$\tau = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}}$ 给出，而态射的复合由全部三个ψ、 φ 和 τ的复合给出。不难验证，在这些定义下，广义仿射建筑构成一个范畴。态射 $m = (\psi, \varphi, \tau)$: $B \to B'$若存在一个态射 m^{-1}: $B' \to B$，满足 $m^{-1} \circ m = \mathrm{Id}_B$且 $m \circ m^{-1} = \mathrm{Id}_{B'}$，则称其为一个同构 。

注 3.11。 广义仿射建筑的态射不一定保距。看似如此，实际上这是一项优点，因为同一个建筑可以具有许多不同的距离：在 [BT72], 中，距离来自对公寓上标量积的选择；而在 [App26a], 中，距离来自对公寓上范数的选择。当 $\Lambda \subsetneq \mathbb{R}$时，这些范数可能并非来自标量积，因此可能无法以相容方式选择距离，使得定理 $B_S \to B_{\mathrm{BT}}$ 中的单射态射 5.14保距。

注 3.12。由于公寓态射总是固定 0，仿射映射 $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ 可能不是公寓态射。不过，如果像例 3.6 中那样将公寓$\mathbb{A}$ 本身视为一个仿射建筑，那么任意仿射映射 $w \in W_a$都是仿射建筑的态射。事实上，令 $\psi := w$: $B \to B$, φ: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$由 $\varphi(f) := w \circ f$ 定义，并令 $\tau := \mathrm{Id}_{\mathbb{A}}$: $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$，则得到一个仿射建筑态射 (ψ, φ, τ)，它在 $B = \mathbb{A}$上实现仿射变换 w。注意，由 (A1)， $W_a \subseteq \mathcal{A}$；由 (A2)， $\mathcal{A} \subseteq W_a$，因此 $w \circ f \in W_a = \mathcal{A}$ 且 φ 定义良好。

3.3. **与文献中已有概念的关系**。 我们以阐明本文的定义与文献中已有的一些公寓之间以及（广义仿射）建筑之间的态射和同构概念之间的关系，作为本节的收尾。

3.3.1. 同构的概念。 早在 [Tit74 中， Tit86], Tits 就定义了仿射 $\mathbb{R}$-建筑的同构概念，并对其进行了部分分类。在离散情形下， [Wei09] 中有详细论述。类似地，同样在离散情形下，G´erardin 指出，范数建筑“就是”Bruhat–Tits 建筑 [G´er81，定理见 §2.3。6]他在 §1.3.7 中将公寓同构 定义为保持距离并交换各墙的线性映射。这比我们的定义更强，因为我们并不要求公寓态射保持距离，参见注 3.11。

3.3.2. 离散赋值。当赋值取值于 $\mathbb{R}$的一个离散子集时，存在若干种态射的概念，参见例如 [Lan00、 KP23]。我们简要介绍 Landvogt 的概念 [Lan00]以及他关于 Bruhat–Tits 建筑的结果，因为可以将其与定理F进行比较。Landvogt 证明了一种函子性，即代数 k-群的同态，其中 k 是一个拟局部域，会在相应的 Bruhat–Tits 建筑之间诱导一个等变连续映射，该映射是环面型的 —— 这一概念确保公寓映射到公寓。此外，经过适当的度量归一化后，该映射是一个等距映射。环面型映射应被视为我们所说的公寓态射的类似物；在离散情形下比较这两个概念将很有意义。

与 [KP23] 中的概念进行比较也将是有益的。然而，一般而言，目前尚不清楚 Λ-建筑对于 Λ 的离散子群 $\mathbb{R}$ 如何与单纯仿射建筑相关。这就是我们将注意力限制在可除 Λ上的原因。

3.3.3. 欧几里得建筑。 在非离散情形下，但在欧几里得建筑的框架中，Rousseau 定义了公寓、建筑和子建筑的（弱）态射概念 [Rou23]。公寓的弱态射（赋予欧几里得距离）是一个仿射映射 $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 它满足与仿射魏尔群作用、公寓的墙及其欧几里得距离相关的三个公理 [Rou23，定义 1.1.4。1], 参见注记 3.11。然而，两个弱态射的复合一般并不是弱态射。于是，Rousseau 将公寓态射 定义为度量弱态射，即 φ 在 φ的线性部分的核之外保持距离。注意，我们的定义并不考虑 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{A}'$ 上的度量，因此具有更大的灵活性。（弱）建筑的态射 [Rou23，定义 2.1.13，1]被定义为两个欧几里得建筑之间的一个映射，该映射将公寓映射为公寓，并且限制在任一公寓上时是公寓的（弱）态射，这与我们的构造相似。当建筑的（弱）态射为单射时，便得到（弱）子建筑。然而，即使我们处于欧几里得建筑的框架中，他的概念如何与我们的概念相关，仍不清楚。

类似地，仍然在欧几里得建筑的框架下，Kleiner–Leeb 将子建筑定义为欧几里得建筑的一个度量子空间，并且该子空间具有欧几里得建筑结构 [KL97，第 4 节以下各小节。7]需要注意的是，并非每个这种意义下的子建筑都能通过单射态射实现：考虑高秩建筑中的测地线，并与图4进行比较。至于每个欧几里得建筑单射态射的像是否都是子建筑，我们留作开放问题。

问题 3.13。 若 $(\psi,\ \varphi,\ \tau)\colon\ B \to B'$是欧几里得建筑 ($\Lambda = \mathbb{R}$) 之间的单射态射（按我们的意义），并且带有 `仿照 Kleiner–Leeb 的 CAT(0) 度量，那么能否对 B 上的度量（按因子）重新缩放，使得 ψ 成为等距嵌入?

3.3.4. 根系态射。定义公寓态射的主要困难，在于根系不一致的情形。人们已经发展出若干种根系态射的概念。在 [LN04] 以及类似地在 [Dye09] 中，态射是线性映射 $L\colon \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\Phi) \to \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\Phi')$，满足 $L(\Phi) \subseteq \Phi'$，并且可能还需满足一些额外条件。在我们对公寓态射的定义中，也有一个线性映射 L，但根不一定被映射为根。在应用中，例如在关于子群 $G \subseteq G'$ 下函子性的背景中，就会出现这种情况（见第 6.2.2 节；关于 $\mathrm{Sp}_4 < \mathrm{SL}_4$，参见图 1），其中线性映射 L 不将根映射为根。在 [LN04] 中定义的 RCE 范畴中的根系态射满足关于 Weyl 群的相容条件 [LN04，第 5.7], 定理，因此在 $\Lambda = \mathbb{R}$时，它在我们的框架下定义了一个公寓态射。由此，定义 3.1 推广了 [LN04]中的定义。 [Dye09] 中的概念既不比我们的概念更强，也不比它更弱。

3.3.5. 广义仿射建筑与函子性。 与我们的概念最为接近、同时也最为一般的可能是 [Sch09]和 [SS11], 其中后者推广了前者。现在让我们更详细地讨论这两者。在[Sch09，定义 5 中，Schwer 定义了广义仿射建筑的同构概念，这与我们的定义一致（见注释3.10）。

Schwer–Struyve 在 [SS11 的第 3 节和 5]中考察了一个类型为 $\mathbb{A}$ 的广义仿射建筑 $(B, \mathcal{A}) := \mathbb{A}(\Phi, \Lambda, T)$，以及一个保序群同态 $\gamma\colon \Lambda \to \Lambda'$。根据这些数据，他们构造了一个模型公寓$\mathbb{A}' := \mathbb{A}(\Phi, \Lambda', T')$，其中 T'是 T在 γ下的逐分量像。在第 3 节中，作者构造了一个映射 $\mathbb{A} \to \mathbb{A}'$，用我们的记号表示，对应于两个映射 $\mathrm{Id} \otimes \gamma\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$和 $\mathrm{Id}\colon W_a \to W_a$。事实上，他们证明

这些映射按照定义 3.1的含义构成一个公寓态射。但请注意，根系 Φ 相同。我们将 τ 称为这个公寓态射。

第二步，Schwer–Struyve 将空间 B' 构造为B 关于某个等价关系的商，并构造映射 $\psi\colon B \to B'$，以及对每个 $f \in \mathcal{A}$ 构造映射$f'\colon \mathbb{A}' \to B'$。若用 $\mathcal{A}'$表示所构造的这些映射 f'的集合，则可得到映射 $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$。随后，他们在 [SS11 的第 3 节及 5] 中证明，$(B', \mathcal{A}')$ 是一个建筑，并且 $m = (\psi, \varphi, \tau)$ 是从 $(B, \mathcal{A})$ 到 $(B', \mathcal{A}')$ 的建筑态射（定义见定义 3.5）。当 γ是满射或单射时，m也分别是满射或单射。此外，作者在 [SS11 的定理 1.1] 中证明，B 和 B' 在无穷远处的相应球面建筑同构，且这一同构由建筑态射 m诱导。

同样地，在 [HIL23 的§7], 中，作者将一个准分裂约化代数群 G 与一个亨泽尔域 $\mathbb{F}$（赋有赋值 $v\colon \mathbb{F}^\times \to \Lambda$）联系起来，构造了一个记为 $I(\mathbb{F}, v,$ G) 的广义仿射建筑。若该群是分裂的，则其描述见例 2.7。随后，给定有序阿贝尔群的满态射 $f\colon \Lambda \to \Lambda'$，他们构造了一个满射 $I(\mathbb{F}, v,$G$) \to I(\mathbb{F}, f \circ v,$ G)，该满射与 G($\mathbb{F}$) 的作用相容。研究 f 是否是定义 3.5 意义下的广义仿射建筑满态射，并在对称建筑的背景下将其与定理 D 进行比较，将会很有意义。

4. G-BUILDINGS AND THEIR MORPHISMS

本节的目标是构造带有群作用的广义仿射建筑态射。在充分的传递性假设下，可以通过指定模型公寓之间的一个态射，并在群的作用下移动该映射，来定义一个广义仿射建筑态射。我们回顾如下定义。

定义 4.1。设 G 是一个群，且 $(B, \mathcal{A})$ 是一个仿射 Λ-建筑。若 G 以相容的方式作用于 B 和图册 $\mathcal{A}$，即对所有 $g \in G$、$f \in \mathcal{A}$和 $x \in \mathbb{A}$，都有

$$(g.f)(x) = g.(f(x)).$$

若 $\rho\colon G \to G'$ 是群同态，B 是一个 G-建筑，B' 是一个G'-建筑，则称态射 $B \to B'$ 是 ρ-等变的，如果 ψ 和 φ 都是ρ-等变的，即对所有 $g \in G$、$x \in B$ 和 $f \in \mathcal{A}$，都有

$$\psi(g.x) = \rho(g).\psi(x), \text{ and } \varphi(g.f) = \rho(g).\varphi(f).$$

注记 4.2。用范畴论的语言来说，群 G在仿射建筑 $(B, \mathcal{A})$ 上的作用是一个群同态 $G \to \mathrm{Aut}(B, \mathcal{A}) := \{m\colon (B, \mathcal{A}) \to (B, \mathcal{A})\colon m$是一个同构$\}$，因此对每个 $g \in G$，该作用都对应一个同构 $m_g = (\psi_g, \varphi_g, \tau_g)$。$G$-建筑定义中出现的作用，恰好对应于满足对所有 $g \in G$ 都有 $\tau_g = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}}$ 的那些作用 $G \to \mathrm{Aut}(B, \mathcal{A})$。

4.1. -建筑的传递性。 G-建筑。

以下是由 G-建筑的定义直接推得的一些结果。

命题 4.3。设$(B, \mathcal{A})$ 是一个类型为 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Phi, \Lambda, T)$的 G-建筑。如果作用在 *If G* B上传递，则 $T = \mathbb{A}$。

证明。设 $f \in \mathcal{A}$ 和 $x \in \mathbb{A}$。由 G 在 B上的作用的传递性，存在 $g \in G$，使得 $f(0) = g.f(x)$。回忆公理 (A2)，其断言：对于所有 f、$f' \in \mathcal{A}$，集合 $\Omega := f^{-1}(f(\mathbb{A}) \cap f'(\mathbb{A}))$ 是 W_a-凸的，并且存在$w \in W_a$使得 $f|_\Omega = f \circ w|_\Omega$。我们将其应用于 f和 $f' = g.f$。注意到

$0 \in \Omega$。公理 (A2) 的第二部分蕴含存在 $w \in W_a$，使得 $f(0) = g.f \circ w(0)$。应用 g^{-1}，我们得到 $f(w(0)) = g^{-1}.f(0) = f(x)$。由于 f 是单射，我们有 $w(0) = x$。元素 $w \in W_a = T \rtimes W_s$ 可以写成 $w = (t, w_s)$，其中 $t \in T$ 且 $w_s \in W_s$。由于 $w_s(0) = 0$，我们有$w(0) = t(0) = x$，因此 $t = t^x$ 是由 x给出的平移。这表明，对于所有$x \in \mathbb{A}$、 $t^x \in T$，从而 $T = \mathbb{A}$。□

反过来，我们有如下结论。

命题 4.4. 设 $(B, \mathcal{A})$ 是一个类型为 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Phi, \Lambda, T)$的 G-建筑。若$T = \mathbb{A}$ 是全平移群，且 G 在 $\mathcal{A}$上传递地作用，则 G 也在 B上传递地作用。

证明。设 $p, q \in B$。由公理（A3），存在 $f \in \mathcal{A}$ 和 $x, y \in \mathbb{A}$，使得 $p = f(x)$ 且 $q = f(y)$。由于我们假设 $T = \mathbb{A}$ 是全平移群，因此有 $w = y - x \in W_a = T \rtimes W_s$。由公理 (A1)，有$f \circ w \in \mathcal{A}$。由于 G 在 $\mathcal{A}$ 上传递地作用，存在一个 $g \in G$，使得$g.f = f \circ w$。特别地， $g.p = g.f(x) = f \circ w(x) = f(y) = q$，因此 G在 B上传递地作用。□

4.2. **例： G-建筑。** 第 2.3 节中讨论的所有仿射建筑构造 G实际上都属于某个适当群 G的 -建筑框架。现在我们来解释这一点，并更详细地讨论某些传递性。

例 4.5 (范数建筑 B_N，例 2.5 重温)。 回顾一下，与 B_N 相关联的范数建筑 $V = \mathbb{F}^n$，其中 $\mathbb{F}$ 是一个带有秩 1 赋值 $v\colon \mathbb{F}^\times \to \Lambda \subseteq \mathbb{R}$的域，是一种类型为 ($\mathbb{R}$-建筑，A_{n-1}，$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^n/\mathbb{R}(1, \ldots, 1)$)。我们断言 B_N 是一个针对 $G\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的 G = -建筑。

事实上，对于 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，其在 B_N 上的作用由 $g.\eta := \eta \circ g^{-1}$ 给出，其中η 是 V上的一个（相似类）适配超度量范数；并且，如果 η 适配于基 $\mathcal{E}$，那么 $g.\eta$ 就适配于 $g\mathcal{E}$。在 $\mathcal{A}$ 上的作用由$g.f_{[\eta],\mathcal{E}} := f_{[g.\eta],g\mathcal{E}}$给出，且这一作用与 B_N上的作用相容；另见 [Par23, Sections 3A and 3B2]。

我们断言，若 $\Lambda = \mathbb{R}$，则 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 在 B_N and $\mathcal{A}$ 上传递作用。否则，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 既不在 B_N 上传递作用，也不在 $\mathcal{A}$ 上传递作用。为证明这一点，我们首先指出，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 在 $\mathbb{F}^n$ 的各个基上传递作用，因此，要证明 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 在 B_N 上传递作用，只需证明任意两个适配于标准基的范数属于同一个 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 轨道。

若 $\Lambda = \mathbb{R}$，则对于两个适配于标准基 $\mathcal{E}_0 = \{e_1, \ldots, e_n\}$ 的超度量范数 η 和 η'，存在某个 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 使得 $g.\eta' = \eta$。事实上，取 $g = a = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，使得 $\eta(e_i) = |a_i|\eta'(e_i)$（回忆一下，$|\cdot| = \exp(-v(\cdot))$，并利用 v 的满射性），对所有 $i = 1, \ldots, n$ 均成立。于是，由于 η 和 η' 都适配于 $\mathcal{E}_0$，我们有

$$a.\eta\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i\right) = \eta\left(\sum_{i=1}^n a_i^{-1} v_i e_i\right) = \max_i \left\{|v_i||a_i|^{-1}\eta(e_i)\right\} = \eta'\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i\right)$$

对所有 $v_i \in \mathbb{F}$ 均成立。因此，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 在 B_N 上传递地作用。

现在，若 $\Lambda \neq \mathbb{R}$，我们还可以看到，对 B_N 的作用并非满射：例如，令 η 为适配于 $\mathcal{E}_0$ 且满足 $\eta(e_i) = 1$ 的超度量范数，对所有 $i = 1, \ldots, n$均成立。那么，对于 $s \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$，不存在 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 使得 η与 η'处于同一轨道，其中 η' 是适配于 $\mathcal{E}_0$ 且满足$\eta'(e_1) = s$ 以及 $\eta'(e_2) = \ldots = \eta'(e_n) = 1$的超度量范数。

根据上述讨论以及图册 $\mathcal{A}$ 的定义，我们也可以直接看出，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 在 $\mathcal{A}$ 上传递作用，当且仅当 $\Lambda = \mathbb{R}$。因此，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 在公寓集合上传递作用，但在 B_N 或 $\mathcal{A}$ 上不传递，除非 $\Lambda = \mathbb{R}$。

例 4.6（格建筑 B_L，重新审视例 2.6）。与 $\mathbb{F}^n$ 相关联的格建筑 B_L，其中 $\mathbb{F}$ 是带有赋值 v 的域：$\mathbb{F}^\times \to \Lambda$（秩不一定为一），是类型为 $(A_{n-1}, \Lambda, \Lambda^{n-1})$ 的仿射 Λ-建筑。对于 $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ 和 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，它也都是 G-建筑。事实上，若 G 是 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ 或 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，则 B_L 由形如 $\mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}e_2 + \ldots + \mathcal{O}e_n$ 的格 L 的相似类组成，其中 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的一组基。因此，G 通过作用于基来作用于格，即 $g.L = \mathcal{O}ge_1 + \ldots + \mathcal{O}ge_n$。我们还定义 G 在图表 $f_\mathcal{E}$ 上的作用，其中 $\mathcal{E}$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的一组基，定义为 $g.f_\mathcal{E} = f_{g\mathcal{E}}$。这两个作用彼此交换。回忆一下，图册 $\mathcal{A}$ 由所有这样的图表 $f_\mathcal{E}$ 组成，其中 $\mathcal{E}$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的一组基。群 G 在 $\mathbb{F}^n$ 的无序基的相似类集合上传递作用。因此，G 在 $\mathcal{A}$ 上传递作用。此外，G 也在格的相似类集合上传递作用，因此 G 在建筑 B_L 上传递作用。

例 4.7（Bruhat–Tits 建筑 B_{BT}，重访例 2.7）。设 B_{BT} 为与 $G := \mathbf{G}(\mathbb{F})$ 相关联的 Bruhat–Tits 建筑，其中 $\mathbf{G}$、$\mathbb{F}$、Λ 和 Σ 与例 2.7 中相同。我们声称 B_{BT} 是一个类型为（$\Sigma^\vee$，$\mathfrak{R}$，Λ^n）的 G-建筑。回忆一下，$B_{\mathrm{BT}} = (G \times \mathfrak{A})/\sim$，其中 $\mathfrak{A}$ 是根群赋值的仿射空间。我们已在例 2.7 中看到，G 通过 $g.[h, x] = [gh, x]$ 作用于 B_{BT}。存在一个图表 $f_0 \colon \mathbb{A} \to B_{\mathrm{BT}}, x \mapsto [\mathrm{Id}\ x]$，而图册 $\mathcal{A}$ 是该图表在 G 作用下的轨道。因此，$\mathcal{A}$ 自然带有一个 G-作用，且这些作用彼此相容，故 B_{BT} 是一个类型为（$\Sigma^\vee$，$\mathfrak{R}$，Λ^n）的 G-建筑。注意，根据定义，G 传递地作用于图册 $\mathcal{A}$。然而，当 $\Lambda \neq \mathbb{R}$ 时，G 在 B_{BT} 上的作用并不传递，参见例如命题 4.3。

例 4.8（对称建筑 B_S，例2.8再探）。我们断言，与半单自伴线性代数群 $\mathbb{Q}$相关联的对称建筑 $\mathbf{G} < \mathrm{SL}_n$ 以及赋有与序相容的赋值的实闭域 $\mathbb{F}$（$v \colon \mathbb{F}^\times \to \Lambda$ 不一定秩为一），如例 2.8中所定义，是一个 G-建筑，其中 $G := \mathbf{G}(\mathbb{F})$。

回忆一下，G 通过合同作用于 $X_\mathbb{F} = G.\mathrm{Id} \subseteq P_1(n, \mathbb{F})$，因而也作用于 $B_S = X_\mathbb{F}/\sim$。接下来只需定义其在图册 $\mathcal{A}$ 上的作用，并证明这些作用相容。固定基点 $o = [\mathrm{Id}] \in B_S$。标准公寓可识别为 $\mathbb{A} = A_\mathbb{F}.o$，其中 $A_\mathbb{F}$ 是极大 $\mathbb{F}$-分裂环面 $\mathbf{S} < \mathbf{G}$ 的 $\mathbb{F}$-点 $\mathbf{S}(\mathbb{F})$ 的半代数连通分支。记 f_0 为从 $\mathbb{A}$ 到 B_S 的包含映射。图册 $\mathcal{A}$ 是集合 $\{g.f_0 \colon \mathbb{A} \to B_S \colon g \in G\}$，它自然带有左 G-作用。显然，这两个作用相容，因此 B_S 是一个类型为 $(\Sigma^\vee, \Lambda, \Lambda^n)$ 的 G-建筑。根据定义，G 在 B 和 $\mathcal{A}$ 上的作用是传递的。

下面关于对称建筑的各种稳定子的描述将会很有用。我们定义 $M_\mathbb{F}$ 为 $\mathbb{F}$ 扩张的 $M_\mathbb{R}$，或者等价地，定义为 $\mathbf{K}(\mathbb{F})$ 中 $A_\mathbb{F}$ 的中心化子，见例 2.8。回忆一下，$\mathcal{O}$ 表示 $\mathbb{F}$的赋值环。对于任意半代数群 $H \subseteq \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \subset \mathbb{F}^{n\times n}$，令 $H(\mathcal{O}) := H \cap \mathcal{O}^{n\times n}$。则 $H(\mathcal{O})$ 仍然是一个群。如果 H 是半单代数群 $\mathbf{H} < \mathrm{SL}_n$ 的 $\mathbb{F}$- 点，我们有时也记作 $\mathbf{H}(\mathcal{O})$。

命题 4.9。这些稳定子满足

- 稳定子$_G(o) = \mathbf{G}(\mathcal{O})$，且
- 稳定子$_G(f_0) = M_\mathbb{F}A_\mathbb{F}(\mathcal{O}) =$ 中心化子$_G(A_\mathbb{F}) \cap \mathcal{O}^{n\times n} =$ 中心化子$_G(\mathbf{S}(\mathbb{F})) \cap \mathcal{O}^{n\times n}$。

当 $\mathbf{G}$ 是 $\mathbb{F}$-分裂时，稳定子$_G(f_0) = \mathbf{S}(\mathbb{F}) \cap \mathcal{O}^{n\times n}$。

证明。第一条陈述由 [App26a定理 419]得出。根据 [App26a引理 5.18 和定理 5 19]，我们有稳定子$_G(f_0) = M_\mathbb{F}A_\mathbb{F}(\mathcal{O}) =$ 中心化子$_G(A_\mathbb{F}) \cap \mathcal{O}^{n\times n}$，并且由于 $A_\mathbb{F}$ 在$\mathbf{S}(\mathbb{F})$ 中 Zariski 稠密（$\mathbf{S}$ 是 Zariski 连通的），最后一个等式也随之成立。

当 G 是 $\mathbb{F}$-分裂时，S 是一个极大环面（而不仅仅是极大 $\mathbb{F}$-分裂环面）。由于 G 是半单的，根空间分解由此推出，S 的李代数与 $\mathrm{Cent}_G(S(\mathbb{F}))$ 的李代数相同。然而，$S(\mathbb{F}) \subseteq \mathrm{Cent}_G(S(\mathbb{F})) = \mathrm{Cent}_G(S)(\mathbb{F})$，且 $\mathrm{Cent}_G(S)$ 是连通的 [Bor91，推论 11。12],因此等式成立。□

由于 G 在 B_S上传递作用，根据命题4.9，轨道-稳定子定理意味着 $B_S \cong G/\mathbf{G}(\mathcal{O})$ 是 G-齐性集。

4.3. **延拓公寓的态射 I.** 本节的目标是证明定理C，该定理给出了构造 G-建筑的条件。下面回顾该定理。

设 Λ、Λ' 为有序阿贝尔群，Φ、Φ' 为秩分别为 n、m 的晶体根系，其球面魏尔群分别为 W_s、W_s'；$\mathbb{A}$、$\mathbb{A}'$ 为相应的模型公寓，并设 $T < \mathbb{A}$、$T' < \mathbb{A}'$ 为相应仿射魏尔群 $W_a = T \rtimes W_s$、$W_a' = T' \rtimes W_s'$的平移子群。

我们假设 G 在 B 上以及 $\mathcal{A}$上传递作用（对于 G 不在 B上传递作用的情形，见下一节中的定理4.14 ）。

定理 *4.10*（定理 *C*）。设 $(B, \mathcal{A})$ 是一个 G-建筑，$(B', \mathcal{A}')$ 是一个 G'-建筑。设 $\rho\colon G \to G'$ 是一个群同态，$\tau\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 是 B 和 B' 各自的模型公寓之间的态射。若 G 在 B 和 $\mathcal{A}$ 上都传递地作用，并且存在图表 $f \in \mathcal{A}$ 和 $f' \in \mathcal{A}'$ 使得

(1) $\rho(\text{稳定子}_G(f(0))) \subseteq \text{稳定子}_{G'}(f'(0))$，且 *(2)* $\rho(\text{稳定子}_G(f)) \subseteq \text{稳定子}_{G'}(f')$，且 *(3)* 对所有 $x \in \mathbb{A}$，存在 $g \in G$ 使得

$$g.f(0) = f(x) \quad \text{and} \quad \rho(g).f'(0) = f'(\tau(x)),$$

则存在一个 ρ-等变态射 $m := (\psi, \varphi, \tau)\colon B \to B'$。

此外，

(a) 若 τ 和 ρ 是单射，且 $\rho(\text{稳定子}_G(f)) = \text{稳定子}_{G'}(f')$，则 m 是单射；*(b)* 若 G' 在 B' 和 $\mathcal{A}'$ 上传递地作用，且 τ 和 ρ 是满射，则 m 是满射；*(c)* 若 τ 是同构，G' 在 B' 和 $\mathcal{A}'$ 上传递地作用，ρ 是群同构，并且包含映射 *(1)* 和 *(2)* 均为等式，则存在一个逆态射。也就是说，$(B, \mathcal{A})$ 和 $(B', \mathcal{A}')$ 同构。

证明。我们从 ψ的构造开始：$B \to B'$。由于 G 在 B上传递地作用，B 的每个元素都可写成某个 $g \in G$对应的 $g.f(0)$。我们定义 ψ为

$$\psi(g.f(0)) := \rho(g).f'(0)$$

并注意到 ψ是良定义的：若 $g.f(0) = h.f(0)$，则 $g^{-1}h \in \mathrm{Stab}_G(f(0))$，因此由条件 (1)可得 $\rho(g^{-1}h) \in \mathrm{Stab}_{G'}(f'(0))$，从而 $\psi(g.f(0)) = \rho(g).f'(0) = \rho(h).f'(0) = \psi(h.f(0))$。

类似地，由于 G 在 $\mathcal{A}$上传递地作用，$\mathcal{A}$ 的每个元素都可写成某个 $g \in G$对应的 $g.f$，因此我们定义 $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ 为

$$\varphi(g.f) := \rho(g).f'.$$

映射 φ 由条件 (2)良好定义。根据构造，ψ 和 φ 是ρ-等变的。

要证明 $(\psi,\ \varphi,\ \tau)$ 是建筑态射，还需验证对于每个图表 $z \in \mathcal{A}$，下图表可交换

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \xrightarrow{z} & B \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \mathbb{A}' & \xrightarrow[\varphi(z)]{} & B'. \end{array}$$

设 $z \in \mathcal{A}$ 和 $x \in \mathbb{A}$。由 G-作用在 $\mathcal{A}$上的传递性，存在$g \in G$ 使得 $g.f = z$。此外，条件 (3) 给出 $h \in G$，使得$h.f = f \circ t^x$ 且 $\rho(h).f' = f' \circ t^{\tau(x)}$。于是

$$\begin{aligned}(\psi \circ z)(x) &= \psi(g.f(x)) = \psi(g.h.f(0)) = \rho(g).\rho(h).f'(0) \\ &= \rho(g).f'(\tau(x)) = \varphi(g.f)(\tau(x)) = \varphi(z)(\tau(x)),\end{aligned}$$

因此图表可交换。

为证明 (a)（ m 的单射性），我们假设 τ 和 ρ 是单射，并且 $\rho(\mathrm{Stab}_G(f)) = \mathrm{Stab}_{G'}(f')$。为证明 ψ 是单射，取 g、$h \in G$，使得 $\psi(g.f(0)) = \psi(h.f(0))$，并验证 $g.f(0) = h.f(0)$。由公理（A3）以及 G 在 $\mathcal{A}$ 上传递作用这一事实，存在 $k \in G$ 和 x、$y \in \mathbb{A}$，使得

$$k.f(x) = g.f(0) \text{ and } k.f(y) = h.f(0).$$

与 ψ 复合，得到

$$\rho(k).f'(\tau(x)) = \psi(k.f(x)) = \psi(k.f(y)) = \rho(k).f'(\tau(y)).$$

因此，由于 f'和 τ具有单射性，可得 $x = y$，于是

$$g.f(0) = k.f(x) = h.f(0),$$

这就证明了 ψ 是单射的。

现在设 $f_1,\ f_2 \in \mathcal{A}$，其中 $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$。由于 G 在 $\mathcal{A}$上传递地作用，存在 g_1、$g_2 \in G$ 使得 $f_1 = g_1.f$ 且 $f_2 = g_2.f$。由φ的构造可得 $\rho(g_1).f' = \rho(g_2).f'$，于是

$$\rho(g_1^{-1}g_2) \in \mathrm{Stab}_{G'}(f') = \rho(\mathrm{Stab}_G(f)).$$

由 ρ的单射性可知$g_1^{-1}g_2 \in \mathrm{Stab}_G(f)$，从而 $f_1 = g_1.f = g_2.f = f_2$，因此 φ 是单射的。

为证明(b)（ m的满射性），我们假设 G' 在$\mathcal{A}'$上传递地作用，且 τ 和 ρ 均为满射。设 $z' \in \mathcal{A}'$。由 G'在 $\mathcal{A}'$上的传递性，存在 $g' \in G'$ 使得 $z' = g'.f'$。此外，ρ 是满射，因此 $g' = \rho(g)$ 对某个 $g \in G$成立。因此 $\varphi(g.f) = g'.f' = z'$，所以 φ是满射。

现在我们证明 ψ的满射性。设 $p' \in B'$。由 G 在 B'上的作用具有传递性可知，存在 $z' \in \mathcal{A}'$ 使得 $p' = z'(0)$。由于 G' 在 $\mathcal{A}'$ 上的作用是传递的，且 ρ 是满射的，因此存在 $g \in G$，使得$p' = z'(0) = \rho(g).f'(0)$。于是

$$\psi(g.f(0)) = \rho(g).f'(0) = z'(0) = p',$$

因此 ψ 也是满射的。最后，根据假设，τ 是满射的。

为证明 (c)（即 m 是一个同构），我们假设 $\tau\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 是公寓同构，G' 在 B' 和 $\mathcal{A}'$上传递作用，ρ 是一个同构，并且定理条件中的两个包含映射都是等式。现在，我们可以对 τ^{-1}、ρ^{-1} 以及图表 f'和f 应用定理 4.10，从而得到一个 ρ^{-1}-等变态射 $(\psi', \varphi', \tau^{-1})$，它将 $(B', \mathcal{A}')$映射到 $(B, \mathcal{A})$，

使得 $\varphi'(f') = f$。由 ψ和 φ的等变性可知，对每个 $g \in G$和 $x \in \mathbb{A}$，都有

$$\psi' \circ \psi(g.f(x)) = \psi'(\rho(g).f'(x)) = g.f(x) \quad \text{and}$$
$$\varphi' \circ \varphi(g.f) = \varphi'(\rho(g).f') = g.f,$$

类似地， $\psi \circ \psi' = \mathrm{Id}_{B'}$和 $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}'}$。因此， B和 B'作为广义仿射建筑是同构的。□

4.4. **延拓公寓的态射 II**。本节的目标是证明定理 4.14，该定理给出了 G-建筑之间的态射，即使 G 不在 B上作传递作用。作为权衡，条件 (1)、(2) 和 (3) 将由稍强一些的条件取代。为此，我们引入一些记号，以便更仔细地研究图表的稳定子（及其某些陪集）。

定义 4.11。设 G 是一个群，且$(B, \mathcal{A})$是一个 G-建筑。对于 $f \in \mathcal{A}$ 和 $w \in W_a = T \rtimes W_s$，我们定义由 G 中元素构成的子集$A_{f,\,w}$，其中这些元素在$f(\mathbb{A})$上的作用方式与 w 在 $\mathbb{A}$上的作用方式相同，即

$$A_{f,w} \coloneqq \{g \in G \colon g.f = f \circ w\} \subseteq G.$$

注意，$A_{f,\,w}$ 可能为空。不过，如果 G 在图册上作用传递$\mathcal{A}$ （这通常如此），那么公理 （A1）等价于要求$A_{f,\,w} \neq \emptyset$ 对所有 $f \in \mathcal{A}$ 和 $w \in W_a$都成立。

命题 4.12。假设 G 在 $\mathcal{A}$ 上传递作用，并令 $f \in \mathcal{A}$。那么，

- 对所有 w、$w' \in W_a$，都有 $A_{f,\,w}A_{f,\,w'} = A_{f,\,ww'}$；
- 对于 $w =$ 恒等元，有 $A_{f,\,\text{恒等元}} =$ 稳定子$_G(f)$；并且对于每个 $w \in W_a$，都存在 $g \in G$ 使得 $A_{f,\,w} = gA_{f,\,\text{恒等元}}$，因此 $A_{f,\,w}$ 是稳定子 稳定子$_G(f)$的一个陪集；
- 所有这些陪集的并集 $N_f \coloneqq \bigcup_{w \in W_a} A_{f,\,w}$ 是一个群，并满足$N_f/$稳定子$_G(f) \cong W_a$。

注 4.13。对于 Bruhat–Tits 建筑（例 2.7），有 $N_{f_0} = \mathrm{Nor}_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})(\mathbb{F})$对于标准图表 f_0：$\mathbb{A} \to B_{\mathrm{BT}}$，[BT72，（7.4.10）]。

命题 *4.12* 的证明。根据定义，$A_{f,\,\mathrm{Id}} =$ 稳定子$_G(f)$。对于 $w \in W_a$，由公理 $f \circ w \in \mathcal{A}$ 可得(A1)；又由于 G 在 $\mathcal{A}$上的作用具有传递性，存在某个 $g \in G$ 使得 $g.f = f \circ w$。于是

$$A_{f,w} = \{h \in G \colon h.f = f \circ w = g.f\} = \{h \in G \colon g^{-1}h.f = f\}$$
$$= g\{h' \in G \colon h'.f = f\} = gA_{f,\mathrm{Id}} = g\,\mathrm{Stab}_G(f).$$

如果 w，$w' \in W_a$ 且 $g \in A_{f,\,w}$, $g' \in A_{f,\,w'}$，则 $gg'.f = g.f \circ w' = f \circ ww'$，因此$gg' \in A_{f,\,ww'}$。类似地，我们有 $g^{-1} \in A_{f,\,w^{-1}}$，因为对所有 $x \in \mathbb{A}$ 都有

$$g^{-1}.f(x) = g^{-1}.(f \circ w)(w^{-1}x) = g^{-1}g.f(w^{-1}x) = f \circ w^{-1}(x).$$

这表明 N_f 是 G 的子群，并且将 $g \in A_{f,\,w}$ 映射到 w 的投影 $N_f \twoheadrightarrow W_a$是一个群同态，其核为 $A_{f,\,\mathrm{Id}} \triangleleft N_f$。

我们已经看到 $A_{f,\,w}A_{f,\,w'} \subseteq A_{f,\,ww'}$。反过来，令 $g \in A_{f,\,ww'}$，任取 $h \in A_{f,\,w}$ 并定义 $h' \coloneqq h^{-1}g \in A_{f,\,w^{-1}}A_{f,\,ww'} \subseteq A_{f,\,w'}$。则 $g = hh' \in A_{f,\,w}A_{f,\,w'}$。□

现在我们可以陈述主定理的一个版本，即使在 G 不在 B上传递作用时，该版本仍然成立。其证明与定理4.10的证明类似，但稍微复杂一些。

定理 4.14. 设$(B, \mathcal{A})$ 是一个 G-建筑，且$(B', \mathcal{A}')$ 是一个 G'-建筑。设ρ: $G \to G'$ 是一个群同态，$\tau \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 是 B 和 B'各自的模型公寓之间的一个态射。若 G 传递地作用于 $\mathcal{A}$，且存在图表 $f \in \mathcal{A}$ 和 $f' \in \mathcal{A}'$ 使得

(i) ρ(稳定子$_G(f(x))) \subseteq$稳定子$_{G'}(f'(\tau(x)))$ 对所有 $x \in \mathbb{A}$ 均成立，且 *(ii)* $\rho(A_{f,\ w}) \subseteq A_{f',\ \sigma(w)}$ 对所有 $w \in W_a$ 均成立，那么存在一个 ρ-等变态射 $m := (\psi, \varphi, \tau)\colon B \to B'$。

此外，

(a) 若 τ 和 ρ 是单射，且 $\rho(Stab_G(f)) = Stab_{G'}(f')$，则 m 是单射；*(b)* 若 G' 在 $\mathcal{A}'$ 上传递地作用，且 τ 和 ρ 是满射，则 m 是满射；*(c)* 若 τ 是同构，G' 在 $\mathcal{A}'$ 上传递地作用，ρ 是群同构，且包含映射 *(i)* 和 *(ii)* 均为等式，则存在一个逆态射。也就是说，$(B, \mathcal{A})$ 与 $(B', \mathcal{A}')$ 同构。

证明。 假设 G 在 $\mathcal{A}$上传递地作用，并固定满足 $f \in \mathcal{A}$ 和 $f' \in \mathcal{A}'$的图表 (i) 和 (ii)。我们从构造 $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$开始。事实上，由于 G 在 $\mathcal{A}$上传递地作用，$\mathcal{A}$ 的每个元素都可写成 $g.f$，其中$g \in G$，因此我们定义一个 ρ-等变函数 $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ 如下：

$$\varphi(g.f) := \rho(g).f'.$$

映射 φ 是良定义的。事实上，若 $g.f = h.f$ 对某个 $g,\ h \in G$，则$g^{-1}h.f = f$ 因此，利用 (ii) 对 $w = \mathrm{Id}$ 的应用可得 $\rho(g^{-1}h) \in$ 稳定子$_{G'}(f')$，从而

$$\varphi(g.f) = \rho(g).f' = \rho(h).f' = \varphi(h.f).$$

接下来，我们定义 $\psi\colon B \to B'$。 B中的任意元素都可写成 $g.f(x)$ 的形式，其中 $g \in G$ 和 $x \in \mathbb{A}$——这是由公理 (A3) 以及 G 在 $\mathcal{A}$上作传递作用这一事实推出的。对每个 $g \in G$ 和 $x \in \mathbb{A}$，我们定义 ψ 如下：

$$\psi\left(g.f\left(x\right)\right) := \rho(g).f'\left(\tau\left(x\right)\right).$$

我们来验证 ψ是良定义的。设 $g, h \in G$和 $x, y \in \mathbb{A}$满足 $g.f(x) = h.f(y)$。由公理 $(\mathbf{A_2})$ 可知存在 $w \in W_a$ 使得

$$(g.f)|_\Omega = (h.f \circ w)\,|_\Omega, \quad \text{where } \Omega := (g.f)^{-1}\left(g.f\left(\mathbb{A}\right) \cap h.f\left(\mathbb{A}\right)\right).$$

注意，由于 $g.f(x) = h.f(y)$，因此 $x \in \Omega$。特别是

$$h.f(y) = g.f(x) = h.f(w(x)),$$

从而根据 f 的单射性，有 $w(x) = y$。集合 $A_{f,w}$ 根据 G 在 $\mathcal{A}$ 上的作用的传递性以及公理 (A1) 非空。对于每个 $g_w \in A_{f,w}$，我们有

$$g.f(x) = h.f(w(x)) = hg_w.f(x),$$

从而 $\rho(g^{-1}hg_w) \in \rho$(稳定子$_G(f(x))) \subseteq$稳定子$_G(f'(\tau(x)))$ 使用 (i)，或等价地

$$\rho(g).f'(\tau(x)) = \rho(hg_w).f'(\tau(x)).$$

根据 (ii)，我们还有 $\rho(g_w) \in \rho(A_{f,w}) \subseteq A_{f',\sigma(w)}$ 从而

$$\begin{aligned}\rho(g).f'(\tau(x)) = \rho(hg_w).f'(\tau(x)) &= \rho(h).f'\left(\sigma\left(w\right)\left(\tau\left(x\right)\right)\right)\\ &= \rho(h).f'(\tau(w(x))) = \rho(h).f'(\tau(y)),\end{aligned}$$

其中第三个等式成立是因为 τ 是公寓态射。这表明 ψ 定义良好。根据构造，φ 和 ψ 是 ρ-等变的。

要证明 (ψ, φ, τ) 是建筑的 ρ-等变态射，还需检查对于每个图表 $z \in \mathcal{A}$，下图都交换

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{A} & \xrightarrow{\ z\ } & B\\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi}\\ \mathbb{A}' & \xrightarrow[\varphi(z)]{} & B'.\end{array}$$

设 $z \in \mathcal{A}$ 和 $x \in \mathbb{A}$。由 G 在 $\mathcal{A}$ 上作用的传递性，存在 $g \in G$，使得 $g.f = z$。于是

$$(\psi \circ z)(x) = \psi(g.f(x)) = \rho(g).f'(\tau(x)) = \varphi(g.f)(\tau(x)) = \varphi(z)(\tau(x)),$$

因此该图表可交换。

为证明 (a)（m的单射性），我们假设 τ 和 ρ 是单射，且$\rho(\mathrm{Stab}_G(f)) = \mathrm{Stab}_{G'}(f')$。对于每个 $p \in B$，都存在 $g \in G$ 和 $x \in \mathbb{A}$，使得 $g.f(x) = p$。因此，为了证明 ψ 是单射，取 g、$h \in G$ 以及 x、$y \in \mathbb{A}$，使得 $\psi(g.f(x)) = \psi(h.f(y))$，并验证 $g.f(x) = h.f(y)$。根据公理（A3），并利用 G 在 $\mathcal{A}$上传递作用这一事实，存在 $g_1 \in G$ 和x_1、$y_1 \in \mathbb{A}$，使得

$$g_1.f(x_1) = g.f(x) \text{ and } g_1.f(y_1) = h.f(y).$$

与 ψ 复合，得到

$$\rho(g_1).f'(\tau(x_1)) = \psi(g_1.f(x_1)) = \psi(g_1.f(y_1)) = \rho(g_1).f'(\tau(y_1)).$$

因此，由于 τ 是单射，且 f 和 f'是单射，可得$x_1 = y_1$，于是

$$g.f(x) = g_1.f(x_1) = h.f(y),$$

这证明了 ψ 是单射的。

现在假设 ρ是单射，且 $\rho(\mathrm{Stab}_G(f)) = \mathrm{Stab}_{G'}(f')$。令 f_1，$f_2 \in \mathcal{A}$满足 $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$。由于 G 在 $\mathcal{A}$上传递地作用，存在 g_1、$g_2 \in G$ 使得 $f_1 = g_1.f$且 $f_2 = g_2.f$。根据 φ的构造可得 $\rho(g_1).f' = \rho(g_2).f'$，因此

$$\rho(g_1^{-1}g_2) \in \mathrm{Stab}_{G'}(f') = \rho(\mathrm{Stab}_G(f)).$$

由 ρ的单射性可知 $g_1^{-1}g_2 \in \mathrm{Stab}_G(f)$，因此 $f_1 = g_1.f = g_2.f = f_2$，故 φ 是单射的。

为证明(b) (m的满射性），我们假设 G' 在$\mathcal{A}'$上传递地作用，且 τ 和 ρ 都是满射。令 $z' \in \mathcal{A}'$。由 G'-在 $\mathcal{A}'$上的传递性可知，存在 $g' \in G'$ 使得 $z' = g'.f'$。此外，ρ 是满射，因此存在某个 $g' = \rho(g)$，使得 $g \in G$。于是 $\varphi(g.f) = g'.f' = z'$，所以 φ是满射。

现在我们证明 ψ的满射性。设 $p' \in B'$。根据公理（A3），存在 $x' \in \mathbb{A}'$ 和 $z' \in \mathcal{A}'$，使得 $p' = z'(x')$。由于 G' 在 $\mathcal{A}'$ 上的作用是传递的，且 ρ 是满射的，存在 $g \in G$，使得 $p' = z'(x') = \rho(g).f'(x')$。由 τ的满射性，存在 $x \in \mathbb{A}$，使得 $x' = \tau(x)$。因此

$$\psi(g.f(x)) = \rho(g).f'(\tau(x)) = z'(x') = p',$$

因此 ψ 也是满射的。

为证明 (c)（即 m 是一个同构），我们假设 $\tau\colon\ \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 是公寓同构，G' 在 $\mathcal{A}'$上传递地作用，ρ 是一个同构，并且定理条件中的两个包含映射均为等式。现在，我们可以将定理 4.14 应用于 τ^{-1}、ρ^{-1}以及图表 f'和 f，从而得到一个 ρ^{-1}-等变态射（ψ'，φ'，τ^{-1}），其将（B'，$\mathcal{A}'$）映射到（B，$\mathcal{A}$），使得$\varphi'(f') = f$。由 ψ 和 φ的等变性，对于每个 $g \in G$ 和 $x \in \mathbb{A}$，我们有

$$\psi' \circ \psi(g.f(x)) = \psi'(\rho(g).f'(x)) = g.f(x) \quad \text{and}$$
$$\varphi' \circ \varphi(g.f) = \varphi'(\rho(g).f') = g.f,$$

同理，$\psi \circ \psi' = \mathrm{Id}_{B'}$和 $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}'}$。因此，$B$和 B'作为广义仿射建筑是同构的。□

注 4.15. 定理 4.10 和 4.14 中的态射在以下意义下是唯一的。假设 G 在 $\mathcal{A}$ 上传递作用，并固定一个图表 $f \in \mathcal{A}$。若两个ρ-等变态射 $m = (\psi, \varphi, \tau)$、$m' = (\psi', \varphi', \tau')\colon (B, \mathcal{A}) \to (B', \mathcal{A}')$ 满足 $\tau = \tau'$ 且 $\varphi(f) = \varphi(f')$，则 $m = m'$。

证明。 $\mathcal{A}$ 中的每个元素都可写成某个 $g \in G$ 的形式。于是

$$\varphi(g.f) = \rho(g)\varphi(f) = \rho(g)\varphi'(f') = \varphi'(g.f),$$

因此 $\varphi = \varphi'$。 B 中的任意元素都可写成 $g.f(x)$ 的形式，其中 $g \in G$、 $x \in \mathbb{A}$。于是

$$\psi(g.f(x)) = \rho(g).\varphi(f)(\tau(x)) = \rho(g).\varphi'(f)(\tau(x)) = \psi'(g.f(x)),$$

因此 $\psi = \psi'$。 □

5. Relations between the different buildings

本节的目标是应用定理4.14来构造态射

$$B_L \xrightarrow[\cong]{\text{(Theorem 5.9)}} B_S \xhookrightarrow{\text{(Theorem 5.14)}} B_{\mathrm{BT}} \xhookrightarrow{\text{(Theorem 5.19)}} B_N,$$

只要对某个代数群 $\mathbf{G}$ 和赋值域 $\mathbb{F}$ 的选取，源与目标均有定义即可。所有这三个态射都是单射态射；当 $\Lambda = \mathbb{R}$ （赋值满射到 $\mathbb{R}$）时，所有态射都是同构。

5.1. **格建筑与对称建筑**。 本节的目标是证明定理 5.9，其中我们构造一个从格建筑B_L (例 2.6) 到对称建筑 B_S (例 2.8) 的同构，考虑 $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_n$ 且 $\mathbb{F}$ 是一个带有序相容赋值的实闭域v： $\mathbb{F}^\times \to \Lambda = \mathbb{F}^\times/\mathcal{O}^\times$。该同构并不像人们预期的那样自然：它使用了一个非平凡的公寓同构 τ，由乘以 (-1) 给出，见引理 5.7。这类似于某些离散建筑中的同构情形，这些同构并不保持标记。

B_L和 B_S均属于类型 $\mathbb{A}(\Phi, \Lambda, \Lambda^{n-1})$，其底层的类型为 A_{n-1} 的根系由下式给出

$$\Phi = \{x_{ij} \coloneqq e_i - e_j \in V, \},$$

其中 $V = \mathbb{R}^n$是具有标准基 $\{e_1, \ldots, e_n\}$的标准向量空间。 Φ的基 $\Delta = \{x_{i,i+1}\colon \ i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\}$ 诱导出一个同构

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Phi) \otimes \Lambda \to \Lambda^{n-1}, \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_{i,i+1} \otimes \lambda_i \mapsto (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$$

公寓 $\mathbb{A} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Phi) \otimes \Lambda$，其中 Λ^{n-1}。球面魏尔群 W_s是由 n 个元素组成的对称群 S_n，它通过 $\sigma(x_{ij}) = x_{\sigma(i)\sigma(j)}$（ $\sigma \in W_s$）作用于 Φ，并通过线性延拓作用于 $\mathbb{A}$。平移群 T 是全平移群 $T \cong \Lambda^{n-1}$。我们首先为格建筑 B_L建立理论。

5.1.1. 格建筑的设置。目前，设 $\mathbb{F}$ 为任意赋值域（不一定是有序的）。回顾例 2.6，格的形式为$\mathcal{O}e'_1 + \ldots + \mathcal{O}e'_n$，其中 $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ 是 $\mathbb{F}^n$的一组基， $\mathcal{O}$是赋值环；格建筑 B_L 是格的相似类集合，并且 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ 在 B_L 上传递地作用（例 4.6）。将 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \subseteq \mathbb{F}^{n\times n}$视为 $\subseteq \mathbb{F}^{n\times n}$，我们定义 $\mathrm{SL}_n(\mathcal{O}) \coloneqq \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \cap \mathcal{O}^{n\times n}$。对应于 $\mathbb{F}^n$ 的标准基的格 $L_0 = \mathcal{O}^n$ 称为标准格，并称 $[L_0]$ 为 B_L 的基点。以下结论在离散情形中广为人知，证明可见于 [HIL23]。

命题 5.1 ([HIL23, 引理 11.4])。 我们有 稳定子$_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})}([L_0]) = \mathrm{SL}_n(\mathcal{O})$。

回忆一下，由 [Ben94] 对应于标准基的图表$\mathcal{E}$ 由下式给出

$$f_{\mathcal{E}}\colon \mathbb{A} \cong \Lambda^{n-1} \to B_L$$
$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \mapsto \left[\mathcal{O}x_{\lambda_1}e_1 + \mathcal{O}\frac{x_{\lambda_2}}{x_{\lambda_1}}e_2 + \ldots + \mathcal{O}\frac{x_{\lambda_{n-1}}}{x_{\lambda_{n-2}}}e_{n-1} + \mathcal{O}\frac{1}{x_{\lambda_{n-1}}}e_n\right],$$

其中 $x_\lambda \in \mathbb{F}^\times$ 使得 $v(x_\lambda) = \lambda$。

引理 5.2。 对于 $a =$对角矩阵$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ 以及 $\lambda_k = v\left(\prod_{i=1}^k a_i\right)$，我们有

$$f_{\mathcal{E}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) = a.[L_0].$$

$f_{\mathcal{E}}$ 的像中的每个点都具有如下形式： $a.[L_0]$ ，其中某个对角矩阵为 $a =$对角矩阵$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$。

此外，若 $\mathbb{F}$ 也有序，则我们可以选择 $a_i > 0$。

证明。 对于 $k \in \{1, \ldots, n-1\}$，我们令 $x_{\lambda_k} := \prod_{i=1}^k a_i$，从而对于所有 $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ 和 $1/x_{\lambda_{n-1}} = a_n$，都有 $x_{\lambda_k}/x_{\lambda_{k-1}} = a_k$，因为 $\det(a) = 1$。第一种描述随即由 $f_{\mathcal{E}}$ 的定义直接得出。若从某个 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \Lambda^{n-1}$ 开始，我们可以选择满足 $v(a_1) = \lambda_1$ 的 $a_1 \in \mathbb{F}^\times$，然后逐步选取 $v(a_k) = \lambda_k - \lambda_{k-1}$，使其对所有 $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ 都成立。最后定义 $a_n := 1/(a_1 \cdots a_{n-1}) \in \mathbb{F}_{>0}$。于是

$$v\left(\prod_{i=1}^k a_i\right) = \sum_{i=1}^k v(a_i) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) + \ldots + (\lambda_k - \lambda_{k-1}) = \lambda_k,$$

所以 $f_{\mathcal{E}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) = a.[L_0]$。

由于 $v(a_i) = v(-a_i)$，最后一个断言得证。 □

由 α_{ij} 定义的对偶根 $\alpha_{ij} \in \Sigma \subseteq V^\star$： $V \to \mathbb{R}, (v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_i - v_j$定义了线性映射

$$\alpha_{ij}\colon \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Phi) \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda \to \Lambda, \quad \sum_{k=1}^{n-1} x_{k,k+1} \otimes \lambda_k \mapsto \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \alpha_{ij}(x_{k,k+1}),$$

可用于刻画引理 a 中的对角元素 5.2。

引理 5.3。 设 $a =\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$。点 $x \in \mathbb{A}$ 满足$f_{\mathcal{E}}(x) = a.[L_0]$ 当且仅当对所有 $\alpha_{ij} \in \Sigma$，$\alpha_{ij}(x) = v(a_i/a_j)$ 。

证明。 设 $A := \{\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)\colon a_i \neq 0\}$ 为 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ 的对角子群。我们描述在以下识别下与 $a.[L_0]$ 对应的点 $x \in \mathbb{A}$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{A} & \xleftarrow{\sim} & \Lambda^{n-1} & \xrightarrow{\sim} & A.[L_0] \\ \sum_{k=1}^{n-1} x_{k,k+1} \otimes \lambda_k & \mapsto & (\lambda_k)_{k=1}^{n-1} & \mapsto & f_{\mathcal{E}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}), \end{array}$$

其中 $\mathcal{E}$ 是标准基。根据引理 5.2， $\lambda_k = \sum_{\ell=1}^k v(a_\ell)$，因此

$$x = \sum_{k=1}^{n-1} x_{k,k+1} \otimes v\left(\prod_{\ell=1}^k a_\ell\right).$$

现在应用 α_{ij} ，并利用 $\alpha_{ij}(x_{k,\ k+1}) = \delta_{ik} + \delta_{j,\ k+1} - \delta_{i,\ k+1} - \delta_{jk}$，其中 δ是克罗内克符号，我们得到

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}(x) &= \sum_{k=1}^{n-1} v\left(\prod_{\ell=1}^k a_\ell\right) \alpha_{ij}(x_{k,k+1}) \\ &= v\left(\prod_{\ell=1}^i a_\ell\right) + v\left(\prod_{\ell=1}^{j-1} a_\ell\right) - v\left(\prod_{\ell=1}^{i-1} a_\ell\right) - v\left(\prod_{\ell=1}^j a_\ell\right) = v(a_i/a_j). \end{aligned}$$

另一方面，若已知α_{ij}（x）$= v$（a_i/a_j）对某个 $x \in \mathbb{A}$ 满足 $x = \sum_{k=1}^{n-1} x_{k,k+1} \otimes \lambda_k$，那么根据相同的计算以及 λ_k 的唯一性，我们知道 $\lambda_k = v\left(\prod_{\ell=1}^{k} a_\ell\right)$。□

由引理5.2，$f_{\mathcal{E}}$（x）$= a.[L_0]$。

命题 5.4. 标准公寓在 B_L中的逐点稳定子由下式给出

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})}(f_{\mathcal{E}}(\mathbb{A})) = \{\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \colon v(a_i) = 0\}\,.$$

证明。点 $p \in f_{\mathcal{E}}(\mathbb{A})$ 是形如 $p = [\sum_{i=1}^{n} \mathcal{O} x_i e_i]$ 的格的相似类，其中 $x_i \in \mathbb{F}^\times$。通过 $g =$ 对角矩阵$(a_1, \ldots, a_n)$ 作用，其中 $v(a_i) = 0$，得到 $g.p = [\sum_{i=1}^{n} \mathcal{O} a_i x_i e_i] = p$，因为当 $a_i \in \mathcal{O}^\times$ 时 $\mathcal{O} a_i = \mathcal{O}$。另一方面，如果

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$$

固定所有点 $p \in f_{\mathcal{E}}(\mathbb{A})$，那么将 $p = a.[L_0]$ 写作 $a =$ 对角矩阵$(a_1, \ldots, a_n)$（使用引理 5.2），这意味着 $g.a.[L_0] = a.[L_0]$，因此根据命题 5.1，$a^{-1} g a \in$ 稳定子$_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})}([L_0]) = \mathrm{SL}_n(\mathcal{O})$。在坐标中，对所有这样的 a，$g_{ij} a_j / a_i \in \mathcal{O}$。对于$i \neq j$，这意味着 $g_{ij} = 0$，所以 g 必须是对角矩阵，且对角元素必须满足 $g_{ii} = g_{ii} a_i / a_i \in \mathcal{O}$。由于稳定子对求逆封闭，也有 $g_{ii}^{-1} \in \mathcal{O}$，因此 $v(g_{ii}) = 0$。□

5.1.2. 对称建筑的设置。现在设 $\mathbb{F}$ 另外还是实闭的，且赋值与序相容。对于 $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$，有 $K_{\mathbb{F}} = \mathrm{SO}_n(\mathbb{F})$，包含单位元的对角子群的半代数连通分支由下式给出

$$A_{\mathbb{F}} \coloneqq \{\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \colon a_i > 0\}\,.$$

相对于由对角子群给出的极大环面的根系可识别为

$$\Sigma = \{\alpha_{ij} \in V^\star \colon \alpha_{ij}(v_1, \ldots, v_n) = v_i - v_j \text{ for all } (v_1, \ldots, v_n) \in V\}\,,$$

从而，对偶根系 $\Sigma^\vee = \Phi$ 如前所定义。类似于引理 5.3，我们刻画满足下述条件的 $a \in A_{\mathbb{F}}$：$a.o = f_0(x)$ 对某个$x \in \mathbb{A}$成立，其中 f_0 是例 2.8中所定义的标准图表。

引理 5.5。 点 $x \in \mathbb{A}$ 满足 $f_0(x) = a.o$ 当且仅当对 $a \in A_{\mathbb{F}}$ 有$\alpha_{ij}(x) = (-v)($ $a_i/a_j)$ 对所有 $\alpha_{ij} \in \Sigma$成立。

证明。对于“$\Longrightarrow$”这一方向，回顾一下，相容条件（C_S）意味着，对于 $\alpha \in \Sigma$，我们有

$$(-v)(\chi_\alpha(a)) = \alpha(x).$$

在我们的特定情形中，若对于某个 $x \in \mathbb{A}$，$a.o = f_0(x)$，令 $\alpha = \alpha_{ij}$，我们恰好得到 $(-v)$ (a_i/a_j) $= \alpha_{ij}$ (x)。

另一方面，任何 $x = \sum_{k=1}^{n-1} x_{k,k+1} \otimes \lambda_k \in \mathbb{A}$ 都由 $\lambda_k \in \Lambda$ 唯一确定。因此，如果 $(-v)(a_i/a_j) = \alpha_{ij}(x)$，那么

$$(-v)(a_i/a_j) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \alpha_{ij}(x_{k,k+1}) = \lambda_i + \lambda_{j-1} - \lambda_{i-1} - \lambda_j$$

（按照约定 $\lambda_0 = 0$）。这就得到线性方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-v)(a_1/a_2) \\ (-v)(a_2/a_3) \\ \vdots \\ \\ (-v)(a_{n-1}/a_n) \end{pmatrix},$$

由于矩阵可逆，因此它唯一确定该解。 □

图表与点的稳定子 B_L 在命题5.1 和5.4中与作用于 B_S的稳定子一致。

命题5.6。基点 $o \in B_S$ 的稳定子是 稳定子$_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})}(o)$ =$\mathrm{SL}_n(\mathcal{O})$， =而标准公寓的逐点稳定子为

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})}(f_0(\mathbb{A})) = \{\mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \colon v(a_i) = 0\}.$$

证明。根据命题4.9，我们有稳定子$_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})}(f_0(\mathbb{A}))$ = $M_{\mathbb{F}}A_{\mathbb{F}}(\mathcal{O})$，其中$M_{\mathbb{F}}$:=中心化子$_{\mathrm{SO}_n(\mathbb{F})}(A_{\mathbb{F}})$由 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ 中所有对角矩阵组成，其元素为±1。□

5.1.3. 格建筑与对称建筑之间的同构。在本小节中，我们将证明格建筑 B_L 与对称建筑 B_S同构。尽管这两个建筑具有相同的公寓 $\mathbb{A}$，但我们不会将单位元用作公寓态射，而是使用取反$\mathbb{A} \to \mathbb{A}$, $x \mapsto -x$。在离散情形下，这对应于一种可能不保顶点类型的同构。

引理 *5.7.* 设 *L: Span$_{\mathbb{Q}}(\Phi) \to$ Span$_{\mathbb{Q}}(\Phi)$*， $v \mapsto -v$ 为取反， γ =*Id:* $\Lambda \to \Lambda$ 为单位元，且 σ*:* $W_a \to W_a$ 为由*$\sigma(w)(x) = -\sigma(-x)$* 对所有 $x \in \mathbb{A}$给出的群同态。那么 τ =*$(L, Id\ \sigma)$* 是类型为 $(\Phi, \Lambda, \Lambda^{n-1})$ 的公寓同构 $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$。

证明。根据定义， L 是线性的， γ 是保序群同态， σ 是群同态，而 L、 γ 和 σ 显然满足

$$\tau(w(x)) = \sigma(w)(\tau(x))$$

对所有 $w \in W_a$ 和 $x \in \mathbb{A}$均成立。因此， τ 是公寓态射。由于 τ 也是其自身的逆映射，因此它是同构。□

现在设 $\mathbb{F}$ 是赋值实闭域。在证明 B_L 和 B_S同构之前，我们先考察仿射魏尔群的平移部分的作用。

引理 5.8. 对于每个 $x \in \mathbb{A}$，都存在 a =对角矩阵$(a_1, \dots, a_n) \in A_{\mathbb{F}}$，使其满足 $f_{\mathcal{E}}(x) = a.f_{\mathcal{E}}(0)$ 以及 $f_0(\tau(y)) = a^{-1}.f_0(0)$。

证明。由引理 5.2，存在 a =对角矩阵$(a_1, \dots, a_n) \in A_{\mathbb{F}}$，满足 $a.f_{\mathcal{E}}(0)$ =$f_{\mathcal{E}}(y)$。由引理 5.3，它满足 $\alpha_{ij}(y)$ = $v(a_i/a_j)$。由引理 5.5， $f_0(\tau(y))$ =$a^{-1}.f_0(0)$。□

定理 5.9. 格建筑 B_L 与对称建筑 B_S之间存在一个仿射 Λ-建筑的等变同构。

证明。 我们使用定理 4.10 因为 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ 在 B_L 和 $\mathcal{A}_L$上传递作用，参见例 4.6。令 $G = G' = \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$，并令 ρ 为恒等映射。我们取引理 5.7中的公寓同构 $\tau = (L, \gamma, \sigma$。我们考虑标准图表

$$f := f_{\mathcal{E}} \colon \mathbb{A} \to B_L \quad \text{and} \quad f' := f_0 \colon \mathbb{A} \to B_S.$$

由命题 5.1 和 5.6 可知，稳定子$\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})(f(0))$ =稳定子$\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})(f'(0))$，从而得到条件 (1)。由命题 5.4 和 5.6 可知，稳定子$\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})(f)$ =稳定子$\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})(f')$，这蕴含 (2)。根据引理 5.8，存在 $a \in A_{\mathbb{F}}$ 使得 $f(x) = a.f(0)$ 且 $f'(x) = a^{-1}.f'(0)$，或者等价地，$f'(\tau(x)) = a.f'(0)$，这就是条件（3）。

由于 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ 也在 B_S 及其图册（例 4.8）上传递地作用，$\rho = \mathrm{Id}$ 是群同构，L，γ 和 σ 均为单射，且条件(1) 和(2) 中的包含映射均为等式。因此，根据定理4.10 (c)，B_L 和 B_S 是等变同构的。□

5.2. **对称建筑与 Bruhat–Tits 建筑**。本节将证明，存在从对称建筑 B_S 到 Bruhat–Tits 建筑 B_{BT}的单射态射。当 $\Lambda = \mathbb{R}$时，它是一个同构。

因此，设 $\mathbb{F}$ 是一个带有序相容赋值 v: $\mathbb{F}^\times \to \Lambda \subseteq \mathfrak{R}$ 的实闭域，其中 $\mathfrak{R}$ 如 Hahn 嵌入定理 A.1 中所述（另见例 2.7），并记 $\mathcal{O}$ 为 v 的赋值环。令 $G :=\mathbf{G}(\mathbb{F})$，其中 G 是一个半单、连通、自伴、 $\mathbb{F}$-分裂代数群 G $<\mathrm{SL}_n$。设 S 是一个由自伴元素组成的极大（$\mathbb{F}$-分裂）环面。由于 G 是 $\mathbb{F}$-分裂的，根系 Σ 是约化的。这些条件确保与 G 和 $\mathbb{F}$ 相关的 Bruhat–Tits 建筑 B_{BT} （例 2.7）和对称建筑 B_S（例 2.8）均有定义。

令 $K = G \cap \mathbf{SO}_n(\mathbb{F})$，并令 U_α 为 $\alpha \in \Phi$ 的根群。

引理 5.10. 令 $A_{\mathbb{F}} \subseteq$ 中心化子$_G(\mathbf{S}(\mathbb{F}))$ =$\mathbf{S}(\mathbb{F})$ 为 $\mathbf{S}(\mathbb{F})$ 的单位元的半代数连通分支。则

$$\mathrm{Nor}_G(\mathbf{S}(\mathbb{F})) = \mathbf{S}(\mathbb{F}) \cdot \mathrm{Nor}_K(\mathbf{S}(\mathbb{F})) = A_{\mathbb{F}} \cdot \mathrm{Nor}_K(A_{\mathbb{F}}).$$

证明。由于 $A_{\mathbb{F}}$ 在 S($\mathbb{F}$) 中 Zariski 稠密（因为 S 作为代数群是连通的），Nor_K(S($\mathbb{F}$)) = $\mathrm{Nor}_K(A_{\mathbb{F}})$，因此包含映射 $\supseteq$ 成立。对于第一个包含映射$\subseteq$，注意到任意元素 $g \in N :=$ $\mathrm{Nor}^{\mathbf{G}(\mathbb{F})}$(S($\mathbb{F}$)) 都根据定义性质 $nU_\alpha n^{-1} = U_{w(\alpha)}$ 为所有 $\alpha \in \Sigma$ [HIL23, Definition 4.2] 表示唯一的 $w \in W_s$。我们也可以找到 $k \in \mathrm{Nor}_K(A_{\mathbb{F}})$，根据 App24, Proposition 6.2]，以相同的定义性质表示 w [，因此 $k^{-1}g$ 表示W_s 的单位元，故 $k^{-1}g \in$ S($\mathbb{F}$) [HIL23, Notation 4.37], ，所以 $g \in$ S($\mathbb{F}$) $\cdot \mathrm{Nor}_K$(S($\mathbb{F}$))。最后，我们利用 $A_{\mathbb{F}}$ 在 S($\mathbb{F}$) 中 Zariski 稠密这一点以及 [App26a, Lemma 5.18]，得到 S($\mathbb{F}$) =中心化子$_G$(S($\mathbb{F}$)) =中心化子$_G(A_{\mathbb{F}})$ =中心化子$_K(A) \cdot A_{\mathbb{F}} \subseteq A_{\mathbb{F}} \cdot \mathrm{Nor}_K(A_{\mathbb{F}})$，从而完成证明。□

现在我们来计算 Bruhat–Tits 建筑中基点的稳定子。在我们的语境下，以下描述成立；它用到了对称建筑中基点稳定子的描述。

引理 5.11. 对于基点 $[\mathrm{Id}\ 0] \in B_{\mathrm{BT}}$ 和 $o \in B_S$，有

$$\mathrm{Stab}_G([\mathrm{Id}, 0]) = \mathrm{Stab}_G(o).$$

特别地，稳定子$_G([\mathrm{Id}, 0])$ = $\mathbf{G}(\mathcal{O})$。

注 5.12. 在 [BT84a，推论 (4.6.7)]和 [HIL23，命题 7。48],中证明了稳定子([Id, 0]) = $\mathfrak{G}(\mathcal{O})$，其中 $\mathfrak{G}$ 是一个 $\mathcal{O}$ 由某个 Chevalley 基定义的群概型。在我们的定义中，$\mathbf{G}(\mathbb{F})$ 只是一个矩阵群，而定义 $\mathbf{G}(\mathcal{O})$: $= G \cap \mathcal{O}^{n\times n}$ 不涉及任何代数几何。

引理 *5.11* 的证明. 令 $N :=\mathrm{Nor}_G(\mathbf{S}(\mathbb{F}))$。我们首先证明

$$\mathrm{Stab}_G([\mathrm{Id}, 0]) \cap N = \mathrm{Stab}_G(o) \cap N.$$

令 $g \in$稳定子$_G$([Id, 0]) $\cap N$。由于 $g \in$稳定子$_G$([Id, 0]), 存在 $n \in N$ ，使得 $g^{-1}n \in P_0$ 且 $\nu(n)(0) = 0$。由于我们假设了 $g \in N$，还可得 $g^{-1}n \in N \cap P_0 =: N_0$ ，因此 $\nu(g^{-1}n)(0) = 0$ [BT72, (7.1.8)][HIL23,

推论 5.15], , 因此 $\nu(g)(0) = 0$。利用引理 5.10 将 $g = ak \in A_{\mathbb{F}} \cdot \mathrm{Nor}_K(A_{\mathbb{F}})$ 写出，我们得出 $\nu(a) = \mathrm{Id}_{V\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{R}}$，因为 $\nu(k)(0) = 0$。根据相容条件 (C_{BT})，可得对所有 $\alpha \in \Sigma$，$v(\chi_\alpha(a)) = 0$。由[App26a，命题 4.18] 可知，这意味着 $a \in$ 稳定子$_G(o)$。此外，$k \in K \subseteq$稳定子$_G(o)$ [App26a，定理 4.19 和推论 4.20], , 因此 $g \in$稳定子$_G(o)$。

现在假设 $g \in \mathrm{Stab}_G(o) \cap N$。那么我们可以写成 $g = ak \in N = A_{\mathbb{F}} \cdot \mathrm{Nor}_K(A_{\mathbb{F}})$，其中 $a \in A_{\mathbb{F}} \cap \mathcal{O}^{n\times n}$，并且 $k \in \mathrm{Nor}_K(A_{\mathbb{F}})$ [App26a，推论 4.20]。根据 [App26a，命题 4.18]，对于所有 $\alpha \in \Sigma$，都有 $v(\chi_\alpha(a)) = 0$，因此根据 (C_{BT})，$\nu(a) = \mathrm{Id}_{V\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{R}}$，特别是 $\nu(a)(0) = 0$。现在我们可以得出结论：$g \in \mathrm{Stab}_G([\mathrm{Id}, 0])$，因为 $a \in N$，且满足 $g^{-1}a = k^{-1} \in \hat{}N_0 := \{n \in N\colon \nu(n)(0) = 0\}$ 和 $\nu(a)(0) = 0$ [BT72，（7.4.1）][HIL23，定义 6.1]。

现在我们证明 $\mathrm{Stab}_G([\mathrm{Id}, 0]) = \mathrm{Stab}_G(o)$。为此，我们使用子群$U_{\alpha,0} := \{u \in U_\alpha\colon \varphi_\alpha(u) \geq 0\}$，其中 φ_α 是通过 Jacobson–Morozov 映射 $\mathrm{SL}_2 \to \mathrm{G}$ [BT72, (6.1.3.b.2), (6.2.3.b)][HIL23, Notation 7.22][1] 定义的根群赋值。回想一下，$H = \nu^{-1}(\mathrm{Id}_{V\otimes_{\mathbb{R}}\mathfrak{R}}) \subseteq N$，并且

$$P_0 = \langle U_{\alpha,0},\, H\rangle.$$

现在，若 $g \in \mathrm{Stab}_G([\mathrm{Id}, 0])$，那么根据定义，存在 $n \in N$ 使得 $g^{-1}n \in P_0$ 且 $\nu(n)(0) = 0$。由于 $n \in \mathrm{Stab}_G([\mathrm{Id}, 0]) \cap N$，由上文可得$n \in \mathrm{Stab}_G(o)$。任意 $h \in H \subseteq N$都满足 $h.[\mathrm{Id}\ 0] = [\mathrm{Id}\ \nu(h)(0)] = [\mathrm{Id}, 0]$, , 因此由上文可得 $h \in \mathrm{Stab}_G(o)$。根据 [App26a, Lemma 5.22], , 我们还可得 $U_{\alpha,0} \subseteq \mathrm{Stab}_G(o)$，因此 $P_0 \in \mathrm{Stab}_G(o)$。于是 $g = n(g^{-1}n)^{-1} \in \mathrm{Stab}_G(o)$。

如果我们从 $g \in$ 稳定子$_G(o)$开始，那么我们使用 [App26a，定理 5。45] 来得到

$$g \in \langle N_0, U_{\alpha,0}\rangle \subseteq P_0,$$

因此我们可以取 $n = \mathrm{Id} \in N$，其中 $g^{-1}n \in P_0$ 和 $\nu(n)(0) = 0$ 从而得到$g \in$ 稳定子$_G([\mathrm{Id}, 0])$。

作用在 B_S 上的稳定子已在命题4.9中计算得到。 □

引理 5.13。对于标准公寓 $f_0(\mathbb{A}) \subseteq B_S$ 和 $f_0'(\mathbb{A}') \subseteq B_{\mathrm{BT}}$，逐点稳定子相同

$$\mathrm{Stab}_G(f_0(\mathbb{A})) = \mathrm{Stab}_G(f_0'(\mathbb{A}')).$$

特别地，稳定子$_G(f_0'(\mathbb{A}'))$ = 中心化子$_G(\mathbf{S}(\mathbb{F})) \cap \mathcal{O}^{n\times n}$。

证明。根据第 2.3 节末尾的 (C_S)，对于所有 $x \in \mathbb{A}$，存在 $a \in A_{\mathbb{F}} \subseteq \mathbf{S}(\mathbb{F})$，使得 $f_0(x) = a.f_0(0)$，其中 $(-v)(\chi_\alpha(a)) = \alpha(x)$ 对所有 $\alpha \in \Sigma$均成立。根据例 2.7 中的 (C_{BT})，于是 $a.f_0'(0) = [a, 0] = [\mathrm{Id}\ \tau(x)] = f_0'(\tau(x)) \in B_{\mathrm{BT}}$。特别地，利用引理 5.11，对于所有 $x \in \mathbb{A}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Stab}_G(f_0(x)) &= \mathrm{Stab}_G(a.o) = a\,\mathrm{Stab}_G(o)a^{-1} = a\,\mathrm{Stab}_G([\mathrm{Id}, 0])a^{-1}\\ &= \mathrm{Stab}_G([a, 0]) = \mathrm{Stab}_G([\mathrm{Id}, \tau(x)]) = \mathrm{Stab}_G(f_0'(\tau(x))).\end{aligned}$$

由于 $\tau(\mathbb{A}) \subseteq \mathbb{A}'$，我们已经有

$$\mathrm{Stab}(f_0'(\mathbb{A}')) \subseteq \mathrm{Stab}_G(f_0'(\tau(\mathbb{A}))) = \mathrm{Stab}_G(f_0(\mathbb{A})).$$

在 Bruhat-Tits（$\Lambda \subseteq \mathbb{R}$）的情形下，我们可以利用 $\tau(\mathbb{A}) \subseteq \mathbb{A}'$ 稠密这一点，因此根据 [BT72，命题（7.1.9）], , 等式成立，于是 $A_{f,\mathrm{Id}} = A_{f'}$,Id。对于一般情形，我们按照 [HIL23] 计算 $\mathrm{Stab}_G(f_0'(\tau(\mathbb{A})))$。令 $\Omega := \tau(\mathbb{A}) \subseteq \mathbb{A}'$。由于对每个 $\alpha \in \Sigma$，Ω 都包含 x 任意小的 $\alpha(x)$ 点，因此我们有 $U_{\alpha,\Omega} = \bigcap_{x\in\Omega} U_{\alpha,-\alpha(x)} = \{\mathrm{Id}\}$ 和 $U_\Omega = \langle U_{\alpha,\Omega}\colon \alpha \in \Sigma\rangle\{\mathrm{Id}\}$，见 [HIL23，定义 4.8 （V1），记号 4.55]。根据 [HIL23，引理 6.5，推论 5.14], $\mathrm{Stab}_G(f_0'(\Omega)) = \hat{}P_\Omega = U_\Omega(\hat{}P_\Omega \cap N) \subseteq N$，但根据

[1]我们强调，尽管 $U_{\alpha,\,0}$ 在 [App26a], 中的定义不同，但由于 [App26a，引理 5.22 和 5.26]。

证明开头的计算，对于每个 $g \in \mathrm{Stab}_G(f_0'(\Omega)) \subseteq N$，我们都有 $\nu(g) = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}'}$ 在 $\mathbb{A}'$ 的一组基上成立，因此处处成立。因此，$\mathrm{Stab}_G(f_0'(\tau(\mathbb{A}))) \subseteq \ker(\nu) = T_b = \mathrm{Stab}_G(f_0'(\mathbb{A}'))$ [HIL23，记号 4.37 和推论 6.9]，，由此等式成立。

最后一个结论由命题 4.9 得出。 □

现在我们可以证明存在一个从 B_S 到 B_{BT}的单射态射。

定理 5.14。 G 上的恒等同态诱导出一个等变的建筑单射态射，它将类型为$\mathbb{A}(\Sigma^\vee, \Lambda, \Lambda^n)$ 的对称建筑 $(B_S, \mathcal{A})$ 映到类型为 $\mathbb{A}(\Sigma^\vee, \mathfrak{R}, \Lambda^n)$的 ***Bruhat–Tits*** 建筑 $(B_{\mathrm{BT}}, \mathcal{A}')$。

若 $\Lambda = \mathbb{R}$，则此态射是一个同构。

证明。 我们可以应用定理 4.10 (a)，因为 G 在 B_S 和 $\mathcal{A}$上传递作用，参见例 4.8。令 $L = \mathrm{Id}_{\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma^\vee)}$， $\gamma\colon \Lambda \to \mathfrak{R}$ 为包含映射， $\sigma = \mathrm{Id}_{W_a}$ 且$\rho = \mathrm{Id}_G$。对于所有 $w \in W_a$ 和 $x \in \mathbb{A}$，我们有 $L \otimes \gamma(w(x)) = \sigma(w)(L \otimes \gamma(x))$，因此 $\tau := L \otimes \gamma\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 是一个公寓态射；由于 L和 γ 是单射，它也是单射的。

我们验证定理对标准图表所要求的条件。具体而言，我们按例 2.8 选择 $f = f_0\colon \mathbb{A} \to B_S \in \mathcal{A}$。对于 B_{BT}，我们按例 2.7 选择 $f' = f_0'\colon \mathbb{A}' \to B_{\mathrm{BT}}$，由 $f_0'(x') = [\mathrm{Id}\ x']$ 给出。根据引理 5.11，有 $\mathrm{Stab}_G(f(0)) = \mathrm{Stab}_G(f'(0))$，这意味着定理 4.10 的条件 (1) 成立。根据引理 5.13，有 $\mathrm{Stab}_G(f) = \mathrm{Stab}_{G'}(f')$，这意味着条件 (2) 成立。

根据第 2.3 节末尾的 (C_S)，对所有 $x \in \mathbb{A}$，存在 $a \in A_{\mathbb{F}} \subseteq \mathsf{S}(\mathbb{F})$，使得 $f(x) = a.f(0)$，且对所有 $\alpha \in \Sigma$，有 $(-v)(\chi_\alpha(a)) = \alpha(x)$。由例 2.7 中的 ($C_{\mathrm{BT}}$)，可得 $a.f'(0) = [a, 0] = [\mathrm{Id}\ \tau(x)] = f'(\tau(x)) \in B_{\mathrm{BT}}$。我们已经证明了条件（3），因此得到一个等变态射 $m = (\psi, \varphi, \tau)\colon B_S \to B_{\mathrm{BT}}$。

由于定义和引理 (a)，其中的条件成立： τ 和 ρ 都是单射。根据引理 5.13，稳定子$_G(f) =$稳定子$_G(f')$，因此 m是单射。

如果 $\Lambda = \mathbb{R}$，那么 γ 是同构，因此 τ 是公寓同构，因为在这种情况下 $\mathfrak{R} = \mathbb{R}$，见定理 A.1。由例 4.7， G 也在 B' 和 $\mathcal{A}'$ 上作用传递，而且我们已经证明了这两个等式，因此定理 4.10 (c) 的条件成立，且 m 是一个等变同构$B_S \xrightarrow{\sim} B_{\mathrm{BT}}$。 □

5.3. **Bruhat–Tits 与范数建筑**。 本节中，我们利用定理4.14证明存在一个从 Bruhat–Tits 建筑到范数建筑的等变态射$B_{\mathrm{BT}} \quad B_N$。关于这些建筑的定义，请参见例 2.5和 2.7。

现设 $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，其中 $\mathbb{F}$ 是一个带有秩 1 赋值 $v\colon \mathbb{F}^\times \twoheadrightarrow \Lambda \subseteq \mathbb{R}$ 的域，而 $\Phi \subseteq V := \mathbb{R}^n/\mathbb{R}(1, \ldots\ldots, 1)$ 是类型 A_{n-1} 的标准根系。于是， $\mathbb{A} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Phi) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ 可与子空间 $V_0 := \{(x_1, \ldots\ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\colon \sum_i x_i = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ 相识别；该子空间带有由条目置换给出的球面魏尔群作用。

Let

$$f\colon \mathbb{A} \to B_{\mathrm{BT}},\ x \mapsto [\mathrm{Id}, x] \quad \text{and} \quad f'\colon \mathbb{A} \to B_N,\ x \mapsto [\eta_x]$$

作为标准图表，回顾如下

$$\eta_x\Big(\sum_{i=1}^n v_i e_i\Big) = \max\left\{e^{-x_1}|v_1|, \ldots, e^{-x_n}|v_n|\right\},$$

对于 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n) \in V_0$ 以及 $|a| = \exp(-v(a))$，其中 $a \in \mathbb{F}$。

我们首先回顾 Bruhat–Tits 建筑中 $f(\mathbb{A})$ 的点稳定子的描述。[2]

[2] In [BT72], $\alpha_{ij}(x)$ is denoted by $a_j(x) - a_i(x)$, see [BT72, (10.2.1)].

引理 5.15 ([BT72，推论 (10.2.9)])。 对于 $x \in \mathbb{A}$，我们有

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}(f(x)) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \colon v(g_{ij}) \geq \frac{v(\det(g))}{n} - \alpha_{ij}(x) \quad \text{for all } i,j \right\},$$

其中 $g = (g_{ij})_{ij}$ 作为矩阵。

Parreau [Par23，第 3B 节1] 给出了范数建筑中 $f'(\mathbb{A})$ 点的稳定子的描述。在 $x = 0$ (及其 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-平移的情形下，稳定子可描述为 $\mathbb{F}^\times \cdot \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$（及其共轭），其中

$$\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}) \coloneqq \{ g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) : g_{ij} \in \mathcal{O},\ \det(g) \in \mathcal{O}^\times \}.$$

我们给出一种稳定子的替代描述，与引理 5.15中的描述一致。我们的计算基于 [Par23，推论 3。4]。

引理 5.16。 对于 $x \in \mathbb{A}$，我们有

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}(f'(x)) = \left\{ g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \colon \begin{array}{l} v(g_{ij}) \geq \frac{v(\det(g))}{n} - \alpha_{ij}(x) \\ v(g^{ij}) \geq \frac{v(\det(g^{-1}))}{n} - \alpha_{ij}(x) \end{array} \quad \text{for all } i,j \right\},$$

其中 $g = (g_{ij})_{ij}$ 和 $g^{-1} = (g^{ij})_{ij}$ 作为矩阵。

注意到，根据引理 5.15，事后我们可以去掉关于 g^{-1} 的赋值条件。

证明。 记

$$\mathcal{S} \coloneqq \left\{ g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \colon \begin{array}{l} v(g_{ij}) \geq \frac{v(\det(g))}{n} - \alpha_{ij}(x) \\ v(g^{ij}) \geq \frac{v(\det(g^{-1}))}{n} - \alpha_{ij}(x) \end{array} \quad \text{for all } i,j \right\}$$

如引理中的表述。令 $x = (x_0, \ldots, x_n) \in V_0 \cong \mathbb{A}$。取 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，使得 $g.f'(x) = f'(x)$。这意味着存在某个 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ 使得 $g.\eta_x = r\eta_x$，等价地，$g.\eta_x(e_j) = r\eta_x(e_j)$，或对所有 j，有 $r^{-1}\eta_x(e_j) = g^{-1}.\eta_x(e_j) = \eta_x(ge_j)$。我们注意到，$\eta_x$ 同时适配于 $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ 标准基和 $g\mathcal{E}$，因此根据 [Par23，推论 3.3]，，我们有

$$|\det(g)| = \frac{\prod_{j=1}^n \eta_x(ge_j)}{\prod_{j=1}^n \eta_x(e_j)} = r^{-n},$$

从而 $\log(r) = v(\det(g))/n$。由于对所有 j

$$\eta_x(ge_j) = \eta_x\Big(\sum_{i=1}^n g_{ij} e_i \Big) = \max_i \left\{ |g_{ij}| e^{-x_i} \right\},$$

我们得到，对所有 i，j

$$|g_{ij}| e^{-x_i} \leq \eta_x(ge_j) = r^{-1}\eta_x(e_j) = r^{-1} e^{-x_j}.$$

取对数后，我们得到

$$-v(g_{ij}) \leq -\log(r) - x_j + x_i = \alpha_{ij}(x) - \frac{v(\det(g))}{n},$$

这意味着满足 $\mathcal{S}$ 定义中的第一条件。若 g 稳定 $f'(x)$，则 g^{-1} 也如此，因此 $\mathcal{S}$ 定义中的第二条件也成立，从而 $g \in \mathcal{S}$。

从 $g \in \mathcal{S}$ 出发，我们可以逆向推导上述论证，从而得到

$$\eta_x(ge_j) \leq |\det(g)|^{\frac{1}{n}} \eta_x(e_j)$$

对所有 j。由于还有 $g^{-1} \in \mathcal{S}$，我们有 $g.\eta_x(e_j) = \eta_x(g^{-1}e_j) \leq |\det(g)|^{-\frac{1}{n}} \eta_x(e_j)$，因此

$$\eta_x(e_j) \leq |\det(g)|^{-\frac{1}{n}} g^{-1}.\eta_x(e_j) = |\det(g)|^{-\frac{1}{n}} \eta_x(ge_j) \leq \eta_x(e_j)$$

对所有 j，且等号成立。特别地， $g.\eta_x = |\det(g)|^{-\frac{1}{n}}\eta_x$，因此 g稳定 η_x 的等价类，而这正是 $f'(x)$。□

我们总结标准公寓中点的稳定子的相关结果： f适用于 B_{BT}， f'适用于 B_N。

推论 5.17。 对于 $x \in \mathbb{A}$，我们有稳定子$_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}(f(x)) =$ 稳定子$_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}(f'(x))$。此外，对于逐点稳定子，我们有

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}(f(\mathbb{A})) = \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}(f'(\mathbb{A})).$$

引理 5.18。 对于每个 $y = (y_1, \dots, y_n) \in V_0 \cap \Lambda^n \subseteq \mathbb{A}$，都存在一个对角矩阵 $a =$对角矩阵$(a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$，使得 $-v(a_i) = y_i$。
此外，对于所有 $x \in \mathbb{A}$， $a.f'(x) = f'(x + y)$。

证明。 令 $y = (y_1, \dots, y_n) \in V_0 \cap \Lambda^n$。那么存在 $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{F}^\times$使得 $-v(a_i) = y_i$ 对于 $i \le n-1$。令 $a_n := (a_1 \cdots a_{n-1})^{-1}$，则 $a =$对角矩阵$(a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$并且

$$-v(a_n) = -\sum_{i=1}^{n-1}(-v)(a_i) = -\sum_{i=1}^{n-1} y_i = y_n.$$

此外，对于所有 $v = (v_1, \dots, v_n) \in V_0 \cong \mathbb{A}$，我们有

$$a.\eta_x(v) = \eta_x(a^{-1}v) = \max_i \left\{ e^{-x_i} \left| \frac{v_i}{a_i} \right| \right\} = \max_i \left\{ e^{-(x_i - v(a_i))} |v_i| \right\} = \eta_{x+y}(v). \square$$

定理 5.19。 存在一个从类型为 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Phi, \mathbb{R}, \Lambda^n/\Lambda(1, \dots, 1))$的 *Bruhat–Tits* 建筑 B_{BT}到类型为 $\mathbb{A}' = \mathbb{A}(\Phi, \mathbb{R}, \mathbb{R}^n/\mathbb{R}(1, \dots, 1))$的范数建筑 B_N的 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-等变单射建筑态射。

若 $\Lambda = \mathbb{R}$，此态射是一个同构。

我们将在证明中构造的态射，在建筑本身上由一个双射给出ψ: $B_{\mathrm{BT}} \to B_N$，但当 $\Lambda \neq \mathbb{R}$ 时，图册映射φ 不是双射。因此该态射不是同构。不过，正如 [Par23第 3B 节的注释4] 所述， B_N 也可以通过限制仿射魏尔群的平移部分来配备另一种图册，参见例 3.8。对于如此定义的图册，我们构造的态射总是同构。

由于 G 对 B_{BT} 的作用不是传递的，我们在证明中使用定理4.14 而不是定理 C 。

证明。 根据定义，公寓 $\mathbb{A}$、 $\mathbb{A}'$ 作为集合是相同的。然而，Bruhat–Tits 建筑 $W_a = \Lambda^n/\Lambda(1, \dots, 1)$ 的仿射魏尔群 $\Lambda \neq \mathbb{R} \rtimes W_s$是范数建筑 $\rtimes W_s$的仿射魏尔群$W'_a = \mathbb{R}^n/\mathbb{R}(1, \dots, 1)$的真子群。将这一包含映射与恒等映射 $\mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 结合起来，便得到一个公寓态射 τ。

令 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$。我们应用定理4.14 ，其中 $\rho = \mathrm{Id}_G$。由于 G 在 Bruhat–Tits 建筑的图册上具有传递作用 B_{BT}，见例4.7，因此只需证明定理(i)和 (ii)中的条件 4.14成立。

条件(i) 和条件(ii) 对 $w = \mathrm{Id}$ 成立，这可由推论5.17得出。若 $w = (t^y, w_s) \in W_a$对 $y \in V_0 \cap \Lambda^n$成立，令 $a = \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$，其中 $y_i = (-v)(a_i)$ 如引理5.18所示；再令 k 为与 w_s 对应的 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 中的置换矩阵。于是，由式（C_{BT}）可得 $a \in A_{f,t^y}$， 由引理5.18可得 $a \in A_{f',t^y}$ 。我们还有 $k \in A_{f,w_s} \cap A_{f',w_s}$。

现在对于 $g \in A_{f,w} = \{h \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \colon h.f = f \circ w\}$ 我们有 $g.f = f \circ w = a.f \circ w_s = ak.f$，因此 $g^{-1}ak \in \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}(f(\mathbb{A}))$。根据推论 5.17，这等价于 $g.f' = ak.f' = a.f' \circ w_s = f' \circ (t^y, w_s) = f' \circ w$，所以 $g \in A_{f',w}$这正是条件 (ii) 所要求的。我们已证明，对所有 $w \in W_a$，都有 $A_{f,w} = A_{f',w}$。

当 $\Lambda = \mathbb{R}$ (意即 $v\colon \mathbb{F}^\times \to \mathbb{R}$ 是满射)，回想例 4.5中 $\mathbf{GL}_n(\mathbb{F}$在图册 $\mathcal{A}'$上传递地作用。此外， ρ 是同构，并且条件 (i) 和 (ii)中的包含映射都是等式。因此， (c) 的所有条件均已满足，且 $B_{\mathrm{BT}} \cong B_N$。 □

6. Functoriality for symmetric buildings

我们希望应用广义仿射格建筑的态射这一概念，并利用定理4.14 中的构造，证明某些自然的函子性性质。为此，我们将讨论范围限定在对称建筑的情形（例 2.8），但我们预期，在第2.3节介绍的其他建筑模型中也有类似结果。

目标是证明存在由有序赋值域的同态以及代数群的单态射诱导的态射。

6.1. **域态射下的函子性**。 现在我们讨论域态射下对称建筑的函子性。这是对[BIPP21推论 5 的推广，19] 适用于一类特殊的秩 1 赋值，这些赋值源自所谓的大元素。它还展示了 Λ-函子性，见 [SS11]。本节末尾，我们利用实 Puiseux 级数域上的两个与序相容的赋值，构造一个明确的例子：两个与同一群相关联的对称建筑之间存在满射态射，见例6.3。

设 $\mathbb{F}, \mathbb{F}'$ 是两个有序域，带有与序相容的赋值 $v\colon \mathbb{F}^\times \to \Lambda$,$v'\colon (\mathbb{F}')^\times \to \Lambda'$ ，以及相应的赋值环 $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$。若域同态$\eta\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}'$ 保序且满足 $\eta(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}'$，则称其为有序赋值域的 态射。

引理 6.1。 保序域同态 $\eta\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}'$ 是有序赋值域的态射，当且仅当存在保序群同态 $\gamma\colon \Lambda \to \Lambda'$ 使得 $\gamma \circ v = v' \circ \eta$。等价地，以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^\times & \xrightarrow{\eta} & (\mathbb{F}')^\times \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v'} \\ \Lambda & \xrightarrow[\gamma]{} & \Lambda'. \end{array}$$

此外，若 η 是满射，则 γ 也是满射。

证明。 设 η 是有序赋值域的态射。对于 $\lambda \in \Lambda$，取 $a \in \mathbb{F}^\times$ 使得 $(-v)(a) = \lambda$。于是定义 $\gamma(\lambda) \coloneqq (-v')(\eta(a))$。此定义是良定的，因为若 $a, b \in \mathbb{F}^\times$ 满足 $(-v)(a) = (-v)(b) = \lambda$，则 $a/b \in \mathcal{O}$ 且 $b/a \in \mathcal{O}$，故 $(-v')(\eta(a/b)) = 0$ ，从而 $(-v')(\eta(a)) = (-v')(\eta(b))$。

映射 γ 是群同态，因为对于所有 a， $b \in \mathbb{F}^\times$，我们有

$$\begin{aligned} \gamma\left((-v)(a) + (-v)(b)\right) &= \gamma((-v)(ab)) = (-v')(\eta(ab)) \\ &= (-v)(\eta(a)) + (-v)(\eta(b)) = \gamma(-v(a)) + \gamma(-v(b)). \end{aligned}$$

现在证明 γ 是保序的。只需证明，若 $a \in \mathbb{F}^\times$满足 $0 \le -v(a)$，则 $0 \le \gamma(a)$。条件 $0 \le -v(a)$ 等价于$a \in \mathcal{O}$，因此 $\eta(a) \in \mathcal{O}'$，所以 $0 \le -v'(\eta(a)) = \gamma(a)$。

另一方面，若从一个与序相容的群同态 $\gamma\colon \Lambda \to \Lambda'$ 出发，那么对于所有满足 $(-v)(a) \le 0$ 的 $a \in \mathbb{F}^\times$ ，我们有 $(-v')(\eta(a)) = \gamma((-v)(a)) \le 0$。

现在假设 η 是满射。令 $\lambda' \in \Lambda'$，并选取 $x' \in \mathbb{F}'$ 使得$v'(x') = \lambda'$。由于 η 是满射，因此存在 $x \in \mathbb{F}$ 使得 $\eta(x) = x'$。于是

$v(x) \in \Lambda$ 满足

$$\gamma(v(x)) = v'(\eta(x)) = v'(x') = \lambda',$$

因此 γ 是满射。 □

以下假设 $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}'$ 均为实闭域。半单代数群 $\mathbf{G}$ 是 $\mathbb{F}$-分裂的，当且仅当它们是 $\mathbb{F}'$-分裂的 [App24，定理 5。17]。这使得我们能够在构造 $\mathbf{G}(\mathbb{F})$ 和 $\mathbf{G}(\mathbb{F}')$ 的对称建筑时使用同一个分裂环面 $\mathbf{S}$。稍后我们将看到，B_S 与所选择的$\mathbf{S}$ 无关（命题 6.15）。

定理 *6.2*（定理 *D*）。设 $\mathbb{F}$、$\mathbb{F}'$ 为实闭赋值域。设 $G < SL_n$ 为一个具有约化根系的连通半单自伴线性代数 $\mathbb{Q}$-群，S 为一个极大 $\mathbb{F}$-分裂（因而也是 $\mathbb{F}'$-分裂）环面，且其中所有元素都是自伴的；设 B 和 B' 分别为与 $G(\mathbb{F})$ 和 $G(\mathbb{F}')$ 相关联的对称建筑。设 $\eta\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}'$ 为有序赋值域的态射，且 $\rho\colon G(\mathbb{F}) \to G(\mathbb{F}')$ 为诱导的群同态。则存在一个建筑的等变态射 $m\colon B \to B'$。

此外，若 $\gamma\colon \Lambda \to \Lambda'$ 表示由 η诱导的值群态射，则

(a) 若 γ 是单射，则 m 是单射。*(b)* 若 η 是满射，则 m 是满射。*(c)* 若 η 和 γ 是同构，则 m 是同构。

证明。记 $v\colon \mathbb{F}^\times \to \Lambda$, $v'\colon (\mathbb{F}')^\times \to \Lambda'$为赋值。回顾一下，建筑 B和 B'的类型分别为 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Sigma^\vee, \Lambda, T)$ 和 $\mathbb{A}' = \mathbb{A}(\Sigma^\vee, \Lambda', T')$，其全平移群分别为 $T = \mathbb{A}$ 和 $T' = \mathbb{A}'$；其中 $\Sigma^\vee$ 是 $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ 的余根系，基为 Δ。令 $\gamma\colon \Lambda \to \Lambda'$ 为引理 6.1 中的有序阿贝尔群态射。取 $L = \mathrm{Id}_{\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma^\vee)}$，得到一个 $\mathbb{Q}$-线性映射$\tau = \mathrm{Id} \otimes \gamma\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$。球面魏尔群上的单位元恒等式 $\sigma_s = \mathrm{Id}_{W_s}\colon W_s \to W_s$使我们能够定义一个从全仿射魏尔群 σ到 $W_a \to W_a$的群同态，使得 $\tau = (\mathrm{Id}\ \gamma, \sigma)$ 是一个公寓态射，见引理 3.4。

态射 $\eta\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}'$定义了一个群同态 $\rho\colon \mathbf{G}(\mathbb{F}) \to \mathbf{G}(\mathbb{F}')$，其定义为 $\rho((a_{ij})_{i,\ j}) = (\eta(a_{ij}))_{i,\ j}$，因为多项式方程在$\eta$作用下保持不变。此扩张与子群和代数态射相容：特征 $\chi_\alpha\colon \mathbf{S}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}^\times$，$\chi'_\alpha\colon \mathbf{S}(\mathbb{F}') \to (\mathbb{F}')^\times$ 对于 $\alpha \in \Sigma$ 满足，例如$\chi'_\alpha(\rho(a)) = \eta(\chi_\alpha(a))$ 对所有 $a \in \mathbf{S}(\mathbb{F})$ 均成立，即

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}(\mathbb{F}) & \xrightarrow{\ \rho\ } & \mathbf{S}(\mathbb{F}') \\ {\scriptstyle \chi_\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \chi'_\alpha} \\ \mathbb{F}^\times & \xrightarrow[\ \eta\ ]{} & (\mathbb{F}')^\times. \end{array}$$

我们将定理 4.10 应用于群同态 $\rho\colon \mathbf{G}(\mathbb{F}) \to \mathbf{G}(\mathbb{F}'$以及上文构造的公寓态射 $\tau\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$。我们知道 $\mathbf{G}(\mathbb{F})$ 在 B 上传递作用，且 $\mathcal{A}$，并考虑标准图表$f_0\colon \mathbb{A} \to B$，$f'_0\colon \mathbb{A}' \to B'$，如例 2.8所示。

条件(1) 成立，因为 ρ(格建筑稳定子$_{\mathbf{G}(\mathbb{F})}(f_0(0))) = \rho(\mathbf{G}(\mathcal{O})) \subseteq \mathbf{G}(\mathcal{O}')$ =稳定子$_{\mathbf{G}(\mathbb{F}')}(f'_0(0))$，利用命题 4.9 和 $\eta(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}'$。

根据命题 4.9，$f_0(\mathbb{A})$ 的逐点稳定子为 $A_{\mathbb{F}}(\mathcal{O})M_{\mathbb{F}} = A_{f_0,\ \text{单位元}}$且 $f'_0(\mathbb{A})$ 的稳定子为 $A_{\mathbb{F}'}(\mathcal{O}')M_{\mathbb{F}'}$。应用 ρ 得到

(I) $\quad \rho(\mathrm{Stab}_{\mathbf{G}(\mathbb{F})}(f_0)) = \rho(A_{\mathbb{F}}(\mathcal{O}))\rho(M_{\mathbb{F}}) \subseteq A_{\mathbb{F}'}(\mathcal{O}')M_{\mathbb{F}'} = \mathrm{Stab}_{\mathbf{G}(\mathbb{F}')}(f'_0),$

它满足条件(2)。

对于 $x \in \mathbb{A}$，令 $a \in A_{\mathbb{F}}$ 使得 $a.f_0(0) = f_0(x)$。根据相容条件（C_S），我们有 $-v(\chi_\alpha(a)) = \alpha(x)$. 现在

$$-v(\chi'_\alpha(\rho(a))) = -v(\eta(\chi_\alpha(a))) = \gamma(-v(\chi_\alpha(a))) = \gamma(\alpha(x)) = \alpha(\tau(x))$$

对所有 $\alpha \in \Sigma$，因此由（C_S），$\rho(a).f'_0(0) = f'_0(\tau(x))$，这表明（3）。我们得到一个建筑的等变态射 $m\colon B \to B'$。

现在我们根据 η 和 γ，分析 m 何时为单射、满射或同构。

为证明（a），设 $\gamma\colon \Lambda \to \Lambda'$ 是单射。由于任何域态射都是单射，$\rho\colon \mathbf{G}(\mathbb{F}) \to \mathbf{G}(\mathbb{F}')$ 是单射。现在，$L = \mathrm{Id}_{\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma^\vee)}$ 是单射，因此根据定理（a）的4.10，接下来只需验证

$$\rho(\mathrm{Stab}_{\mathbf{G}(\mathbb{F})}(f_0)) = \mathrm{Stab}_{\mathbf{G}(\mathbb{F}')}(f'_0).$$

当且仅当（I）中的包含映射是等式时，这个等式成立。由于 γ是单射，对每个 $a \in \mathbb{F}$，都有 $(-v')(\eta(a)) = \gamma((-v)(a)) = 0$ 当且仅当 $(-v)(a) = 0$。换言之

$$\eta(a) \in \mathcal{O}' \text{ if and only if } a \in \mathcal{O}.$$

因此 $\eta(\mathcal{O}) = \mathcal{O}'$，并且（I）中的包含映射确实是等式。因此 m是单射。

为证明 (b)，假设 η 是满射。那么 ρ 是满射，并且根据引理 6.1的最后一部分，映射 γ 也是满射。由于 $L = \mathrm{Id}_{\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma^\vee)}$，根据定理 4.10 (b)，只要 $\mathbf{G}(\mathbb{F}')$ 在 B' 和 $\mathcal{A}'$上是传递的，态射 m 就是满射；对称建筑满足这一条件，见例 4.8。因此 m 是满射。

为证明 (c)，假设 γ 和 η 是同构。我们知道 $\mathbf{G}(\mathbb{F}')$ 在 B' 和 $\mathcal{A}'$上是传递的。于是 ρ 是群同构，$L = \mathrm{Id}_{\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma^\vee)}$是向量空间同构，$\sigma$ 是仿射魏尔群的同构，因此 τ 是公寓同构。根据定理 4.10 (c)，还需验证 (1) 和 (2) 中的包含映射是等式。(1) 中的等式源于 γ的单射性，因为此时 $\eta(\mathcal{O}) = \mathcal{O}'$（如本定理 (a) 的证明中所示），且 $\mathbf{G}(\mathcal{O}) = \mathbf{G}(\mathcal{O}')$。(2) 中的等式可类似地由以下事实推出：$\rho(A_{\mathbb{F}}(\mathcal{O})) = A_{\mathbb{F}'}(\mathcal{O}')$，以及 (I)。因此，根据定理 4.10 (c)，我们得出 m 是同构。□

这使我们能够构造更多建筑之间的满态射示例。

例 6.3. 令 $\mathbb{F}$ 为 $\mathbb{R}(X, Y)$ 的实闭包，并赋予如下序：若 $f(e^t, t)$ 在 $t \in \mathbb{R}$ 足够大时为正，则 $f \in \mathbb{R}(X, Y)$ 为正，参见例 A.3。在此序下，对于所有 $r \in \mathbb{R}$，都有 $Y > r$；对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $X > Y^n$。我们有序赋值 $v = v_{\mathrm{lex}}$：$\mathbb{F}^\times \to \Lambda$，其定义见例 A.2。可以验证，$-v_{\mathrm{lex}}$ 记录了 $\mathbb{R}(X, Y)$ 中多项式的多重次数。注意，$\Lambda \cong \mathbb{Q}^2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个有序子群，赋予字典序如下：

$$(a, b) \leq (a', b') \text{ if and only if } a < a' \text{ or } (a = a' \text{ and } b \leq b').$$

我们还可以看到，对于 $\mathbb{F}$ 上的序，元素 X 是一个无穷大元素，我们将 $v' = v_X\colon \mathbb{F}^\times \to \Lambda' \subset \mathbb{R}$ 称为相应的赋值，参见附录 A.1。于是 $-v_X$ 对多项式只记录其在 X 中的次数，因此 $\Lambda' \cong \mathbb{Q}$。

单位元是从 $(\mathbb{F}, v_{\mathrm{lex}})$ 到 $(\mathbb{F}, v_X)$ 的有序赋值域态射，因为群同态 $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ 由投影到第一个

因子是保序的，且 $\mathrm{pr}_1((-v_{\mathrm{lex}})(f)) = (-v_X)(f)$，参见引理 6.1。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^\times & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \mathbb{F}^\times \\ {\scriptstyle -v_{\mathrm{lex}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle -v_X} \\ \mathbb{Q}^2 & \xrightarrow[\mathrm{pr}_1]{} & \mathbb{Q} \end{array}$$

此外，单位元是满射。根据定理 6.2 (b)，对于任意具有约化根系 $\mathsf{G} < \mathrm{SL}_n$ 的半单连通自伴线性代数 $\mathbb{Q}$-群，存在一个满态射 $B \to B'$，它在类型分别为 $\mathbb{A}(\Sigma^\vee, \mathbb{Q}^2, (\mathbb{Q}^2)^n)$ 和 $\mathbb{A}(\Sigma^\vee, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^n)$ 的相应对称建筑之间，并由单位元 $(\mathbb{F}, v_{\mathrm{lex}}) \to (\mathbb{F}, v_X)$ 诱导。

6.2. **单射群态射下的函子性。** 现在我们转而讨论代数群的单态射（依照 [Mil17，定义 5。11]）下对称建筑的函子性陈述。我们首先需要对根系和韦伊群作一些初步考察。随后证明子群的情形，最后讨论一般情形。

6.2.1. *延拓韦伊群作用。* 本小节的目标是证明命题 6.7，在一定条件下，我们可以将向量子空间上的韦伊群作用延拓到环境向量空间。正则性这一概念在命题 6.7的证明中发挥着重要作用。令 V 为向量空间，且 $(\Sigma, V^\star)$ 为根系。回想一下，对于 $\alpha \in \Sigma$

$$M_\alpha = \{x \in V \colon \alpha(x) = 0\}$$

称为与 α 相关联的墙或超平面。

定义 6.4。 若点 V 不位于相对于根系 Σ 的 V 的任何超平面上，则称其在 V 中正则。若 $S \subseteq V$ 是一个子集，则当点 S 位于 S 中的点所能位于的最少数量的超平面上时，称其在 V 中S-正则。

这意味着， V 中每个 S-正则点，在 V 中所有属于 S 的点当中都是“最”正则的。

定义 6.5。 对于子集 $S \subseteq V$，我们记作

$$\Sigma_S := \{\alpha \in \Sigma \colon \alpha(S) = 0\} \subseteq \Sigma.$$

若 S 仅由一个元素 $S = \{p\}$ 构成，我们将 $\Sigma_p := \Sigma_{\{p\}}$ 简写为。

注意，当且仅当 $\Sigma_p = \emptyset$ 时， p 在 V 中是正则的。我们也总有：若 $T \subseteq S \subseteq V$，则 $\Sigma_S \subseteq \Sigma_T$。上述概念主要用于子集 S 为向量子空间的情形。

因此，设 V' 为一个向量空间， $V < V'$ 为一个向量子空间。考虑它们各自的对偶空间 $V^\star$、$(V')^\star$。设 $(\Sigma, V^\star)$、$(\Sigma', (V')^\star)$ 为根系， W 和 W' 分别表示它们各自的（球面）Weyl 群。我们认为W和 W' 分别作用在 V和 V' 上。据此，我们现在得到 V中 V'-正则元素的如下刻画。

引理 6.6。 对于 $p \in V$，以下条件等价：

(1) p 在 V'中是 V-正则的；*(2)* 对每个 $q \in V$， $|\Sigma'_p| \le |\Sigma'_q|$；*(3)* $p \in V \setminus \bigcup_{\alpha' \in \Sigma' \setminus \Sigma'_V} M_{\alpha'}$；*(4)* $\Sigma'_p = \Sigma'_V$。

证明。 (1) $\iff$ (2)。这就是定义。

(3) $\Rightarrow$ (4)。考虑 $p \in V \setminus \bigcup_{\alpha' \in \Sigma' \setminus \Sigma'_V} M_{\alpha'}$。由于 $p \in V$， $\Sigma'_V \subseteq \Sigma'_p$。如果存在某个 $\alpha' \in \Sigma'_p \setminus \Sigma'_V$，那么 $\alpha' \in \Sigma' \setminus \Sigma'_V$，由（3）， $\alpha'(p) \neq 0$，这与 $\alpha' \in \Sigma'_p$ 矛盾。

(4) $\Rightarrow$ (2). 对每个 $q \in V$，我们有 $\Sigma'_V \subseteq \Sigma'_q$，因此 $|\Sigma'_p| = |\Sigma'_V| \leq |\Sigma'_q|$.

(2) $\Rightarrow$ (3)。注意，式（3）中的集合非空，因为墙 $M_{\alpha'}$的维数较低，且 Σ' 是有限的。由蕴含关系“（3） $\Rightarrow$ (4)”，所有元素 $r \in V \setminus \bigcup_{\alpha' \in \Sigma' \setminus \Sigma'_V} M_{\alpha'}$ 都满足 $\Sigma'_r = \Sigma'_V$。根据假设， p 验证了$|\Sigma'_p| \leq |\Sigma'_r|$，且由于 $\Sigma'_r = \Sigma'_V \subseteq \Sigma'_p$，我们有 $\Sigma'_p = \Sigma'_V$。因此 $p \notin M_{\alpha'}$对所有 $\alpha' \in \Sigma' \setminus \Sigma'_V = \Sigma' \setminus \Sigma'_p$。 □

与正则元素的开性类似，由引理 6.6 (3) 可知， V-正则元素在 V' 中的集合是开集， V 因为它是有限个低维子空间的补集。

命题 6.7. 设 C_0 和 C'_0 分别是 V和 V'中的基本 *Weyl* 室，且它们在 $C_0 \cap C'_0$ 中有一个公共点，该点在 V'中是 V-正则的。假设

(△) $\forall w \in W, w' \in W', x \in C_0 \cap C'_0$, *if* $w(x) \in w'(C'_0)$, *then* $w(x) = w'(x)$.

那么存在单射群同态 $\sigma\colon W \to W'$，使得对所有 $w \in W$，$\sigma(w)|_V = w$ 。

注意，条件（△）意味着，当 $V = V'$ 时，也有 $\Sigma = \Sigma'$。下面的例子展示了这一条件在二维情形下的作用。

例 6.8. 假设 V' 是二维的，且 Σ' 是 A_2类型的根系。对于每个一维子空间 $V < V'$，在 $V^\star$中都存在 A_1 类型的根系。注意，只有当 V与 Σ' 的一个超平面正交时，条件（△）才成立，见图 4(左)。例如，与 SL_2 <SL_3相关联的根系就属于这种情况。命题 6.7适用的更多根系示例见图 1、3、5 和 6。

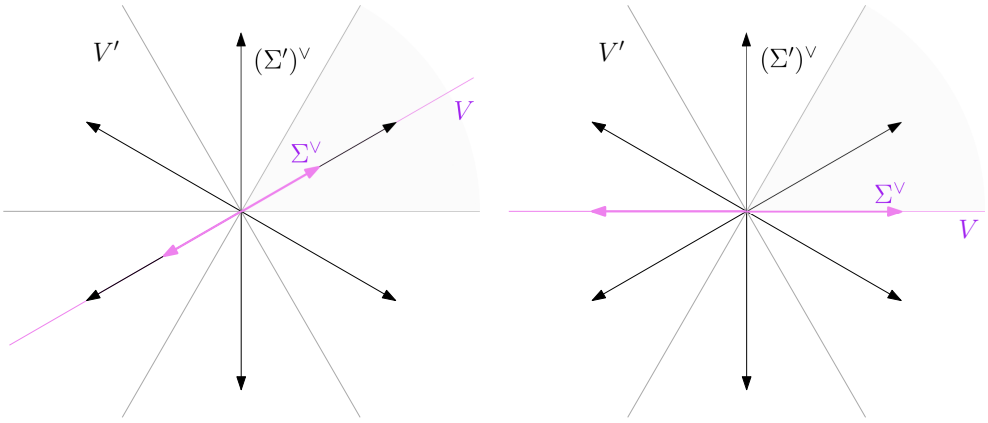

FIGURE 4. 紫色和黑色箭头分别表示 Σ 和 Σ' 的对偶根，类型分别为 A_1 和 A_2。相应的 Weyl 群 W 和 W' 在左侧满足条件（△），但在右侧不满足。

在给出命题 6.7 的证明之前，我们先说明在特殊情形下如何构造σ : $W \to W'$，即存在某个 $p \in C_0 \cap C'_0$同时在 V和 V'中正则，例如图 5 所示。此时，对于 $w \in W$，点 w（p）属于某个唯一的室 w'（C'_0），其中 $w' \in W'$满足某些条件。由条件（△），我们有 w'（p） $= w$（p）；又由于 W 保持正则性， w（p）在 V'中也正则。由于 W' 在 V'的各个室上简单传递地作用，我们得出

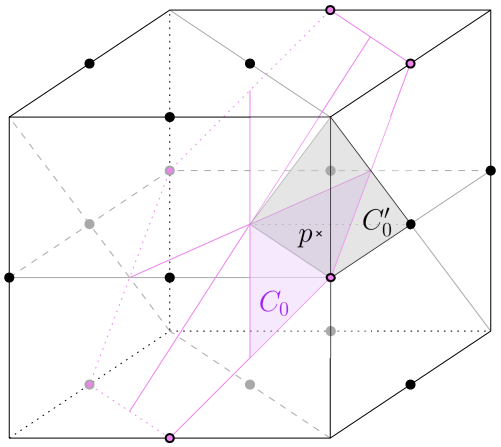

FIGURE 5. 类型为 A_2 、位于类型为 B_3 的格建筑中的余根系以紫色和黑色的点表示。在此情形下，存在一点 $p \in C_0 \cap C_0'$，它在 V'中是正则的。

w'（C_0'）是 V' 中唯一包含 w（p）的室，因此 w' 是 W' 中唯一满足 w'（p）$= w$（p）的元素。接下来很容易验证，σ（w）：$= w'$ 定义了一个满足σ（w）$|_V = w$的单射群同态。

我们注意到，一般而言，可能不存在一个 $p \in V$，使其在 V'中是正则的，见图 6。不过，总存在一点 $p \in V$，使其在 V-正则于 V'。现在，V' 中可能有多个室分别包含非正则点 p和 $w(p)$，但下面的引理给出了一个典范室，从而能够在完全一般的情形下证明命题 6.7。

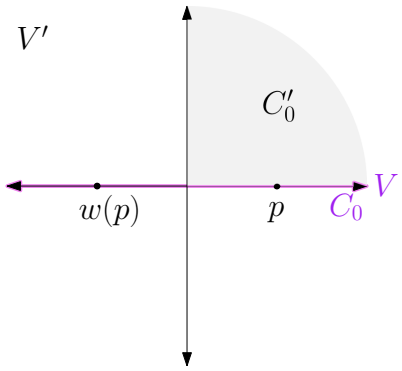

FIGURE 6. 类型为 A_1 、位于类型为 $A_1 \times A_1$的格建筑中的余根系以紫色和黑色表示。点 $p \in C_0$ 在 V'中不是正则的，但 p 在 V'中是 V-正则的。有两个室包含 w（p），因此 σ（w）有两种选择 $\in W'$。

引理 6.9。给定向量空间 $V < V'$、根系 $(\Sigma, V^\star)$、$(\Sigma', (V')^\star)$，其（球形）*Weyl* 群分别为 W、W'，基本 *Weyl* 室分别为 C_0、C_0'，且它们分别位于 V、V' 中，并有一点 $p \in C_0 \cap C_0'$ 在 V' 中是 V-正则的。存在一个子集$F \subseteq V'$，使得对于每个满足以下条件的 $w \in W$：$w(p)$ 在 V' 中是 V-正则的，

$$C_w' := F \cap \bigcap_{\substack{\alpha' \in \Sigma' \\ \alpha'(w(p)) > 0}} H_{\alpha'}^+$$

是 V'中满足 $w(p) \in C_w' \subseteq F$的唯一一个室。此外，如果 $w' \in W'$满足 $w'(C_0') = C_w'$且 $w'|_V = w$，那么 $w'(F) = F$。

证明。令 $\Sigma'_{>0}$ 为相对于 C'_0的 Σ' 中的正根集，$H^+_{\alpha'} := \{v' \in V' \colon \alpha'(v') \geq 0\}$ 为相对于 $\alpha' \in \Sigma'$ 的正半空间，并令

$$F := \bigcap_{\alpha' \in \Sigma'_{>0} \cap \Sigma'_V} H^+_{\alpha'}.$$

我们声称 F 是所需的子集。因此，令 $w \in W$ 使得 $w(p)$ 在V中是 V'-正则的。由引理6.6 (4) 以及 p 和 $w(p)$ 在V中是 V'-正则这一假设，可得$\Sigma'_p = \Sigma'_V = \Sigma'_{w(p)}$，因此

$$\Sigma'_{>0} = (\Sigma'_{>0} \cap \Sigma'_V) \cup \{\alpha' \in \Sigma' \colon \alpha'(p) > 0\},$$

而基本 Weyl 室 C'_0 可描述为

$$C'_0 = \bigcap_{\alpha' \in \Sigma'_{>0}} H^+_{\alpha'} = F \cap \bigcap_{\substack{\alpha' \in \Sigma' \\ \alpha'(p) > 0}} H^+_{\alpha'}.$$

事实上，在包含 p 的各个室中，C'_0 是满足 $C'_0 \subseteq F$ 的唯一 Weyl 室。现在我们声称

$$C'_w := F \cap \bigcap_{\substack{\alpha' \in \Sigma' \\ \alpha'(w(p)) > 0}} H^+_{\alpha'}$$

是 V' 中满足 $w(p) \in C'_w \subseteq F$ 的唯一室。我们先确认 C'_w 确实是 V' 的一个室。为此，回忆一下，室是 $V' \setminus \bigcup_{\alpha' \in \Sigma'} M_{\alpha'}$ 的连通分支（的闭包），其中 $M_{\alpha'} = \{v' \in V' \colon \alpha'(v') = 0\}$ 是墙。对于每个满足 $\alpha' \in \Sigma' = \Sigma'_V \cup \{\alpha' \in \Sigma' \colon \alpha'(w(p)) \neq 0\}$ 的墙 $M_{\alpha'}$，定义 C'_w 会确定 C'_w 位于哪一侧。因此，由于 C'_w 是连通的（甚至是凸的），C'_w 包含在某个室中。为确保它不小于一个室，只需找出一点 $q' \in C'_w$，使其在 V' 中是正则的：令 $v' \in C'_0$ 在 V' 中正则且靠近 0，从而对所有 $\alpha' \in \Sigma' \setminus \Sigma'_V$，有 $|\alpha'(v')| < \alpha'(w(p))$。那么 $q' := w(p) + v'$ 包含于 C'_w，且在 V' 中正则，因为对于 $\alpha' \in \Sigma'_{>0} \cap \Sigma'_V$，我们有

$$\alpha'(q) = \alpha'(w(p)) + \alpha'(v) = \alpha'(v) > 0$$

并且对于 α'，满足 $\alpha'(w(p))$ 的 > 0，我们有

$$\alpha'(q) = \alpha'(w(p)) + \alpha'(v') > 0$$

因为 v' 是在 0 附近选取的。因此，C'_w 是一个室。

由于 $\Sigma'_{w(p)} = \Sigma'_V$ 和 $w(p) \in C'_w$，任何满足 $w(p) \in C' \subseteq F$ 的室 C' 也满足

$$C' \subseteq \bigcap_{\substack{\alpha' \in \Sigma' \\ \alpha'(w(p)) > 0}} H^+_{\alpha'},$$

并且因此包含于 C'_w中，所以 C'_w 是唯一的。

现在我们证明引理的第二个断言。回顾一下，W' 通过 $w'(\alpha') := \alpha' \circ (w')^{-1}$ 作用于Σ'，其中 $w' \in W'$ 且 $\alpha' \in \Sigma'$。我们注意到

$$w'(M_{\alpha'}) = M_{w'(\alpha')}$$

对于所有 $w' \in W'$ 和 $\alpha' \in \Sigma'$ 都成立。现在若 $w' \in W'$ 满足 $w'(C'_0) = C'_w$ 且$w'|_V = w$，则对于所有 $\alpha' \in \Sigma'_V$ 和 $v \in V$，我们有

$$(w'(\alpha'))(v) = \alpha'(w'^{-1}(v)) = \alpha'(w^{-1}(v)) = 0,$$

因此 $w'(\alpha') \in \Sigma'_V$。由此可得，超平面配置 $\mathcal{H} := \{M_{\alpha'} \colon \alpha' \in \Sigma'_V\}$ 在 w'作用下保持不变。因此，w' 置换了 $\mathcal{H}$补集的连通分支。其中一个这样的（闭包）连通分支是 F，我们知道 $C'_0 \subseteq F$ 且 $C'_w \subseteq F$。由于 $w'(C'_0) = C'_w$，且 w' 保持连通分支不变，因此 $w'(F) = F$。□

现在我们可以证明命题6.7。

命题 6.7 的证明。设 $p \in C_0 \cap C_0'$ 在 V'中是 V-正则的。不失一般性，可假设 p 是 V-正则的：根据引理 6.6 (3)， V 中在 V' 中为 V-正则的点集由以下条件给出： $\{q \in V\colon \alpha'(q) \neq 0$ ，对所有 $\alpha' \in \Sigma' \setminus \Sigma_V'\}$ 均成立。因此，若 $q \in C_0 \cap C_0'$ 在 V' 中是 V-正则的，则存在 q 在 V中的一个凸开邻域 U ，其中的点均在 V'中是 V-正则的，且包含于 C_0'中。交集 $U \cap C_0$ 的内部非空，因为 C_0 是凸的且内部非空，并且内部中的任意一点 p 都属于 $C_0 \cap C_0'$，在 V'中是 V-正则的，且在 V'中是正则的。

我们首先证明，对于所有 $w \in W$， $w(p)$ 在 V' 中也是 V-正则的。回顾一下，W'通过 $w'(\alpha') = \alpha' \circ (w')^{-1}$作用于 Σ'，对所有 $w' \in W'$， $\alpha' \in \Sigma'$均成立。取某个$w' \in W'$，使得 $w(p) \in w'(C_0')$。根据条件（△）， $w(p) = w'(p)$，因此

$$\begin{aligned}\Sigma'_{w(p)} &= \{\alpha' \in \Sigma'\colon \alpha'(w'(p)) = 0\} = \{\alpha' \in \Sigma'\colon (w')^{-1}(\alpha')(p) = 0\}\\ &= w'\left(\{\alpha' \in \Sigma'\colon \alpha'(p) = 0\}\right) = w'(\Sigma'_p) = w'(\Sigma'_V),\end{aligned}$$

其中最后一个等式使用了引理 6.6 中的（4）。由于我们总有$\Sigma'_V \subseteq \Sigma'_{w(p)}$，并且 w' 是有限集 Σ'上的一个置换，因此有 $\Sigma'_V = w'(\Sigma'_V) = \Sigma'_{w(p)}$，这意味着，根据引理 w（p）在 V中是 V'-正则的，见引理 6.6。

现在，我们满足引理 6.9 的条件，从而得到一个子集 $F \subseteq V'$，使得对每个 $w \in W$，

$$C'_w := F \cap \bigcap_{\substack{\alpha' \in \Sigma' \\ \alpha'(w(p)) > 0}} H^+_{\alpha'}.$$

是 V' 中唯一满足 $w(p) \in C'_w \subseteq F$ 的室。由于 W' 在魏尔室上简单传递地作用，存在唯一的 $w' \in W'$ ，使得 $w'(C_0') = C'_w$，我们定义

$$\sigma\colon W \to W', \quad \sigma(w) := w'.$$

在证明 σ 是单射群同态之前，我们先验证$\sigma(w)|_V = w$对所有 $w \in W$都成立，这进而推出 $\sigma(w)(F) = F$对所有 $w \in W$都成立，这是引理6.9最后一条陈述的推论。

由于 $w(p) \in C'_w = w'(C_0')$，条件 (△) 蕴含 $w(p) = w'(p) = \sigma(w)(p)$。由引理 6.6 (3)，在 V' 中， V-正则元素构成的集合是开集，因此对于 $x \in V$（其位于 p 周围的一个小邻域内），元素 x 也是 V' 中的 V-正则元素。于是，对所有 $\alpha' \in \Sigma'$，$\alpha'(x) > 0$ 当且仅当 $\alpha'(p) > 0$。由于 w 连续，且 $w(p)$ 是 V' 中的 V-正则元素，我们还可得 $\alpha'(w(p)) > 0$ 当且仅当 $\alpha'(w(x)) > 0$。因此 $w(x) \in C'_w = w'(C_0')$，并且由条件 (△)，$w(x) = \sigma(w)(x)$。由于 w 和 $\sigma(w)|_V$ 是在一个开邻域上取值相同的线性映射，因此有 $w = \sigma(w)|_V$。

接下来只需证明 $\sigma\colon W \to W'$是单射群同态。我们再次利用 W' 在 Σ' 上的作用，注意到

$$\begin{aligned}w'(H^+_{\alpha'}) &= \{w'(v') \in V'\colon \alpha'(v') \geq 0\} = \{v' \in V'\colon \alpha'((w')^{-1}(v')) \geq 0\}\\ &= \{v' \in V'\colon w'(\alpha')(v') \geq 0\} = H^+_{w'(\alpha')}\end{aligned}$$

对所有 $w' \in W'$和 $\alpha' \in \Sigma'$。对于 $w = \mathrm{Id} \in W$, $C'_w = C_0'$，所以 $\sigma(w) = \mathrm{Id} \in W'$。若现在 $w_1, w_2 \in W$，则

$$\begin{aligned}\sigma(w_1)\sigma(w_2)(C_0') = \sigma(w_1)(C'_{w_2}) &= \sigma(w_1)(F) \cap \bigcap_{\substack{\alpha' \in \Sigma' \\ \alpha'(w_2(p)) > 0}} \sigma(w_1)\left(H^+_{\alpha'}\right)\\ &= F \cap \bigcap_{\substack{\beta' \in \Sigma' \\ \beta'(\sigma(w_1)w_2(p)) > 0}} H^+_{\beta'} = F \cap \bigcap_{\substack{\beta' \in \Sigma' \\ \beta'(w_1w_2(p)) > 0}} H^+_{\beta'} = C'_{w_1w_2},\end{aligned}$$

这里用到了代换 $\beta' = \sigma(w_1)(\alpha')$、 $\alpha' = \beta' \circ \sigma(w_1)$，以及如下事实：由于 $w_2(p) \in V$，所以 $\sigma(w_1)(w_2(p)) = w_1 w_2(p)$。根据 σ 的定义，这意味着 $\sigma(w_1 w_2) = \sigma(w_1)\sigma(w_2)$。最后，$\ker(\sigma) = \{\mathrm{Id}_V\}$。事实上，所有其他满足 $w \in W \setminus \{\mathrm{Id}_V\}$ 的元素都会将 p 送到 $w(p) = \sigma(w)(p) \neq p$，因为 p 在 V 中是正则的。由此证明了 $\sigma\colon\ W \to W'$ 是一个单射群同态，且 $\sigma(w)|_V = w$。□

6.2.2. 子群。 本节将证明，由子群构造的对称建筑诱导出对称建筑的单态射。示例包括 $\mathrm{SL}_m < \mathrm{SL}_n$ 或 $m \leq n$ $\mathrm{Sp}_{2n} < \mathrm{SL}_{2n}$（见图 1），以及由雅各布森–莫罗佐夫定理得到的包含映射 $\mathrm{SL}_2 <\mathbf{G}$ 或 $\mathrm{PGL}_2 < \mathbf{G}$，见 [BT72, （6.1.3.b.2）、（6.2.3.b）]和 [App24, 第 6 节。8]。

在本节余下部分， $\mathbb{F}$ 是一个实闭域，且 $v\colon\ \mathbb{F}^\times \to \Lambda$一个序相容赋值。设 $\mathbf{G}$ $<\mathbf{G}' < \mathrm{SL}_n$ 是两个 Zariski 连通的半单自伴线性代数 $\mathbb{Q}$群，具有约化根系。设 $\mathbf{S}$ $< \mathbf{S}'$ 是 $\mathbf{G}$ 的极大 $\mathbb{R}$-分裂环面，$\mathbf{G}'$ 中仅由自伴（$g = g^T$）元素组成，并设 $A_{\mathbb{F}}$， $A'_{\mathbb{F}}$ 分别是 $\mathbb{F}$-扩张 $\mathbf{S}_{\mathbb{F}}$，$\mathbf{S}'_{\mathbb{F}}$ 的半代数连通分支，其中包含单位元。

目标是证明包含映射 $\mathbf{G}(\mathbb{F})$ $<\mathbf{G}'(\mathbb{F})$ 诱导出一个单射态射，将与 $\mathbf{G}(\mathbb{F})$ 相关联的对称建筑 B 映射到与 $\mathbf{G}'(\mathbb{F})$ 相关联的对称建筑 B' 。令 W_s, W'_s 表示根系 $\Sigma \subseteq \mathfrak{a}^\star$, $\Sigma' \subseteq (\mathfrak{a}')^\star$的（球面）Weyl 群，其中 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ 是 $A_{\mathbb{R}}$, $A'_{\mathbb{R}}$的李代数。更详细的定义见例 2.8。

以下引理用于构造公寓态射$\mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 于命题 6.12。特别地，我们验证命题 △6.7 的假设 ()。我们感谢 Anne Parreau 与我们的交流，这促成了本节中的一些想法。

引理 6.10。 设 C_0 和 C'_0 是 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$中的基本 *Weyl* 室。对于所有 $w \in W_s$ 和 $w' \in W'_s$，如果 $x \in C_0 \cap C'_0$ 满足 $w(x) \in w'(C'_0)$，则$w(x) = w'(x)$。

证明. 设 $w \in W_s, w' \in W'_s$ 和 $x \in C_0 \cap C'_0$ 使得 $w(x) \in w'(C'_0)$。记 exp: $\mathfrak{a}' \to X'_{\mathbb{R}}$ 为到实对称空间 $X'_{\mathbb{R}}$ 的黎曼指数映射，并注意到 $\exp(\mathfrak{a}) \subseteq X_{\mathbb{R}}$。回顾 Kna02 的命题 7.32] （见 []），存在 $k_0 \in K_{\mathbb{R}} \subseteq K'_{\mathbb{R}}$ 和 $k'_0 \in K'_{\mathbb{R}}$，使得对所有 $H \in \mathfrak{a}$，都有 $k_0.\exp(H) = \exp(w(H))$；对所有 $H' \in \mathfrak{a}'$，都有 $k'_0.\exp(H') = \exp(w'(H'))$。回顾例 2.8，嘉当分解 $G_{\mathbb{R}} = K_{\mathbb{R}} A_{\mathbb{R}} K_{\mathbb{R}}$（复合映射 $\log\colon\ A_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{a}$ 后）可用于得到嘉当投影 $\delta\colon\ X'_{\mathbb{R}} \to C'_0, k'_1 a k'_2.\mathrm{Id} \mapsto \log(a)$，它在 $K'_{\mathbb{R}}$ 的作用下保持不变，即对所有 $q' \in X'_{\mathbb{R}}$, $k' \in K'_{\mathbb{R}}$

$$\delta(k'.q') = \delta(q'), \text{ and } \delta(\exp(y')) = y' \text{ for all } y' \in C'_0.$$

我们有 $(w')^{-1} w(x) \in C'_0$，使得

$$(w')^{-1} w(x) = \delta(\exp((w')^{-1} w(x))) = \delta((k'_0)^{-1} k_0.\exp(x)) = \delta(\exp(x)) = x.$$

因此 $w(x) = w'(x)$，证明至此完成。 □

回想一下，与 $\mathbf{G}(\mathbb{F})$ 相关联的对称建筑 B 的类型为 $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\Sigma^\vee, \Lambda, T)$，其全平移群为 $T = \mathbb{A}$；与 $\mathbf{G}'(\mathbb{F})$ 相关联的对称建筑 B' 的类型为 $\mathbb{A}' = \mathbb{A}((\Sigma')^\vee, \Lambda, T')$，其全平移群为$T' = \mathbb{A}'$。

引理 6.11. 包含映射 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}'$ 限制为包含映射 $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma^\vee)$ $\subseteq \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}((\Sigma')^\vee)$。

证明。由于我们处于代数群的语境中，余根格 $\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma^\vee)$ 可以认作余特征格 $X^\star(\mathbf{S})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$（对于根格和特征，这种对应关系详见 [App24第 6 节。2]）。元素 $X^\star(\mathbf{S})$（即所谓的余特征）是代数同态 $\mathbb{G}_m\to\mathbf{S}$。S 的每个余特征都能通过与包含映射 $\mathbf{S}$ $\mathbf{S}'$复合，得到 $\mathbf{S}$ $<\mathbf{S}'$的一个余特征，因此

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma^\vee)\cong X^\star(\mathbf{S})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\subseteq X^\star(\mathbf{S}')\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\cong\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}((\Sigma')^\vee).\qquad\square$$

命题 6.12. 存在一个公寓的单射态射 $\mathbb{A}\to\mathbb{A}'$。

证明。设 $L\colon\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma^\vee)\to\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}((\Sigma')^\vee)$ 是引理 6.11 中的包含映射，且 $\gamma\colon\Lambda\to\Lambda$ 是单位映射。我们选择一个基本 Weyl 室 C_0，它位于 $\mathfrak{a}$ 中，并取一点 $p\in\mathfrak{a}$，使其在 $\mathfrak{a}$ 中正则。然后选择一个基本 Weyl 室C_0'，它位于 $\mathfrak{a}'$ 中。于是 p 在 $\mathfrak{a}'$ 中是 $\mathfrak{a}$-正则的。根据引理 6.10，命题 6.7 的条件得到满足，因此我们得到一个群同态 $\sigma_s\colon W_s\to W_s'$，使得对于所有 $w\in W_s$，都有 $\sigma_s(w)|_{\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma^\vee)}=w$。图表

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{A} & \xrightarrow{L\otimes\gamma} & \mathbb{A}'\\ {\scriptstyle w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma_s(w)}\\ \mathbb{A} & \xrightarrow[L\otimes\gamma]{} & \mathbb{A}'\end{array}$$

对所有 $w\in W_s$都交换。此外，$T=\mathbb{A}\subseteq\mathbb{A}'=T'$，因此根据引理 3.4，$\sigma_s$可扩张为 $\sigma\colon W_a\to W_a'$，使得 $(L,\ \gamma,\ \sigma)$ 是一个公寓态射。和 γ 都是单射，因此该态射是单射。□

我们现在已具备证明定理 E 所需的一切工具。

定理 *6.13*（定理 *E*）。设 $G<G'<SL_n$ 为两个连通的半单自伴线性代数 $\mathbb{Q}$-群，$S<S'$ 为 G、G'（其中所有元素均自伴）的极大 $\mathbb{R}$-分裂环面，且根系均为约化根系。设 B 和 B' 为相应的对称建筑。若 G 是 $\mathbb{R}$-分裂的，则包含映射 $G(\mathbb{F})\subseteq G'(\mathbb{F})$ 诱导出一个建筑之间的等变单射态射 $B\to B'$。

证明。设 $o=[\mathrm{Id}]\in B$ 和 $o'=[\mathrm{Id}]\in B'$ 为基点。根据命题 6.12，包含映射 $\tau\colon\mathbb{A}\to\mathbb{A}'$ 是公寓之间的单射态射。我们考虑标准图表 $f_0\colon\mathbb{A}\to B$和 $f_0'\colon\mathbb{A}'\to B'$并应用定理 4.10。

根据命题 4.9，$\mathrm{Stab}_{\mathbf{G}(\mathbb{F})}(o)=\mathbf{G}(\mathcal{O})\subseteq\mathbf{G}'(\mathcal{O})=\mathrm{Stab}_{\mathbf{G}'(\mathbb{F})}(o')$，因此条件(1)成立。利用 $\mathbf{G}$ 在命题 $\mathbb{F}$4.9 中是分裂的4.9，我们得到

$$\mathrm{Stab}_{\mathbf{G}(\mathbb{F})}(f_0)=\mathbf{S}(\mathcal{O})\subseteq\mathbf{S}'(\mathcal{O})\subseteq\mathrm{Cent}_{\mathbf{G}'(\mathbb{F})}(\mathbf{S}'(\mathbb{F}))\cap\mathcal{O}^{n\times n}=\mathrm{Stab}_{\mathbf{G}'(\mathbb{F})}(f_0'),$$

因此条件 (2) 成立。对每个 $x\in\mathbb{A}$，存在 $a\in A_{\mathbb{F}}$，使得 $a.o=f_0(x)$。考虑 $\alpha'\in\Sigma'$。那么 $\alpha'|_{\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma^\vee)}=\sum_{i=1}^r q_i\alpha_i$，其中某个 $\alpha_i\in\Sigma$ 满足此式，因为在代数群理论中，α' 的限制是 $\mathbf{G}(\mathbb{F})$ 的一个特征。由 (C_S)，我们得到

$$\begin{aligned}(-v)(\chi_{\alpha'}(a))&=(-v)\left(\prod_{i=1}^r\chi_{\alpha_i}(a)^{q_i}\right)=\sum_{i=1}^r q_i(-v)(\chi_{\alpha_i}(a))\\&=\sum_{i=1}^r q_i\alpha_i(x)=\alpha'(x),\end{aligned}$$

这表明 $a.o'=f_0'(\tau(x))$，这就是条件 (3)。因此 $m:=(\psi,\ \varphi,\ \tau)$ 是建筑的等变态射。

我们直接检验 m 的单射性，因为定理 4.10 (a)的条件不满足。映射 $\psi\colon B\to B'$是单射的，因为如果 $g,\ h\in\mathbf{G}(\mathbb{F})$ 满足

$g.o' = h.o'$，则 $h^{-1}g \in$ 稳定子$_{\mathbf{G}'(\mathbb{F})}(o')$ $=\mathbf{G}'(\mathcal{O})$，见命题 4.9，但同时$h^{-1}g \in \mathbf{G}(\mathbb{F})$，所以 $h^{-1}g \in \mathbf{G}(\mathbb{F}) \cap \mathbf{G}'(\mathcal{O}) = \mathbf{G}(\mathcal{O}) =$ 稳定子$_{\mathbf{G}(\mathbb{F})}(o)$，因此 $g.o = h.o$。类似地，再次利用命题 4.9，映射 $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ 是单射的，因为

$$\begin{aligned}&\mathrm{Stab}_{\mathbf{G}'(\mathbb{F})}(f_0') \cap \mathbf{G}(\mathbb{F}) = \mathrm{Cent}_{\mathbf{G}'(\mathbb{F})}(\mathbf{S}'(\mathbb{F})) \cap \mathcal{O}^{n\times n} \cap \mathbf{G}(\mathbb{F})\\ &= \mathrm{Cent}_{\mathbf{G}(\mathbb{F})}(\mathbf{S}'(\mathbb{F})) \cap \mathcal{O}^{n\times n} \subseteq \mathrm{Cent}_{\mathbf{G}(\mathbb{F})}(\mathbf{S}(\mathbb{F})) \cap \mathcal{O}^{n\times n} = \mathrm{Stab}_{\mathbf{G}(\mathbb{F})}(f_0),\end{aligned}$$

因为 $\mathbf{S}(\mathbb{F}) \subseteq \mathbf{S}'(\mathbb{F})$。

最后，τ 是公寓的单射态射，因此 m 是建筑的等变单射态射。□

注释 6.14。定理6.13 中的大多数假设仅仅是为了保证建筑 B 和 B'的存在。不过，假设$\mathbf{G}$ 是 $\mathbb{F}$-分裂的这一技术性假设，蕴含 $A_{\mathbb{F}}M_{\mathbb{F}}$ =中心化子$_{\mathbf{G}(\mathbb{F})}(\mathbf{S}(\mathbb{F}))$ $= \mathbf{S}(\mathbb{F})$，并使映射 $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$得以定义。将该条件替换为中心化子$_{\mathbf{G}(\mathbb{F})}(\mathbf{S}(\mathbb{F}))$ $\subseteq$中心化子$_{\mathbf{G}'(\mathbb{F})}(\mathbf{S}'(\mathbb{F}))$后，同样的证明仍然成立。即使不假设$\mathbf{G}$ 是 $\mathbb{F}$-分裂的，相关对称建筑之间的态射仍可能存在，但此时必须处理$\mathbf{T}$的各向异性部分。证明方法无法直接适用的例子包括$\mathbf{G} = \mathrm{SO}(3)$（其建筑由一个点构成），以及$\mathbf{G}' = \mathrm{SL}_3$, 和 $\mathrm{SO}(2,3) < \mathrm{SL}_5$。

6.2.3. 单射群态射。本节旨在将关于子群的结果推广到代数群之间的一般单射态射。注意，本小节中我们不假设相关代数群是 $\mathbb{F}$-分裂的。

我们首先证明，若 $\mathbf{G}$、$\mathbf{G}'$ 同构，则它们相应的对称建筑也同构。特别地，建筑与所选取的极大自伴 $\mathbb{R}$-分裂环面 $\mathbf{S}$无关。这再次是定理 4.14的一个应用。结合上一小节的结果，我们得到以下结论。

命题 6.15。设$\mathbf{G} < \mathrm{SL}_n$ 和 $\mathbf{G}' < \mathrm{SL}_m$ 是半单连通自伴线性代数 $\mathbb{Q}$-群，具有约化根系；设 B、B'是相应的对称建筑。若 $\rho\colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上（或更一般地，定义在 $\mathbb{R} \cap \mathbb{F}$上）的代数群同构，则 B 与 B'（等变）同构。

证明。设 S 和 S′ 分别是 G 和 G′ 的极大 $\mathbb{R}$-分裂环面，且其中所有元素均为自伴。注意到，$\rho(\mathbf{S})$ 仍然是一个极大 $\mathbb{R}$-分裂环面，但它可能不与 S′ 重合。然而，根据 [Bor91，定理 15.14], 所有 $\mathbb{R}$-分裂环面（因而所有 $(\mathbb{R}\cap\mathbb{F})$-分裂环面，见 [App24，定理 5.17]）在 $\mathbf{G}(\mathbb{R}\cap\mathbb{F})$ 中都通过共轭作用相互共轭，因此将 ρ 与该共轭作用复合后，不妨设 $\rho(\mathbf{S}) = \mathbf{S}'$。

令 $A_{\mathbb{R}}$ 和 $A'_{\mathbb{R}}$ 分别为包含单位元的 $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ 和$\mathbf{S}'(\mathbb{R})$ 的半代数连通分支，并令 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{a}'$ 为它们各自的李代数。李代数同构 $\mathrm{D}_{\mathrm{Id}}\rho\colon \mathrm{Lie}(\mathbf{G}(\mathbb{R})) \to \mathrm{Lie}(\mathbf{G}'(\mathbb{R}))$ 满足 $\mathrm{D}_{\mathrm{Id}}\rho(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}'$，并将根空间映射到根空间，从而诱导出一个同构$\Sigma \to \Sigma'$, $\alpha \mapsto \alpha \circ \mathrm{D}_{\mathrm{Id}}\rho^{-1}$。这限制为一个同构

$$L\colon \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\Sigma^\vee) \to \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}((\Sigma')^\vee), \quad H \mapsto \mathrm{D}_{\mathrm{Id}}\rho(H),$$

并诱导出一个同构

$$\sigma_s\colon W_s \to W'_s, \quad w \mapsto \mathrm{D}_{\mathrm{Id}}\rho \circ w \circ \mathrm{D}_{\mathrm{Id}}\rho^{-1}.$$

连同单位元 $\gamma = \mathrm{Id}_\Lambda\colon \Lambda \to \Lambda$，引理 3.4 可用于将 σ_s延拓为 $\sigma\colon W_a \to W'_a$使得 $\tau := (L, \gamma, \sigma)$ 构成公寓同构。

现在我们检查定理 4.10 的条件。G(𝔽) 的作用在 B和 $\mathcal{A}$ 上是传递的。令 $f_0\colon \mathbb{A} \to B$和 $f_0'\colon \mathbb{A}' \to B'$为标准图表。由于 ρ 和 ρ^{-1} 定义在 $\mathbb{Q}$上，ρ 和 ρ^{-1} 的各个元素均由系数属于 $\mathbb{Q}$ [App24 的多项式定义，根据引理 4.1], so $\rho(\mathbf{G}(\mathcal{O})) = \mathbf{G}'(\mathcal{O})$，并由命题 4.9，$\rho($稳定子$_{\mathbf{G}(\mathbb{F})}(f_0(0))) =$ 稳定子$_{\mathbf{G}'(\mathbb{F})}(f_0'(0))$，这就是条件 (1)。

由于 $\rho(A_{\mathbb{F}}) = A'_{\mathbb{F}}$，我们有 $\rho($中心化子$_{\mathbf{G}(\mathbb{F})}(A_{\mathbb{F}})) =$ 中心化子$_{\mathbf{G}'(\mathbb{F})}(A'_{\mathbb{F}})$，并由命题 4.9，$\rho($稳定子$_{\mathbf{G}(\mathbb{F})}(f_0) =$ 稳定子$_{\mathbf{G}'(\mathbb{F})}(f_0')$，这就是条件 (2)。对每个 $x = \sum_{\delta\in\Delta} \lambda_\delta \delta^\vee \in \mathbb{A}$，存在某个 $a \in A_{\mathbb{F}}$ 使得 $f_0(x) = a.o$，且对所有 $\alpha \in \Sigma$，都有 $(-v)(\chi_\alpha(a)) = \alpha(x)$。由 App24 引理 6.1] （在 $\mathbb{R}$ 上），对所有 $H \in \mathfrak{a}$ 和 $\alpha \in \Sigma$，我们有

$$\chi_\alpha(\exp(H)) = e^{\alpha(H)} = e^{\alpha\circ \mathrm{D}_{\mathrm{Id}}\rho^{-1}(\mathrm{D}_{\mathrm{Id}}\rho(H))} = \chi_{\alpha\circ \mathrm{D}_{\mathrm{Id}}\rho^{-1}}(\rho(\exp(H))).$$

由迁移原理（定理A.8），对于 $\alpha \in \Sigma$及相应的$\alpha' := \alpha \circ \mathrm{D}_{\mathrm{Id}}\rho^{-1} \in \Sigma'$，我们有

$$\chi_\alpha(a) = \chi_{\alpha'}(\rho(a)).$$

Thus

$$\begin{aligned}(-v)(\chi_{\alpha'}(\rho(a))) = (-v)(\chi_\alpha(a)) = \alpha(x) &= \sum_{\delta\in\Delta} \lambda_\delta \alpha\left(\delta^\vee\right) \\ &= \sum_{\delta\in\Delta} \lambda_\delta \left(\alpha \circ \mathrm{D}_{\mathrm{Id}}\rho^{-1}\right)\left(L(\delta^\vee)\right) = \alpha'\left(\tau(x)\right),\end{aligned}$$

因此 $\rho(a).o' = f_0'(\tau(x))$，且条件 (3) 成立。由定理 4.10 (c) 可得 m 是建筑的同构 $B \xrightarrow{\sim} B'$。□

现在我们可以证明关于单态射函子性的最一般结果。称线性代数群态射 ρ: $\mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ 为转置不变，如果对于所有 $g \in \mathbf{G}$，都有 $\rho(g)^\top = \rho(g^\top)$。

定理 6.16 (定理F)。 设 $\mathbf{G} < \mathrm{SL}_n$ 和 $\mathbf{G}' < \mathrm{SL}_m$ 是半单、连通、自伴线性代数 $\mathbb{Q}$群，其根系约化；设 B, B' 是相应的对称建筑。若 $\mathbf{G}$ 是 $\mathbb{R}$-分裂的，且 $\rho\colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上（或更一般地，定义在 $\mathbb{R}\cap\mathbb{F}$ 上）的代数群转置不变单态射，则存在一个等变单射态射$B \to B'$。

证明。代数群态射 $\rho\colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ 的像 $\rho(\mathbf{G})$ 是一个代数群；又由于 ρ 是单态，$\mathbf{G}$ 与 $\rho(\mathbf{G})$ 同构[Mil17，推论 5.22]。特别地，$\rho(\mathbf{G})$ 也是半单、连通、 $\mathbb{R}$-分裂的，并且具有约化根系。由于 ρ 转置不变，$\rho(\mathbf{G})$ 是自伴的（$g \in \rho(\mathbf{G})$ 蕴含 $g^\top \in \rho(\mathbf{G})$）。

设 $\mathbf{S} < \mathbf{G}$ 和 $\mathbf{S}' < \mathbf{G}'$ 是由自伴元素组成的极大 $\mathbb{R}$-分裂环面。现在，$\rho(\mathbf{S})$ 也是一个 $\mathbb{R}$-分裂环面，并且包含在某个极大 $\mathbb{R}$-分裂环面中；该环面可由 $g \in \mathbf{G}'(\mathbb{R}\cap\mathbb{F})$ 中某个元素共轭到 $\mathbf{S}'$。事实上，根据[Kna02，定理 6.51]，，甚至有 $g \in \mathbf{K}'(\mathbb{R}\cap\mathbb{F}) = \mathbf{G}'(\mathbb{R}\cap\mathbb{F}) \cap \mathbf{SO}_m(\mathbb{R}\cap\mathbb{F})$（这里我们利用了 ρ 的像是自伴的，以确保对于与标准 Cartan 对合 $X \mapsto -X^\top$相关联的 Cartan 分解 $\mathrm{Lie}(\mathbf{G}'(\mathbb{R})) = \mathfrak{p}' \oplus \mathfrak{k}'$，有 $\rho(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{p}'$ ）。若 c_g 表示该共轭作用，则 $c_g(\rho(\mathbf{G}))$ 与 $\mathbf{G}$ 同构，因此 $c_g(\rho(\mathbf{G}))$ 是半单、连通、 $\mathbb{R}$-分裂的，并且具有约化根系。由于 $g \in \mathbf{K}(\mathbb{R}\cap\mathbb{F})$，$c_g(\rho(\mathbf{G}))$ 是自伴的。此外，$c_g(\rho(\mathbf{S})) \subseteq \mathbf{S}'$是一个 $\mathbb{R}$-分裂环面（在$c_g(\rho(\mathbf{G}))$中极大），且其所有元素都是自伴的（因为 $\mathbf{S}$ 的元素均如此）。用 $\rho(B)$ 表示与 $\rho(\mathbf{G})$ 相关联的建筑，用 $c_g(\rho(B))$ 表示与 $c_g(\rho(\mathbf{G}))$ 相关联的建筑。于是由命题 6.15 可得等变态射 $B \cong \rho(B) \cong c_g(\rho(B))$，而由定理 6.13 可得等变单射态射 $B \cong c_g(\rho(B)) \to B'$。□

AppendixA. Basics from real algebraic geometry

A.1. 有序阿贝尔群与有序域。 有序域 $\mathbb{F}$是一个带有与域运算相容的全序的域。若存在 $x \in \mathbb{F}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $x > n$，则称有序域 $\mathbb{F}$ 为非阿基米德的。我们要求有序域 $\mathbb{F}$ 上的任意赋值 v 都是与序相容的，这意味着对于所有满足 $0 < x \leq y$ 的 $x,\ y \in \mathbb{F}$，都有 $v(x) \geq v(y)$；也就是说，$-v$ 在 $\mathbb{F}_{>0}$ 上的限制是保序的。在这种情况下，域 $\mathbb{F}$ 必定是非阿基米德的。

有序阿贝尔群 Λ（或有序域 $\mathbb{F}$）中的两个元素 $x,\ y$ 属于同一个阿基米德等价类，当且仅当存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $|x| < n|y|$且 $|y| < n|x|$，其中 $|x| := \max\{x, -x\}$。阿基米德等价类的集合称为 Λ（或 $\mathbb{F}$）的秩，并构成一个有序阿贝尔群 $\mathbf{rk}(\Lambda)$（或 $\mathbf{rk}(\mathbb{F})$），其加法和序由 Λ（或 $\mathbb{F}$）诱导。关于有序阿贝尔群，我们有以下重要定理。

定理 A.1 (Hahn 嵌入定理 [Gra56])。 每个有序阿贝尔群 Λ 都可以视为阿贝尔加法群的一个子群

$$\mathfrak{R} := \{(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I \colon \operatorname{supp}((x_i)_{i\in I}) \textit{ is a well-ordered subset of } I\}$$

其中 $I := \mathrm{rk}(\Lambda)$，并赋予字典序。

以下给出一种一般构造，用于在有序域上定义序相容赋值。

例 A.2 (序赋值)。 设 $\mathbb{F}$ 是一个有序域，$\Lambda = \mathbf{rk}(\mathbb{F})$ 是阿基米德等价类构成的有序阿贝尔群。映射 $0 \neq x \mapsto -[x] \in \Lambda$ 是一种称为序赋值的序相容赋值。注意，当且仅当 $\Lambda \neq \{0\}$ $\mathbb{F}$ 是非阿基米德的。

一个有序域可以容许许多序相容赋值，其中序赋值在某种意义上是最“精细”的一个，也就是说，若 v 是任意其他赋值，它都可经由序赋值分解。例如，若 $\mathbb{F}$ 有一个大元素 b，即对于所有 $x \in \mathbb{F}$，都存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $x < b^n$，那么可以定义一个序相容的秩 1 赋值 $v_b\colon\ \mathbb{F}^\times \to \mathbb{R}$，定义如下：

$$v_b(x) := -\inf\left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \colon x^q < b^p\right\},$$

仿照标准对数的定义。 $\mathbb{F}$ 上的任意序相容秩 1 赋值都是某个大元素 $b \in \mathbb{F}$ 所对应的 v_b 的正标量倍数。注意，有些有序域并不容许大元素，例如超实数。

如果一个有序域是实闭的，那么每个正元素都是平方，且每个奇次多项式都有一个根。注意，每个有序域都有一个实闭包，也就是说，有一个实闭的代数域扩张，且其序扩张了原有的序 [BCR98，§1.3]。

例 A.3. 实数 $\mathbb{R}$ 和实代数数 $\mathbb{Q}^r$ 都是实闭的。实 *Puiseux* 级数域是以下表达式的集合

$$\mathbb{R}(X)^\wedge := \left\{\sum_{k=k_0}^{\infty} c_k X^{k/m} \;\middle|\; k_0 \in \mathbb{Z},\, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\, c_k \in \mathbb{R}\right\},$$

以及形式加法和乘法。元素 $\sum_{k=k_0}^{\infty} c_k X^{k/m}$是正的，当且仅当 $c_{k_0} > 0$。在这个序下，$\mathbb{R}(X)^\wedge$ 是实闭的，参见例如 [BPR06，定理 2。91]。 $\mathbb{Q}$ 的实闭包是 $\mathbb{Q}^r$。 $\mathbb{R}(X)$（配备序 $X > 0$，但 $X < \lambda$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$）的实闭包是代数于 $\mathbb{R}(X)$的实 Puiseux 级数域。

实闭域在实代数几何中发挥着至关重要的作用。

A.2. **半代数几何**。 我们概述实代数几何中的一般定义和结果，并引入相关记号。更多细节和证明请参阅[BCR98], ，尤其是第 1、2 和 5 章。实代数几何的主要研究对象是半代数集。从现在起，设 $\mathbb{F}$ 为一个实闭域。

定义 A.4. 子集 $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{F}^n$ 是一个基本半代数集，如果存在一个多项式 $f \in \mathbb{F}[X_1, \ldots, X_n]$ 使得

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(f) = \{x \in \mathbb{F}^n \colon f(x) > 0\}.$$

子集 $X \subseteq \mathbb{F}^n$ 是半代数 的，如果它是基本半代数集的布尔组合，即 X 可由基本半代数集及其补集的有限并和交得到。设 $X \subseteq \mathbb{F}^n$ 和 $Y \subseteq \mathbb{F}^m$是两个半代数集。映射 $f\colon X \to Y$ 称为半代数 映射，如果其图 Graph(f) $\subseteq X \times Y$是 $\mathbb{F}^{n+m}$中的半代数集。

代数集是半代数集，任何多项式映射或有理映射都是半代数的。

注意，如果 $\mathbb{F} \neq \mathbb{R}$，那么 $\mathbb{F}$ 在 $\mathbb{F}$上的序拓扑中是全不连通的。不过，对于半代数集，我们有以下连通性的概念。

定义 A.5. 半代数集 $X \subseteq \mathbb{F}^n$ 称为半代数连通的，如果它不能写成两个非空半代数子集的不交并，且这两个子集在 $\mathbb{F}^n$ 中都闭。

定理 A.6 ([BCR98，定理 2.4。5])。 中的半代数集当且仅当其半代数连通时才是连通的。中的每个半代数集都有有限个连通分支，且这些连通分支都是半代数集。

从现在起，用 $\mathbb{K}$ 表示 $\mathbb{F}$的一个实闭扩张。

定义 A.7. 设 $X \subseteq \mathbb{F}^n$ 是一个半代数集，其定义如下:

$$X = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{F}^n \colon f_{ij}(x) *_{ij} 0\},$$

其中 $f_{ij} \in \mathbb{F}[X_1, \ldots, X_n]$和 $*_{ij}$分别为 $<$或 $=$，对 $i = 1, \ldots, s$以及 j =1，…， r_i 均成立。 $\mathbb{K}$-扩张 $X_{\mathbb{K}}$是由与 X相同的符号条件布尔组合给出的集合，更准确地说，

$$X_{\mathbb{K}} = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{K}^n \colon f_{ij}(x) *_{ij} 0\}.$$

注意， $X_{\mathbb{K}}$ 是半代数的，且仅取决于集合 X，而不取决于描述该集合的布尔组合，参见 [BCR98，命题 5.1。1]这一结论基于塔尔斯基–塞登堡传递原理。

定理 A.8 （塔尔斯基–塞登堡传递原理， [BCR98，定理 5.2。1]）。设 $X \subseteq \mathbb{F}^{n+1}$ 是一个半代数集。记投影pr: $\mathbb{F}^{n+1} \to \mathbb{F}^n$到前 n 个坐标上的投影为pr。则pr(X) $\subseteq \mathbb{F}^n$ 是半代数的。此外，若 $\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{F}$的实闭扩张，且pr$_{\mathbb{K}}$: $\mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ 是到前 n 个坐标上的投影，则

$$\mathrm{pr}_{\mathbb{K}}(X_{\mathbb{K}}) = \mathrm{pr}(X)_{\mathbb{K}}.$$

最后，我们得到半代数集的扩张与半代数连通分支之间的以下关系。

定理 A.9 ([BCR98，命题 5.3.6 (ii)])。设 $X \subseteq \mathbb{F}^n$ 是半代数的。那么 X 是半代数连通的，当且仅当 $X_{\mathbb{K}}$ 是半代数连通的。更一般地，若 C_1、……、C_m 是 X的半代数连通分支，那么 $(C_1)_{\mathbb{K}}$、……、$(C_m)_{\mathbb{K}}$ 是 $X_{\mathbb{K}}$的半代数连通分支。

References

[App24] R. Appenzeller, *Semialgebraic groups and generalized affine buildings*, 博士论文，苏黎世联邦理工学院，2024年。[App26a] , *Generalized affine buildings for semisimple algebraic groups over real closed fields* —2026— 2601 03226, ¨ , , arXiv: 。即将在《明斯特数学杂志》发表。[App26b] , *Semisimple algebraic groups over real closed fields*, 准备中，2026。[BCR98] J. Bochnak、M. Coste 和 M.-F. Roy, *Real algebraic geometry*, 《数学及其边缘领域丛书》，第36卷，施普林格出版社，1998年。[Ben94] C. D. Bennett, *Affine Λ-buildings I*, 《伦敦数学会会报》第3辑（1994年），第3期，541–576页。[Ben09] C. D. Bennett, *Affine Λ-buildings II*，2009年，arXiv:0909.2059。[BIPP21] M. Burger、A. Iozzi、A. Parreau 和 M. B. Pozzetti, *The real spectrum compactification of character varieties: characterizations and applications* ，巴黎科学院数学报告359（2021年），439–463页。[BIPP23] M. Burger、A. Iozzi、A. Parreau 和 M. B. Pozzetti, *pactification of character varieties* 2023 2311 01892 *The real spectrum com-* , , arXiv: 。。[Bor91] A. Borel, *Linear algebraic groups.*，第2版，增订版，《研究生数学丛书》第126卷，施普林格出版社，1991年。[Bou02] N. Bourbaki, *Elements of mathematics. Lie groups and Lie algebras. Chapters* 4–6. 2002 ，施普林格出版社，。[BPR06] S. Basu、R. Pollack 和 M.-F. Roy, *Algorithms in real algebraic geometry*，第2版版，《算法与计算数学》第10卷，施普林格出版社，2006年。[Bru88] G. W. Brumfiel, *The tree of a non-Archimedean hyperbolic plane*，群表示几何，《当代数学》第74卷，美国数学会，1988年，第83–106页。[BS14] C. D. Bennett 和 P. N. Schwer, *On axiomatic definitions of non-discrete affine buildings* **14** 2014 3, 381 412 ，《高等几何》（），第—期。[BT72] F. Bruhat 和 J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local*，高等科学研究所数学出版物（1972年），第41期，5–251页。[BT84a] , *Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*，高等科学研究所数学出版物（1984年），第60期，197–376页。[BT84b] , *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local* **112** 1984 259 301 *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local. II. Groupes unitaires. (Group schemes and buildings of classical groups over local fields. II: Unitary groups)* **115** 1987 141 195 ，《法国数学会通报》（），—。[BT87] , 《法国数学会通报》（），—。[Dye09] M. J. Dyer, *Embeddings of root systems. I: Root systems over commutative rings.*，《代数杂志》321（2009年），第11期，3226–3248页。[EP05] A. J. Engler 和 A. Prestel, *Valued fields*，《施普林格数学专著》，施普林格出版社，2005年。[G´er81] P. G´erardin, *Immeubles des groupes linéaires généraux*，《非交换调和分析与李群》（马赛，1980年），《数学讲义》第880卷，施普林格出版社，1981年，第138–178页。[GI63] O. Goldman 和 N. Iwahori, *The space of p-adic norms*，《数学学报》109（1963年），137–177页。[Gra56] K. A. H. Gravett, *Ordered Abelian groups*，《牛津季刊数学杂志》新系列7（1956年），57–63页。[HIL23] A. H ´ *Λ-buildings associated to quasi-split groups over Λ-valued fields* ¨ **16** 2023 2, 323 487 ebert、D. Izquierdo 和 B. Loisel, ，《明斯特数学杂志》（），第—期。[Izq24] D. Izquierdo, *Towards a higher Bruhat–Tits theory*, https://perso.pages.math.cnrs.fr/users/diego.izquierdo/media/Research/ Taiwan Bruhat Tits final.pdf，2024年，国立台湾大学课程讲义。

[KL97] B. Kleiner 和 B. Leeb, *Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings*, 高等科学研究所数学出版物（1997年）, 第86期, 115–197页。[Kna02] A. W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction*, 第2版版, 《数学进展丛书》第140卷, 马萨诸塞州波士顿: Birkhäuser, 2002年。[KP23] T. Kaletha 和 G. Prasad, *Bruhat–tits theory: A new approach*, 《新数学专著丛书》, 剑桥大学出版社, 2023年。[KT02] L. Kramer 和 K. Tent,

Affine Λ-buildings ultrapowers of lie groups and rie- , , 。[Lan00] E. *mannian symmetric spaces: an algebraic proof of the margulis conjecture* 2002
Landvogt, *Some functorial properties of the Bruhat-Tits building*, 《纯粹与应用数学杂志》518（2000年）, 213–241页。[LN04] O. Loos 和 E. Neher, *Locally finite root systems*, 《美国数学会回忆录》第811卷, 美国数学会, 2004年。[Mil17] J. S. Milne,

Algebraic groups. The theory of group schemes of finite type over a , 《剑桥高等数学研
field 170, 2017
究丛书》, 第卷, 剑桥大学出版社, 。[MS84] J. W. Morgan 和 P. B. Shalen,

Valuations trees and degenerations of hyperbolic , , , 《数学年刊》
structures. I 2 **120** 1984 3, 401 476
（） （）, 第—期。[MSVM14] B. M
..

Descent of affine buildings—I. uhlherr、K.
Large minimal angles **366** 2014 8, 4345 4366
Struyve 和 H. Van Maldeghem, 《美国数学会汇刊》（） 第—期, [Par00] A. Parreau,
Immeubles affines: , construction par les normes et étude des isométries **262** 2000 263 302 , 《当代数学》（）, —。

[Par23] , *Affine buildings: construction by norms and study of isometries*, 《关联几何创新》 20（2023年）, 第2–3期, 471–517页。[R´em99] B. R´emy,
Construction de réseaux en théorie de Kac-Moody, 《巴黎科学院报告》第一辑: 数学329（1999年）, 第6期, 475–478页。[Ron09] M. Ronan, *Lectures on buildings*, 第2版, 修订更新版, 芝加哥大学出版社, 2009年。[Rou77] G. Rousseau, *Immeubles des groupes réductifs sur les corps locaux*, 《奥赛数学出版物》77-68, 207, 1977年。[Rou23] , *Euclidean buildings—geometry and group actions*, 《欧洲数学学会数学论丛》第35卷, 欧洲数学学会出版社, 2023年。[RTW10] B. R´emy、A. Thuillier 和 A. Werner, *Bruhat–Tits theory from Berkovich's point of view. I: Realizations and compactifications of buildings*, 《高等师范学校科学年刊》（第4辑）43（2010年）, 第3期, 461–554页（英文）。[Sch09] P. Schwer, *Generalized affine buildings*, 2009年, arXiv:0902.1107。[SS11] P. N. Schwer 和 K. Struyve, *Λ-buildings and base change functors*, 《几何论述》157（2011年）, 第1期, 291–317页。[Str14] K. Struyve,

Descent of affine buildings—II. Minimal angle π/3 and exceptional , 《美国数学会汇刊》
quadrangles **366** 2014 8, 4367 4381
（）, 第—期。[Tit74] J. Tits, *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, 《数学讲义》第386卷, 施普林格出版社, 1974年。[Tit86] , *Immeubles de type affine*, 《建筑与图表几何: 1984年第三届国际数学暑期中心会议讲座》, 于意大利科莫举行, 施普林格出版社, 1986年, 第159–190页。[Tit87] , *Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields*, 《代数杂志》105（1987年）, 第2期, 542–573页。[Wei09] R. M. Weiss, *The structure of affine buildings*, 《数学年刊研究》第168卷, 普林斯顿大学出版社, 2009年。

Department of Mathematics, Heidelberg University, Germany
Email address: rappenzeller@mathi.uni-heidelberg.de

Institut des Hautes Etudes Scientifiques, France
Max-Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Germany
Email address: flamm@ihes.fr, xenia.flamm@mis.mpg.de

Department of Mathematics, ETH Zürich, Switzerland
Email address: victor.jaeck@math.ethz.ch