arXiv:2601.04143v1 [math.AC] 7 Jan 2026

´etale代数的局部结构

Thierry Coquand

引言

本文旨在以构造性数学的方式，给出 ´etale代数局部结构证明的一个构造性版本。该证明归功于 Chevalley，见 [Gr, 18.4.6 (ii)]，以及 [LQ]。与[Gr, Ray]，中一样，主要工具是扎里斯基主定理，该定理已在 [ACL]中以构造性方式证明。

1 局部结果的陈述

设 R 是一个剩余离散局部环，其极大理想为 $\mathfrak{m}$，剩余域为 $k = R/\mathfrak{m}$。设 E 是一个（有限表示的） ´etale R-代数。

定理 1。存在 $s_1, \ldots, s_m$ 属于 E，它们模 $\mathfrak{m}$ 互素，即它们在 $E/\mathfrak{m}E$ 中的像生成单位理想，并且每个 $E[1/s_i]$ 都是标准 ´*étale* R-代数。

注意， $E/\mathfrak{m}E$ 是一个（有限表示的）非分歧 k-代数，因此根据 [LQ，L]，是 k 的单生成可分扩张的有限直积。

利用构造性的扎里斯基主定理 [ACL]，可得存在一个有限 R-子代数 $B \subset E$ 以及元素 $s_i \in B$，它们在 E 中互素，使得对所有 i，都有 $B_i = B[1/s_i] \cong E[1/s_i]$。

某些 $B_i/\mathfrak{m}B_i$ 可能是平凡代数。我们将它们舍弃，这也解释了为什么最终结果中，我们得到的族仅在剩余意义下互素。

每个 $B_i/\mathfrak{m}B_i$ 都是相应的单生成可分扩张的乘积。通过细化 s_i，我们可以假设每个 $B_i/\mathfrak{m}B_i$ 本身都是 k 的单生成可分扩张。

2 关于 $B/\mathfrak{m}B$的一些引理

现在考虑 $A = B/\mathfrak{m}B$，它是一个有限的 k-代数。我们仍将 s_i 记作它在 A中的类。那么 $A[1/s_i]$ 是 k 的一个扩张，其形式为 $k[X]/(p)$，其中 p是某个可分多项式。

引理 1. 存在 u 和 N，使得 $s_i^N(1 - s_i u) = 0$。若记 $e_i = (s_i u)^N$，则存在 A 的一个幂等元e_i，使得 $A[1/e_i] = A[1/s_i]$。

证明. 由于 A 是有限的， s_i 是整的，并满足一个多项式方程。由于 $A[1/s_i]$ 非平凡，我们可以将这个多项式写成 $X^N(1 - XP)$的形式。因此有 $s_i^N = s_i^N(s_i u)^N$，从而对于 $e_i = (s_i u)^N$，有 $e_i = e_i^2$。

□

$A[1/e_i]$ 是一个形式为 $k[X]/(p)$的扩张。我们总可以假设 p的常数项是 $\neq 0$。（由于 p 是可分的，唯一的问题出现在 $p = X$的情形，但此时我们将其替换为 $p = X - 1$。）

我们可以选择 x in B，使得 x 生成 $A[1/e_i]$。于是有 $k[x]e_i = Ae_i$。若取 $y = xe_i$，仍有 $Ae_i = k[y]e_i$；但现在，由于我们有 $P(x) = 0$，且 P的常数项是 $\neq 0$，它属于 $xk[x]$，因此 e_i 属于 $yk[y]$，从而 $Ae_i \subseteq k[y]$。

3 提升到 B

B 是 R上的有限扩张，并且根据前一节，我们有 y 属于 B，以及 e_i 属于 $R[y]$，使得 $e_iB \subseteq R[y]+\mathfrak{m}B$。由中山引理可得，存在 p_i 属于 $R[y]$，使得 $p_iB \subseteq R[y]$[1]。于是有 $B[1/p_i] \cong R[y][1/p_i]$。

总　结一下，我们在 B 中找到了 $t_1,\dots,t_n$，它们模 $\mathfrak{m}$ 互素，且每个 $E[1/t_i]$ 都具有以下形式：　　e 形式 $R[y][1/g]$其中某个 y 属于 B，且 g 属于 $R[y]$。

4 标准 étale 表示的一个候选

现在我们考虑 ´étale 代数 $E[1/t_i]$，并将其改写为 $E = R[y][1/g]$。

我们考察 R-代数 $R[y]$。我们知道，$R[y]/\mathfrak{m}R[y]$ 是一个单生成有限 k-代数 $k[y]$，但一般来说，我们无法构造性地获知它的秩。我们还知道，$k[y][1/g]$ 是一个单生成可分代数 $k[X]/(p)$，其中 p是某个多项式 p。这意味着，对于某个n，我们有 $g^np(y) = 0$ 属于 $k[y]$。令 G 属于 $R[X]$，使得 $G(y) = g$。

由于 $R[y]$ 是有限的，y 满足某个首一方程 $Q_0(y) = 0$，其中 Q_0 是 $R[X]$中的某个首一多项式。我们递归地定义首一多项式序列 Q_l，其次数 $d(Q_l)$在 $R[X]$中递减，且都满足$Q_l(y) = 0$ 属于 $R[y]$；从 Q_0 开始，并在 $d(Q_{l+1}) = d(Q_l)$时停止。令 P为 $k[X]$中的 $gcd(Q_l, G^np)$。由于 $Q_l(y) = 0$且 $G(y)^np(y) = 0$，我们有 $P(y) = 0$属于 $k[y]$。令 $d = d(P) \leqslant d(Q_l)$为 P的次数。1、y、.....、y^{d-1}生成 $k[y] = R[y]/\mathfrak{m}R[y]$，因此根据中山引理，它们也生成 $R[y]$。由此可知，y 也满足某个首一方程 $Q_{l+1}(y) = 0$，其中 Q_{l+1} 是 $R[X]$中的某个次数为 d的首一多项式。因此，经过有限步后，我们得到 $Q = Q_l$，它是 $R[X]$ 中的首一多项式，满足 $Q(y) = 0$ 属于$k[y]$，且 Q 在 $k[X]$中整除 G^np。

现在考虑 $R[a] = R[X]/(Q)$ 和 $S = R[a][1/G(a)]$。我们有 $G^n(a)p(a) = 0$ 在 $S/\mathfrak{m}S$ 中，并且 $G(a)$ 在 S 中可逆，因此 $p(a) = 0$ 在 $S/\mathfrak{m}S$ 中。此外，如果对于某个 q 属于 $k[X]$，有 $q(a) = 0$ 在 $S/\mathfrak{m}S$ 中，那么我们有 Q整除 G^mq，其中某个 m 属于 $k[X]$，因此 $q(y) = 0$ 在 $k[y][1/g]$ 中，从而 $d(p) \leqslant d(q)$。由此可知，典范映射 $u:\ S \to R[y][1/g] = E$ 是一个满射，且 $S/\mathfrak{m}S \to E/\mathfrak{m}E$ 是一个同构[2]。

到目前为止，所有这些只在假设 E （有限表示的）非分歧的情况下成立。

5 如果 E 是 ´étale，会发生什么

我们有一个满射 $u:\ S \to E$，且 S 和 E 都是有限表示的，因此核 I 是 S 的一个有限生成的理想。此外，$S/\mathfrak{m}S = E/\mathfrak{m}E = k[y][1/g]$。

我们有正合列 $0 \to I/I^2 \to S/I^2 \to E \to 0$，并且由于 E 是 ´étale 的，且 I/I^2 平方为 0，这个正合列是分裂的（即存在一个截面）。此外，如果正合列$0 \to A \to B \to C \to 0$ 是分裂的，那么序列 $0 \to A/\mathfrak{m}A \to B/\mathfrak{m}B \to C/\mathfrak{m}C \to 0$ 仍然是正合的。由于 $S/I^2 \to E$ 模 $\mathfrak{m}$是一个同构，因此 I/I^2 模 $\mathfrak{m}$为 0；又由于 I 是有限生成的，根据 Nakayama 引理可得 $I = I^2$。这意味着 I 由一个幂等元$e = 1 - f$生成。因此，我们得到 S中的 f，使得 $I[1/f] = 0$且 $u(f) = 1$。于是 $S[1/f]$同构于 E，后者是标准的 ´étale。

6 全局版本

现在取 R 任意一个环以及 E 一个有限表示的 ´étale R-代数。

定理 2. 存在 $s_1,\dots,s_m$属于 E，它们互素；并且存在 $f_1,\dots,f_m$属于 R，它们在 E中互素，使得每个 $E[1/s_i]$ 都同构于一个标准的 *´étale* $R[1/f_i]$-代数。

证明。我们 引入 E的一个一般（可判定）理想素数 q，以及 $p = q \cap R$。我们应用了上一部分的论证　中的论证　有理截面到 E_p，使得 ´在 R_p 上是 étale 的，其中 R_p是一个局部环。于是我们得到 s 不属于 q，并且　f

[1]设 $b_1,\dots,b_m$是 R-模 B的生成元。我们可以写成 $e_ib_j = q_j + \Sigma_l\mu_{jl}b_l$，其中$q_j$属于 $R[y]$，而μ_{jl}属于 $\mathfrak{m}$。令 p_i为矩阵 $e_i\delta_{jl} - \mu_{jl}$的行列式。[2]注意，与 Raynaud [Ray], 不同，我们无法确定典范映射 $R[a] \to R[y]$ 在剩余域上是同构，因为这相当于能够计算 $k[y]$的秩；但局部化后，它在剩余域上会成为双射。

在 R 中不属于 q，使得 $E[1/s]$ 同构于一个 $R[1/f]$ ´étale 代数。运用动力学方法，我们得到了该结论。

□

由此可知，正如 Raynaud [Ray], 所述，每个 ´étale 代数都是平坦的。

我们可以将这一结论细化如下[3]。

定理3。 存在 $s_1, \ldots, s_m$ 属于 E，它们两两互素；并且存在 $f_1, \ldots, f_m$ 属于 R，它们在 E 中互素，使得每个 $E[1/s_i]$ 都同构于一个标准 *´étale* R-代数。

证明。 根据前一个定理，只需证明标准的 ´étale $R[1/f]$-代数也是标准的 ´étale R-代数。事实上，对于 $R[1/f]$ 上的一个首一 d 次多项式 P，可以取一个 R上的首一 d 次多项式，它提升了 $f^{nd}P(X/f^n)$（当 n足够大时），并定义了与 $R[1/f]$相同的扩张。

□

7 一个基本例子

考虑 $E = R[X]/(1 - Xt)$，其中 $R, \mathfrak{m}$ 是局部的，且 t 属于 $\mathfrak{m}$。

如果应用局部版本，由于 $E/\mathfrak{m}E$ 是平凡的，我们得不到任何信息。

如果应用全局版本，我们得到 E 中的族 1 和 R 中的族 t，使得 E 与 $R[1/t]$同构。

8 如果 E 平坦且非分歧，会发生什么

按照 [Ray], ，我们可以证明，如果 E 是平坦且（有限表示的）非分歧的，那么 E 局部标准 étale，因此 ´是 étale。

与之前一样，令 I 为映射 $u : S \to E$ 的核。我们有正合列 $0 \to I \to S \to E \to 0$。此外，映射 $S/\mathfrak{m}S \to E/\mathfrak{m}E$ 是一个同构。由于 I 是 S的有限生成理想，根据 Nakayama，只需证明 $I/\mathfrak{m}I = 0$。然后我们可以使用以下引理（代入$A = R$ 和 $J = \mathfrak{m}$），得出结论，因为 E 在 R上平坦。我们在[LQ]中使用平坦性的构造性定义。

引理2。 设 L、M、N 是 A-模，且 J 是 A 的理想。我们假设 $u : L \to M$ 且 $v : M \to N$，使得 $0 \to L \to M \to N \to 0$ 是正合的。如果模 N 是平坦的，那么映射 $L/JL \to M/JM$ 是单射。

证明。设 x 属于 L，使得 $u(x) = 0$ 属于 M/JM。于是，对于某个属于 J 的列向量 r 和某个属于 M 的行向量 m，我们有关系 $u(x) = rm$ 。于是 $0 = v(u(x)) = rv(m)$ 属于 N。由于 N 是平坦的，存在属于 A 的矩阵 p 和属于 N 的行向量 n，使得 $rp = 0$ 且 $pn = v(m)$。由于 v 是满射，我们可以找到 m_1 属于 M，使得 $n = v(m_1)$。于是 $v(m - pm_1) = 0$，因此对于某个属于 L 的 l 行向量，有 $m - pm_1 = u(l)$。于是 $u(x) = rm = rm - rpm_1 = ru(l) = u(rl)$，因此 $x = rl$，因为 u 是单射。但这意味着 $x = 0$ 属于 L/JL，如所要求。

□

参考文献

[ACL] M. Alonso、T. Coquand 和 H. Lombardi。从构造性视角重新审视扎里斯基主定理。《代数学杂志》，第 406 卷，46–68 页，2014 年。

[Gr] A. Grothendieck ´代数几何原理´: *IV.* ´概形及概形态射的局部研究´´。 法国高等科学研究所数学出版物，卷 32（1967），第 5–361 页。[L] H. Lombardi。一个决定性定理，arXiv 2506.07098，2025 年。[LQ]

H. Lombardi 和 C. Quitt´e。 交换代数。构造方法。 施普林格，2015 年 .

[Ray] M. Raynaud。《亨泽尔局部环´。数学讲义，第169卷，施普林格，1970年。

[3]我从 Ofer Gabber 那里得到了这一论证。