arXiv:2601.04146v1 [math.FA] 7 Jan 2026

光滑符号托普利茨算子嵌入强连续半群

¨EMMANUEL FRICAIN、SOPHIEGRIVAUX、MAEVA OSTERMANN 和 DMITRY YAKUBOVICH

Abstract. 借助第四位作者于 20 世纪 80 年代建立的光滑符号托普利茨算子模型理论，我们研究这类算子 T_F 能否嵌入开单位圆盘 H^p 的 Hardy 空间 C_0上的算子半群，其中该半群为 $1 < p < \infty$。我们证明，只要 0 属于复数域去掉 T_F的谱内部后所得集合的无界连通分支，这一结论便成立。我们针对符号 F给出若干几何和解析条件，确保这一充分条件同时也是必要条件。对于某一类符号，若曲线 F (T)呈“环套环形”，且复数域 $\mathbb{C} \setminus \sigma(T_F)$有一个有界连通分支，我们便得到了 T_F 嵌入C_0半群的完整刻画。在论文最后一部分，我们借助数值域以及有界扇形算子的函数演算，讨论符号 F 不一定光滑时T_F 的可嵌入性。

1. Introduction

本文研究作用于开单位圆盘上的 Hardy 空间之一 H^p 上、具有光滑符号的托普利茨算子 $1 < p < \infty$ 能否嵌入作用于 H^p 上的有界算子 C_0-半群。回顾一下，作用于巴拿赫空间 X 上的一族有界算子 $(T_t)_{t>0}$，若满足以下两个性质，则称为 C_0-半群（或强连续半群）：

(i) $T_tT_s = T_{t+s}$ 对每个 $t,\ s > 0$ （半群性质）；(ii) $\|T_tx - x\| \longrightarrow 0$ 当 $t \longrightarrow 0^+$ 时，对每个 $x \in X$ 都成立。换言之，T_t 在逐点拓扑（亦称强算子拓扑）下，当 t 趋于 0^+ 时收敛到 X 上的恒等算子。

若算子 T 作用于 X，且存在作用于 X 上的算子 C_0-半群 $(T_t)_{t>0}$，使得 $T_1 = T$，则称该算子可嵌入 C_0-半群，或简称可嵌入。换言之，可嵌入算子是指那些作为 C_0-半群元素出现的算子。

给定算子能否嵌入 C_0-半群是一个困难的问题，该问题由 T. Eisner 于 [14] 提出（另见 [15, 第 V 章，第1]节）。这一问题源自遍历理论中的一个类似问题：在什么条件下，概率空间上的遍历保测变换可以嵌入一个流中。de la Rue 和 Lazaro 证明了 [11]

Date：2026年1月8日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 47B35、47B12、47D60、30H10。*Key words and phrases.*将算子嵌入 C_0-半群、托普利茨算子、Hardy 空间、具有光滑符号的托普利茨算子的模型理论、托普利茨算子的交换子、托普利兹算子的特征值、扇形算子、数值域。

一般而言，赋予勒贝格测度的 $[0,1]$ 上的自同构可以嵌入 $[0,1]$上的自同构流。Eisner 针对算子的可嵌入性问题取得了若干结果。例如，她证明了，若算子 $T \in \mathcal{B}(X)$可嵌入，则其核 ker 的维数T以及其值域 Ran(T)的余维只能为 0 或无穷[15，（第 IV 章，定理 1）7]。当 T 是等距算子（或余等距算子）时，这些条件也恰好是充分条件 [15，（第 V 章，定理 1）19]。文献 [15]研究了若干类算子的可嵌入性。文献 [16] 证明，在贝尔范畴意义下，复可分希尔伯特空间 H 上弱算子拓扑中的典型压缩算子是酉算子，因而可嵌入。Eisner 和 Matrai 研究了 H 上强算子拓扑中的典型压缩算子的性质，并由此在文献 [17] 中证明，这种强算子拓扑下的典型压缩算子也可嵌入。

本文致力于研究 Hardy 空间 H^p,$1 < p < \infty$ 上一类尤为重要的托普利茨算子的嵌入问题：给定函数 $F \in L^\infty$(T)，其中 T 表示单位圆，定义具有符号 F 的托普利茨算子 T_F，其作用于 H^p 上，定义如下

$$T_F f := P_+(Ff), \qquad f \in H^p,$$

其中 P_+ 是从 L^p(T)到 H^p的 Riesz 投影。这种算子在 H^p上定义良好且有界。最近，Chalendar 和 Lebreton 证明，如果φ 是非恒定内函数，那么托普利茨算子 T_φ 可嵌入到 H^2 上的C_0-半群中，当且仅当 φ 不是有限 Blaschke 乘积 [5]。值得注意的是，这一结果基于 Eisner 提出的等距算子可嵌入性的判据。此外，他们还证明了（尽管论文中并未正式陈述）：对于一般的解析符号 φ， T_φ 可嵌入托普利茨算子的 C_0-半群中，当且仅当 φ在 D 上不为零。我们的论文另辟蹊径，使我们能够处理与等距算子相去甚远的托普利茨算子；这使嵌入问题颇为困难，因为我们无法使用 Eisner 针对等距算子的简单判据。另一个难点在于，托普利茨算子的幂通常很难计算，而且尤其是，它们几乎从来不是托普利茨算子。因此，即使一个托普利茨算子可嵌入 C_0-半群中，该半群的成员也很少是托普利茨算子。现在让我们更详细地介绍本文的内容。

在本文最后一节之外的所有小节中，我们考虑光滑的符号 F，即在圆周 T 上属于 $C^{1+\varepsilon}$ 类，其中 $\varepsilon > \max(1/p, 1/q)$，且 q 是 p的共轭指数。在对 F 作出一些额外假设的条件下（主要假设是：对于每个 $\lambda \in$ C $\setminus F$(T)，都有 wind$_F(\lambda)$ ≤ 0；其中 wind$_F(\lambda)$ 表示曲线 F(T) 绕点 λ的绕数），第四位作者在 [36]、[37] 和 [39] 中（另见 [38]）为这类托普利茨算子建立了模型理论，证明 T_F^*（T_F 的伴随算子）同构于某个全纯函数空间 E_F^q 上的移位算子（即由自变量 λ定义的乘法算子 M_λ）。该模型空间 E_F^q 定义为若干与 F典范关联的斯米尔诺夫空间的直和，并满足一些额外的边界条件（E_F^q 的精确定义见第 3 节）。这一模型被有效地用于研究托普利茨算子的各种性质，例如不变子空间的刻画、交换子 [36] 的性质以及循环性 [37], [39], [38],

随后 Fricain-Grivaux-Ostermann 又在 [19]进一步研究了托普利茨算子与线性动力学相关的性质，例如超循环性、混沌等。

本文将这一模型应用于研究具有光滑符号的这一类托普利茨算子的嵌入问题。我们首先描述模型空间 E_F^q 的乘子代数，并利用它给出模型算子 M_λ 在 E_F^q 上可嵌入到 E_F^q 上的C_0-乘法算子半群中的充要条件。

定理 A. 作用于 E_F^q 上的自变量乘法算子 M_λ 可嵌入到 E_F^q 上的 C_0-乘法算子半群中，即形如 M_g, $g \in H^\infty(\mathrm{int}\,(\sigma(T_F)))$的算子，当且仅当0 属于复数域 $\setminus \mathrm{int}\,(\sigma(T_F))$ 的无界连通分支。

这里，int (σ(T_F))表示 T_F的谱 σ(T_F)的内部，而定义在int (σ(T_F))上的解析有界函数代数记作 H^∞(int (σ(T_F)))。由于 F 在圆周 σ上连续，T_F()有如下几何描述:

$$\sigma(T_F) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus F(\mathbb{T}) \,;\, \mathrm{wind}_F(\lambda) \neq 0\} \cup F(\mathbb{T})$$

因此， σ(T_F)的内部很容易直观地呈现出来。

为了恰当地陈述使 T_F 可嵌入的第一个充分条件，我们需要准确说明 [37] 的模型理论成立所需的假设； [19, 附录 B] 也给出了 H^p 版本。令 $p > 1$，并令 q 为其共轭指数（即 $1/p + 1/q = 1$）。我们将 H^p 的对偶空间通过以下对偶配对与空间 H^q 作典范同一:

$$\langle x, y\rangle_{p,q} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(e^{i\theta})y(e^{-i\theta})\,\mathrm{d}\theta \quad x \in H^p, y \in H^q. \tag{1}$$

此对偶配对在两侧均为线性。本文始终采用这一略显不同寻常的约定，即使在 $p = 2$的情形下也是如此；但第8.2节（讨论数值域）除外，在那里我们回到希尔伯特空间情形下对偶配对的通常定义。

考虑关于符号 F的以下三个条件:
(H1) 函数 F 属于某个 $\varepsilon > \max(1/p,\ 1/q)$的类 $C^{1+\varepsilon}$(T)，且其导数 F' 在 F 上不为零（这里， $C^{1+\varepsilon}$(T)表示T上导数为 ε-H¨older连续的 C^1 类函数的集合）；
(H2) 曲线 F(T)仅有有限个自交点，即单位圆T可分割为有限个闭弧 α_1，……，α_m，使得 (a) F 在每个弧 α_j，$1 \le j \le m$的内部都是单射；(b) 对任意 $i \neq j$，$1 \le i,\ j \le m$，集合 $F(\alpha_j)$与 $F(\alpha_j)$的内部不相交；(H3) 对任意 $\lambda \in$C $\setminus F$(T)，wind$_F(\lambda) \le 0$，其中wind$_F(\lambda)$表示曲线 F(T)绕 λ的绕数。

容易看出，给定一个作用于复巴拿赫空间 X上的任意有界算子 T T，只要 0 属于复数域 C $\setminus \sigma(T)$ 的无界连通分支，它就可嵌入一个 C_0-半群（见事实 2.3）。在满足条件 (H1)、(H2) 和 (H3) 时，还具有一个精细得多的性质： $T_F^* \in \mathcal{B}(H^q)$ 同构于（经由同构 $U\colon H^q \to E_F^q$）作用于模型空间 E_F^q上的 M_λ；由此可根据定理 A 推得，只要 0 属于复数域 C $\setminus$ int (σ(T_F)) 的无界连通分支， T_F^* 就可嵌入一个 C_0-半群。现在，有一个经典的

事实（例如参见 [18, 第 I 章第 1 节。13]）：若 $(T_t)_{t>0}$ 是一个作用于自反巴拿赫空间 C_0上的 X-算子半群，则其伴随半群 $(T_t^*)_{t>0}$是一个作用于 C_0上的 X^*-半群。在我们的情形下，由此可知，当F 满足 (H1)、(H2)和 (H3)，且 0 属于复数域 $\mathbb{C} \setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$ 的无界连通分支时，则 $T_F \in \mathcal{B}(H^p)$ 可嵌入。

一个重要的观察是，假设 (H3) 实际上可以替换为以下假设 (H3bis)，该假设要求 F的绕数在 复数域 $\setminus F$(圆周) 上符号恒定：

(H3bis) 对每个 $\lambda \in$ 复数域 $\setminus F$(圆周)，要么 $\operatorname{wind}_F(\lambda) \geq 0$，要么 $\operatorname{wind}_F(\lambda) \leq 0$。

若对每个 $\lambda \in$ 复数域 $\setminus F$(圆周)，$\operatorname{wind}_F(\lambda) \geq 0$，则令 $f(z) = F(1/z)$、$z \in$ 圆周，我们有 $T_f = T_F^* \in \mathcal{B}(H^q)$，并且对每个 $\lambda \in$ 复数域 $\setminus F$(圆周)，$\operatorname{wind} f(\lambda) = -\operatorname{wind}_F(\lambda)$。因此，$f$ 满足 (H1)、(H2) 和 (H3)。由此，$T_f^* = T_F \in \mathcal{B}(H^p)$ 与模型空间 E_f^p 上以 λ 为乘子的乘法算子同构；又由于 $\sigma(T_f) = \sigma(T_F)$，可知若 0 属于复数域 $\mathbb{C} \setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$ 的无界连通分支，则 T_F可嵌入。作为定理 A 的推论，我们得到：

定理 B. 设 $p > 1$。假设 F 满足假设 (H1)、(H2)和(H3bis)。如果 *0* 属于复数域 $\setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$的无界连通分支，则$T_F \in \mathcal{B}(H^p)$ 可嵌入到一个 C_0-半群中。

在本文接下来的部分中，我们将研究定理B的逆命题，即探讨将 T_F 嵌入到一个 C_0-半群中是否意味着 0 属于复数域$\setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$的无界连通分支。我们得到了一些使该逆命题成立的条件。例如，我们证明：

定理 C. 设 $p > 1$，并设 F 满足 (H1)、(H2) 和 (H3bis)。假设复数域 $\setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$ 是连通的，且 0 不是曲线F(圆周)的交点。则以下命题等价：

(1) T_F 可嵌入到作用于 H^p 上的 C_0-有界算子半群中；
(2) 0 属于复数域 $\setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$。

我们沿着这一思路得到了若干结果。注意，若算子 $T \in \mathcal{B}(X)$ 嵌入到一个 C_0-半群 $(T_t)_{t>0}$ 中，那么算子 T_t 必然属于 T 的交换子。因此，算子 T 的可嵌入性问题自然地与描述其交换子的问题联系起来。于是，我们也研究了作用于模型空间 E_F^q 上的算子 M_λ 的交换子，并发现，令人惊讶的是，它未必完全由乘子构成。更确切地说，我们给出一条曲线，它有两种不同的参数化 F_1 和 F_2，使得作用于 $E_{F_1}^q$ 上的 M_λ 的交换子由乘子构成，而作用于 $E_{F_2}^q$ 上的 M_λ 的交换子则不由乘子构成（例 6.6）。因此，我们给出了具有解析性质的条件，这些条件可推出 T_F（视为作用于E_F^q上时）的交换子由乘子构成。在这些条件下，T_F 可嵌入，当且仅当 0 属于复数域 $\setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$ 的无界连通分支（详情见第 5 节和第 6 节）。

第 7节是本文技术性最强的部分，旨在理解在最小假设下，如何刻画一般符号 T_F 的可嵌入性F。非正式地说，我们得到的结果一般形式如下：设 F 满足(H1)、(H2) 和(H3)。给定一个连通的

复数域 $\setminus F(\mathbb{T})$ 的连通分支 Ω，且其绕数为 $|\mathrm{wind}_F(\Omega)| = 2$，我们考察 F 的反函数$\zeta = 1/F^{-1}$（它在曲线 $F(\mathbb{T})$ 去掉自交点后定义良好）在 Ω ∂ 的边界弧上的取值。如果无论如何选择这样的弧 γ，函数 ζ 在 γ 上的限制都不几乎处处等于 Ω 的 Nevanlinna 类中某个亚纯函数的边界极限，那么 T_F 的可嵌入性就迫使 0 属于复数域 $\setminus \mathrm{int}\,(\sigma(T_F))$ 的无界连通分支。这大致就是定理 7.1 的内容。接着，我们研究函数 ζ 在 Ω $\gamma \subseteq \partial$ 的适当弧上几乎处处为 Nevanlinna 类中某个亚纯函数的边界极限时会出现什么情况：先看一个例子（例 7.3），然后讨论更一般的情形，即曲线 $F(\mathbb{T})$ 看起来像“环内的八字形”——见图 9。在这种情况下，复数域 $\setminus F(\mathbb{T})$ 有四个连通分支（一个绕数为 -1，一个绕数为 -2，另外两个绕数为 0——一个有界，另一个无界），我们将完整描述 T_F 可嵌入的各种情形。该情形下嵌入问题的完整答案由以下结果给出：

定理 D。设 $1 < p < \infty$ 且设 F 满足 *(H1)*。假设 $F(\text{圆周})$ 由图 *9* 给出，且 $0 \notin \mathcal{O}$。那么 T_F 可嵌入一个 C_0-半群，当且仅当以下两个条件之一成立：

(1) 0 属于复数域 $\setminus \mathrm{int}\,(\sigma(T_F))$的无界连通分支；*(2)* 0 属于复数域 $\setminus \mathrm{int}\,(\sigma(T_F))$ 的有界连通分支，且以下三个条件成立：*(i)* $\zeta_{|\gamma_1}$（分别为 $\zeta_{|\gamma_2}$）在 γ_1（分别在 γ_2）上几乎处处与定义在 Ω_2 上的亚纯函数 ζ_1（分别为 ζ_2）的非切向极限一致；*(ii)* 在 $\mathrm{int}\,(\sigma(T_F))$ 上由以下方式定义的测度 μ

$$\mathrm{d}\mu(\lambda) = \frac{\mathbf{1}_{\partial\Omega_2}(\lambda)}{|\zeta_1(\lambda) - \zeta_2(\lambda)|^q}|\mathrm{d}\lambda|$$

是 $E^q(\mathrm{int}\,(\sigma(T_F)))$的 *Carleson* 测度；*(iii)* 映射

$$Z_1 : w \mapsto \frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2}(C_\zeta w - \zeta_1 w) \quad Z_2 : w \mapsto \frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2}(C_\zeta w - \zeta_2 w)$$

$$Z_3 : w \mapsto \frac{\zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_2}(C_\zeta w - \zeta_1 w) \quad Z_4 : w \mapsto \frac{\zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_2}(C_\zeta w - \zeta_2 w)$$

define bounded operators from $E^q(\Omega_2)$ *into itself.*

在本文最后一节中，我们给出一些关于将 T_F 嵌入的结果，其中符号 F 不一定是光滑的。这里采用的方法不同于本文其余部分所用的方法。这里不再适用 [37] 中的函数演算，必须改用适用于有界扇形算子的函数演算。有关该函数演算的定义及其若干推论，请参见第8.1 节。每当我们考虑作用于希尔伯特空间上的算子时，还将研究 T 的嵌入性与 T的数值域性质之间的联系，其定义为$W(T) = \{\langle Tx, x\rangle$; $x \in H$ 以及 $\|x\| = 1\}$。

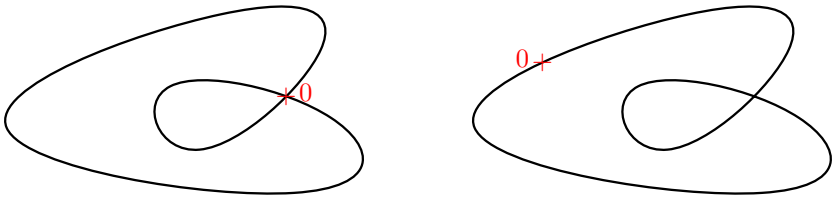
例如，我们得到托普利茨算子在 H^2上可嵌入的以下充分条件：

定理 E. 设 $F \in L^\infty$(圆周)。假设0 不属于数值域 $W(T_F)$ 的内部$\mathrm{int}(W(T_F))$，其中数值域对应于 T_F。那么 T_F可嵌入到作用在 H^2 上的一个C_0-算子半群中。

因此，只要在 T 上几乎处处 $\mathrm{Re}\, F \geq 0$， T_F 就可嵌入到作用于 H^2 上的 a C_0-算子半群中。

我们还探讨 Peller 的结果所带来的一些推论（仅对 $p = 2$ 有效）。Peller 在 [29] 中给出了相关条件，这些条件表明，当托普利茨算子的符号属于 $\mathbb{T}$ 上某些函数代数时，其谱的克赖斯常数有限。特别地，我们证明如下结果：

定理 F. 设 $\mathcal{X}$ 为 *Wiener* 代数（即圆周$\mathbb{T}$ 上具有绝对收敛傅里叶级数的函数代数），或 $\mathbb{T}$ 上的 *Dini* 连续函数代数。设 $F \in \mathcal{X}$。假设存在一个开圆盘 D，包含于 复数域 $\setminus \sigma(T_F)$ 的无界连通分支中，且满足 $0 \in \partial D$。那么 T_F 可嵌入到作用于 H^2 上的 C_0-算子半群中。



(A) (B)

FIGURE 1

注意，如果 F(T) 是图 1A 所示类型的一般曲线，则定理 E 和定理 F 都无法用于证明 T_F 可嵌入到 H^2 上的 C_0-半群中。然而，如果 F 还满足假设 (H1)，则由定理 B 可知， T_F 可嵌入到 H^2 上的 C_0-半群中（甚至可嵌入到 H^p 上的半群中）。另一方面，在图 1B所示的情形下，定理 E 或定理 F 均可得出 T_F 可嵌入到C_0-半群中，而无需对符号 F 作任何光滑性假设。

本文安排如下：我们在第 2 节和第 3 节回顾关于 C_0-半群、托普利茨算子以及 Yakubovich 模型空间的一些结果，这些结果对我们的研究是必要的。在第 4 节，我们首先证明，模型空间 E_F^q 的乘子代数与由函数 $g \in H^\infty$(int $(\sigma(T_F))$) 诱导的乘法算子集合重合。随后，我们证明定理 A 以及定理 B 给出的可嵌入性充分条件。我们在第 5 节和第 6 节研究可嵌入性的必要条件，并在不同类型的条件下得到可嵌入性的刻画（定理 C、推论 5.6、定理 7.1、定理 6.7）。特别地，定理 C 在第 5 节中得到证明；我们还在第 6.1 节和第 6.2 节研究模型空间上算子 M_λ 的交换子（见例 6.6 和定理 6.7）。第 7 节致力于研究一般情形：曲线 F(圆周) 呈现“环中有个八字形”的形状——见图 9——并刻画此情形下 T_F 的可嵌入性（定理 D）。最后，第 8 节包含关于可嵌入性的进一步结果

T_F 当符号 F 不要求光滑时。在回顾了关于扇形算子的函数演算、克赖斯常数以及该常数有限性与扇形性之间联系的一些内容后，我们证明定理 E以及（更一般版本的）定理 F，即定理 8.15。

致谢：我们衷心感谢Yuri Tomilov与我们进行了富有启发性的交谈，并为我们指出了若干有用的参考文献。

2. First reminders and notations

2.1. 关于 C_0-半群的提醒。在本短小节中，我们简要回顾本文将用到的一些关于算子半群的记号和结果。字母 X 始终表示一个复可分无穷维巴拿赫空间，而 $\mathcal{B}(X)$表示从 X 到其自身的线性连续算子空间。设$(T_t)_{t>0} \subset \mathcal{B}(X)$。关于$(T_t)_{t>0}$ 是强连续半群（或 C_0-半群）的定义，已在引言中回顾。还请回忆，若存在一个 C_0-半群$(T_t)_{t>0}$ 使得 $T_1 = T$，则称算子 $T \in \mathcal{B}(X)$可嵌入 C_0-半群。我们有以下简单结果：

命题 2.1 ([18,第一节 1.13])。 设 X 是一个自反巴拿赫空间。若 $(T_t)_{t>0}$是 C_0 上的半群 X，则 $(T_t^*)_{t>0}$ 是 C_0 上的半群 X^*。

一个直接推论是，若 X 是自反巴拿赫空间，且若 $T \in \mathcal{B}(X)$ 可嵌入到 X 上的 C_0半群中，那么 T^* 也可嵌入到 X^*上的 C_0 半群中。

现在我们回顾算子可嵌入到 C_0半群中的一个重要必要条件：

定理 2.2 ([15, 定理 V.1.7])。 设 X 是一个巴拿赫空间，且 $T \in \mathcal{B}(X)$。若 T 可嵌入，则

$$\dim\ker(T) \in \{0,\infty\} \quad \textit{and} \quad \dim\ker(T^*) = \operatorname{codim}\operatorname{Ran}(T) \in \{0,\infty\}.$$

特别地，由定理 2.2 可知，非双射 Fredholm 算子不可嵌入。

2.2. 托普利茨算子的回顾。对于 $1 < p < +\infty$，我们用 H^p =H^p(D) 表示开单位圆盘 D 上满足以下条件的解析函数所构成的 Hardy 空间 u

$$\|u\|_{H^p} := \sup_{0<r<1} M_p(u,r) < +\infty \quad \text{where } M_p(u,r) = \left(\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right)^{1/p}.$$

属于 H^p 的函数 u 几乎处处在 T 上都有非切向边界值 u^*。我们仍将此边界值记为 u。众所周知，$\|u\|_{H^p} = \|u\|_{L^p(\mathbb{T})}$。$H^p$ 的对偶空间可规范地识别为 H^q，其中 q 是 p 的共轭指数；对偶配对由下式给出：

$$\langle x, y\rangle_{p,q} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(e^{i\theta})y(e^{-i\theta})\,\mathrm{d}\theta, \tag{2}$$

其中 $x \in H^p$ 以及 $y \in H^q$。式（2）中的对偶配对关于两侧均为线性的；即使在 $p = 2$ 的情况下，我们仍采用这一约定；特别地，作用于 H^2 上的算子伴随应理解为巴拿赫空间伴随，而非希尔伯特空间伴随。

令 P_+ 表示从 L^p(T) 到 H^p 的 Riesz 投影，其定义为

$$(P_+u)(z) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(e^{i\theta})}{1-ze^{-i\theta}}\,d\theta \quad \text{for } z\in\mathbb{D},\, u\in L^p(\mathbb{T}).$$

给定 $F\in L^\infty$(T)，具有符号 F 的托普利茨算子 T_F 在 H^p 上由以下公式定义：$T_Fu = P_+(Fu)$ $u\in H^p$。它是 H^p 上的有界算子。回顾一下，若 F 是 T 上的连续函数（记作 $F\in C$(T)），则 $T_F-\lambda$ 是 H^p 上的 Fredholm 算子，当且仅当 $\lambda\notin F$(T)；当 $\lambda\notin F$(T) 时，$T_F-\lambda$ 的 Fredholm 指标等于 $-\mathrm{wind}_F(\lambda)$，并且我们可以将 T_F 的谱描述为

$$\sigma(T_F) \;=\; \{\lambda\in\mathbb{C}\setminus F(\mathbb{T})\,;\,\mathrm{wind}_F(\lambda)\neq 0\}\cup F(\mathbb{T}),$$

其中，$\mathrm{wind}_F(\lambda)$ 是曲线 F(T) 关于点 λ 的绕数。根据 Coburn 定理，托普利茨算子要么是单射，要么具有稠密值域，因此对每个 $\lambda\in$ C $\setminus F$(T)，我们都有

$$\dim\ker(T_F-\lambda) = \max(0,-\mathrm{wind}_F(\lambda)). \tag{3}$$

关于托普利茨算子的所有基本事实，[3] 请参阅。

作为托普利茨算子嵌入的直接推论，我们有：

事实 2.3。设 $F\in C(\mathbb{T})$ 以及 $1<p<\infty$。令 $T_F\in\mathcal{B}(H^p)$ 为符号为 F 的托普利茨算子。

(i) 如果 $0\in\sigma(T_F)\setminus F(\mathbb{T})$，那么 T_F 不可嵌入。*(ii)* 如果 0 属于 $\mathbb{C}\setminus F(\mathbb{T})$ 的无界连通分支，那么 T_F 可嵌入。

证明。断言 (i) 立即由以下事实得到：如果 $0\in\sigma(T_F)\setminus F$(T)，那么 T_F 是一个非双射 Fredholm算子，因此不可嵌入。至于断言 (ii)，只需注意，如果 0 属于 C$\setminus F$(T) 的无界连通分支，那么 0 属于 C $\setminus\sigma(T_F)$ 的无界连通分支，因此在 $\sigma(T_F)$ 的某个邻域上存在对数的解析分支，记为 log。于是，根据 Dunford函数演算，log(T_F) 是 H^p 上定义良好且有界的算子，从而 T_F 可以嵌入 C_0-半群 $(T_F^t)_{t>0}$，其中 $T_F^t = e^{t\log(T_F)}$。□

注记2.4. 注意，若 0 属于 复数域 $\setminus F$(圆周) 的无界连通分支，那么事实 2.3 的证明表明，事实上，T_F 可嵌入到一个半群 $(T_t)_{t>0}$ 中，而且该半群还是一致连续的，也就是说，$\|T_t-I\|\to 0$ 当 $t\to 0^+$时，成立。此时，半群的生成元为 log(T_F) $\in\mathcal{B}(H^p)$。

我们将在本文后文看到，在符号F满足某些条件时，T_F 只要 0 属于谱 $\sigma(T_F$ 的内部的补集的无界连通分支，便可嵌入。这里我们指出，即使 0 属于 复数域$\setminus\sigma$(T_F) 的某个有界连通分支，F 仍可能可嵌入。事实上，设 F 是一个在 $\mathbb{D}$上不取零值的有界解析函数。利用将 F 分解为奇异内函数与外函数乘积的典范分解，不难看出，$T_F\in\mathcal{B}(H^p)$ 可嵌入到作用在 C_0上的解析 Toeplitz 算子构成的 H^p (参见 [5, 定理 3.9 和引理 3.10])。

特别地，我们可以给出如下具体例子：一个可嵌入托普利茨算子，使得 0 属于其谱的补集中的一个有界连通分支。

例 2.5。设 $\varphi(z) = z+2$, $z \in \mathbb{D}$。利用复数域 $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ 上的对数主值，对任意 $s > 0$, $\varphi^s(z) = (z+2)^s$, $z \in \mathbb{D}$ 定义。当 θ 从 0 增至 2π时， $e^{i\theta}+2$ 的辐角先从 0 增至 $a := \arctan(1/2)$，随后从 a 减至 $\pi - a$，最后从 $\pi - a$ 增至 2π。由此可知，只要 $s > s_0 := \pi/a$，曲线 $\varphi^s(\mathbb{T})$ 的形状就如图 2 所示（该图并非按比例绘制，因为 $\max_{z\in\mathbb{T}} |\varphi^s(z)| = 3^s$ 远大于 $\min_{z\in\mathbb{T}} |\varphi^s(z)| = 1$）：

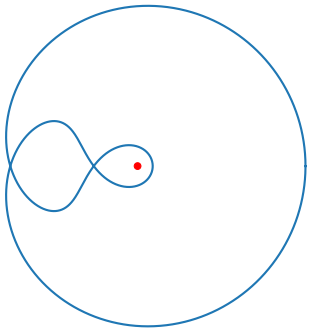


FIGURE 2

点 0 属于 $\mathbb{C}\setminus\sigma(T_{\varphi^s})$ 的有界连通分支，然而根据上述观察， T_{φ^s}仍可嵌入由解析 Toeplitz 算子构成的 C_0-半群。

3. A model for Toeplitz operators with smooth symbols

本小节回顾 Yakubovich 在希尔伯特空间情形（$p = 2$）中提出的模型，见 [37]。有关该模型 [19] 版本的细节，参见 H^p 附录 B。本小节设 $p > 1$ ，并令 q 为其共轭指数，即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。本小节假设符号 F 满足以下三个条件：

(H1) F 属于类 $C^{1+\varepsilon}(\mathbb{T})$，其中某个 $\varepsilon >$ 大于 $\max(1/p,\ 1/q)$，且其导数 F' 在 $\mathbb{T}$ 上不为零；(H2) 曲线 $F(\mathbb{T})$ 自交有限次，即单位圆 $\mathbb{T}$ 可划分为有限个闭弧 $\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_m$，使得 (a) F 在每个弧 α_j, $1 \le j \le m$的内部上均为单射；(b) 对任意 $i \ne j$, $1 \le i,\ j \le m$，集合 $F(\alpha_j)$ 与 $F(\alpha_j)$ 的内部不相交；

(H3) 对每个 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus F(\mathbb{T})$，绕数 $\mathrm{wind}_F(\lambda) \le 0$，其中 $\mathrm{wind}_F(\lambda)$ 表示曲线 $F(\mathbb{T})$ 围绕 λ 的绕数。

假设 (H2) 蕴含曲线 $F(\mathbb{T})$ 只有有限个自交点，我们将其记为 $\mathcal{O}$。由于 F是从 $\mathbb{T} \setminus F^{-1}(\mathcal{O})$ 到 $F(\mathbb{T}) \setminus \mathcal{O}$的双射，映射 $\zeta = 1/F^{-1}$在 $F(\mathbb{T}) \setminus \mathcal{O}$上定义良好。它在包含于 $F(\mathbb{T}) \setminus \mathcal{O}$的每个开弧上也属于$C^1$ 类。

3.1. **特征向量。** 由假设(H3) 以及 H^p 版 Coburn 定理可知，对于每个 $\lambda \in$ 复数域 $\setminus F$(圆周)，我们有

$$\ker(T_F^* - \lambda) = \{0\} \quad \text{and} \quad \dim\ker(T_F - \lambda) = -\mathrm{wind}_F(\lambda).$$

本文第四位作者在 [37] 中给出了特征子空间 $\ker(T_F-\lambda)$ $\lambda\notin F$(圆周)中元素的一个生成族的显式表达式。设 $\lambda\in$ 复数域 $\setminus F$(圆周)，并考虑定义在圆周 上的函数

$$\phi_\lambda(\tau) \;=\; \tau^{-\operatorname{wind}_F(\lambda)}(F(\tau)-\lambda) \quad \text{for } \tau\in\mathbb{T}.$$

由于 ϕ_λ 属于 $C^{1+\varepsilon}$ 类且在 T 上不为零，并且 $\operatorname{wind}_{\phi_\lambda}(0)=0$，因此可以在 T 上定义 ϕ_λ 的对数 $\log\phi_\lambda$，该对数在 T 上属于 $C^{1+\varepsilon}$ 类，并令

$$F_\lambda^+ \;=\; \exp(P_+(\log\phi_\lambda)). \tag{4}$$

函数 F_λ^+ 和 $1/F_\lambda^+$ 都属于圆盘代数 A(D)（该代数是 D 上的全纯函数空间，其中的函数可连续延拓到单位圆盘的闭包 D，并赋予 D 上的上确界范数）。对于 C $\setminus F$(T) 的每个连通分支 Ω 以及每个 $z\in$D，映射 $\lambda\mapsto F_\lambda^+(z)$ 在 Ω 上解析且在 Ω 上连续。对于 $\lambda\in\sigma(T_F)\setminus F$(T)，令

$$h_{\lambda,j}(z) \;=\; z^j\frac{F_\lambda^+(0)}{F_\lambda^+(z)} \quad \text{for every } z\in\mathbb{D} \text{ and every } 0\le j<|\operatorname{wind}_F(\lambda)|. \tag{5}$$

这些函数 $h_{\lambda,\,j}$ 属于 A(D)，因而属于 H^p，并且可以验证，对于每个 $0\le j<|$ $\operatorname{wind}_F(\lambda)|$，都有 $(T_F-\lambda)h_{\lambda,\,j}=0$。因此，我们有

$$\ker(T_F-\lambda) \;=\; \operatorname{span}\left[h_{\lambda,j}\,;\,0\le j<|\operatorname{wind}_F(\lambda)|\right] \tag{6}$$

对于每个 $\lambda\in\sigma(T_F)\setminus F$(T)。

3.2. **模型空间**。本节中，我们将介绍托普利茨算子的模型空间定义，其符号满足 (H1)、(H2) 和(H3)。该模型空间的构造基于斯米尔诺夫空间，下面回顾其主要性质。虽然本文的各项陈述未必都特别指出，但我们假设所讨论的所有区域均具有可求长边界。

3.2.1. 斯米尔诺夫空间。设 Ω 是复数域 C 中的有界单连通域，其边界 Γ 存在分段 C^1 参数化。给定 $1<q<\infty$，若 Ω 上的解析函数 f 属于斯米尔诺夫空间 E^q(Ω)，则存在一列可求长若尔当曲线 $(C_n)_{n\ge1}$ 包含于 Ω 中，并趋近于边界Γ （其含义是 C_n 最终包围 Ω 的每个紧子域），使得

$$\sup_{n\ge1}\int_{C_n}|f(z)|^q\,|\mathrm{d}z| \;<\; \infty. \tag{7}$$

注意， f 属于 E^q(Ω)当且仅当$(f\circ\varphi)\cdot\varphi'^{1/q}$ 属于 $H^q(\mathbb{D})$，其中存在（等价地，对任意）从 φ 到$\mathbb{D}$ Ω的共形映射。特别地，每个函数 $f\in E^q$(Ω)在 Γ上几乎处处存在非切向极限，且该非切向极限属于 L^q(Γ)；为简化记号，我们仍将其记作 f。注意，除非 f 恒等于0，否则非切向极限不可能在一个正测度集合上为零（例如参见 [13, 定理10。3]）。

本文还需要将类 $E^q(D)$ 扩展到有限连通有界域 D，其边界 C 由有限条可求长若尔当曲线组成。回顾一下，若尔当曲线 D 若在扩充复平面中的补集有有限个连通分支，则称其为有限连通的。若存在一个序列

$(\Delta_n)_{n\geq 1}$，其各项均为边界为 $(\Gamma_n)_{n\geq 1}$ 的区域，每个 Γ_n 区域的边界都是有限条可求长若尔当曲线的并，且该序列 $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ 穷尽 D，曲线 Γ_n 的长度一致有界，并且

$$\sup_{n\geq 1}\int_{\Gamma_n}|f(z)|^q\,|\mathrm{d}z|<\infty.$$

此外（由于 $q\geq 1$），函数 f 可以通过在 C上取柯西积分，从其边界值唯一地恢复。

若 Ω 是有限个有限连通有界域 O_1、……、O_N在复数域 C 中的不交并，则称 Ω 上的解析函数 f 属于 $E^q(\Omega)$，如果对于每个 $1\leq j\leq N$，f 在 O_j 上的限制 $f_{|O_j}$ 属于 $E^q(O_j)$。那么 $E^q(\Omega)$是一个巴拿赫空间，其范数定义为

$$\|f\|_{E^q(\Omega)}=\left(\sum_{j=1}^{N}\|f_{|O_j}\|^q_{E^q(O_j)}\right)^{1/q}=\left(\sum_{j=1}^{N}\int_{\gamma_j}|f_{|O_j}(z)|^q\,|\mathrm{d}z|\right)^{1/q}\tag{8}$$

其中 $\gamma_j=\partial O_j$、$1\leq j\leq N$。

我们以简要回顾柯西变换来结束本小节。设 $1<q<\infty$，并令 Γ 为复数域 C 中一条可求长的若尔当曲线。记 Ω_0 为Γ的内部，Ω_∞ 为其外部。对于任意函数 $f\in L^q(\Gamma)$，f的柯西变换是复数域 $\mathbb{C}\setminus\Gamma=\Omega_0\cup\Omega_\infty$ 上的全纯函数，定义为

$$\mathcal{C}f(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in\Omega_0\cup\Omega_\infty.$$

我们回顾 G. David [10] 关于柯西变换从 $L^q(\Gamma)$ 到与 Ω_0 或 Ω_∞相关的某个广义哈代空间的有界性的一项结果。更确切地说，记 $\Pi^q(\Omega_0)$ 为 Ω_0, 上的（解析）多项式在 $L^q(\Gamma)$ 中的闭包，记 $\Pi^q(\Omega_\infty)$ 为 $P(\frac{1}{z-a})$ 形式的函数在 $L^q(\Gamma)$ 中的闭包，其中 a 是 Ω_∞ 中的任意固定点，且 P 是常数项为零的任意多项式。进一步假设曲线 Γ 是 Carleson 曲线（即存在常数 $C>0$，使得对于任意 $\mu\in\mathbb{C}$ 和任意 $r>0$，$\Gamma\cap D(\mu,r)$ 的长度不超过 Cr），则文献 [10, 定理 3] 证明，柯西变换 $\mathcal{C}$ 定义了一个从 $L^q(\Gamma)$ 到 $\Pi^q(\Omega_0)$ 的有界算子，同时也定义了一个从 $L^q(\Gamma)$ 到 $\Pi^q(\Omega_\infty)$ 的有界算子。此外，由于 $\Pi^q(\Omega_0)\subseteq E^q(\Omega_0)$ 且 $\Pi^q(\Omega_\infty)\subseteq E^q_0(\Omega_\infty)$，并且这些嵌入是等距的，柯西变换$\mathcal{C}$ 是从 $L^q(\Gamma)$ 到 $E^q(\Omega_0)$ 以及从 $L^q(\Gamma)$ 到 $E^q_0(\Omega_\infty)$ 的有界算子。关于扩充复平面 $\widehat{\mathbb{C}}$内单连通域 Ω 上斯米尔诺夫空间的定义，请参阅 [34] 或 [30]。

由 [10], 的这一结果，我们得到以下引理，它将在引理 4.1 的证明中用到：

引理 3.1。设Ω 是复数域$\mathbb{C}$中的一个有限连通有界区域，其边界满足以下性质：

(∗) 存在点 $\mu_1,\ldots,\mu_s\in\partial\Omega$ 以及正数 $r_1,\ldots,r_s$，使得$\partial\Omega\subset\bigcup_{i=1}^{s}D(\mu_i,r_i)$，并且对每个 $i=1,\ldots,s$，开集 $\Omega\cap D(\mu_i,r_i)$有有限个连通分支，每个分支的边界都是一条若尔当曲线，且该曲线是 *Carleson* 曲线。

于是对每个 $q > 1$，柯西变换定义了一个从 $L^q(\partial\Omega)$到 $E^q(\Omega)$的有界算子。

注意，只要存在一个由开圆盘构成的覆盖，使得 Ω 的边界∗被这些开圆盘覆盖，并且 Ω 与每个这样的圆盘的交集都是有限条简单Carleson曲线（不一定是闭曲线）的并，且这些曲线仅在有限个点相交，那么假设 (∂) 就成立。特别地，当 Ω 是 Carleson Jordan曲线的内部时，情况正是如此。只要 ∗Ω 包含于 $\partial($ FT) 中，且函数 满足 (H1)、(H2) 和(H3bis)，则假设 () 也成立。

证明。令 $f \in L^q(\Omega)$。对于每个 $i = 1, \ldots, s$，令 f_i为 f 在 $\partial\Omega \cap D(\mu_i, r_i)$ 上的限制。将 Ω1,$_i$, . . . , Ω$_{k_i,i}$ 记为 $\Omega \cap D(\mu_i, r_i)$ 的连通分支，并将 $\Gamma_{1,i}, \ldots, \Gamma_{k_i,i}$ 记为它们各自的边界。将 $f_{k,i} = f_i \mathbf{1}_{\partial\Omega\cap\Omega_{k,i}}$ 记为$k = 1, \ldots, k_i$。由于根据假设 (∗)，$\Gamma_{k,i}$ 是一条若尔当曲线，也是一条 Carleson 曲线，柯西变换是一个从 $L^q(\Gamma_{k,i})$ 到 E^q (Ω$_{k,i}$) 的有界算子。因此，$\mathcal{C}f$ 在 Ω$_{k,i}$ 上的限制属于 E^q(Ω$_{k,i}$)。由于 $_k\Omega_i$, ∂ 是 Ω 在 Ω 中的一个邻域，因此 $\mathcal{C}f$ 属于 E^q(Ω)；并且根据上述推导中的常数可知，$\mathcal{C}$ 是一个从 $L^q(\partial\Omega)$ 到 E^q(Ω) 的有界算子。□

3.2.2. *Nevanlinna* 类。设 Ω 是复数域 C 中的单连通域。若亚纯函数 f 在 Ω 上属于 Ω 的 *Nevanlinna* 类，记作$f \in \mathcal{N}(\Omega)$，则称其属于该类；如果 f 可以表示为 Ω 上两个函数之商，则有此结论。注意，若 $f = g/h$，其中 $g,\ h \in E^1(\Omega)$，则 $f \in \mathcal{N}(\Omega)$。事实上，若 $\varphi\colon \mathbb{D} \longmapsto \Omega$ 是将 D 共形映射到 Ω 上的共形映射，则

$$f \circ \varphi = \frac{g \circ \varphi}{h \circ \varphi} = \frac{(g \circ \varphi) \cdot \varphi'}{(h \circ \varphi) \cdot \varphi'},$$

函数（$g \circ \varphi$）$\cdot\,\varphi'$ 和（$g \circ \varphi$）$\cdot\,\varphi'$ 属于 H^1（$\mathbb{D}$）。但是，属于 H^1（$\mathbb{D}$）的函数可以表示为两个 H^∞（$\mathbb{D}$函数之商（例如参见[13, 定理 2。1]）。因此，存在 h_1, $h_2 \in H^\infty$（$\mathbb{D}$）使得 $f \circ \varphi = h_1/h_2$，这意味着

$$f = \frac{h_1 \circ \varphi^{-1}}{h_2 \circ \varphi^{-1}},$$

与 $h_1 \circ \varphi^{-1}, h_2 \circ \varphi^{-1} \in H^\infty(\Omega)$。因此 $f \in \mathcal{N}(\Omega)$。

3.2.3. 边界条件。 设 γ 是 F(T) 的一个子弧，其中不含 $\mathcal{O}$ 的任何点。那么 γ 包含在 C $\setminus F$(T) 的恰好两个连通分支 Ω 和 Ω′ 的边界中，并且

$$|\operatorname{wind}_F(\Omega) - \operatorname{wind}_F(\Omega')| = 1.$$

如果 $|\operatorname{wind}_F(\Omega)| > |\operatorname{wind}_F(\Omega')|$，则称 Ω 为内部连通分支，而称 Ω′ 为外部连通分支（相对于 γ）。设 $\lambda_0 \in \gamma$，且设 u 是在 C $\setminus F$(T) 中 λ_0 的某个邻域上的连续函数。我们定义 u 在点 λ_0 处的以下两个非切向极限（在其存在时），分别称为 u 在 λ_0 处的内部和外部边界值:

$$u^{int}(\lambda_0) = \lim_{\substack{\lambda\to\lambda_0 \\ \lambda\in\Omega}} u(\lambda) \quad \text{and} \quad u^{ext}(\lambda_0) = \lim_{\substack{\lambda\to\lambda_0 \\ \lambda\in\Omega'}} u(\lambda),$$

属于复数域 C 中某个区域 Ω 的斯米尔诺夫空间的函数（其边界 $\Gamma = \partial\Omega$ 可求长）在 Γ 上几乎处处存在非切向极限。如果 Ω 和 Ω′ 是沿着弧 γ 相邻的两个区域，且 u 属于某个斯米尔诺夫空间 $E^q(\Omega \cup \Omega')$，那么 u 的内部和外部边界值 u^{int} 和 u^{ext} 在弧 γ 上几乎处处存在。

假设 F 满足(H1)、(H2) 和(H3) 并令

$$N = \max\{|\operatorname{wind}_F(\lambda)|\,;\, \lambda \notin F(\mathbb{T})\}.$$

对于每个 $j = 0, \ldots, N-1$，考虑由下式给出的开集 Ω_j^+

$$\Omega_j^+ \;=\; \{\lambda \notin F(\mathbb{T})\,;\, |\operatorname{wind}_F(\lambda)| > j\}. \tag{9}$$

回顾一下，函数 $\zeta = 1/F^{-1}$ 几乎处处定义在 $F(\mathbb{T})$ 上。我们在直和 $\bigoplus_{j=0}^{N-1} E^q(\Omega_j^+)$ 上赋予如下范数：

$$\|(u_j)_{0\le j\le N-1}\| \;=\; \left(\sum_{j=0}^{N-1} \|u_j\|^q_{E^q(\Omega_j^+)}\right)^{1/q} \tag{10}$$

对于每个 $(u_j)_{0\le j\le N-1} \in \bigoplus_{j=0}^{N-1} E^q(\Omega_j^+)$。该范数使空间 $\bigoplus_{j=0}^{N-1} E^q(\Omega_j^+)$ 成为一个巴拿赫空间。模型空间 E_F^q 定义为$\bigoplus_{j=0}^{N-1} E^q(\Omega_j^+)$ 的闭子空间，由满足以下边界条件的 N 元组 $(u_j)_{0\le j\le N-1}$ 构成，其中 $\bigoplus_{j=0}^{N-1} E^q(\Omega_j^+)$，且对所有 $0 \le j < N-1$ 均成立：

$$u_j^{int} - \zeta u_{j+1}^{int} \;=\; u_j^{ext} \quad \text{a.e. on } \partial\Omega_{j+1}^+. \tag{11}$$

注意，这个子空间是关于自变量 M_λ 的乘法算子的不变子空间：$\bigoplus E^q(\Omega_j^+) \to \bigoplus E^q(\Omega_j^+)$，其定义为对$u = (u_j)_{0\le j\le N-1} \in \bigoplus_{j=0}^{N-1} E^q(\Omega_j^+)$，

$$M_\lambda u \;=\; (v_j)_{0\le j\le N-1}, \quad \text{with } v_j(\lambda) \;=\; \lambda u_j(\lambda) \quad \text{for every } \lambda \in \Omega_j^+.$$

算子 $M_\lambda :\; E_F^q \to E_F^q$ 将作为 $T_F^* \in \mathcal{B}(H^q$的模型算子。参见下文定理3.3 。

更一般地，设 $h \in H^\infty(\operatorname{int}(\sigma(T_F)))$ 是定义在 T_F 的谱的内部上的有界解析函数。则空间 E_F^q 在乘法算子 M_h 下保持不变，该算子作用于 $\bigoplus E^q(\Omega_j^+)$，定义为 $M_h(u_j)_{0\le j\le N-1} = (hu_j)_{0\le j\le N-1}$，其中对每个 $0 \le j \le N-1$ 都有$u_j \in E^q(\Omega_j^+)$。详情参见定理 4.2 的证明。这意味着 $H^\infty(\operatorname{int}(\sigma(T_F)))$ 包含于 E_F^q 的乘子代数中。在第 4 节中，我们将看到 $H^\infty(\operatorname{int}(\sigma(T_F)))$ 恰好是 E_F^q 的乘子代数。

这里我们指出，T_F 的谱的内部可以用以下方式描述（忽略曲线的交点集 $\mathcal{O}$）：

$$\mathcal{O} \cup \operatorname{int}(\sigma(T_F)) = \Omega_0^+ \cup \partial\Omega_1^+.$$

还要注意，对于每个 $0 \le j \le N-1$，我们有 $\partial\Omega_{j+1}^+ \subset \partial\Omega_j^+$，因此特别地，对于每个 $1 \le j \le N-1$，我们有 $\partial\Omega_j^+ \setminus \mathcal{O} \subset \operatorname{int}(\sigma(T_F))$。

3.3. 来自 [37] 的模型。设 $p > 1$，且设 q 为 p 的共轭指数。假设托普利茨算子 $T_F \in \mathcal{B}(H^p)$ 的符号 F 满足三个假设 (H1)、(H2) 和 (H3)。令 $h_{\lambda,\, j}$、$0 \le j \le N-1$ 由 (5) 给出。对于每个函数 $g \in H^q$，定义 $Ug = ((Ug)j)_{0\le j\le N-1}$ 如下：

$$(Ug)_j(\lambda) \;=\; \langle h_{\lambda,j}, g\rangle_{p,q} \qquad \text{for every } \lambda \in \Omega_j^+. \tag{12}$$

注意，由于 $h_{\lambda,\, j}$ 是 T_F 对应特征值 λ 的特征向量，只要 $\lambda \in \Omega_j^+$ 成立，对每个 $g \in H^q$ 和每个 $0 \le j \le N-1$，我们都有

$$\langle h_{\lambda,j}, T_F^* g\rangle_{p,q} \;=\; \langle T_F h_{\lambda,j}, g\rangle_{p,q} \;=\; \lambda\,\langle h_{\lambda,j}, g\rangle_{p,q} \qquad \text{for every } \lambda \in \Omega_j^+.$$

换言之，

$$U(T_F^* g) \;=\; M_\lambda(Ug) \qquad \text{for every } g \in H^q.$$

利用由方程（5）给出的函数 $h_{\lambda,\, j}$、$\lambda \in \Omega_j^+$ 的表达式，再结合函数 F_λ^+ 的另一个深刻表达式（其证明特别用到了拟共形映射理论中的工具），可以证明，对每个 $z \in$D，函数 $\lambda \longmapsto h_{\lambda,\, j}(z)$ 属于 $E^q(\Omega_j^+)$，并且有

$$h_{\lambda,j}^{int}(z) - \zeta(\lambda) h_{\lambda,j+1}^{int}(z) \;=\; h_{\lambda,j}^{ext}(z) \quad \text{for almost every } \lambda \in \partial\Omega_{j+1}^+. \tag{13}$$

参见 [19]中的推论 B.12。换言之，对每个 $z \in \mathbb{D}$，N元组

$$\lambda \longmapsto (h_{\lambda,0}(z), h_{\lambda,1}(z), \ldots, h_{\lambda,N-1}(z))$$

属于 E_F^q。

文献 [37] 中证明了，算子 U 由式（12）定义，它是从 H^q到 E_F^q 的有界算子（另见 [19, 定理 B.17]）。注意，[19]中的详细证明，尤其是式（B.31）与 [19],中的事实 B.18 相结合，表明存在曲线 V 的一个邻域 F（圆周）以及两个常数C_1，$C_2 > 0$ 使得对每个 $\lambda \in V \cap \Omega_0^+$，都存在点 $z_1, \ldots, z_s \in \mathbb{D}$，并且对每个 $g \in H^q$

$$|u_0(\lambda)| \le C_1 \|g\|_{H^q} + C_1 \sum_{j=1}^{s} |g(z_j)|, \tag{14}$$

其中 $Ug = (u_0, \ldots, u_{N-1})$。注意，不等式中涉及的点的数量 s z_j可能取决于 λ，但它有一致的上界。特别地，这意味着如果 $g \in H^\infty$，那么 u_0 在 $V \cap \Omega_0^+$ 上有界。但由于 u_0 在 Ω_0^+ 中也是解析的，我们最终得到 $u_0 \in H^\infty(\Omega_0^+)$。因此可得以下事实，本文后续部分将多次用到：

事实 3.2。设 $0 \le k < N$ 和 $u = Uz^k$。则 u 具有如下形式

$$u = \begin{cases} (1, 0, \ldots, 0) & \text{if } k = 0, \\ (u_0, \ldots, u_{k-1}, 1, 0, \ldots, 0) & \text{if } 1 \le k < N, \end{cases}$$

其中函数 u_ℓ 属于 $H^\infty(\Omega_\ell^+)$，对每个 $0 \le \ell \le k-1$都成立。特别地，N元组 $U1 = (1, 0, \ldots, 0)$ 属于 E_F^q。

证明。设 $0 \le k < N$，且 $u = Uz^k = (u_0, \ldots, u_{N-1})$。那么，根据（5），对于任意 $0 \le \ell < N$ 以及任意 $\lambda \in \Omega_\ell^+$，我们有

$$u_\ell(\lambda) = \left\langle h_{\lambda,\ell}, z^k \right\rangle_{p,q} = \left\langle z^\ell h_{\lambda,0}, z^k \right\rangle_{p,q}.$$

特别地， $u_k(\lambda) = h_\lambda, 0(0) = 1$ 且对于任意 $\ell > k$, $u_\ell = 0$。现在固定 $0 \le \ell < k$。那么，对于任意 $\lambda \in \Omega_\ell^+$ ，我们有 $u_\ell(\lambda) = \langle h_\lambda, 0, z^{k-\ell} \rangle_{p,q}$。由于 $z^{k-\ell} \in H^\infty$，由（14）可知 u_ℓ 在 Ω_ℓ^+ 上有界；又由于 $u_\ell \in E^q(\Omega_\ell^+)$，最终得到 $u_\ell \in H^\infty(\Omega_\ell^+)$，至此证明完毕。□

现在给出 [37] 的主定理 $p = 2$。另请参见 [19, 定理 B。27] 对于 H^p 情形。

定理 3.3 (YAKUBOVICH [37])。设 F 是满足 *(H1)*、*(H2)* 和*(H3)*的符号，并设 T_F 是符号为 F 、作用于 H^p上的托普利茨算子。那么， U 由 (12) 定义的算子是从 H^q 到 E_F^q 的线性同构。此外，我们有

$$T_F^* = U^{-1} M_\lambda U.$$

由该定理和命题2.1 可知，研究 T_F 的可嵌入性等价于研究适当模型空间上由 λ 诱导的乘法算子的可嵌入性。更准确地说：

命题 3.4。设 $p > 1$，并设 q 为其共轭指数。假设符号 F满足 *(H1)*、*(H2)*和 *(H3)*，并设 $f(z) = F(\frac{1}{z})$， $z \in \mathbb{T}$。以下断言等价：

(1) 作用于 H^p 上的托普利茨算子 T_F 可嵌入到 H^p上的算子 C_0-半群中；*(2)* 作用于 H^q 上的托普利茨算子 $T_f = T_F^*$ 可嵌入到 H^q上的算子 C_0-半群中；*(3)* 作用于 E_F^q 上的算子 M_λ 可嵌入到 E_F^q 上的算子 C_0-半群中。

证明。先假设 F 满足 (H3)。由命题 2.1， T_F 作用于 H^p可嵌入，当且仅当 T_F^* 作用于 H^q 可嵌入；根据定理 3.3这又等价于 M_λ 作用于 E_F^q 可嵌入。□

注 3.5。命题 3.4 的一个重要推论是，在讨论托普利茨算子嵌入 C_0-半群的问题时，假设 F 满足 (H3)（所有绕数均非正），则 T_F 作用于 H^p 可嵌入，当且仅当模型算子 M_λ 作用于模型空间 E_F^q 可嵌入。如果F 满足 (H3bis) 但不满足 (H3)（所有绕数均非负），那么 T_F作用于 H^p 可嵌入，当且仅当 M_λ 作用于 E_f^p 可嵌入。本文余下部分的许多结果将在假设(H3)下陈述并证明，但这些结果在假设(H3bis)下同样成立。

注 3.6. 我们以最后一个观察结束本小节；在构造具体例子时，这一观察颇为有用：设 F_1 和 F_2 是满足 (H1)、(H2) 以及 (H3)（或更一般地，(H3bis)）的两个符号，并且存在一个保向微分同胚 $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$，使得 $F_2 = F_1 \circ \phi$。假设对于每个 $z \in \mathbb{T}$，只要 $F_1(z)$ 不属于 $\sigma(T_{F_1}) = \sigma(T_{F_2})$ 的边界，就有 $\phi(z) = z$ （因而 $F_2(z) = F_1(z)$）。在 $F_1(\mathbb{T}) \setminus \mathcal{O}$ 上定义 $\zeta_1 = 1/F_1^{-1}$ 和 $\zeta_2 = 1/F_2^{-1}$，其中 $\mathcal{O}$ 是该曲线的自交点集合。那么，对于每个不属于 $\sigma(T_{F_1})$ 边界的 $\lambda \in F_1(\mathbb{T}) \setminus \mathcal{O}$，都有 $\zeta_1(\lambda) = \zeta_2(\lambda)$，因此两个模型空间 $E_{F_1}^q$ 和 $E_{F_2}^q$ 重合。于是，由

定理 3.3 表明 T_{F_1} 与 T_{F_2} 相似，因此 T_{F_2} 可嵌入，当且仅当 T_{F_1} 可嵌入。

3.4. **特殊一类有理符号的黎曼曲面模型**。 在先前的工作 [36], 中 [37], ，我们为符号正向绕行且具有如下形式的托普利茨算子构造了一个黎曼曲面模型 $F = P/Q$, 其中 $P \in A(\mathbb{D})$， Q 是一个根位于 $\mathbb{D}$ 中的多项式，而 F 在 $\mathbb{D}$邻近 $\mathbb{T}$处是局部单叶的。我们还对 F施加了若干其他更为技术性的条件，此处不再赘述；这些条件是在 [36]中提出的。

该模型给出了 T_F 的交换子的完整描述，从而能够对这一受限符号类中的可嵌入托普利茨算子给出全面的刻画。在 [36, 第 2] 章中证明，对于这一符号类 F, 存在一个从 int $(\sigma(T_F))$ 到 σ_c, ρ_c 的分歧覆盖，使得 T_F 的交换子 $\{T_F\}'$ 作为巴拿赫代数同构于 $H^\infty(\sigma_c)$。通常假定带边黎曼曲面具有有限个连通分支；但并未断言它是连通的。特别地可得， $\{T_F\}'$ 与集合 $\{g(T_F)$ 相 coincides； $g \in H^\infty$(int ($\sigma(T_F)))\}$ 当且仅当 ρ_c 是将 σ_c 同构到 int $(\sigma(T_F))$ 的同构。利用这一结果，可以证明： T_F 可嵌入一个 C_0-半群，当且仅当 $0 \notin$ int $(\sigma(T_F))$，并且对于 σ_c 上的任意闭曲线 γ，闭曲线 $\rho_c \circ \gamma$ 的绕数为 0。

由于本文旨在讨论更大一类光滑符号，我们着重研究 [37] 中的模型及其关于可嵌入性的推论，而不在本文中详细阐述上述结果。

4. Multipliers

4.1. **模型空间乘子代数的刻画**。 设$1 < p < +\infty$。给定函数 F 满足假设 (H1)、(H2) 和 (H3)，注意到 T_F 的谱与其作用于哪个 Hardy 空间 H^p 无关；因此我们只称其为 T_F的谱，而不提及空间。还需回顾，$\Omega_0^+ = \sigma(T_F) \setminus F$(圆周)。

设 $1 < p < +\infty$ 和 q 为其共轭指数，即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。考虑函数 $g : \Omega_0^+ \longrightarrow$ 复数域。若对 E_F^q 中任意元素 $u = (u_0, \ldots, u_{N-1})$， g 对应的 N 元组 $gu = (gu_0, \ldots, gu_{N-1})$ 也属于 E_F^q，则称 g 为 E_F^q 的乘子。我们用 $\mathcal{M}ult(E_F^q)$ 表示 E_F^q 的乘子代数，即 E_F^q 的所有乘子构成的集合。若 g 是 E_F^q 上的乘子，则由闭图定理可直接推出，乘以 g 的乘法算子在 E_F^q 上有界；我们将此算子记为 M_g。当然，在此情境下还可以考虑其他自然的乘子定义，但我们选择了这一种，因为它似乎最适合我们的研究。

我们对 E_F^q 的乘子所作刻画的证明依赖于以下粘连引理；该引理的一个版本在 [38] 中提及（另见 [32, 定理 7。4]），它是柯西公式的一个推论。

引理 *4.1*（粘连引理）。设 $q > 1$，且 Ω_1, Ω_2 是复数域 C 中互不相交的有限连通域，具有分片光滑边界，并且 $\alpha = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ 具有正测度。令 $\Omega = int(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \alpha)$, 并假设 Ω 是满足引理 *3.1* 的假设 *(*)* 的有限连通域。设 $f_j \in E^q(\Omega_j), j = 1, 2$ 满足 $f_1 = f_2$ 在 α上几乎处处成立。则存在函数 $f \in E^q(\Omega)$，使得 $f_{|\Omega_j} = f_j$ 对 $j = 1, 2$ 成立。

请注意，本文后文将始终把引理 4.1 应用于满足 $\partial\Omega_j \subseteq F(\mathbb{T})$ 的域 Ω_j，其中符号 F 满足 (H1)、(H2) 和 (H3bis)。此时，集合 Ω 与 $\mathrm{int}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ 重合，并且 Ω 有限连通这一假设总是成立。正如引理 3.1之后所述，第二个假设 $(*)$ 在这种情况下也总是成立。事实上，由于 F'在 $\mathbb{T}$ 上不为零，可以用有限条小弧 α_j 覆盖 $\mathbb{T}$，使得 $F(\alpha_j)$ 是 Carleson简单曲线。此外，请注意，利用归纳法，引理 4.1 很容易推出一个类似的结论，其中涉及 k 个域 $\Omega_1, \dots, \Omega_k$，且满足 $k \geq 2$。

现在，为求完整起见，我们给出引理4.1的详细证明。

证明。设 $j = 1$ 或 $j = 2$。由于 $f_j \in E^q(\Omega_j)$，根据 [13], 中的定理10.4，我们有

$$f_j(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega_j} \frac{f_j(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta \quad \text{for every } z \in \Omega_j. \tag{15}$$

参见 [13, 第10.5]小节。此外，由于$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$，我们也有

$$\forall\, z \in \Omega_2,\ \int_{\partial\Omega_1} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = 0 \text{ and } \forall\, z \in \Omega_1,\ \int_{\partial\Omega_2} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = 0. \tag{16}$$

另请注意，由于 $f_1 = f_2$ 几乎处处于 $\alpha = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, ，我们推得

$$\int_\alpha \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = \int_\alpha \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta \quad \text{for all } z \in \Omega_1 \cup \Omega_2. \tag{17}$$

设 $u = f_j$ 在 $\partial\Omega \cap \partial\Omega_j$上几乎处处成立。则 $u \in L^q(\partial\Omega)$，我们可以通过令 f 在 Ω 上定义一个解析函数

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta \quad \text{for every } z \in \Omega. \tag{18}$$

注意到 $\alpha \subseteq \partial\Omega_1$ 和 $\alpha \subseteq \partial\Omega_2$ 的方向不同。根据（17），并注意到我们对 Ω 的定义意味着 $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega \cup \alpha$，可得

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega_1} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega_2} \frac{f_2(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta \quad \text{for all } z \in \Omega_1 \cup \Omega_2. \tag{19}$$

设 $z \in \Omega_j$。由（16）可知，（19）中不等于 $\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Omega_j} \frac{f_j(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta$ 的项为零，因此由（15）可得，对所有 $z \in \Omega_j$,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega_j} \frac{f_j(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = f_j(z).$$

因此我们已经证明了 $f_{|\Omega_j} = f_j$。为完成证明，还需证明$f \in E^q(\Omega)$。但是，根据（18），我们有 $f = \mathcal{C}u$ 在 Ω 上；又由于 $u \in L^q$（$\partial\Omega$），引理 3.1 表明 $f \in E^q(\Omega)$。□

现在我们可以证明:

定理 4.2。 E_F^q 的乘子代数与有界解析函数在 T_F 的谱内部上的限制在Ω_0^+ 所得的集合相同，即

$$\mathcal{M}ult(E_F^q) = \{g_{|\Omega_0^+} : g \in H^\infty(\mathrm{int}\,(\sigma(T_F)))\}.$$

证明。令 $g \in \mathcal{M}ult(E_F^q)$。首先证明 g 属于 $H^\infty(\Omega_0^+)$。由于 $(1, 0, \dots, 0)$ 根据事实 3.2 属于 E_F^q，且假设 g是E_F^q的乘子，因此 N元组 $(g, 0, \dots, 0) = M_g(1, 0, \dots, 0)$ 属于 E_F^q。故 $g \in E^q(\Omega_0^+)$。现在固定 $\lambda \in \Omega_0^+$。点 λ 处的求值映射是一个定义在

$E^q(\Omega_0^+)$ 上的连续线性泛函，因此线性泛函 $\psi_\lambda\colon u=(u_0,\ \dots,\ u_{N-1}) \longmapsto u_0(\lambda)$ 在 E_F^q 上连续。容易看出 $M_g^*\psi_\lambda = g(\lambda)\psi_\lambda$，由此可得

$$|g(\lambda)| \le \frac{\|M_g^*\psi_\lambda\|}{\|\psi_\lambda\|} \le \|M_g^*\|.$$

由于此估计不依赖于 $\lambda \in \Omega_0^+$，且 g 在 Ω_0^+ 上是解析的，我们得出 $g \in H^\infty(\Omega_0^+)$，并且 $\|g\|_\infty \le \|M_g\|$。

现在回顾

$$\operatorname{int}(\sigma(T_F)) \cup \mathcal{O} = \Omega_0^+ \cup \partial\Omega_1^+,$$

因此，唯一需要验证的是 g 可以延拓为 $\operatorname{int}(\sigma(T_F))$ 上的解析函数。再次利用 $(g, 0, \dots, 0) \in E_F^q$，由 E_F^q 中的边界关系可知，g 满足 $g^{int} = g^{ext}$ 在 $\partial\Omega_1^+$ 上几乎处处成立。将引理4.1 应用于包含在 $\partial\Omega_1^+ \setminus \mathcal{O}$中的每一段弧，可得 g 可以解析延拓至 $\operatorname{int}(\sigma(T_F))$，因此

$$\mathcal{M}ult(E_F^q) \subseteq \{g_{|\Omega_0^+} : g \in H^\infty(\operatorname{int}(\sigma(T_F)))\}.$$

现在假设 g 是一个属于 $H^\infty(\operatorname{int}(\sigma(T_F)))$ 的函数。考虑 E_F^q 中的一个元素 $u=(u_0, \dots, u_{N-1})$。由于 g 有界，对于每个 $j=0, \dots, N-1$，函数 gu_j 都属于 $E^q(\Omega_j^+)$。此外，由于对于每个 $\lambda \in \partial\Omega_1^+ \setminus \mathcal{O}$，函数 g 在点 λ 连续，因此对于任意 $0 \le j < N-1$，都有 $g = g^{int} = g^{ext}$ 在 $\partial\Omega_{j+1}^+ \setminus \mathcal{O}$ 上成立，所以

$$(gu_j)^{int} - \zeta(gu_{j+1})^{int} = g(u_j^{int} - \zeta u_{j+1}^{int}) = gu_j^{ext} = (gu_j)^{ext} \text{ a.e. on } \partial\Omega_{j+1}^+.$$

因此，gu 属于 E_F^q，从而我们证明了 g 属于 $\mathcal{M}ult(E_F^q)$。所以最终我们得到

$$\mathcal{M}ult(E_F^q) \supseteq \{g_{|\Omega_0^+} : g \in H^\infty(\operatorname{int}(\sigma(T_F)))\},$$

且定理4.2得证。 □

注 4.3。 作为定理4.2的一个很好的推论，我们得到：当 F 足够光滑时（例如，当 F 在 C^2 上属于 C^2 类 C^2 时$\mathbb{T}$），E_F^q 的乘子空间仅取决于曲线 $F(\mathbb{T})$。它既不取决于 $1 < q < \infty$，也不取决于该曲线的充分光滑参数化 F 的选取（尽管模型空间 E_F^q 本身通过边界条件取决于参数化 F）。

4.2. **将模型算子嵌入 C_0-乘法算子半群及其推论中**。 回忆一下：当且仅当区域 Ω 包含于一个不含 0 的单连通域中时，Ω 上存在平方根的解析确定；这等价于说，0 属于 $\mathbb{C} \setminus \Omega$ 的无界连通分支。该注记是以下定理证明的核心：

定理 A. 由自变量 M_λ 定义的乘法算子作用于 E_F^q，可嵌入到 E_F^q 上由乘法算子构成的 C_0-半群中，即算子具有如下形式：M_g，$g \in H^\infty(\operatorname{int}(\sigma(T_F)))$，当且仅当 0 属于 复数域 $\setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$ 的无界连通分支。

证明. 首先假设 M_λ 可嵌入到 E_F^q 上由乘法算子构成的 C_0-半群 $(A_t)_{t>0}$ 中。特别地， $A_{1/2}$ 是一个乘法算子，因此存在一个函数 $\delta \in H^\infty(\text{int}\,(\sigma(T_F)))$，使得 $A_{1/2} = M_\delta$。于是我们有

$$M_\lambda = A_1 = (A_{1/2})^2 = (M_\delta)^2 = M_{\delta^2}.$$

将此等式应用于 E_F^q 中的元素 $(1, 0, \ldots, 0)$，可得对每个$\lambda \in \Omega_0^+$，都有 $\delta^2(\lambda) = \lambda$。由于 δ在 int $(\sigma(T_F))$ 上解析，因此该等式对每个 $\lambda \in$ int $(\sigma(T_F))$ 也成立，从而 δ是定义在 int $(\sigma(T_F))$ 上的平方根的解析分支。因此，0 属于 复数域 $\setminus$ int $(\sigma(T_F))$ 的无界连通分支。

反过来，假设 0 属于集合 复数域 $\setminus$ int $(\sigma(T_F))$ 的无界连通分支。则在 int $(\sigma(T_F))$ 上存在对数的解析分支，记作 log。令 $v_t(\lambda) = \lambda^t := e^{t \log \lambda}$, $t > 0$。由于函数 v_t 属于 $H^\infty(\text{int}\,(\sigma(T_F)))$，算子 $A_t := M_{v_t}$ 在 E_F^q 上定义良好且有界。根据构造，$(A_t)_{t>0}$ 是一个满足 $A_1 = M_\lambda$ 的半群，因此只需证明其强连续性。令 $u = (u_0, \ldots, u_{N-1})$ 为 E_F^q 中的一个元素。则

$$\|A_t u - u\|_{E_F^q}^q = \sum_{j=0}^{N-1} \|(\lambda^t - 1)u_j\|_{E^q(\Omega_j^+)}^q = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{\substack{\Omega \subset \Omega_j^+ \\ \text{component}}} \|(\lambda^t - 1)u_{j|\Omega}\|_{E^q(\Omega)}^q.$$

但请注意，斯米尔诺夫空间 $E^q(\Omega)$ 上的范数由 $\partial\Omega$ 上的积分给出，因此，根据勒贝格控制收敛定理， $\|A_t u - u\|_{E_F^q} \longrightarrow 0$ 当 $t \to 0$ 时。□

当 0 属于复数域\int $(\sigma(T_F))$ 的无界连通分支的内部时，我们有一个更强的结论：在这种情况下，log $\in H^\infty(\text{int}\,(\sigma(T_F)))$，因此 $A_t = e^{tB}$满足 $B = M_{\log} \in B(E_F^q)$。所以半群 $(A_t)_{t>0}$ 具有有界生成元，并且$\|A_t - I\| \longrightarrow 0$ 当 $t \to 0$ 时。

作为定理A 和命题3.4的直接推论，我们得到以下充分条件：具有满足(H1)、(H2)和(H3bis)的符号的托普利茨算子可嵌入到 C_0-半群中：

定理 B. 设 $p > 1$。假设 F 满足假设 (H1)、(H2)和(H3bis)。若 *0* 属于 复数域 $\setminus$ int $(\sigma(T_F))$的无界连通分支，则$T_F \in \mathcal{B}(H^p)$ 可嵌入到一个 C_0-半群中。

我们在例 2.5 (另见后文的例 7.3) 中给出了一个符号 F，它表明定理 B 的逆命题一般并不成立： T_F可能是可嵌入的，尽管 0 属于复数域 $\setminus$ int $(\sigma(T_F))$ 的有界连通分支。不过，我们现在研究逆定理 B 成立的特定情形，即 T_F 可嵌入到一个 C_0-半群中会迫使 0 属于复数域 $\setminus$ int $(\sigma(T_F))$ 的无界连通分支。我们首先研究 F(圆周) 是若尔当曲线的情形。

4.3. **若尔当曲线的情形。** 当 F(圆周) 是若尔当曲线时，关于 (H1)、(H2) 和 (H3bis) 的条件 F 等价于 (H1) （另外两个假设自动成立）。

定理 4.4。 设 $p > 1$，并设 $F \in L^\infty$(圆周) 是满足条件 *(H1)*的符号。进一步假设 F(圆周) 是若尔当曲线。则以下命题等价:

(1) $T_F \in \mathcal{B}$（H^p）可嵌入到一个 C_0-半群中。*(2)* 0 属于复数域 $\setminus$ int（σ（T_F））。

证明。由 (2) $\implies$ (1) 可立即由定理 B 得出，因为复数域 $\setminus$ int（σ（T_F））是连通且无界的。

对于逆向蕴含 (1) $\implies$(2)，注意到 int（σ（T_F））$= \sigma$（T_F）$\setminus F$（圆周）（因为 F（圆周）是一条若尔当曲线），并应用事实 2.3 （i）。□

定理 F 成立所需的正则性假设对于定理 4.4 是必要的。事实上，如果我们仅假设 F 在圆周上连续，则有以下反例。

例 4.5。 令 $F(z) = {}_{(1-z)}{}_{z}^{1/3}$，$z \in$ 圆周，其中 1/3-次根是利用复数域 C $\setminus (-\infty,\ 0]$上的对数主值定义的。于是 F(圆周) 是一条负向绕行的若尔当曲线，且点 0 位于 F(圆周) 上。

事实上，我们有 $1 - e^{i\theta} = -2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2} = 2\sin(\theta/2)e^{i(\theta/2-\pi/2)}$。那么，若 $0 \le \theta \le 2\pi$，我们有 $2\sin(\theta/2) \ge 0$，并且由于 $\theta/2 - \pi/2 \in [-\pi/2, \pi/2] \subseteq (-\pi,\ \pi)$，可知 $(1 - e^{i\theta})^{1/3} = \sqrt[3]{2}\sin(\theta/2)e^{\frac{i}{6}(\theta-\pi)}$，因此

$$F(e^{i\theta}) = \sqrt[3]{2\sin(\theta/2)}e^{\frac{-i}{6}(5\theta+\pi)} \quad \text{for every } 0 \le \theta \le 2\pi.$$

注意，定义在 $[0, 2\pi]$ 上的函数 u 由 $u(\theta) = \frac{-1}{6}(5\theta + \pi)$ 给出，它严格递减，$u(0) = -\pi/6$ 且 $u(2\pi) = -11\pi/6 = -2\pi + \pi/6$。因此 F(T) 是一条负向绕行的若尔当曲线。

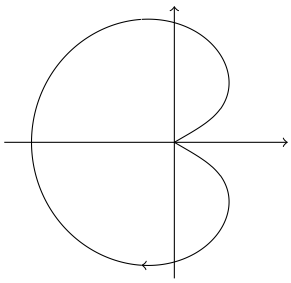


FIGURE 3

现在，考虑作用于 H^p上的符号为 F 的托普利茨算子 T_F，$1 < p < 3$。于是有 dim(ker T_F) $= 1$。事实上，当且仅当 $(1-z)^{1/3}u$ 属于 ker S^* （其中 S 是由 z 在 H^p上定义的乘法算子）时，函数 $u \in H^p$ 才属于 ker(T_F)；也就是说，当且仅当存在一个常数 $c \in$ C，使得 $u(z) = {}^{c}{}_{(1-z)^{1/3}}$。由于 $(1-z)^{-1/3}$ 属于 H^p，我们得到 ker(T_F) $=$span $\left[(1-z)^{-1/3}\right]$。由定理 2.2 可知，$T_F$ 不可嵌入H^p上的 C_0-半群。

若 $p > 3$，令 q 表示 p的共轭指数，使得 $1 < q < 3$。那么，根据上述论证，作用于 H^q 上的T_F 无法嵌入到 H^q 上的 C_0-半群中，因此 $T_F^* \in \mathcal{B}(H^p)$也无法嵌入到 H^p 上的 C_0- 半群中。

令 $f(z) = F(1/z)$, $z \in \mathbb{T}$, 则符号 f与 F具有相同的正则性，而$T_f = T_F^*$无法嵌入到 H^p上的 C_0-半群中。

我们将在第8 节回过头来研究T_F 符号 F 不假设为 C^1 光滑时的一般情形下的嵌入问题。

5. Embedding and eigenvalues on the curve

5.1. **Ahern 和 Clark 的一个特殊结果。** Ahern 和 Clark 在 [1] 研究了非 Fredholm 托普利茨算子在H^2上的核的维数。当符号 F 在圆周上可微，且 $F' \neq 0$ 在圆周上时，他们的结果适用，并可改写为以下陈述：

定理 5.1 (Ahern - Clark [1])。 设 $p > 1$，设 F 为定义在圆周上的可微函数，且 $F' \neq 0$ 在圆周上，并设 $T_F \in \mathcal{B}(H^p)$。那么$\dim \ker(T_F) = \max(0, -\mathrm{wind}_+(F))$，其中

$$\mathrm{wind}_+(F) = \frac{1}{2\pi}\left(\Delta \arg(F) + m\pi\right), \ \textit{with}\ m = \mathrm{card}\{\zeta \in \mathbb{T}\,;\, F(\zeta) = 0\}.$$

在定理 5.1 的表述中， $\Delta \arg(F)$ 表示 $F(e^{i\theta})$ 的辐角变化，其中 θ 从 0 变化到 2π，并且 “ 忽略跳跃 ”。下面更精确地说明其含义：

• 如果 0 不属于 F(圆周)，那么 $\Delta \arg(F)$ 就是 $F(e^{i\theta})$ 的辐角变化，其中 θ 从 0 变化到 2π （此时没有跳跃），并且有 $\mathrm{wind}_+(F) = \mathrm{wind}_F(0)$。因此，定理 5.1 给出的公式推广了 Fredholm 托普利茨算子核维数的经典公式（见（3））。

• 现在假设 0 属于 F(圆周)。在定理 5.1的假设下，F 在 圆周上只有有限个零点，如以下事实所述：

事实 5.2。 在定理 *5.1*的假设下，函数 F 在 圆周上只有有限个零点。

证明。 事实上，如果 F 在圆周 $\mathbb{T}$ 上有无穷多个零点，那么它们将有一个聚点 $\zeta \in \mathbb{T}$，这意味着 $F'(\zeta) = 0$。这与假设 $F' \neq 0$ 在圆周 $\mathbb{T}$ 上矛盾。□

设 $z_1, \ldots, z_m$，其中 $m \geq 1$ 是 F在圆周 $\mathbb{T}$ 上的零点。将每个这样的零点写作$z_j = e^{i\theta_j}$，其中 $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \ldots \theta_m < 2\pi$，并令 $\theta_{m+1} = \theta_1$。函数 $\arg F(e^{it})$ 在 $[0, 2\pi]$ 上仅在点 θ_j 处有跳跃。计算 F 的辐角变化量 $\Delta \arg(F)$ 时，我们忽略辐角在点 θ_j, $j = 1, \ldots, m$ 处的跳跃，并将 $\Delta \arg(F)$ 定义为对 $j = 1, \ldots, m$ 求和所得，其中各项为 $F(e^{i\theta})$ 的辐角在 θ 从 θ_j 变化到 θ_{j+1}时的变化量。

注意，Ahern-Clark 的结果是在 [1] 的背景下表述的 H^2，但对于每个 H^p，它在 $p > 1$ 中同样成立。为求完整起见，我们在 0 属于 5.1 的情形下给出定理 $F(\mathbb{T})$ 的证明。

证明。 假设 $0 \in F$(圆周)。那么 $m =$基数$\{\zeta \in$圆周； $F(\zeta) = 0\}$ 至少为 1；由事实 5.2 可知它是有限的。因此，设 $\zeta_1, \ldots, \zeta_m \in$圆周 上的零点为 F在 圆周上。由于 F是

在圆周上可微，且 $F' \neq 0$，存在一个在圆周上不为零的连续函数 g，使得

$$F(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta}) \prod_{k=1}^{m} (e^{i\theta} - \zeta_k) = e^{im\theta} g(e^{i\theta}) \prod_{k=1}^{m} (1 - \zeta_k e^{-i\theta}).$$

记 $F(e^{i\theta}) = g_0(e^{i\theta}) q(e^{i\theta})$，其中 $g_0(e^{i\theta}) = e^{im\theta} g(e^{i\theta})$，且 $q(e^{i\theta}) = \prod_{k=1}^{m} (1 - \zeta_k e^{i\theta})$，$\overline{e^{i\theta}} \in \mathbb{T}$。由于函数 q 在 $\mathbb{D}$ 上是反解析的，根据 [20, 定理 12.4]，我们推得

$$T_F = T_{\overline{q}} T_{g_0}.$$

此外，q 是一个多项式，并且在 $\mathbb{D}$ 上不为零。因此，q 是一个外函数，从而 T_q 具有稠密值域，这意味着 T_q 是单射（见 [20, 定理 12.19]）。因此我们有 $\ker(T_F) = \ker(T_{g_0})$，于是

$$\dim \ker(T_F) = \dim \ker(T_{g_0}) = \max(-\operatorname{wind}_{g_0}(0), 0)$$

因为 g_0 在 $\mathbb{T}$ 上连续且处处非零。最后，注意到 $\operatorname{wind}_{g_0}(0) = \operatorname{wind}_+(F)$。事实上，

$$\operatorname{wind}_+(F) = \operatorname{wind}_+(\overline{q}) + \operatorname{wind}_+(g_0) = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\operatorname{wind}_+(1 - \zeta_k \overline{\zeta})}_{=0} + \operatorname{wind}_{g_0}(0) = \operatorname{wind}_{g_0}(0).$$

因此我们最终得到 $\dim \ker(T_F) = \max(0, -\operatorname{wind}_+(F))$。 □

定理的一个直接推论5.1 是关于将托普利茨算子嵌入 C_0-半群的可能性。

推论 5.3. 设 $p > 1$，且 F 是圆周 $\mathbb{T}$ 上的可微函数，在圆周 $\mathbb{T}$上满足 $F' \neq 0$。若 $\operatorname{wind}_+(F) < 0$，则 T_F 不可嵌入到 H^p 上的 C_0- 半群中。

在本小节余下部分，我们将对数 wind+ 给出一种简单的几何解释（这是对 Ahern 和 Clark 所给解释的改述），以便快速判断推论 5.3 的条件是否成立。

5.2. 数 wind+ 的几何解释及其推论。在 [1], 中，Ahern 和 Clark 给出了数 wind+的如下几何解释：设 $0 \in F(\mathbb{T})$，并令 Ω 为复数域 $\mathbb{C} \setminus \sigma(T_F)$的一个连通分支，且 $0 \in \partial\Omega$。若一条弧 $\gamma = F(\{e^{i\theta}, \alpha < \theta < \beta\})$满足 $0 \in \gamma$，并且沿 γ行进时，在 0 的某个邻域内 Ω 始终位于右侧，则称该弧为负弧。令 K 为仅在点 0 相交的负弧的数量。则 $\operatorname{wind}_+(F) = \operatorname{wind}_F(\Omega) + K$。在此几何解释中，对于圆周 $F(\mathbb{T})$ 上在 0 的某个邻域内重合的两条子弧 γ和γ'，我们只计其中一条。换言之，K 是满足 $F(\zeta_0) = 0$ 的点 $\zeta_0 \in \mathbb{T}$ 的数量，使得对于所有充分小的 $\varepsilon > 0$，曲线 $F(\{\zeta \in \mathbb{T};\ |\zeta - \zeta_0| < \varepsilon\})$ 都是负弧。

在我们的情形中，我们可以将 wind+ 解释为按如下方式得到的曲线经过微小扰动后在 0 处的绕数：取一条非常小的开弧 $\gamma \subset$圆周，使得 $0 \in F(\gamma)$；然后将弧 $\Gamma := F(\gamma)$ 稍微移离0，从而~在沿着这条修改后的弧 Γ前进时，始终使0 位于左侧。于是wind+ 就是修改后的曲线在点0处的绕数。

设 F 满足假设 (H1)、(H2) 和(H3)，并假设 0 属于F(圆周)$\setminus \mathcal{O}$，也就是说，0 属于曲线 F(圆周)，但不是自交点。设



(A) $K = 1$ (B) $K = 2$

FIGURE 4

Ω_{int} 和 Ω_{ext} 分别表示点 0 处的内部和外部连通分支。那么，上述几何解释可以表示如下:

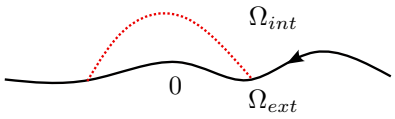


FIGURE 5

这直接得出以下结果:

命题 5.4。 设 F 满足假设*(H1)*、*(H2)*和*(H3)*，并且假设 0 属于 F(圆周) $\setminus \mathcal{O}$。那么

$$\mathrm{wind}_+(F) = \mathrm{wind}_F(\Omega_{ext}),$$

其中Ω_{ext} 是点0处的外部连通分支。

结合事实 2.3、推论 5.3和命题5.4，我们得到关于 T_F 的可嵌入性的以下必要条件:

命题 *5.5.* 设 $p > 1$，并设 F 满足假设 *(H1)*、*(H2)* 和 *(H3bis)*。假设 T_F 可嵌入到 C_0 上的有界算子 C_0-半群中。那么，要么 *0* 属于 $\mathbb{C} \setminus \sigma(T_F)$，要么，若 *0* 属于 T_F 的谱，则 *0* 属于 $\partial\sigma(T_F) \cup \mathcal{O}$。特别地，若 *0* 属于 *int* $(\sigma(T_F))$，则 *0* 必属于 $\mathcal{O}$。

证明. 不妨设 F 满足 (H3)。假设 T_F 可嵌入。于是，根据事实 2.3，要么 0 属于 $\mathbb{C} \setminus \sigma(T_F)$，要么 0 属于 F(圆周)。假设 0 不属于 $\mathcal{O}$。根据推论 5.3，$\mathrm{wind}_+(F) \geq 0$，进而由命题 5.4，$\mathrm{wind}_F(\Omega_{ext}) \geq 0$，其中 Ω_{ext} 是点 0 处的外部连通分支。由于 F 满足 (H3)，因此可得 $\mathrm{wind}_F(\Omega_{ext}) = 0$，故 0 属于 T_F 的谱的边界。□

作为该命题的直接推论，在附加假设B 成立时，我们得到定理复数域 $\setminus \mathrm{int}\,(\sigma(T_F))$ 连通且 0 不属于 $\mathcal{O}$的条件下的逆命题:

定理 C。 设 $p > 1$，并设 F 满足 (H1)、(H2) 和 (H3bis)。假设复数域 $\setminus \mathrm{int}\,(\sigma(T_F))$ 是连通的，且 0 不是曲线 F(圆周) 的交点。那么以下断言等价:

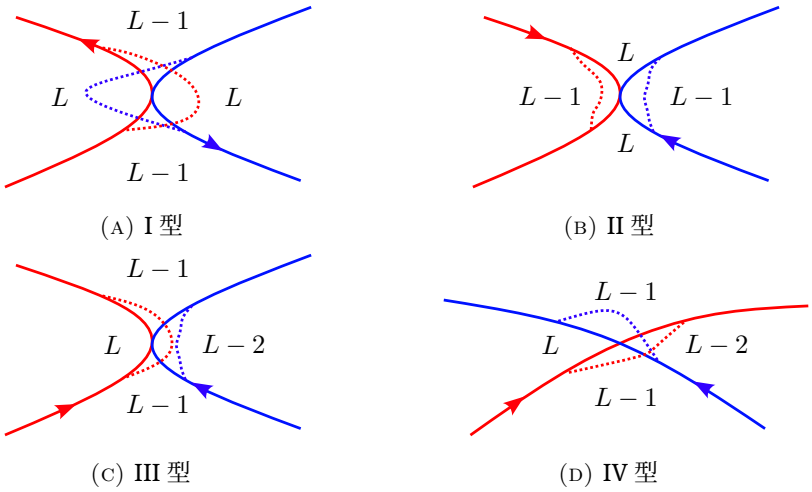
(1) T_F 可嵌入到 H^p上由有界算子构成的 C_0-半群中;

(2) 0 属于复数域 $\setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$。

证明。 由于 复数域 $\setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$ 是连通的，因此蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (1) 直接由定理 B 得出。至于蕴含关系 (1) $\Rightarrow$(2)，则可由命题5.5立即得出。 □

现在考虑 0 是曲线 $F(\mathbb{T})$ 的一个简单交点的情形，并描述这种情况下几何解释所给出的结果。在这种情况下有四种可能性，我们称之为 I 型、II 型、III 型和 IV 型交点；见下图。

在这些图中，整数 L 表示对 $\sigma(T_F) \setminus F(\mathbb{T})$ 的所有连通分支 Ω（满足 0 属于 Ω 的边界）取 $\operatorname{wind}_F(\Omega)$ 的最大值。



(A) I 型 (B) II 型

(C) III 型 (D) IV 型

FIGURE 6

当交点为 II 型、III 型或 IV 型时，我们有 $\operatorname{wind}_+(F) = L$。但是，当交点为 I 型时，我们有 $\operatorname{wind}_+(F) = L + 1$。现在假设 F 满足 (H1)、(H2) 和 (H3)，且曲线$F(\mathbb{T})$ 上的所有交点都是简单的。若 0 是这样的一个交点，则由定理 5.1 可知，$\ker(T_F) = \{0\}$ 当且仅当 $0 \in \partial\sigma(T_F)$，或者 0 处的交点为 I 型且 $L = -1$。因此，若将 Ω_j 定义为满足 $\operatorname{wind}_F(\lambda) = -j$ 的元素 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus F(\mathbb{T})$ 所构成的集合，则可推出以下结果:

推论 5.6. 设 $p > 1$，并设 F 满足 *(H1)*、*(H2)* 和 *(H3)*。假设复数域 $\setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$ 是连通的，曲线 F(圆周) 上的所有交点都是简单的，并且这条曲线在 $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ 上没有 I 型交点。

那么， $T_F \in \mathcal{B}(H^p)$ 可嵌入，当且仅当0 属于复数域 $\setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$。

注意，I 型交点只有在交点相切的情况下才会出现。换言之，例如，复数域 $\setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$ 连通，且曲线 F(圆周) 的所有交点都是简单且横截的，那么推论 5.6 的假设便得到满足，即 T_F 可嵌入，当且仅当 0 属于 复数域 $\setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$。

下一节中，我们将给出一些进一步的、更具技术性的条件；在这些条件下，算子 T_F 的可嵌入性意味着 0 属于复数域 $\setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$ 的无界连通分支。我们的方法是研究作用于模型空间上的模型算子的交换子。

6. A condition on the commutant

回顾一下，$\Omega_j = \{\lambda \in \text{复数域} \setminus F(\mathbb{T}) : |\operatorname{wind}_F(\lambda)| = j\}$ 对 $0 \le j \le N$，且

$$\Omega_j^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus F(\mathbb{T}) : |\operatorname{wind}_F(\lambda)| > j\} = \bigcup_{k=j+1}^{N} \Omega_k \quad \text{for } 0 \le j \le N-1.$$

6.1. 模型算子的交换子的描述。给定可分巴拿赫空间 X上的有界算子 T，我们用 $\{T\}'$ 表示 T的交换子，即集合 $\{T\}' = \{S \in \mathcal{B}(X) ; TS = ST\}$.

引理 6.1。设 A 是 E_F^q 上的有界算子。当且仅当对于满足 $0 \le i、 j < N$的每一对整数（i、 j），存在一个函数$a_{i,\,j} \in E^1(\Omega^+{}_{\max(i,\,j)})$ 使得 A 与 M_λ 交换

$$(Au)_j = \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,j} u_i \quad on\ \Omega_k \tag{20}$$

对每个 $0 \le j < k \le N$ 和每个 $u = (u_0, \ldots\ldots, u_{N-1}) \in E_F^q$。

证明。若 A 是 E_F^q 上的有界算子，显然，若 A 由（20）给出，则 A 与 M_λ 可交换。因此，我们只需证明逆命题。令$A \in \{M_\lambda\}'$并令 B为定义在 H^p上的有界算子，其定义为 $B = (U^{-1}AU)^*$，其中 $U : H^q \longrightarrow E_F^q$ 是由（12）给出的算子。由定理 3.3以及 A 与 M_λ 可交换这一事实可得

$$\begin{aligned} B^*T_F^* &= U^{-1}AUU^{-1}M_\lambda U = U^{-1}AM_\lambda U \\ &= U^{-1}M_\lambda AU = U^{-1}M_\lambda UU^{-1}AU = T_F^*B^*. \end{aligned}$$

于是 $BT_F = (T_F^*B^*)^* = (B^*T_F^*)^* = T_FB$，即 $B \in \{T_F\}'$。

由于 B 与 T_F可交换， T_F 的特征子空间在 B作用下是不变的。但请回忆

$$\ker(T_F - \lambda) = \operatorname{span}\left[h_{\lambda,j} ; 0 \le j < |\operatorname{wind}_F(\lambda)|\right] \text{ for all } \lambda \in \sigma(T_F) \setminus F(\mathbb{T}),$$

因此，对于每个 $\lambda \in \sigma(T_F) \setminus F(\mathbb{T})$，以及每一对满足 $0 \le i$， $j \lhd |\operatorname{wind}_F(\lambda)|$ 的整数 (i, j)，都存在一个标量 $a_{i,\,j}(\lambda) \in$ 复数域，使得

$$Bh_{\lambda,j} = \sum_{i=0}^{|\operatorname{wind}_F(\lambda)|-1} a_{i,j}(\lambda) h_{\lambda,i}.$$

现在，令 $u = (u_0, \ldots\ldots, u_{N-1}) \in E_F^q$。于是 $g := U^{-1}u$属于 H^q且 $Au = UB^*g$。因此，对每个 $\lambda \in \Omega_k$， $0 \le j < k \le N$，我们有

$$\begin{aligned} (Au)_j(\lambda) &= (UB^*g)_j(\lambda) = \langle B^*g, h_{\lambda,j}\rangle \\ &= \langle g, Bh_{\lambda,j}\rangle = \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,j}(\lambda)\langle g, h_{\lambda,i}\rangle = \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,j}(\lambda) u_j(\lambda), \end{aligned}$$

这就证明了（20）。要完成引理6.1的证明，还需证明每个函数 $a_{i,\,j}$ 都属于 $E^1(\Omega^{+}{}_{\max(i,\,j)})$。

我们先讨论 $i=0$ 的情形。令 $u=U1=(1,\,0,\,\ldots,\,0)$，根据事实 3.2，它属于 E^q_F。于是，根据（27），有 $Au=(a_{0,\,0},\,\ldots,\,a_{0,\,N-1})$；又由于 Au 是 E^q_F 的一个元素，每个函数 $a_{0,\,j}$ 都属于 $E^q(\Omega^+_j)$，因此也属于 $E^1(\Omega^+_j)$。

现在假设 $0\le k<N$ 满足：对于每个 $0\le i\le k$ 和每个 $0\le j<N$，函数 $a_{i,j}$ 是 $E^1(\Omega^{+}\max(i,j))$ 的一个元素。令 $u:=Uz^{k+1}$，将其写作 $u=(u_0,\ldots,u_k,1,0,\ldots)$，其中根据事实 3.2，对于 $0\le l\le k$，有 $u_l\in H^\infty(\Omega^+_l)$；再令 $v:=Au$，其中 $v=(v_0,v_1,\ldots,v_{N-1})$。那么，对于每个 $0\le j<N$ 以及每个满足 $\max(j,k+1)<l<N$ 的 l，我们有

$$v_j=\sum_{i=0}^{k}a_{i,j}u_i\;+\;a_{k+1,j}\quad\text{on }\Omega_l.$$

但我们已经观察到 $u_i\in H^\infty(\Omega_l)$，并且根据归纳假设，我们知道 $a_{i,\,j}\in E^1(\Omega_l)$。因此可得

$$a_{k+1,j}\;=\;v_j-\sum_{i=0}^{k}a_{i,j}u_i\;\text{ belongs to }E^1(\Omega_l)\;\text{ for every }l>\max(k+1,j).$$

因此，归纳假设对 $k+1$ 也成立，这就证明了引理 6.1。 □

注 6.2. 引理 6.1 的证明实际上表明，每个函数$a_{i,\,j}$ 都属于 $E^q(\Omega^{+}{}_{\max(i,\,j)})$，这是比引理 6.1中所述结论更强的结论。不过，为求简洁，我们更倾向于给出一个不依赖于 q的引理 6.1 结论。

我们单独陈述引理 6.1的以下推论，它将在第 7 节中多次用到：

引理 6.3. 假设 M_λ 可嵌入由算子构成的半群 $(A_t)_{t>0}$，其作用于 E^q_F。那么，在对数的log上存在一个解析分支，使得对于每个 $u=(u_0,\ldots,u_{N-1})\in E^q_F$ 以及每个 $t>0$，若 $v_t=(v_{t,0},\ldots,v_{t,N-1})=A_tu$，则在 Ω_1，上有 $v_{t,\,0}=\alpha_t u_0$，且对于每个 $\lambda\in$，$\alpha_t(\lambda)=e^{t\log(\lambda)}$ Ω_1。

证明。由于算子 A_t 与 $M_\lambda=A_1$ 对每个 $t>0$都可交换，引理 6.1 表明，存在 $\alpha_t\in E^1(\Omega^+_0)$，使得对于每个 $u=(u_0,\ldots,u_{N-1})\in E^q_F$，若 $v_t=(v_t,0,\ldots,v_{t,N-1})=A_tu$，则 $v_{t,0}=\alpha_tu_0$ 在 Ω_1 上成立。现在，根据事实 3.2，我们知道 $u=(1,0,\ldots,0)\in E^q_F$。于是，如果 $v=(v_0,\ldots,v_{N-1})=A^2_{1/2}(u)$，则对于每个 $\lambda\in\Omega_1$，都有$v_0(\lambda)=\alpha^2_{1/2}(\lambda)$。另一方面，利用 $A^2_{1/2}=A_1=M_\lambda$，我们还得到 $v_0(\lambda)=\lambda$，这表明对于每个 $\lambda\in\Omega_1$，有 $\alpha^2_{1/2}(\lambda)=\lambda$。特别地，$\alpha_{1/2}$ 是 Ω_1，上平方根的解析分支，这意味着 $0\notin\Omega_1$。

现在固定 $\lambda\in\Omega_1$。由于族 $(\alpha_t(\lambda))_{t>0}$ 是一个标量值半群，且$\alpha_1(\lambda)=\lambda\neq0$，我们推得，对于每个 $t>0$，都有 $\alpha_t(\lambda)\neq0$；并且存在一个复数 c_λ，使得对于每个 $t>0$，都有 $\alpha_t(\lambda)=e^{tc_\lambda}$。还要注意，由于 $A_1=M_\lambda$，我们有 $e^{c_\lambda}=\lambda$。由于 Ω_1 是有限个单连通域的并，且不包含 0，因此存在 Ω_1上的一个对数的解析分支 φ。对于每个 $\lambda\in\Omega_1,$，存在 $k_\lambda\in\mathbb{Z}$，使得 $c_\lambda=\varphi(\lambda)+2i\pi k_\lambda$。对于每个 $t>0$，$\alpha_t(\lambda)$ $=e^{t(\varphi(\lambda)+2i\pi k_\lambda)}$ 在 Ω_1，上成立；又由于函数 α_t 在 Ω_1，上解析，因此可知

映射 $\lambda \mapsto e^{2i\pi k_\lambda t}$ 在 Ω_1上解析。由于这对每个 $t>0$都成立，映射 $\lambda \mapsto k_\lambda$ 在 Ω_1, 的每个连通分支上都是常数，由此可知映射 $\lambda \mapsto c_\lambda$ 是 Ω_1 上的一个对数的解析分支，并满足所需性质。□

6.2. 与可嵌入性的联系。若算子 T 可嵌入到 C_0-半群 $(T_t)_{t>0}$ 中，那么显然对每个 $t>0$， T_t 都与 T 交换。我们研究托普利茨算子交换子的动机，源于定理 A 和命题 3.4 的以下直接推论。在该命题中， M_λ 按惯例表示模型空间 E_F^q 上关于自变量 λ 的乘法算子。还要回顾一下，根据定理 4.2， E_F^q 的乘子可按如下方式刻画： $\mathcal{M}ult(E_F^q) = \{g_{|\Omega_0^+}\colon\ g \in H^\infty(\text{int}\,(\sigma(T_F)))\}$。

命题 6.4。 设 $p>1$。设 F 是满足以下条件的符号：*(H1)*、*(H2)* 和*(H3)*。假设 M_λ 的交换子仅由乘法算子构成，即

$$\{M_\lambda\}' = \{M_g\,;\, g \in \mathcal{M}ult(E_F^q)\}\,.$$

那么，当且仅当 0 属于 复数域 $\setminus \text{int}\,(\sigma(T_F))$ 的无界连通分支时， T_F 可嵌入 H^p 上的 C_0- 半群。

注 6.5. 对于满足 (H1)、(H2) 和 (H3) 的符号 F ，若已知 M_λ 的交换子中唯一的算子是乘法算子，便可简洁地描述 T_F 本身的交换子。事实上，在假设 (H1)、(H2) 和 (H3) 下，算子 T_F 具有一个 $H^\infty(\text{int}\,(\sigma(T_F)))$ 函数演算 [37]。这直接推论自定理 3.3：对于任意函数 $g \in H^\infty(\text{int}\,(\sigma(T_F)))$，令 $g(T_F) := (U^{-1}g(M_\lambda)U)^* = (U^{-1}M_gU)^*$：这为 T_F 在 $H^\infty(\text{int}\,(\sigma(T_F)))$ 上定义了一个有界函数演算。若 M_λ 的交换子仅由乘法算子构成，那么任意算子 $A \in \{T_F\}'$ 都可写成 $A = g(T_F)$，其中 $g \in H^\infty(\text{int}\,(\sigma(T_F)))$ 是某个函数。

因此，尝试确定M_λ 的交换子是否与乘法算子集合相同，是一个自然的问题——但事实证明这并不容易。事实上，下面我们给出一条光滑曲线的例子，它具有两种不同的参数化 F_1 和 F_2 ，使得作用在$E_{F_1}^q$ 上的 M_λ 的交换子仅由乘法算子组成，而作用在 $E_{F_2}^q$ 上的 M_λ 的交换子则不是如此。

例 6.6. 设 $p>1$，并令 $\varepsilon > \max(1/p, 1/q)$。令 $F \in C^{1+\varepsilon}$(圆周) 为任意满足以下条件的函数：F' 在 圆周 上不为零，且曲线 $F($ 圆周 $)$ 如图 7 所示。

根据引理 6.1，我们知道 A 与 M_λ 交换，当且仅当 A属于 $B(E_F^q)$，并且对于每个 $u=(u_0,u_1) \in E_F^q$，$(v_0,v_1) = Au$ 满足

$$v_0 = \begin{cases} a_{0,0}u_0 & \text{on}\ \ \Omega_1 \\ a_{0,0}u_0 + a_{1,0}u_1 & \text{on}\ \ \Omega_2 \end{cases} \quad \text{and} \quad v_1 = a_{0,1}u_0 + a_{1,1}u_1 \ \text{ on }\ \Omega_2, \tag{21}$$

对于某些函数 $a_{i,j} \in E^1(\Omega^+ \max(i,j))$, $0 \le i,j \le 1$。因此，假设 $A \in \{M_\lambda\}'$，使得对于某些函数 $a_{i,j} \in E^1(\Omega^+ \max(i,j))$， A 由 (21) 给出。固定 $u=(u_0,u_1)\ \in E_F^q$ ，并将 Au 写作 $Au=(v_0,v_1)$。回顾一下，$(v_0,v_1)\ \in E_F^q$ 当且仅当 $v_0 \in E^q(\Omega_0^+)$，$v_1 \in E^q(\Omega_1^+)$，且满足以下边界关系：

$$v_0^{int} - \zeta v_1^{int} = v_0^{ext} \text{ a.e. on } \partial\Omega_1^+ = \partial\Omega_2 = \mathbb{T},$$

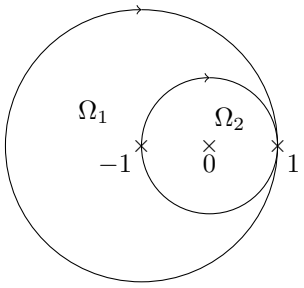


FIGURE 7

其中 $\zeta = 1/F^{-1}$。用函数 $a_{i,j}$ 表示时，该边界条件变为：对于每个 $(u_0, u_1) \in E_F^q$,

$$a_{0,0}^{int}u_0^{int} + a_{1,0}^{int}u_1^{int} - \zeta(a_{0,1}^{int}u_0^{int} + a_{1,1}^{int}u_1^{int}) = a_{0,0}^{ext}u_0^{ext} \text{ a.e. on } \mathbb{T}.$$

由于在圆周 T 上几乎处处有 $u_0^{int} - \zeta u_1^{int} = u_0^{ext}$a.e. $= \partial\Omega_2 = \partial\Omega_1^+$，因此此关系等价于

$$(a_{0,0}^{int} - \zeta a_{0,1}^{int} - a_{0,0}^{ext})u_0^{int} + (a_{1,0}^{int} - \zeta(a_{1,1}^{int} - a_{0,0}^{ext}))u_1^{int} = 0. \tag{22}$$

利用 $U1 = (1,\ 0)$ 和 $Uz = (u_0,\ 1)$ 属于 E_F^q，我们推得 Au 满足 (22)，在 $\partial\Omega_2$ 上几乎处处成立，对每个 $u \in E_F^q$ 当且仅当

$$\begin{cases} a_{0,0}^{int} - \zeta a_{0,1}^{int} &= a_{0,0}^{ext} \\ a_{1,0}^{int} - \zeta(a_{1,1}^{int} - a_{0,0}^{ext}) &= 0 \end{cases} \quad \text{a.e. on } \mathbb{T}$$

而这等价于

$$\begin{cases} a_{0,0}^{int} - \zeta a_{0,1}^{int} &= a_{0,0}^{ext} \\ a_{1,0}^{int} - \zeta(a_{1,1}^{int} - a_{0,0}^{int}) - \zeta^2 a_{0,1}^{int} &= 0 \end{cases} \quad \text{a.e. on } \mathbb{T}. \tag{23}$$

现在我们考虑这类函数的两个不同例子 F，对于这两个例子，M_λ 作用在 E_F^q 上的交换子有不同的描述。

参数化 1： 我们先考虑 F_1 在 [19],第 4.1 节中的例子里定义为

$$F_1(e^{i\theta}) = \begin{cases} -1 + 2e^{-i3\theta/2} & \text{if } 0 \le \theta < 4\pi/3 \\ e^{-3i\theta} & \text{if } 4\pi/3 \le \theta < 2\pi. \end{cases} \tag{24}$$

对于这一选择的 F_1，与 M_λ 交换的算子 $A \in \mathcal{B}(E_{F_1}^q)$必定是乘法算子，即在 $\partial\Omega_2$ 上$a_{1,0} = a_{0,1} = 0$ 和$a_{0,0} = a_1$,1。根据式（23），要证明这一点，只需检查对于所有函数 $u, v, w \in E^1(\Omega_2) = H^1$(D)

$$u + 2\zeta_1 v + \zeta_1^2 w = 0 \text{ a.e. on } \mathbb{T} = \partial\Omega_2 \implies u = v = w = 0 \text{ on } \mathbb{D} = \Omega_2,$$

其中 $\zeta_1 := 1/F_1^{-1}$定义在 F_1(圆周) $\setminus \{1\}$上。因此，设 u，v，$w \in H^1$(D) 满足 $u + 2\zeta_1 v + \zeta_1^2 w = 0$ 在圆周上几乎处处成立。我们首先证明 $w \equiv 0$ 在 D 上成立。反设，并假定 w 在 D 上不恒为 0。由于 $\zeta_1 = 1/F_1^{-1}$满足

$$\zeta_1(\lambda) = \exp\left[\frac{i}{3}\arg_{(0,2\pi)}(\lambda)\right] \quad \text{for every } \lambda \in \partial\Omega_2 \setminus \{1\},$$

它存在一个到 $\Omega_2 \setminus [0,1]$的有界解析延拓，其表达式为

$$\zeta_1(\lambda) \;=\; \exp\left[\frac{1}{3}\log_{(0,2\pi)}(\lambda)\right] \quad \text{for every } \lambda \in \Omega_2 \setminus [0,1].$$

因此， $u+2\zeta_1 v+\zeta_1^2 w$属于 $E^1(\mathbb{D}\setminus[0,1])$，故在圆周 $\mathbb{T}$ 上几乎处处满足条件 $u+2\zeta_1 v+\zeta_1^2 w=0$，这意味着 $u+2\zeta_1 v+\zeta_1^2 w=0$ 在 $\mathbb{D}$ 上 $\setminus[0,1]$。由于 $w\neq 0$，我们有 $u+2\zeta_1 v+\zeta_1^2 w=0$ 当且仅当 $(w\zeta_1+v)^2-v^2+uw=w(u+2\zeta_1 v+\zeta_1^2 w)=0$

$$\text{if and only if } (w\zeta_1+v)^2=v^2-uw.$$

特别地，可得 $(w\zeta_1+v)^2$ 在 $\mathbb{D}$ 上解析，因而连续。对于每个 $x\in(0,1)$，有

$$\zeta_1(x^+):=\lim_{y\to 0^+}\zeta_1(x+iy)=\sqrt[3]{x} \quad \text{and} \quad \zeta_1(x^-):=\lim_{y\to 0^-}\zeta_1(x+iy)=\sqrt[3]{x}e^{2i\pi/3}.$$

但是， $(w\zeta_1+v)^2$ 在点 x 处的连续性表明 $(w(x)\zeta_1(x^+)+v(x))^2=(w(x)\zeta_1(x^-)+v(x))^2$,，这意味着

$$w(x)\zeta_1(x^+)+v(x)=\pm(w(x)\zeta_1(x^-)+v(x)) \quad \text{for every } x\in(0,1). \tag{25}$$

现在，根据唯一性原理，我们可以找到 $0<a<b<1$ 使得 $w(x)\neq 0$ 对每个 $x\in(a,b)$。由于 $\zeta_1(x^+)\neq\zeta_1(x^-)$，我们很容易看出，(25) 必然意味着，对于每个 $x\in(a,b)$，都有

$$w(x)\zeta_1(x^+)+v(x)=-(w(x)\zeta_1(x^-)+v(x)),$$

从而

$$(1+e^{2i\pi/3})w(x)\sqrt[3]{x}=w(x)(\zeta_1(x^+)+\zeta_1(x^-))=-2v(x). \tag{26}$$

设 $\widetilde{v}=-2v$ 且 $\widetilde{w}=(1+e^{2i\pi/3})w$。那么 (26) 得出， $\widetilde{v}(z)^3=z\widetilde{w}(z)^3$ 对每个 $z\in(a,b)$ $z\in$ 均成立，因此根据唯一性原理，该等式对每个 $z\in\mathbb{D}$ 也成立。由于 $w\neq 0$，0 是 $\widetilde{w}$的一个有限阶零点，因而也是 $\widetilde{v}$ 的零点。记 n_1 （分别为 n_2）为该零点对于 $\widetilde{v}$ （分别对于$\widetilde{w}$）的重数。于是方程 $\widetilde{v}^3=z\widetilde{w}^3$ 特别给出 $3n_1=1+3n_2$，这正是所需的矛盾。因此， $w=0$ 在 $\mathbb{D}$ 上且 $u+2\zeta v=0$ 在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处成立。由此，根据 [19] 中的命题4.9可得 $u=v=0$。

因此我们推得，如果图7 中曲线的参数化由（24）给出，那么

$$\{M_\lambda\}'=\left\{M_g\,;\, g\in \mathcal{M}ult(E^q_{F_1})\right\}.$$

参数化 2： 现在给出图 F_2 中曲线的另一种参数化 7 ，对于该参数化，存在一个算子 $A\in\{M_\lambda\}'$， $A\in\mathcal{B}(E^q_{F_2})$ ，它不是乘法算子。

设 $F_2\in C^{1+\varepsilon}(\mathbb{T})$ 满足 $F_2(\mathbb{T})$ 由图 7 给出并且满足

$$F_2(e^{i\theta})=e^{-2i\theta} \quad \text{for every } -\pi<\theta<0.$$

那么 $\zeta_2=1/F_2^{-1}$满足

$$\zeta_2(\lambda)=\exp\left[\frac{i}{2}\arg_{(0,2\pi)}(\lambda)\right],\ \text{for every } \lambda\in\partial\Omega_2\setminus\{1\}$$

因此， ζ_2 在 $\Omega_2\setminus[0,1]$ 上有一个解析延拓，其表达式为

$$\zeta_2(\lambda)=\exp\left[\frac{1}{2}\log_{(0,2\pi)}(\lambda)\right],\ \text{for every } \lambda\in\Omega_2\setminus[0,1].$$

注意，该解析延拓满足 $\zeta_2(\lambda)^2 = \lambda$ 对每个 $\lambda \in \Omega_2 \setminus [0,1]$均成立。因此，若我们考虑由 A 式 (21) 定义的算子，其中

$$a_{0,0}(\lambda) = \exp\left[\frac{1}{2}\log_{(0,2\pi)}(\lambda)\right] \text{ on } \Omega_1$$

and

$$a_{0,0} = a_{1,1} = 0,\ a_{0,1} = -1 \text{ and } a_{1,0}(\lambda) = -\lambda \text{ on } \Omega_2,$$

由（23），我们得到一个算子 $A \in \mathcal{B}(E^q_{F_2})$，它与 M_λ交换。由于（$AU1$）$_1 = -1 \neq 0$，我们推得

$$A \notin \{M_a\,;\, a \in \mathcal{M}ult(E^q_{F_2})\},$$

因此， $E^q_{F_2}$ 上的 M_λ 的交换子包含一些并非乘法算子的算子。

这两个例子表明，要在曲线 $F(\mathbb{T})$ 上寻找蕴含 T_F 的交换子由乘法算子组成的几何性质条件，可能是困难的。因此，我们通过介绍一个受例 解析 条件来结束本小节，该条件蕴含命题 6.6 的假设得到满足。根据命题 6.4，在此条件下， T_F 可嵌入到 C_0-半群中，该半群作用于 H^p，当且仅当 0 属于 复数域 $\setminus$int（$\sigma(T_F)$ 的无界连通分支。

定理 6.7。 设 $p > 1$，且设 F 是满足以下假设的符号 *(H1)*、*(H2)*和 *(H3)*。假设对于 Ω 的每个连通分支 $\sigma(T_F) \setminus F(\mathbb{T})$，以下条件成立：

(1) if $|\operatorname{wind}_F(\Omega)| = 2$, *then for any* $u, v, w \in E^1(\Omega)$ *we have*

$$u + \zeta v + \zeta^2 w = 0 \text{ a.e. on } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1 \implies u = v = w = 0 \text{ on } \Omega.$$

(2) if $k := |\operatorname{wind}_F(\Omega)| > 2$, *for any* $u, v \in E^1(\Omega)$ *we have*

$$u + \zeta v = 0 \text{ a.e. on } \partial\Omega \cap \partial\Omega_{k-1} \implies u = v = 0 \text{ on } \Omega.$$

那么 $\{M_\lambda\}' = \{M_a;\ a \in \mathcal{M}ult(E^q_F)\}$，即 M_λ 的交换子仅由乘法算子构成。

因此，当且仅当0属于复数域 $\setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$的无界连通分支时， T_F 可嵌入到 C_0-半群中。

定理 2中的条件 6.7 已在 [19], 中出现过；在那里给出了一个几何条件（称为性质（P）），该条件蕴含（2）成立。如上所述，我们不知道有任何几何条件能够蕴含定理1中的解析条件（6.7 ）成立。

证明。 所有乘法算子都属于 M_λ 的交换子，这一点显然。现在考虑 $A \in \{M_\lambda\}'$，并证明存在 $a \in \mathcal{M}ult(E^q_F)$ 使得 $A = M_a$。由引理 6.1，对于满足 $0 \le i, j < N$ 的每一对整数 (i, j)，存在函数 $a_{i,j} \in E^1(\Omega^+{}_{\max(i,j)})$，使得对于每个 $\lambda \in \sigma(T_F) \setminus F(\mathbb{T})$ 以及每个 $u \in E^q_F$，

$$(Au)_j(\lambda) = \sum_{i=0}^{|\operatorname{wind}_F(\lambda)|-1} a_{i,j}(\lambda) u_i(\lambda). \tag{27}$$

现在，我们将定理 6.7 的假设应用于函数 $a_{i,\,j}$ 的某些线性组合上，通过对 $1 \le k < N$ 进行归纳法，证明 $a_{0,\,1} = \cdots = a_{0,\,k} = 0$ 在 Ω_{k+1} 上成立。

为此，我们先考虑 $u = U1$。于是， $v = Au = (a_{0,0}, \ldots, a_{0,N-1}) \in E_F^q$，因此函数 $a_{0,j}$、 $0 \le j < N-1$ 满足

$$a_{0,j}^{int} - \zeta a_{0,j+1}^{int} = a_{0,j}^{ext} \text{ a.e. on } \partial\Omega_{j+1}^{+}. \tag{28}$$

接下来考虑 $u = Uz$，记作 $u = (u_0, 1, 0, \ldots, 0)$，由事实 3.2可知。于是$u_0^{int} - \zeta = u_0^{ext}$在 $\partial\Omega_1^{+}$ 上几乎处处成立，且若令 $v = Au$ 并记 $v = (v_0, v_1, \ldots, v_{N-1})$，则

$$\begin{cases} v_0 = a_{0,0}u_0 & \text{on } \Omega_1 \\ v_j = a_{0,j}u_0 + a_{1,j} & \text{on } \Omega_{\max(1,j)}^{+} \text{ for every } 0 \le j < N. \end{cases}$$

由于 $v_0^{int} - \zeta v_1^{int} = v_0^{ext}$在 $\partial\Omega_1^{+}$上几乎处处成立，因此特别地，在 $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$,上几乎处处有以下关系:

$$a_{0,0}^{int}u_0^{int} + a_{1,0}^{int} - \zeta(a_{0,1}^{int}u_0^{int} + a_{1,1}^{int}) = a_{0,0}^{ext}u_0^{ext}.$$

由于$u_0^{int} - \zeta = u_0^{ext}$在 $\partial\Omega_1^{+}$上几乎处处成立，特别是在 $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, 上几乎处处成立，因此我们推得，在 $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$,上也几乎处处有

$$(a_{0,0}^{int} - \zeta a_{0,1}^{int} - a_{0,0}^{ext})u_0^{int} + a_{1,0}^{int} - \zeta(a_{1,1}^{int} - a_{0,0}^{ext}) = 0.$$

根据（28），我们知道 $a_{0,0}^{ext} = a_{0,0}^{int} - \zeta a_{0,1}^{int}$ 在 $\partial\Omega_1^{+}$ 上几乎处处成立，因此可推出

$$a_{1,0}^{int} - \zeta(a_{1,1}^{int} - a_{0,0}^{int}) - \zeta^2 a_{0,1}^{int} = 0 \text{ a.e. on } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2.$$

因此，将定理 6.7 的假设（1）应用于 Ω_2，的任意连通分支，可得 $a_{0,1} = 0$ 在 Ω_2 上成立。

现在假设 $1 \le k < N-1$ 满足 $a_{0,1} = \cdots = a_{0,k} = 0$ 在 Ω 上$^{k+1}$。由（28），对每个 $1 \le j \le k$ 都有等式

$$a_{0,j}^{int} - \zeta a_{0,j+1}^{int} = a_{0,j}^{ext} = 0 \text{ a.e. on } \partial\Omega_{k+1} \cap \partial\Omega_{k+2}.$$

因此，这次将定理 6.7 的假设（2）应用于 Ω_{k+2} 的任意连通分支，可推出 $a_{0,j} = a_{0,j+1} = 0$ 在 Ω_{k+2} 上成立，即 $a_{0,1} = \cdots = a_{0,k+1} = 0$ 在 Ω_{k+2} 上成立。由此我们通过归纳法证明了

$$a_{0,j} = 0 \text{ on } \Omega_j^{+} \text{ for every } 1 \le j < N. \tag{29}$$

现在我们需要以下引理:

引理 6.8. 令 $a := a_{0,0}$，其定义在 Ω_0^{+} 上。那么 a 属于 $\mathcal{M}ult(E_F^q)$。

证明. 注意，根据引理 4.1， N-元组 $(u_0, 0, \ldots, 0)$ 属于 E_F^q当且仅当 u_0属于 $E^q(\operatorname{int}(\sigma(T_F)))$。运用乘子理论的标准论证，不难证明

$$\mathcal{M}ult\left(E^q\left(\operatorname{int}\left(\sigma(T_F)\right)\right)\right) = H^{\infty}\left(\operatorname{int}\left(\sigma(T_F)\right)\right).$$

因此，根据定理4.2，我们得到

$$\mathcal{M}ult(E_F^q) = \mathcal{M}ult\left(E^q\left(\operatorname{int}\left(\sigma(T_F)\right)\right)\right).$$

因此，令 $u_0 \in E^q(\operatorname{int}(\sigma(T_F)))$，使得 $u = (u_0, 0, \ldots, 0) \in E_F^q$。根据（27），对每个 $0 \le j < N$，我们有

$$(Au)_j = a_{0,j}u_0 \quad \text{on } \Omega_j^{+},$$

并利用（29），我们推得 $Au =$（au_0, 0, ..., 0）。由于 $Au \in E_F^q$，可得 $au_0 \in E^q$（int（σ（T_F））。因此我们推得

$$a \in \mathcal{M}ult\left(E^q\left(\operatorname{int}\left(\sigma(T_F)\right)\right)\right) = \mathcal{M}ult(E_F^q). \qquad \square$$

现在，由于 $a \in \mathcal{M}ult(E_F^q)$，若考虑 $u \in E_F^q$，再将 $v = Au - M_a u$写作 $v = (v_0, \ldots, v_{N-1})$，则有 $v \in E_F^q$，并由（27）和（29），可得 $v_0 = 0$在 Ω 上。为完成定理 6.7的证明，我们需要证明 $v = 0$，而这直接由以下引理得出。

引理 6.9. 设 F 是满足条件 *(H1)*、*(H2)*和 *(H3)*的符号。假设对于 Ω 的每个连通分支 $\sigma(T_F) \setminus F(\text{圆周})$，若 $k := |\operatorname{wind}_F(\Omega)| \geq 2$，则对所有 u，$v \in E^1(\Omega)$，

$$u + \zeta v = 0 \ a.e. \ on \ \partial\Omega \cap \partial\Omega_{k-1} \implies u = v = 0 \ on \ \Omega. \tag{30}$$

那么，对于每个 $u = (u_0, \ldots, u_{N-1}) \in E_F^q$，以下性质成立：若 $u_0 = 0$ 在Ω_1，上，则 $u = 0$。

证明。我们用归纳法证明 $1 \leq l \leq N$在 Ω 上成立 $u_0 = \cdots = u_{l-1} = 0$。

对于 $l = 1$，这成立，因为假设 u_0 在 Ω_1 上消失。现在假设$1 \leq l < N$满足：$u_0 = \cdots = u_{l-1} = 0$ 在 Ω_l 上。于是，对每个 $0 \leq j < l$，几乎处处在 $\partial\Omega_l \cap \partial\Omega_{l+1}$ 上，

$$u_j^{int} - \zeta u_{j+1}^{int} = u_j^{ext} = 0.$$

于是，根据引理 6.9 对 Ω 的每个连通分支的假设$_{l+1}$，我们得出 $u_j = u_{j+1} = 0$ 在 Ω 上成立$_{l+1}$，即 $u_0 = \cdots = u_l = 0$ 在 Ω 上成立$_{l+1}$。引理 6.9的证明至此完成。□

为完成定理 6.7的证明，先指出该定理的假设蕴含引理 6.9的假设。事实上，蕴含关系（30）由假设 (1) 在 $w = 0$ 时得出 $k = 2$，而在 $k > 2$时则由假设 (2) 得出。

现在令 $u \in E_F^q$和 $v = Au - M_a u$，其中 $v = (v_0, \ldots, v_{N-1})$。如上所述，$v \in E_F^q$ 和 $v_0 = 0$ 在 Ω 上$_1$。由引理 6.9，我们得出 $v = 0$，因此$Au = M_a u$。于是，A 是一个乘法算子，定理 6.7 得证。□

7. Looking for a characterization of embeddability

我们在本节开头于下述定理 7.1 中给出关于函数 ζ 的一个条件，该条件保证 T_F 的可嵌入性等价于 0 属于复数域 $\setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$ 的无界连通分支这一事实。通过研究一个满足 $\max_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus F(\mathbb{T})} |\operatorname{wind}_F(\lambda)| = 2$ 的具体例子（例 7.3），我们将在第 7.2 节看到，当这一条件不成立时，算子 T_F 可能是可嵌入的，即使 0 属于复数域 $\setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$ 的有界连通分支。这个例子引出了对一类有趣的符号 F 中的 T_F 的可嵌入性的刻画，这类符号满足 $\max_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus F(\mathbb{T})} |\operatorname{wind}_F(\lambda)| = 2$；我们将在第 7.3 节（定理 D）中给出这一刻画。定理 D 的证明部分依赖于处理例 7.3 时所采用的方法。

7.1. 关于函数 ζ 的条件。本小节旨在证明以下结果：

定理 7.1。设 $p > 1$，并假设 $F \in L^\infty(\text{圆周})$ 满足 *(H1)*、*(H2)* 和*(H3)*。记 X 为复数域 $\setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$的无界连通分支。假设

(1) 曲线 $F(\text{圆周})$ 与 ∂X 的所有交点都是简单的；

(2) 对于 $\sigma(T_F) \setminus F$(圆周) 的每个连通分支 Ω，若满足 Ω $\subset \Omega_2$ 且$\partial\Omega \cap \partial X \neq \varnothing$，则存在一个非平凡的连通子弧 $\gamma \subset (\partial\Omega \cap \partial\Omega_1) \setminus \mathcal{O}$，使得 ζ 在 γ 上几乎处处不等于 $\mathcal{N}$(Ω)中某个函数的非切向极限。

那么， $T_F \in \mathcal{B}(H^p)$ 可嵌入，当且仅当0 属于 X。

在开始证明定理 7.1之前，回顾一下： F 是从$\mathbb{T} \setminus F^{-1}(\mathcal{O})$ 到 $F(\mathbb{T}) \setminus \mathcal{O}$的双射，并且映射 $\zeta = 1/F^{-1}$ 在 $F(\mathbb{T}) \setminus \mathcal{O}$上有定义，而且在包含于 $F(\mathbb{T}) \setminus \mathcal{O}$中的每条开弧上属于类 C^1。

证明。 根据定理 B，我们已经知道， T_F 可嵌入到 C_0-半群中，定义在 H^p 上，只要0属于 X。因此，让我们证明逆命题，并假设 T_F 可嵌入到 C_0-半群中，定义在 H^p上。根据命题5.5，我们知道，如果0属于 T_F的谱，那么必然有 $0 \in \mathcal{O} \cup \partial\sigma(T_F)$。

根据命题 3.4，存在一个算子 $A \in \mathcal{B}(E_F^q)$，使得$A^2 = M_\lambda$。考虑 N 元组 $(u_0, \ldots, u_{N-1}) = A(1, 0 \ldots, 0)$（属于 E_F^q）。我们的目标是证明，函数 u_0 是开集 $\mathcal{V}$ 上平方根的解析分支，其中 $\mathcal{V}$ 定义为 $\sigma(T_F) \setminus F$(T) 中满足 $\partial\Omega \cap \partial X \neq \varnothing$ 的所有连通分支 Ω 的闭包之并集的内部。证明这一点后，即可推出 0 必须属于复数域 C $\setminus \mathcal{V}$ 的无界连通分支，也就是 X。

考虑算子 $B = (U^{-1}AU)^*$，它作用于 H^p，其中 U是由 (12) 给出的从 H^q 到 E_F^q 的算子。根据算子 A 的构造以及定理 3.3，我们有 $B^2 = T_F$，因此对每个 $\lambda \in$ C，都有 $B(\ker(T_F - \lambda)) \subseteq \ker(T_F - \lambda)$。现在根据 (6)，对每个 $\lambda \in \Omega_1$,$\ker(T_F - \lambda) = \operatorname{span}\left[h_{\lambda,0}\right]$。特别地，对每个 $\lambda \in \Omega_1$, ，都存在一个复数 $\alpha(\lambda)$，使得$Bh_{\lambda,0} = \alpha(\lambda)h_{\lambda,0}$ 且 $\alpha(\lambda)^2 = \lambda$。根据事实 3.2，$U1 = (1, 0, \ldots, 0)$，这意味着 $(u_0, \ldots, u_{N-1}) = UB^*1$。特别地，对每个 $\lambda \in \Omega_1$, ，我们得到

$$u_0(\lambda) = \langle B^*1, h_{\lambda,0}\rangle = \langle 1, Bh_{\lambda,0}\rangle = \alpha(\lambda)\,\langle 1, h_{\lambda,0}\rangle = \alpha(\lambda).$$

由此可知，$u_{0|\Omega_1} = \alpha$ 是 Ω_1上平方根的解析分支。我们的目标是证明 u_0 是$\mathcal{V}$上的平方根的解析分支，因此我们将证明，在 $\Omega_2 \cap \mathcal{V}$上，即在每个满足$\tilde{}$绕$_F$(Ω) $= -2$ 且 $\partial\Omega \cap \partial X \neq \varnothing$的连通分支 Ω 上，有 $u_1 \equiv 0$。这将表明，对于 $\mathcal{V}$的任意两个连通分支 Ω、Ω$\tilde{}$，只要 $\partial\Omega \cap \partial\Omega$ 具有正测度，边界条件就变为在 $\partial\Omega \cap \partial\tilde{}$上几乎处处成立的 $u_0^{int} = u_0^{ext}$（请记住， F(T) 在∂X 上的所有交点都是简单的，因此，若 $\sigma(T_F) \setminus F$(T) 的一个连通分支 Ω 满足 $\partial\Omega \cap \partial X \neq \varnothing$，则必有 $\operatorname{wind}_F(\Omega) \geq -2$）。最后，引理 4.1 将表明， u_0 可解析延拓至 $\mathcal{V}$，根据唯一性定理，该延拓必然是平方根的解析分支。

假设存在 $\sigma(T_F) \setminus F$(T) 的一个连通分支 Ω，满足 $\operatorname{wind}_F(\Omega) = -2$ 且 $\partial\Omega \cap \partial X \neq \varnothing$，并且 u_1 在 Ω 上不恒为零。令 γ 如定理 7.1 的假设中所述。于是，由于 $0 \in \mathcal{O} \cup \partial\sigma(T_F)$，我们有$0 \notin \gamma$，以及 $\gamma \cap \mathcal{O} = \varnothing$。0 不属于 Ω 这一事实意味着，在 Ω 上存在平方根 α_γ 的解析分支，使得 $\alpha_\gamma = \alpha$ 在γ上。注意， $\alpha_\gamma \in H^\infty$(Ω) $\subset E^1$(Ω)。根据“边界条件”所涉及的

E_F^q 的定义，我们有

$$u_0^{int} - \zeta u_1^{int} = u_0^{ext} = \alpha_\gamma \text{ a.e. on } \gamma.$$

那么， ζ 在 γ 上几乎处处等于定义在 Ω 上的亚纯函数 w 的非切向极限，该函数为

$$w = \frac{u_0 - \alpha_\gamma}{u_1}. \tag{31}$$

由于这三个函数 u_0、u_1 和 α_γ 属于 $E^1(\Omega)$，这与假设 (2) 矛盾，因此不存在这样的连通分支 Ω。

因此，对于每个 $\lambda \in \Omega_2 \cap \mathcal{V}$，都有 $u_1(\lambda) = 0$，进而边界条件给出

$$u_0^{int} = u_0^{ext} \text{ a.e. on } \mathcal{V} \cap F(\mathbb{T}).$$

然后，根据引理 4.1，函数 u_0 属于 $E^q(\mathcal{V})$。但是 $\mathcal{V}$ 是连通的，并且根据构造， $u_0^2(\lambda) = \lambda$ 对每个 $\lambda \in \mathcal{V} \cap \Omega_1$都成立。根据唯一性定理， $u_0^2(\lambda) = \lambda$对每个 $\lambda \in \mathcal{V}$ 都成立，这给出了平方根在 $\mathcal{V}$上的解析分支。因此我们最终得到，0 属于 $\mathbb{C} \setminus \mathcal{V}$的无界连通分支，而该分支是 X。这就完成了定理 7.1 的证明。□

注 7.2. 注意，定理 7.1 的证明表明，若存在有界算子 B 作用于 H^p，使得 $B^2 = T_F$，且 Ω 是 $\sigma(T_F) \setminus F$(圆周) 的一个连通分支，且 $\text{wind}_F(\Omega) = -2$ 那么以下两种情形只能有一种成立：

(a) $u_1 \equiv 0$ 在 Ω 上，其中 $(u_0, \dots, u_{N-1}) = UB^*1$，特别地，在 $\text{int}(\Omega_1 \cup \Omega)$ 上存在平方根的解析分支；(b) 对每个连通弧 $\gamma \subset (\partial\Omega \cap \partial\Omega_1) \setminus \mathcal{O}$，函数 ζ 在 γ 上几乎处处等于函数在 $\mathcal{N}(\Omega)$ 中由 (31) 给出的非切向极限。

7.2. **一个例子。** 鉴于定理7.1，我们自然会想进一步理解条件 (2)：我们已经看到，当该条件成立时，T_F的可嵌入性迫使 0 属于 X，即 复数域 $\setminus \text{int}\,(\sigma(T_F))$ 的无界连通分支。若 T_F可嵌入，尽管 0 不属于 X，这是否本质上是因为条件 (2) 不成立? 本小节将构造一个具体例子，为这一结果提供线索。下面的小节7.3 将进一步发展这一思路，既利用该例子带来的直觉，也利用在例 7.3 的特定情形下证明的一些结果7.3，而这些结果具有更广泛的适用性。

例 7.3。 设 F 满足 (H1)，且曲线 F(圆周由下图给出：

曲线 F(圆周) 的定向为负向。复数域 $\setminus F$(圆周) 有四个连通分支：令 Ω_1 和 Ω_2 分别表示满足 $\text{wind}_F(\lambda) = -1$ 和 $\text{wind}_F(\lambda) = -2$ 的 $\lambda \in$ 复数域中的点集。令 Ω_0 为复数域 $\setminus \sigma(T_F)$ 的有界连通分支，Ω_∞ 为其无界连通分支。

对于 $j = 1, 2$，曲线 γ_j 是一段半径为 r、圆心位于点 c_j 的负向定向圆弧，其中 $c_1 = \bar{c}_2$ 且 $\text{Im}(c_1) < 0$ （因此 $0 < \text{Im}(c_2) < r$）。圆弧 γ_1 可写为

$$\gamma_1 = \{c_1 + re^{i\tau} : \tau \in (\delta, \pi - \delta)\},$$

其中 $\delta =$反正弦$(\text{Im}(c_2)/r)$，且

$$\gamma_2 = \{c_2 + re^{i\tau} : \tau \in (-\pi + \delta, -\delta)\} = \bar{\gamma}_1.$$

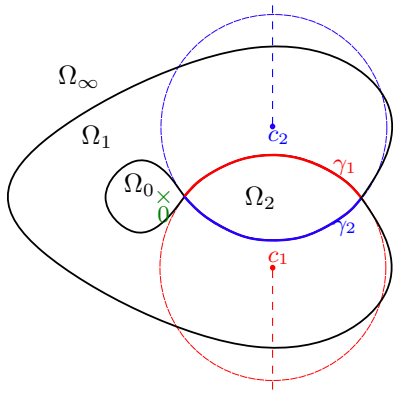


FIGURE 8

曲线 γ_1 和 γ_2 按以下方式由 F 参数化：固定 $\nu > 1$，并考虑圆周 $\mathbb{T}$ 上由下式定义的两个子弧 α_1 和 α_2

$$\alpha_1 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{T} : \theta \in ((-\pi + \delta)/\nu, -\delta/\nu)\},$$

以及 $\alpha_2 = \overline{\alpha_1}$。如果 ν 足够大，这两段弧互不相交。我们在 $\mathbb{T}$ 上定义 F，使得 F 足够光滑，并且当 $j = 1, 2$ 时，有

$$F(e^{i\theta}) = c_j + re^{-i\nu\theta} \quad \text{for every } e^{i\theta} \in \alpha_j.$$

特别地，$F(\alpha_j) = \gamma_j$。

当 $j = 1, 2$ 时，令 ζ_j 为函数 ζ 在曲线 γ_j上的限制 $\zeta_{|\gamma_j}$。那么，ζ_1（分别是 ζ_2）可解析延拓到 $\Omega_2 \setminus (c_1 - i\mathbb{R}_+)$（分别延拓到 $\Omega_2 \setminus (c_2 + i\mathbb{R}_+)$），其表达式为

$$\zeta_1(\lambda) = \exp\left(\frac{1}{\nu} \log_{(-\pi/2, 3\pi/2)}\left(\frac{\lambda - c_1}{r}\right)\right) \quad \text{for } \lambda \in \Omega_2 \setminus (c_1 - i\mathbb{R}_+)$$

$$\zeta_2(\lambda) = \exp\left(\frac{1}{\nu} \log_{(-3\pi/2, \pi/2)}\left(\frac{\lambda - c_2}{r}\right)\right) \quad \text{for } \lambda \in \Omega_2 \setminus (c_2 + i\mathbb{R}_+).$$

这个例子中的关键观察是，现在，根据 c_1、c_2 和 r的取值，函数 ζ_1 和 ζ_2 可能存在也可能不存在到 Ω_2 的全纯延拓——这会显著改变对 T_F嵌入性质的刻画。

第一种情形：假设 c_1（因此 c_2）属于 Ω_2。 那么 ζ_1 和ζ_2 不能亚纯延拓到 Ω_2；事实上 F 满足定理 7.1的假设，因此 $T_F \in \mathcal{B}(H^p)$ 可嵌入，当且仅当 0 属于 Ω_∞。 _

第二种情况：假设 c_1 和 c_2 不属于 Ω_2。 那么函数 ζ_1 和 ζ_2 都可以全纯地延拓到 Ω_2，，并且它们的延拓（仍记为 ζ_1 和 ζ_2）属于 $A(\Omega_2)$（Ω_2 上的连续函数空间，且在 Ω_2上全纯）。此外（这在后文中会很有用），函数 $\zeta_1 - \zeta_2$ 在 Ω_2上不为零。事实上，令 $\lambda \in \Omega_2$。则有 — —

$$\arg_{(-\pi/2, 3\pi/2)}\left(\frac{\lambda - c_1}{r}\right) \in (\delta, \pi - \delta),$$

这意味着

$$\frac{1}{\nu}\arg_{(-\pi/2,3\pi/2)}\left(\frac{\lambda-c_1}{r}\right)\in(\delta/\nu,(\pi-\delta)/\nu),$$

类似地，我们有

$$\arg_{(-3\pi/2,\pi/2)}\left(\frac{\lambda-c_2}{r}\right)\in(-\pi+\delta,-\delta)$$

这意味着

$$\frac{1}{\nu}\arg_{(-3\pi/2,\pi/2)}\left(\frac{\lambda-c_2}{r}\right)\in((-\pi+\delta)/\nu,-\delta/\nu).$$

Thus

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\nu}\log_{(-\pi/2,3\pi/2)}\left(\frac{\lambda-c_1}{r}\right)-\frac{1}{\nu}\log_{(-3\pi/2,\pi/2)}\left(\frac{\lambda-c_2}{r}\right)\right)\in(2\delta/\nu,2(\pi-\delta)/\nu),$$

并且由此可得 $\zeta_1(\lambda)-\zeta_2(\lambda)\notin\mathbb{R}_+$ 对每个 $\lambda\in\overline{\Omega_2}$均成立。特别地，对每个 $\lambda\in\Omega_2$，$\zeta_1(\lambda)\neq\zeta_2(\lambda)$，而且函数 $\zeta_1-\zeta_2$ 在 Ω_2上有下界。

现在我们的目标是证明，在这种情况下有如下结果：

命题 7.4。 如果 0 属于 Ω_∞ 或$\overline{\Omega_0}$，那么 T_F 可嵌入到一个 C_0-半群中。

证明。 首先注意，若 0 属于 Ω_∞，则根据定理 B，算子 T_F 可嵌入到一个作用于 C_0上的算子半群 H^p中。现在假设 0 属于 Ω_0。根据命题3.4， T_F 可嵌入当且仅当乘法算子 M_λ 由自变量给出 λ，作用于 E_F^q，可嵌入到一个 C_0有界算子半群 $(A_t)_{t>0}$ 上 E_F^q。回顾一下，在这种情况下，我们有

$$E_F^q=\left\{(u_0,u_1)\in E^q(\Omega_1\cup\Omega_2)\oplus E^q(\Omega_2)\,;\,u_0^{int}-\zeta u_1^{int}=u_0^{ext}\ \text{ a.e. on }\gamma_1\cup\gamma_2\right\}.$$

步骤 1： 假设 M_λ 可嵌入到一个作用于 E_F^q 上的有界算子半群 $(A_t)_{t>0}$中。由于每个算子 A_t 都与 M_λ可交换，引理 6.1 表明，存在函数 $\alpha_t\in E^1(\Omega_1)$ 和 $a_t,\ b_t,\ c_t,\ d_t\in E^1(\Omega_2)$，使得若对每个 $u=(u_0,\ u_1)$ 记 $\in E_F^q$, $v_t=A_tu$，并记 $v_t=(v_{t,\,0},\ v_{t,\,1})$，则

$$\begin{cases}v_{t,0}=\alpha_t u_0 & \text{on }\Omega_1\\ v_{t,0}=a_tu_0+b_tu_1 & \text{on }\Omega_2\\ v_{t,1}=c_tu_0+d_tu_1 & \text{on }\Omega_2\end{cases}. \tag{32}$$

此外，根据引理 6.3，存在 Ω_1 上对数函数的一个解析分支 log，使得 $\alpha_t(\lambda)=e^{t\log(\lambda)}$ 对每个 $\lambda\in\Omega_1$ 和每个 $t>0$都成立。由于 $0\notin\Omega_1$，函数 log 属于 $\overline{H}^\infty(\Omega_1)$。它有两个不同的延拓至 Ω_2，，分别记为 $\log_1$ 和 $\log_2$，，满足 $\log_j=\log$ 在 γ_j 上，$j=1,\ 2$。注意，按照图 9 所示的 γ_j 取值，我们有 $\log_2=\log_1+2i\pi$ 在 Ω_2 上成立。于是，函数 α_t 也有两个解析延拓至 Ω_2，分别为

$$\alpha_{t,j}(\lambda)=e^{t\log_j(\lambda)},\quad\lambda\in\Omega_2,\quad j=1,2. \tag{33}$$

我们有 $\alpha_{t,2}=e^{2i\pi t}\alpha_{t,1}$ 在 Ω_2 且 $\alpha_t^{int}{}_{,j}=\alpha_t^{ext}$在 γ_j。注意，函数

$$\lambda\longmapsto\begin{cases}\alpha_t(\lambda) & \text{for }\lambda\in\Omega_1\\ \alpha_{t,j}(\lambda) & \text{for }\lambda\in\Omega_2\cup\gamma_j\end{cases}$$

在 $\Omega_1 \cup \gamma_j \cup \Omega_2$上有界。我们仍将其记为 $\alpha_{t,j}$。

Let

$$B_t(\lambda) = \begin{pmatrix} a_t(\lambda) & b_t(\lambda) \\ c_t(\lambda) & d_t(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \Omega_2,\ t > 0. \tag{34}$$

那么（32）中的条件可以改写为如下形式：$v_{t,\ 0} = \alpha_t u_0$ 在 Ω_1上，并且

$$\begin{pmatrix} v_{t,0}(\lambda) \\ v_{t,1}(\lambda) \end{pmatrix} = B_t(\lambda) \begin{pmatrix} u_0(\lambda) \\ u_1(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \Omega_2.$$

此外，我们知道，对于每个 $u \in E_F^q$，元素 $v_t = A_t u$ 属于 E_F^q。现在我们将证明，定义 E_F^q的边界条件唯一确定函数 a_t，b_t，c_t 和 d_t。

根据事实 3.2，我们知道 $u = (u_0,\ u_1) = (1,\ 0)$ 属于 E_F^q，而（32）给出 $v_{t,\ 0} = \alpha_t u_0$ 在 Ω_1, 上，并且在 Ω_2, 上有 $v_{t,\ 0} = a_t u_0$ 和 $v_{t,\ 1} = c_t u_0$。由于a_t 和 b_t 属于 $E^1(\Omega_2)$，它们在 $\partial\Omega_2$, 上几乎处处具有边界值，我们分别记为 a_t^{int}和 c_t^{int}。现在，E_F^q 的边界关系给出$v_t^{int}{}_{,\ 0} - \zeta v_t^{int}{}_{,\ 1} = v_t^{ext}{}_{0,}$ 在 $\partial\Omega_2$, 上几乎处处成立，即

$$a_t^{int} u_0^{int} - \zeta c_t^{int} u_0^{int} = \alpha_t^{ext} u_0^{ext} \quad \text{a.e. on } \partial\Omega_2.$$

但是 $u_0^{int} = u_0^{ext} = 1$，由此得到

$$a_t^{int} - \zeta c_t^{int} = \alpha_t^{ext} \text{ a.e. on } \partial\Omega_2. \tag{35}$$

利用函数 ζ 在 γ_1 和 γ_2 上的延拓（它们具有正长度），并注意到所有函数 a_t，$\zeta_j c_t$ 和$\alpha_{t,\ j}$ 都属于 $E^q(\Omega_2)$（记住，ζ_j 在 Ω_2上有界），根据斯米尔诺夫空间中函数的唯一性性质，我们推得函数 a_t 和 c_t 必然满足以下方程组：

$$\begin{cases} a_t - \zeta_1 c_t = \alpha_{t,1} \\ a_t - \zeta_2 c_t = \alpha_{t,2} = e^{2i\pi t}\alpha_{t,1} \end{cases} \quad \text{on } \Omega_2. \tag{36}$$

于是我们得到，如果函数 a_t 和 c_t确实存在，那么它们在 Ω_2上的定义必为：

$$a_t = \frac{\zeta_2 - e^{2i\pi t}\zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1}\,\alpha_{t,1} \quad \text{and} \quad c_t = \frac{1 - e^{2i\pi t}}{\zeta_2 - \zeta_1}\,\alpha_{t,1} \text{ on } \Omega_2. \tag{37}$$

现在来确定函数 b_t 和 d_t 在 Ω_2上的表达式。

根据事实 3.2，我们可以将 Uz写成 $Uz = (u_0, 1)$，其中 u_0属于$H^\infty(\Omega_1 \cup \Omega_2)$。由于数对 $(u_0, 1)$ 属于 E_F^q，因此在$\partial\Omega_2$上几乎处处有 $u_0^{int} - \zeta = u_0^{ext}$。此外，由 (32) 可知，在 Ω_1, 上以及 Ω_2 上有 $v_{t,0} = \alpha_t u_0$，并且有 $v_{t,0} = a_t u_0 + b_t$和 $v_{t,1} = c_t u_0 + d_t$。由于 b_t 和 d_t 必须属于 $E^1(\Omega_2)$，它们在 Ω_2, 上几乎处处存在边界极限，分别记为 b_t^{int}和 d_t^{int}。现在，由 E_F^q 的边界关系可知，在 $\partial\Omega_2$, 上几乎处处有 $v_t^{int}{}_{,0} - \zeta v_t^{int}{}_{,1} = v_t^{ext}{}_{0}$，也就是说

$$a_t^{int} u_0^{int} + b_t^{int} - \zeta(c_t^{int} u_0^{int} + d_t^{int}) = \alpha_t^{ext} u_0^{ext} = \alpha_t^{ext}(u_0^{int} - \zeta) \text{ a.e. on } \partial\Omega_2.$$

因此，这意味着

$$(a_t^{int} - \zeta c_t^{int} - \alpha_t^{ext}) u_0^{int} + b_t^{int} - \zeta(d_t^{int} - \alpha_t^{ext}) = 0 \text{ a.e. on } \partial\Omega_2.$$

但由（35）可知 $a_t^{int} - \zeta c_t^{int} = \alpha_t^{ext}$，因此

$$b_t^{int} - \zeta(d_t^{int} - \alpha_t^{ext}) = 0 \text{ a.e. on } \partial\Omega_2. \tag{38}$$

再者，分别利用 ζ_1 和 ζ_2 将 ζ 经由 γ_1 和 γ_2 延拓到 Ω_2，可得

$$\begin{cases} b_t - \zeta_1(d_t - \alpha_{t,1}) = 0 \\ b_t - \zeta_2(d_t - e^{2i\pi t}\alpha_{t,1}) = 0 \end{cases} \quad \text{on } \Omega_2, \tag{39}$$

因此，函数 b_t 和 d_t 必然由以下表达式定义在 Ω_2 上：

$$b_t = \frac{\zeta_1\zeta_2}{\zeta_2 - \zeta_1}(e^{2i\pi t} - 1)\alpha_{t,1} \quad \text{and} \quad d_t = \frac{e^{2i\pi t}\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1}\alpha_{t,1} \quad \text{on } \Omega_2. \tag{40}$$

总之，我们证明了：若 $(A_t)_{t>0}$ 是作用于 E_F^q 上的有界算子半群，且满足 $A_1 = M_\lambda$（这里无需假设它是一个 C_0-半群），则存在：

(A) 对数在 Ω_1 上的一个解析分支 log，它有两个不同的延拓 $\log_1$ 和 $\log_2$ 至 Ω_2，使得 $\log = \log_j$ 在 γ_j, $j = 1,2$ 上；并且若对于每个 $\lambda \in \Omega_1$ 和每个 $t > 0$，都有$\alpha_t(\lambda) = e^{t\log(\lambda)}$，则它有两个解析延拓$\alpha_{t,1}$ 和 $\alpha_{t,2}$ 至 Ω_2，由 (33) 给出；(B) 由公式 (37) 和 (40) 定义在 Ω_2 上的函数 a_t、b_t、c_t 和 d_t 使得对于每个 $t > 0$，A_t 作用于向量 $u = (u_0, u_1) \in E_F^q$ 由 $A_t u = v_t = (v_{t,0}, v_{t,1})$给出，其中的定义使用了方程（32）。

步骤 2： 反过来，由于 $0 \notin \overline{\Omega_1}$，存在一个属于 $H^\infty(\Omega_1)$的对数解析分支 log，它满足上述性质 (A)；对于 $t > 0$，令 a_t，b_t，c_t，d_t 在 Ω 上由公式 (37) 和 (40)。令 A_t 为定义在 E_F^q 上、由公式 (32)定义的算子。我们断言

(a) A_t 是 E_F^q 上的有界算子；(b) 我们有 $A_1 = M_\lambda$；(c) 当 $t \to 0$时，$\|A_t - I\| \longrightarrow 0$；(d) 对每个 t，$s > 0$。

由于函数 $\alpha_{t,1}$, $\alpha_{t,2}$, ζ_1 和 ζ_2 在 Ω_2，上有界，且 $\zeta_1 - \zeta_2$ 在 Ω_2，上有下界，因此函数 a_t, b_t, c_t, d_t 在 Ω_2 上有界。于是，对每个 $u \in E_F^q$，$E^q(\Omega_1 \cup \Omega_2) \oplus E^q(\Omega_2)$ 都包含 $v_t = A_t u$。由于 v_t 也满足定义 E_F^q 的边界关系，根据函数 α_t, a_t, b_t, c_t 和 d_t 的构造可知，A_t 是 E_F^q 上的有界线性算子。因此，性质 (a) 得以满足。取 $t = 1$，还可注意到 $A_1 = M_\lambda$（即 (b)）；最后注意到，若 B_t 由 (34) 定义，则当 $t \to 0$ 时，$B_t \longrightarrow I$ 在 $\lambda \in \Omega_2$ 上一致成立；因此 (c) 也显然成立。故只需证明性质 (d)。为此，只需证明对每个 $t, s > 0$, $B_{t+s}(\lambda) = B_t(\lambda)B_s(\lambda)$ 对每个$\lambda \in \Omega_2$ 都成立。令

$$a_t = \frac{\alpha_{t,1}}{\zeta_2 - \zeta_1}\widetilde{a}_t, \; b_t = \frac{\alpha_{t,1}}{\zeta_2 - \zeta_1}\widetilde{b}_t, \; c_t = \frac{\alpha_{t,1}}{\zeta_2 - \zeta_1}\widetilde{c}_t \quad \text{and} \quad d_t = \frac{\alpha_{t,1}}{\zeta_2 - \zeta_1}\widetilde{d}_t.$$

由构造可知 $\alpha_{t+s,1} = \alpha_{t,1}\alpha_{s,1}$，因此我们只需验证以下等式成立：

$$\begin{cases} \widetilde{a}_t\widetilde{a}_s + \widetilde{b}_t\widetilde{c}_s = \widetilde{a}_{t+s}(\zeta_2 - \zeta_1) \\ \widetilde{a}_t\widetilde{b}_s + \widetilde{b}_t\widetilde{d}_s = \widetilde{b}_{t+s}(\zeta_2 - \zeta_1) \\ \widetilde{c}_t\widetilde{a}_s + \widetilde{d}_t\widetilde{c}_s = \widetilde{c}_{t+s}(\zeta_2 - \zeta_1) \\ \widetilde{c}_t\widetilde{b}_s + \widetilde{d}_t\widetilde{d}_s = \widetilde{d}_{t+s}(\zeta_2 - \zeta_1) \end{cases}$$

下面验证这四个等式。首先有

$$\begin{aligned}\widetilde{a}_t\widetilde{a}_s+\widetilde{b}_t\widetilde{c}_s &= (\zeta_2-e^{2i\pi t}\zeta_1)(\zeta_2-e^{2i\pi s}\zeta_1)+\zeta_1\zeta_2(e^{2i\pi t}-1)(1-e^{2i\pi s})\\ &= \zeta_2^2-(e^{2i\pi t}+e^{2i\pi s})\zeta_1\zeta_2\\ &\quad +e^{2i\pi(s+t)}\zeta_1^2+\zeta_1\zeta_2(e^{2i\pi t}+e^{2i\pi s}-e^{2i\pi(s+t)}-1)\\ &= \zeta_2^2-(1+e^{2i\pi(s+t)})\zeta_1\zeta_2+e^{2i\pi(s+t)}\zeta_1^2\\ &= (\zeta_2-\zeta_1)(\zeta_2-e^{2i\pi(s+t)}\zeta_1) \;=\; (\zeta_2-\zeta_1)\widetilde{a}_{t+s}.\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}\widetilde{a}_t\widetilde{b}_s+\widetilde{b}_t\widetilde{d}_s &= (\zeta_2-e^{2i\pi t}\zeta_1)\zeta_1\zeta_2(e^{2i\pi s}-1)+\zeta_1\zeta_2(e^{2i\pi t}-1)(e^{2i\pi s}\zeta_2-\zeta_1)\\ &= \zeta_1\zeta_2\big[(e^{2i\pi s}-1+e^{2i\pi s}(e^{2i\pi t}-1))\zeta_2\\ &\quad -(e^{2i\pi t}(e^{2i\pi s}-1)+e^{2i\pi t}-1)\zeta_1\big]\\ &= \zeta_1\zeta_2(e^{2i\pi(s+t)}-1)(\zeta_2-\zeta_1) \;=\; (\zeta_2-\zeta_1)\widetilde{b}_{t+s}.\end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned}\widetilde{c}_t\widetilde{a}_s+\widetilde{d}_t\widetilde{c}_s &= (1-e^{2i\pi t})(\zeta_2-e^{2i\pi s}\zeta_1)+(e^{2i\pi t}\zeta_2-\zeta_1)(1-e^{2i\pi s})\\ &= (1-e^{2i\pi t}+e^{2i\pi t}(1-e^{2i\pi s}))\zeta_2\\ &\quad -(e^{2i\pi s}(1-e^{2i\pi t})+1-e^{2i\pi s})\zeta_1\\ &= (1-e^{2i\pi(s+t)})(\zeta_2-\zeta_1) \;=\; (\zeta_2-\zeta_1)\widetilde{c}_{t+s}.\end{aligned}$$

最后

$$\begin{aligned}\widetilde{c}_t\widetilde{b}_s+\widetilde{d}_t\widetilde{d}_s &= (1-e^{2i\pi t})\zeta_1\zeta_2(e^{2i\pi s}-1)+(e^{2i\pi t}\zeta_2-\zeta_1)(e^{2i\pi s}\zeta_2-\zeta_1)\\ &= (e^{2i\pi s}-1-e^{2i\pi(s+t)}+e^{2i\pi t})\zeta_1\zeta_2\\ &\quad +e^{2i\pi(s+t)}\zeta_2^2-(e^{2i\pi s}+e^{2i\pi t})\zeta_1\zeta_2+\zeta_1^2\\ &= e^{2i\pi(s+t)}\zeta_2^2-(1+e^{2i\pi(s+t)})\zeta_1\zeta_2+\zeta_1^2\\ &= (e^{2i\pi(s+t)}\zeta_2-\zeta_1)(\zeta_2-\zeta_1) \;=\; (\zeta_2-\zeta_1)\widetilde{d}_{t+s}.\end{aligned}$$

因此，对每个 $\lambda\in\Omega_2,$，都有 $B_{s+t}(\lambda)=B_t(\lambda)B_s(\lambda)$，所以这里构造的族 $(A_t)_{t>0}$ 也满足 (d)。

结论： 因此我们已经证明，若对每个 $t>0$定义函数$\alpha_t\in E^1(\Omega_1)$ 和 $a_t,b_t,c_t,d_t\in E^1(\Omega_2$，使其满足上述性质 (A) 和 (B)，那么 M_λ 嵌入有界算子半群 $(A_t)_{t>0}$ 中，该半群作用于 E_F^q，并由方程 (32) 定义。根据命题3.4，这就完成了断言7.4的证明。□

注 7.5。注意，只要 $t\in(0,\ 1)$，在上文命题 c_t 7.4 的证明中定义的函数 在 Ω 上不为零$_2,$，因此 A_t 不是 E_F^q 上的乘法算子。由此，上述构造给出了一个满足 (H1)、(H2) 和 (H3) 的可嵌入托普利茨算子示例，但 M_λ 无法嵌入到 C_0 上的乘法算子 E_F^q-半群中。

7.3. **一种刻画**。注意，在前一个例子中，我们实际上并未用到 F的具体形式，也未用到弧 γ_1 和 γ_2的参数化；但我们关键地用到了函数 $\zeta_{|\gamma_1}$ 和 $\zeta_{|\gamma_2}$ 在 Ω 上的解析延拓。在本小节余下部分，我们考虑更一般的情形：符号 F满足 (H1)，且曲线 F(圆周) 的拓扑形状如下：

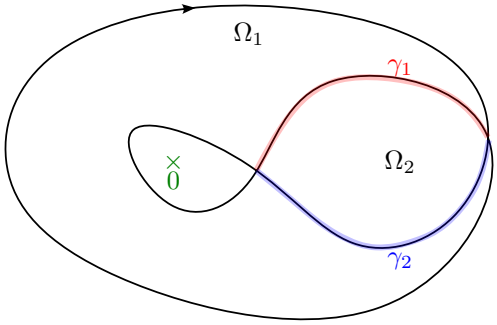


FIGURE 9

以下结果实质上是对我们在小节 7.2中所做工作的重新表述，适用于这一更一般的情形：

命题 7.6. 设 $1 < p < \infty$，并设 F 满足 *(H1)*。假设 F(圆周) 如图 *9* 所示，且 $0 \notin \mathcal{O}$。那么 T_F 可嵌入到 C_0-有界算子半群中，定义在 H^p 上，当且仅当下列两个条件之一成立：

(1) 0 属于复数域 $\setminus$ *int* $(\sigma(T_F))$ 的无界连通分支；*(2) 0* 属于复数域$\setminus$ *int* $(\sigma(T_F))$ 的有界连通分支，且满足以下两个条件：*(i)* $\zeta_{|\gamma_1}$ （分别为 $\zeta_{|\gamma_2}$）在 γ_1 （分别在 γ_2）上几乎处处与亚纯函数 ζ_1 （分别为 ζ_2）在 Ω_2 上的非切向极限相同；*(ii)* 对每个 $(u_0, u_1) \in E_F^q$以及每个 $t > 0$，令 $(v_t,0, v_t,1) := A_t(u_0, u_1)$ 由方程 *(32)* 定义，其中 $\alpha_t(\lambda) = e^{t \log \lambda}$在 Ω_1 上成立，且 *log* 是 Ω_1 上对数的某一分支，a_t、b_t、c_t 和 d_t 由 *(37)* 和 *(40)* 给出。由此定义的算子 A_t、$t > 0$ 在 E_F^q. 上有界

注意，条目 (ii) 中的性质恰好就是例 7.3 中的性质 (A) 和 (B)。

证明。首先，回顾一下：若 0 属于 复数域$\setminus$int $(\sigma(T_F))$ 的无界连通分支，则 T_F由定理 B 可嵌入。若 $0 \in \text{int}\,(\sigma(T_F))$，则由命题 5.5 (回顾一下，$0 \notin \mathcal{O}$)，不可嵌入。因此，只需证明当 0 属于 复数域 $\setminus$int $(\sigma(T_F))$ 的有界连通分支时，T_F可嵌入当且仅当条件 (2) 的 (i) 和 (ii) 成立。

步骤 1： 首先假设 T_F 可嵌入，即 M_λ 可嵌入到作用在 E_F^q 上的 C_0-算子半群中。

– 由于 0 属于 复数域$\setminus$int $(\sigma(T_F))$ = 复数域$\setminus$int$(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ 的有界连通分支，因此备注 7.2 中的情形 (a) 不可能出现。因此，(i) 成立。

– 注意到，引理 6.1 和引理 6.3 表明，如果 M_λ 可嵌入到一个C_0-半群 $(\widetilde{A}_t)_{t>0}$中，则存在 $\alpha_t \in E^1(\Omega_1)$，$a_t, b_t, c_t$ 和 $d_t \in E^1(\Omega_2)$，使得~对于 $(u_0, u_1) \in E_F^q$，且对于 $(v_{t,0}, v_{t,1}) = A_t(u_0, u_1)$，有

$$v_{t,0} = \alpha_t u_0 \text{ on } \Omega_1,\ v_{t,0} = a_t u_0 + b_t u_0 \text{ on } \Omega_2 \text{ and } v_{t,1} = c_t u_0 + d_t u_1 \text{ on } \Omega_2,$$

其中，对 Ω_1 上对数函数的某个解析分支 log，有 $\alpha_t(\lambda) = e^{t \log \lambda}$。不过，仅利用 $(A_t)_{t>0}$ 是一个 C_0-半群这一事实，以及边界条件，我们便已在例 7.3 中证明，函数 a_t、b_t、c_t 和 d_t 必须由公式 (37) 和 (40) 给出，其中 ζ_1 和 ζ_2 是 (i) 中的亚纯函数，而函数 α_t,1 和α_t,2 则如例 7.3 所述，由 Ω_2 上函数 log 的两个解析延拓 $\log_1$ 和 $\log_2$ 构造而成。换言之，T_F 可嵌入，当且仅当 M_λ 可嵌入到 (ii) 中定义的 C_0-半群 $(A_t)_{t>0}$ 中。这尤其意味着，如果 T_F 可嵌入，则这些算子 A_t 在 E_F^q 上必定有界。因此 (ii) 成立。

步骤 2： 现在假设 (i) 和 (ii) 均得到满足。于是，根据上面的例 7.3，我们已经看到，$(A_t)_{t>0}$（在 (ii) 中定义）是作用于 E_F^q 上的有界算子半群，且 $A_1 = M_\lambda$。

为了证明 T_F 是可嵌入的，因此只需证明 $A_t \to I$ 在 E_F^q上以强算子拓扑收敛于 $t \to 0^+$。为此，我们引入由 C_ζ 定义的算子

$$C_\zeta f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega_2} \frac{f(\lambda)\zeta(\lambda)}{\lambda - z}\, \mathrm{d}\lambda \quad \text{for every } z \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \text{ and every } f \in E^q(\Omega_2).$$

由于 $\partial\Omega_2$ 是一条 Carleson 曲线，并且由于 E_0^q(复数域 $\setminus \Omega_2$) $\subseteq E^q(\Omega_1)$，柯西变换从 L^q (Ω_2) 到 $E^q(\Omega_2)$ 以及到 E_0^q (复数域 $\setminus \Omega_2$) 的连续性，同样意味着算子 $\overline{C_\zeta}$ 从 $L^q(\Omega_2)$ 到 E^q $(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ 的连续性。

还要注意，我们有跳跃公式（即索霍茨基–普莱梅利公式）

$$(\mathcal{C}f)^{int} - (\mathcal{C}f)^{ext} = f \text{ a.e. on } \partial\Omega_2 \text{ for every } f \in L^q(\partial\Omega_2),$$

由普里瓦洛夫得到 [30]。特别地，我们可以推得

$$(C_\zeta f)^{int} - (C_\zeta f)^{ext} = \zeta f \text{ a.e. on } \partial\Omega_2 \text{ for every } f \in E^q(\Omega_2).$$

换言之，对于每个 $f \in E^q(\Omega_2)$，数对 $\iota f := (C_\zeta f,\ f)$ 属于 E_F^q，且线性映射 $\iota : E^q$ $(\Omega_2) \to E_F^q$ 是有界的。一个重要事实是，这个映射ι 使我们能够将空间 E_F^q 分解为以下直和：

事实 7.7。 将 $E^q(\mathrm{int}\,(\sigma(T_F)))$ 视为 $E^q(\mathrm{int}\,(\sigma(T_F)))\times\{0\}$的闭子空间，其中 $\times\{0\}$属于 E_F^q，我们可以将 E_F^q 分解为以下拓扑直和：

$$E_F^q = E^q(\mathrm{int}\,(\sigma(T_F))) \oplus \iota(E^q(\Omega_2)).$$

事实 7.7 的证明。 由于 $C_\zeta 0 = 0$，显然 $E^q(\mathrm{int}\,(\sigma(T_F)))\cap\iota(E^q(\Omega_2)) = \{0\}$。令 $(u_0,\ u_1)$ $\in E_F^q$，并设 $w = u_0 - C_\zeta u_1$。于是 $w \in E^q(\Omega_1 \cup \Omega_2)$，且我们有

$$\begin{aligned} w^{ext} - w^{int} &= u_0^{ext} - (C_\zeta u_1)^{ext} - (u_0^{int} - (C_\zeta u_1)^{int} \\ &= (u_0^{ext} - u_0^{int}) - ((C_\zeta u_1)^{ext} - (C_\zeta u_1)^{int}) \\ &= \zeta u_1^{int} - \zeta u_1^{int} = 0 \text{ a.e. on } \partial\Omega_2. \end{aligned}$$

于是由引理 4.1，$w \in E^q(\mathrm{int}\,(\sigma(T_F)))$ 和 $(u_0, u_1) = (w, 0) + (C_\zeta u_1, u_1)$。由于算子 $(u_0,$ $u_1) \mapsto (w, 0)$ 和 $(u_0, u_1) \mapsto (C_\zeta u_1, u_1)$ 从 E_F^q

分别映入 $E^q(\text{int}\,(\sigma(T_F)))$ 和 $\iota(E^q(\Omega_2))$，因此可得

$$E_F^q = E^q(\text{int}\,(\sigma(T_F))) \oplus \iota(E^q(\Omega_2)). \qquad \square$$

现在我们来完成命题7.6的证明。事实7.7 给出的分解 $A_t \to I$ 在 $t \to 0^+$ 强算子拓扑下成立，当且仅当以下两个性质成立：

(a) for every $u_0 \in E^q(\text{int}\,(\sigma(T_F)))$, $\|A_t(u_0,0) - (u_0,0)\|_{E_F^q} \to 0$ as $t \to 0^+$;
(b) for every $u_1 \in E^q(\Omega_2)$, $\|A_t(C_\zeta u_1, u_1) - (C_\zeta u_1, u_1)\|_{E_F^q} \to 0$ as $t \to 0^+$.

– 设 $u_0 \in E^q(\text{int}\,(\sigma(T_F)))$，并设 $(v_{t,0}, v_{t,1}) = A_t(u_0, 0)$。设 $C > 0$ 满足：对于每个 $\lambda \in \sigma(T_F)$和每个 $0 < t < 1$，都有 $|\lambda|^t \le C$。于是，利用 (32)、(37) 和 (40，我们分别在 Ω_1 和 Ω_2 上得到以下逐点估计：

$$|v_{t,0}| \le C|u_0| \text{ on } \Omega_1,$$

$$|v_{t,0}| \le C\,\frac{|\zeta_1| + |\zeta_2|}{|\zeta_1 - \zeta_2|}\,|u_0| \quad \text{and} \quad |v_{t,1}| \le \frac{2C}{|\zeta_1 - \zeta_2|}\,|u_0| \text{ on } \Omega_2.$$

由于 $0 \notin \mathcal{O}$，我们有 $0 \notin \overline{\Omega}_2$，，因此函数 α_t,1 在 Ω_2 上有界且远离 0。将 v_t, $_0 = a_t u_0$ 和 v_t,$_1 = c_t u_0$ （在 Ω_2 上）分别除以 α_t,1，可得 $\frac{\zeta_1 - e^{2i\pi t}\zeta_2}{\zeta_2 - \zeta_1} u_0$ 和 $\frac{1}{\zeta_2 - \zeta_1} u_0$ 对每个 $t > 0$ 都属于 $E^q(\Omega_2)$，从而 $\frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2} u_0$，$\frac{\zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_2} u_0$ 和 $\frac{\zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_2} u_0$ 属于 $E^q(\Omega_2)$。由 (8)、(10) 和勒贝格控制收敛定理可知

$$\|A_t(u_0,0) - (u_0,0)\|_{E_F^q}^q = \|(\alpha_t - 1)u_0\|_{E^q(\Omega_1)}^q + \|v_{t,0} - u_0\|_{E^q(\Omega_2)}^q + \|v_{t,1}\|_{E^q(\Omega_2)}^q \longrightarrow 0 \text{ as } t \to 0^+,$$

这就是我们想要证明的前半部分。

– 现在令 $u_1 \in E^q(\Omega_2)$，并令 $(v_{t,\,0},\ v_{t,\,1}) = A_t(C_\zeta u_1,\ u_1)$。那么在 Ω_1 上有 $|v_{t,\,0}| \le C|C_\zeta u_0|$。此外，注意到在 Ω_2，上有

$$\begin{aligned} v_{t,0} = a_t C_\zeta u_1 + b_t u_1 &= \frac{\alpha_{t,1}}{\zeta_2 - \zeta_1}\left[(\zeta_2 - e^{2i\pi t}\zeta_1)C_\zeta u_1 + (e^{2i\pi t} - 1)\zeta_1\zeta_2 u_1\right] \\ &= \frac{\alpha_{t,1}}{\zeta_2 - \zeta_1}\left[\zeta_2(C_\zeta u_1 - \zeta_1 u_1) - e^{2i\pi t}\zeta_1(C_\zeta u_1 - \zeta_2 u_1)\right]. \end{aligned}$$

同样，两边除以 $\alpha_{t,\,1}$，并考虑 $\tilde{v}_{t,\,0} = \frac{v_t}{\alpha_1}{}^{0}_{t} \in E^q(\Omega_2)$，可得

$$\frac{\zeta_2}{\zeta_2 - \zeta_1}(C_\zeta u_1 - \zeta_1 u_1) = \frac{\tilde{v}_{1,0} + \tilde{v}_{1/2,0}}{2} \in E^q(\Omega_2),$$

and

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1}(C_\zeta u_1 - \zeta_2 u_1) = \frac{\tilde{v}_{1/2,0} - \tilde{v}_{1,0}}{2} \in E^q(\Omega_2).$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned} v_{t,1} = c_t C_\zeta u_1 + d_t u_1 &= \frac{\alpha_{t,1}}{\zeta_2 - \zeta_1}\left[(1 - e^{2i\pi t})C_\zeta u_1 + (e^{2i\pi t}\zeta_2 - \zeta_1)u_1\right] \\ &= \frac{\alpha_{t,1}}{\zeta_2 - \zeta_1}\left[C_\zeta u_1 - \zeta_1 u_1 - e^{2i\pi t}(C_\zeta u_1 - \zeta_2 u_1)\right]. \end{aligned}$$

考虑到 $\tilde{v}_{t,\,1} = \frac{v_t}{\alpha_1}{}^{1}_{t} \in E^q(\Omega_2)$，我们推得

$$\frac{1}{\zeta_2 - \zeta_1}(C_\zeta u_1 - \zeta_1 u_1) = \frac{\tilde{v}_{1,1} + \tilde{v}_{1/2,1}}{2} \in E^q(\Omega_2),$$

and

$$\frac{1}{\zeta_2-\zeta_1}(C_\zeta u_1-\zeta_2 u_1)=\frac{\tilde{v}_{1/2,1}-\tilde{v}_{1,1}}{2}\in E^q(\Omega_2).$$

此外，对每个 $0<t<1$，在 Ω_2 上我们有如下逐点估计：

$$\begin{aligned}|v_{t,0}|&=\left|\frac{1}{\zeta_2-\zeta_1}\Big(\zeta_2(C_\zeta u_1-\zeta_1 u_1)-\zeta_1 e^{2i\pi t}(C_\zeta u_1-\zeta_2 u_1)\Big)\alpha_{t,1}\right|\\&\le\frac{C}{|\zeta_2-\zeta_1|}\Big(|\zeta_2(C_\zeta u_1-\zeta_1 u_1)|+|\zeta_1(C_\zeta u_1-\zeta_2 u_1)|\Big)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}|v_{t,1}|&=\left|\frac{1}{\zeta_2-\zeta_1}\Big((C_\zeta u_1-\zeta_1 u_1)-e^{2i\pi t}(C_\zeta u_1-\zeta_2 u_1)\Big)\alpha_{t,1}\right|\\&\le\frac{C}{|\zeta_2-\zeta_1|}\Big(|C_\zeta u_1-\zeta_1 u_1|+|C_\zeta u_1-\zeta_2 u_1|\Big)\end{aligned}$$

再次根据勒贝格控制收敛定理，我们有

$$\begin{aligned}\|A_t(C_\zeta u_1,u_1)\|_{E_F^q}^q&=\|(\alpha_t-1)C_\zeta u_1\|_{E^q(\Omega_1)}^q\\&\quad+\|v_{t,0}-C_\zeta u_1\|_{E^q(\Omega_2)}^q+\|v_{t,1}-u_1\|_{E^q(\Omega_2)}^q\longrightarrow 0\text{ as }t\to 0^+.\end{aligned}$$

我们得出 A_t 收敛于 I 当 $t\to 0^+$ 在强算子拓扑下成立，这也就完成了命题 7.6 的证明。□

注 7.8. 设 F 满足 (H1)，使得 $F(\mathbb{T})$ 由图 9 给出，并假设 T_F 可嵌入到作用于 H^p 上的 C_0-有界算子半群中。另设 0 属于 $\mathbb{C}\setminus\operatorname{int}(\sigma(T_F))$ 的有界连通分支，且 $0\notin\mathcal{O}$。那么，由于 α_t、1、a_t、b_t、c_t 和 (33)、(37) 及 (40) 中定义的 d_t 属于 $E^1(\Omega_2)$，可知这四个函数

$$\frac{1}{\zeta_1-\zeta_2}\alpha_{t,1},\ \frac{\zeta_1}{\zeta_1-\zeta_2}\alpha_{t,1},\ \frac{\zeta_2}{\zeta_1-\zeta_2}\alpha_{t,1}\quad\text{and}\quad\frac{\zeta_1\zeta_2}{\zeta_1-\zeta_2}\alpha_{t,1}$$

也属于 $E^1(\Omega_2)$。此外，由于 $0\notin\mathcal{O}$，函数 $\alpha_{t,\ 1}$ 在 Ω_2 上有界且有界地远离 0。除以 $\alpha_{t,\ 1}$后，得到这些函数

$$\frac{1}{\zeta_1-\zeta_2},\ \frac{\zeta_1}{\zeta_1-\zeta_2},\ \frac{\zeta_2}{\zeta_1-\zeta_2}\quad\text{and}\quad\frac{\zeta_1\zeta_2}{\zeta_1-\zeta_2}$$

也属于 $E^1(\Omega_2)$。特别地，函数 ζ_1 和 ζ_2 是 $E^1(\Omega_2)$ 中函数的商。因此，它们属于 $\mathcal{N}(\Omega_2)$。

现在，我们的目标是将命题 A_t7.6 的 (ii) 中关于算子 的有界性条件改写得更加明确，使其仅取决于函数 ζ、ζ_1 和 ζ_2。为此，我们需要引入如下定义在 μ int $(\sigma(T_F)$ 上的博雷尔测度

$$\mathrm{d}\mu(\lambda)=\frac{\mathbf{1}_{\partial\Omega_2}(\lambda)}{|\zeta_1(\lambda)-\zeta_2(\lambda)|^q}|\mathrm{d}\lambda|,$$

也就是说

$$\mu(A)=\int_{A\cap\partial\Omega_2}\frac{1}{|\zeta_1(\lambda)-\zeta_2(\lambda)|^q}|\mathrm{d}\lambda|\tag{41}$$

对于每个 int $(\sigma(T_F))$ 的博雷尔子集 A。

我们回顾一下，如果满足以下嵌入 $E^q(\text{int}\,(\sigma(T_F))) \subset L^q(\mu)$，则称 μ 是 $E^q(\text{int}\,(\sigma(T_F)))$ 的 Carleson 测度；这意味着存在一个常数$C>0$，使得对于每个 $w \in E^q(\text{int}\,(\sigma(T_F)))$，都有

$$\int_{\partial\Omega_2} \frac{|w(\lambda)|^q}{|\zeta_1(\lambda)-\zeta_2(\lambda)|^q}|\mathrm{d}\lambda| \le C\|w\|^q_{E^q(\text{int}(\sigma(T_F)))}.$$

命题 7.9。 固定 $0<t<1$，并令 A_t 为命题 7.6的条件 *(ii)* 中定义的算子。那么以下断言等价。

(1) The map $A_t : E^q(\text{int}\,(\sigma(T_F))) \times \{0\} \longrightarrow E^q_F$ *is bounded;*

(2) the measure μ *defined by* (41) *is a Carleson measure for* $E^q(\text{int}\,(\sigma(T_F)))$.

证明。 首先，假设 A_t 有界。考虑函数 $u_0 \in E^q(\text{int}\,(\sigma(T_F)))$，并令 $(v_{t,0},v_{t,1}) = A_t(u_0,0)$。我们有 $v_{t,1} = c_t u_0$ 在 Ω_2，上，且 $\|v_{t,1}\|_{E^q(\Omega_2)} \le \|A_t\|\|(u_0,0)\|_{E^q_F}$。利用由 (37) 给出的 c_t 的表达式、$\alpha_{t,1}$ 在 Ω_2 上与 0 保持正距离（因为 $0 \notin \Omega_2$，），以及 $1-e^{2i\pi t} \neq 0$ （因为$0<t<1$）这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\left\|\frac{u_0}{\zeta_2-\zeta_1}\right\|_{E^q(\Omega_2)} &= \left\|\frac{v_{t,1}}{\alpha_t(1-e^{2i\pi t})}\right\|_{E^q(\Omega_2)} \\ &\le \frac{\|A_t\|}{|1-e^{2i\pi t}|\inf_{\lambda\in\Omega_2}|\lambda|^t}\|(u_0,0)\|_{E^q_F}.\end{aligned}$$

此外，注意到 $E^q(\text{int}\,(\sigma(T_F))) \times \{0\}$ 是 E^q_F的闭子空间，因此在赋予范数 $\|u_0\| = \|(u_0,0)\|_{E^q_F}$后，$E^q(\text{int}\,(\sigma(T_F)))$ 是一个巴拿赫空间。此外，对于每个 $u_0 \in E^q(\text{int}\,(\sigma(T_F)))$，都有$\|u_0\|_{E^q(\text{int}(\sigma(T_F)))} \le \|(u_0,0)\|_{E^q_F} = \|u_0\|$，因此根据巴拿赫同构定理，两个范数 $\|.\|$和$\|.\|_{E^q(\text{int}(\sigma(T_F)))}$ 在 $E^q(\text{int}\,(\sigma(T_F)))$ 上等价。因此，存在一个正常数 a，使得对于每个 $u_0 \in E^q(\text{int}\,(\sigma(T_F)))$，都有$\|u_0\| \le a\|u_0\|_{E^q(\text{int}(\sigma(T_F)))}$。由此可知，对于每个 $u_0 \in E^q(\text{int}\,(\sigma(T_F)))$，我们有

$$\begin{aligned}\left(\int_{\partial\Omega_2}\frac{|u_0(\lambda)|^q}{|\zeta_1(\lambda)-\zeta_2(\lambda)|^q}|\mathrm{d}\lambda|\right)^{1/q} &= \left\|\frac{u_0}{\zeta_2-\zeta_1}\right\|_{E^q(\Omega_2)} \\ &\le \frac{\|A_t\|}{|1-e^{2i\pi t}|\inf_{\lambda\in\Omega_2}|\lambda|^t}\|(u_0,0)\|_{E^q_F} \\ &\le \frac{a\,\|A_t\|}{|1-e^{2i\pi t}|\inf_{\lambda\in\Omega_2}|\lambda|^t}\|u_0\|_{E^q(\text{int}(\sigma(T_F)))}.\end{aligned}$$

这恰好意味着，测度 μ由（41）定义，是关于$E^q(\text{int}\,(\sigma(T_F)$ 的 Carleson 测度，因而（2）得证。

反过来，现在假设测度 μ由（41）定义，是关于 $E^q(\text{int}\,(\sigma(T_F)$ 的 Carleson 测度，并令 $C>0$ 满足：对每个 $w \in E^q(\text{int}\,(\sigma(T_F)$ ，

$$\int_{\partial\Omega_2}\frac{|w(\lambda)|^q}{|\zeta_1(\lambda)-\zeta_2(\lambda)|^q}|\mathrm{d}\lambda| \le C\|w\|^q_{E^q(\text{int}(\sigma(T_F)))}. \tag{42}$$

回顾一下， ζ_j 的非切向极限与 ζ 在 γ_j上几乎处处相等。特别地，我们有 $|\zeta_j|=1$ 在 γ_j 上几乎处处成立。现在注意到

$$\frac{\zeta_2-e^{2i\pi t}\zeta_1}{\zeta_2-\zeta_1} = 1+\frac{(1-e^{2i\pi t})\zeta_1}{\zeta_2-\zeta_1} = e^{2i\pi t}+\frac{(1-e^{2i\pi t})\zeta_2}{\zeta_2-\zeta_1}.$$

我们将把 $\partial\Omega_2$ 上的积分在（42）中分解为分别取自 γ_1和 γ_2 的两个积分之和，并使用上面的 $\frac{\zeta_2-e^{2i\pi t}\zeta_1}{\zeta_2-\zeta_1}$的两种形式来估计这两个积分。~~令 $u_0\in E_F^q$~~ 和 $(v_{t,\ 0},\ v_{t,\ 1})\ = A_t$ $(u_0,\ 0)$。那么$v_{t,\ 0}=\alpha_t u_0$ 在 Ω_1, 上，从而

$$\|v_{t,0}\|_{E^q(\Omega_1)}\leq \sup_{\lambda\in\Omega_1}|\lambda|^t\|u_0\|_{E^q(\Omega_1)}\leq \sup_{\lambda\in\Omega_1}|\lambda|^t\|(u_0,0)\|_{E_F^q}.$$

此外，$v_{t,\ 0}=a_t u_0$ 在 Ω_2, 上，使得

$$\begin{aligned}\|v_{t,0}\|^q_{E^q(\Omega_2)}&=\int_{\partial\Omega_2}\left|\frac{\zeta_2-e^{2i\pi t}\zeta_1}{\zeta_2-\zeta_1}\alpha_t u_0\right|^q|\mathrm{d}\lambda|\\&=\int_{\gamma_1}\left|1+\frac{(1-e^{2i\pi t})\zeta_1}{\zeta_2-\zeta_1}\right|^q|\alpha_t u_0|^q|\mathrm{d}\lambda|\\&+\int_{\gamma_2}\left|e^{2i\pi t}+\frac{(1-e^{2i\pi t})\zeta_2}{\zeta_2-\zeta_1}\right|^q|\alpha_t u_0|^q|\mathrm{d}\lambda|\\&\leq C_q\sup_{\lambda\in\Omega_2}|\lambda|^{qt}\left(\|u_0\|^q_{E^q(\Omega_2)}+2^q\int_{\partial\Omega_2}\left|\frac{u_0}{|\zeta_1-\zeta_2}\right|^q|\mathrm{d}\lambda|\right)\\&\leq C_q\sup_{\lambda\in\Omega_2}|\lambda|^{qt}(\|u_0\|^q_{E^q(\Omega_2)}+2^qC\|u_0\|^q_{E^q(\mathrm{int}(\sigma(T_F)))})\\&\leq C_q\sup_{\lambda\in\Omega_2}|\lambda|^{qt}(1+2^qC)\|(u_0,0)\|^q_{E_F^q},\end{aligned}$$

其中 C_q 是一个正数，使得对于每个 $x>0$，$(1+x)^q\leq C_q(1+x^q)$。此外，$v_{t,\ 1}=c_t u_0$ 在 Ω_2上。这里的估计更直接：

$$\begin{aligned}\|v_{t,1}\|_{E^q(\Omega_2)}&\leq 2\sup_{\lambda\in\Omega_2}|\lambda|^t\left\|\frac{u_0}{\zeta_1-\zeta_2}\right\|_{E^q(\Omega_2)}\\&\leq 2C^{1/q}\sup_{\lambda\in\Omega_2}|\lambda|^t\|u_0\|_{E^q(\mathrm{int}(\sigma(T_F)))}\\&\leq 2C^{1/q}\sup_{\lambda\in\Omega_2}|\lambda|^t\|(u_0,0)\|_{E_F^q}.\end{aligned}$$

因此我们可以推得

$$\|A_t(u_0,0)\|^q_{E_F^q}\leq\sup_{\lambda\in\sigma(T_F)}|\lambda|^{qt}(1+2^qC)(1+C_q)\|(u_0,0)\|^q_{E_F^q}$$

对于每个 $u_0\in E^q(\mathrm{int}\,(\sigma(T_F)))$，这意味着算子 A_t在 $E^q(\mathrm{int}\,(\sigma(T_F)))$ 上的限制 $\times\{0\}$ 是有界的。□

注 7.10。 命题 7.9 说明如下：若 A_{t_0} 是从 $E^q(\mathrm{int}\,(\sigma(T_F)))\times\{0\}$ 到 E_F^q的有界算子，且 某个 $t_0\in(0,1)$，则它对 所有$t\in(0,1)$ 都有界，因而根据半群性质，对所有 $t>0$ 也都有界。下面的命题7.11 也有同样的结论。

命题 7.11。 固定 $0<t<1$ 并令 A_t 按照命题 7.6中 ***(ii)*** 的定义给出。则下列断言等价：

(1) The map $A_t:\iota(E^q(\Omega_2))\longrightarrow E_F^q$ is bounded;
(2) The four maps

$$Z_1:w\mapsto\frac{1}{\zeta_1-\zeta_2}(C_\zeta w-\zeta_1 w)\quad Z_2:w\mapsto\frac{1}{\zeta_1-\zeta_2}(C_\zeta w-\zeta_2 w)$$

$$Z_3:w\mapsto\frac{\zeta_2}{\zeta_1-\zeta_2}(C_\zeta w-\zeta_1 w)\quad Z_4:w\mapsto\frac{\zeta_1}{\zeta_1-\zeta_2}(C_\zeta w-\zeta_2 w)$$

定义从 $E^q(\Omega_2)$ 到其自身的有界算子。

证明。 首先指出，以下等式成立：

$$\frac{\zeta_2 - e^{2i\pi t}\zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1} = 1 + \frac{(1 - e^{2i\pi t})\zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1} = e^{2i\pi t} + \frac{(1 - e^{2i\pi t})\zeta_2}{\zeta_2 - \zeta_1}, \tag{43}$$

and

$$\frac{e^{2i\pi t}\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1} = e^{2i\pi t} - \frac{(1 - e^{2i\pi t})\zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1} = 1 - \frac{(1 - e^{2i\pi t})\zeta_2}{\zeta_2 - \zeta_1}. \tag{44}$$

现在设 $u_1 \in E^q(\Omega_2)$ 和 $(v_{t,0}, v_{t,1}) = A_t(C_\zeta u_1, u_1)$。那么 $v_{t,0} = a_t C_\zeta u_1 + b_t u_1$ 且 $v_{t,1} = c_t C_\zeta u_1 + d_t u_1$ 在 Ω 上$_2$ 由 (32) 得出，因此利用 (43)，可得

$$v_{t,0} = \alpha_{t,1}\Big(C_\zeta u_1 - (1 - e^{2i\pi t})Z_4 u_1\Big) = \alpha_{t,1}\Big(e^{2i\pi t} C_\zeta u_1 - (1 - e^{2i\pi t})Z_3 u_1\Big) \tag{45}$$

在 Ω 上$_2$。利用 (44)，我们还得到

$$v_{t,1} = \alpha_{t,1}\Big(u_1 - (1 - e^{2i\pi t})Z_2 u_1\Big) = \alpha_{t,1}\Big(e^{2i\pi t} u_1 - (1 - e^{2i\pi t})Z_1 u_1\Big) \tag{46}$$

在 Ω_2 上。结合这些等式，我们推得，在 Ω_2, 上有

$$A_t(C_\zeta u_1, u_1) = (\alpha_{t,1} C_\zeta u_1, \alpha_{t,1} u_1) + (1 - e^{2i\pi t})(\alpha_{t,1} Z_4 u_1, \alpha_{t,1} Z_2 u_1). \tag{47}$$

由于 $0 \notin \overline{\Omega}_2$, ，我们得到命题 7.11 的等价表述。事实上，设 A_t 从 $\iota(E^q(\Omega_2))$ 到 E_F^q 有界，并令 $u_1 \in E^q(\Omega_2)$ 和 $(v_{t,0}, v_{t,1}) = A_t(C_\zeta u_1, u_1)$。那么

$$\begin{aligned}
\|Z_1 u_1\|_{E^q(\Omega_2)} &= \frac{1}{|1 - e^{2i\pi t}|}\left\| e^{2i\pi t} u_1 - \frac{v_{t,1}}{\alpha_{t,1}} \right\|_{E^q(\Omega_2)} \\
&\le \frac{1}{|1 - e^{2i\pi t}|}\left(\|u_1\|_{E^q(\Omega_2)} + \frac{1}{\inf_{\lambda \in \Omega_2} |\lambda|^t} \|A_t(C_\zeta u_1, u_1)\|_{E_F^q} \right) \\
&\le \frac{1}{|1 - e^{2i\pi t}|}\left(1 + \frac{\|A_t\| \|\iota\|}{\inf_{\lambda \in \Omega_2} |\lambda|^t} \right) \|u_1\|_{E^q(\Omega_2)}.
\end{aligned}$$

因此 Z_1 确实是从 $E^q(\Omega_2)$ 到其自身的有界算子。证明 Z_2、Z_3和 Z_4 有界的方法完全相同，利用等式 (45) 和 (46) 即可。

现在假设四个算子 Z_1、Z_2、Z_3 和 Z_4 在 $E^q(\Omega_2)$ 上有界。令 $u_1 \in E^q(\Omega_2)$。于是，利用 (47)，可得

$$\begin{aligned}
\|A_t(C_\zeta u_1, u_1)\|_{E_F^q}^q &= \|\alpha_t C_\zeta u_1\|_{E^q(\Omega_1)}^q \\
&\quad + \left\|\alpha_{t,1}\Big(C_\zeta u_1 - (1 - e^{2i\pi t})Z_4 u_1\Big)\right\|_{E^q(\Omega_2)}^q \\
&\quad + \left\|\alpha_{t,1}\Big(u_1 - (1 - e^{2i\pi t})Z_2 u_1\Big)\right\|_{E^q(\Omega_2)}^q \\
&\le \sup_{\lambda \in \sigma(T_F)} |\lambda|^{tq}\Big(1 + (1 + 2\|Z_4\|)^q \\
&\quad + (1 + 2\|Z_2\|)^q\Big) \|(C_\zeta u_1, u_1)\|_{E_F^q}^q.
\end{aligned}$$

因此我们推得 A_t 是从 $\iota(E^q(\Omega_2)$ 到 E_F^q 的有界算子，由此命题 7 的证明也就完成了。11 □

注 7.12。由（45）和（46）可知，算子 Z_1 有界当且仅当 Z_2 有界，并且 Z_3 有界当且仅当 Z_4 有界。

结合命题 7.6、7.9和 7.11，可得以下结果，这是关于 T_F 的可嵌入性的最终刻画，其中曲线 F(圆周) 如图 9所示：

定理 D. 设 $1 < p < \infty$ 且设 F 满足 *(H1)*。假设 F(圆周) 如图 *9* 所示，且 $0 \notin \mathcal{O}$。那么 T_F 可嵌入到一个 C_0-半群中，当且仅当以下两个条件之一成立：

(1) 0 属于复数域 $\setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$的无界连通分支；*(2)* 0 属于复数域 $\setminus \operatorname{int}(\sigma(T_F))$ 的有界连通分支，且以下三个条件成立：*(i)* $\zeta_{|\gamma_1}$ （分别为 $\zeta_{|\gamma_2}$）在 γ_1 （分别在 γ_2）上几乎处处与 Ω 上亚纯函数 ζ_1 （分别为 ζ_2）的非切向极限一致；*(ii)* 在$\operatorname{int}(\sigma(T_F))$ 上定义的测度 μ 为

$$\mathrm{d}\mu(\lambda) = \frac{\mathbf{1}_{\partial\Omega_2}(\lambda)}{|\zeta_1(\lambda) - \zeta_2(\lambda)|^q}|\mathrm{d}\lambda|$$

是 E^q（int（σ（T_F））） 的 *Carleson* 测度；

（*iii*）映射

$$Z_1 : w \mapsto \frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2}(C_\zeta w - \zeta_1 w) \quad Z_2 : w \mapsto \frac{1}{\zeta_1 - \zeta_2}(C_\zeta w - \zeta_2 w)$$

$$Z_3 : w \mapsto \frac{\zeta_2}{\zeta_1 - \zeta_2}(C_\zeta w - \zeta_1 w) \quad Z_4 : w \mapsto \frac{\zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_2}(C_\zeta w - \zeta_2 w)$$

define bounded operators from $E^q(\Omega_2)$ *into itself.*

8. Sectorial Toeplitz operators

证明算子 T 可嵌入 C_0-半群的最自然方法，是通过函数演算构造一个满足 $T_1 = T$ 的半群 $(T_t)_{t>0}$，并证明当 $t \to 0^+$ 时，该半群 $(T_t)_{t>0}$ 在强算子拓扑下收敛到恒等算子。例如，对算子 T 的谱的某个邻域应用解析函数演算，只要 0 属于复数域 $\setminus \sigma$（T）的无界连通分支，就能得到其可嵌入性。在本文的第一部分，我们利用 [37]，中的函数演算扩展了这一可嵌入性判据，并证明只要 0 属于复数域 $\setminus$int（σ（T_F））的无界连通分支，具有光滑符号 F 的托普利茨算子 T_F 就可嵌入定义在 H^p 上的 C_0-半群（见定理 B）。即使符号不满足这些额外的光滑性条件，也可以尝试使用数值域等替代工具来定义函数演算。

回顾一下，希尔伯特空间上有界算子 T 的数值域 $W(T)$ 是由下式定义的凸集：H

$$W(T) = \{\langle Tx, x\rangle \; ; \; x \in H \text{ and } \|x\| = 1\},$$

且其闭包包含 T的谱。关于数值域性质的介绍，请参见 [22] 。1999 年，B. 和 F. Delyon 证明，对于每一个

复数域 C 中的有界凸域 Ω，对于每一个满足 $W(T) \subseteq \Omega$ 的算子 T，以及每一个多项式 P，都有

$$\|P(T)\| \leq C_\Omega \sup_\Omega |P| \quad \text{where } C_\Omega = \left(\frac{2\pi \cdot diam(\Omega)^2}{Area(\Omega)}\right)^3 + 3.$$

换言之，集合 Ω 是 C_Ω-谱的，适用于 T [12]。几年后，Crouzeix 在 [8]中证明，C_Ω 可以替换为一个普适常数（该常数为 11。08），并在 [7] 中猜想数值域总是 2-谱的。2017 年，Crouzeix 和 Palencia 改进了普适常数 11。08，并证明数值域总是 $(1+\sqrt{2})$-谱的 [9]（另见 [31]，其中给出了 Crouzeix-Palencia 结果的一个更简洁证明，以及 [6]，其中给出了该结果的抽象版本）。值得注意的是，最近 Malman、Mashreghi、O'Laughlin 和 Ransford 得出，对于算子 T，使得 K_T 满足 $W(T)$ 对 K_T是谱的最佳常数 T必须满足$K_T < 1+\sqrt{2}$ [27]。

在可嵌入性的背景下，数值域之所以受到特别关注，是因为得益于 B. 和 F. Delyon 的结果以及与 Crouzeix猜想相关的结果，在T 的谱的某个邻域上的解析函数演算，可以针对 $W(T)$ 上的上确界范数连续延拓到在 $W(T)$ 的内部解析且在 $W(T)$ 上连续的函数。特别地，如果 0 属于 C\int(W(T))，那么该函数演算允许我们构造一个半群 $(T_t)_{t>0}$，使得 $T_1 = T$。遗憾的是，当 0 属于 $\partial W(T)$ 时，无法保证 $(T_t)_{t\geq 0}$ 是一个 C_0-半群，即当 $t \to 0^+$ 时，$(T_t)_{t>0}$ 在强算子拓扑中收敛到 I。

为绕过这一问题，我们将在小节 8.1 中转而考虑扇形算子的函数演算。在小节 8.2 中，借助与数值域的联系，我们将得到（T_t）$_{t>0}$ 收敛到 I，只要 $0 \in \mathbb{C} \setminus W(T)$。借助 Coburn 引理，我们还改进了 T 为托普利茨算子时的这一条件，并证明只要 T_FC $0 \in$ int$(W(T_F))$，则 \ 是可嵌入的（这就是定理 E）。我们将通过研究扇形算子与其他工具（例如扇形的克赖斯常数）之间的联系来结束本小节。

8.1. 扇形算子的定义与嵌入。给定 $\omega \in [0,\pi]$ 由 S_ω 表示的复平面子集

$$S_\omega = \begin{cases} \{z \in \mathbb{C}\,;\, z \neq 0 \text{ and } |\arg(z)| < \omega\} & \text{if } \omega \in (0,\pi] \\ (0,+\infty) & \text{if } \omega = 0. \end{cases}$$

当 $\omega \in (0,\ \pi]$时，集合 S_ω 是复平面中的一个开扇形，其开角为 2ω，顶点位于原点。

设 X 为巴拿赫空间，且令 $T \in B(X)$ 为 X上的有界线性算子。若算子 T 满足以下两个性质，则称其为角度为 ω 的扇形算子（对某个 $\omega \in [0,\pi)$）：

(1) $\sigma(T) \subseteq \overline{S_\omega}$，其中 $\overline{S_\omega}$ 是扇形 S_ω的闭包；(2) 对每个 $\phi \in (\omega,\ \pi)$，有

$$\sup\{\|\lambda(\lambda - T)^{-1}\|\,;\, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{S_\phi}\} < \infty.$$

请读者参阅 [24]，以全面了解扇形算子（一般情况下可能是无界的）及其众多应用。扇形算子的主要意义之一在于，它们允许使用有用的函数

演算。这里我们简要回顾一些关于有界扇形算子的所谓自然函数演算的事实（详见 [24, 第 2.5 小节。2]）。设$T \in B(X)$ 是 X 上角度为 ω的有界扇形算子，且设 $\phi \in (\omega, \pi)$。考虑 S_ϕ上的以下全纯函数类，它们在 0 处满足衰减条件：

$$\mathcal{E}_0(S_\phi) = \{f \in Hol(S_\phi)\,;\, f(z) = O(|z|^\alpha) \text{ when } z \longrightarrow 0 \text{ for some } \alpha > 0\}.$$

注意，在上述定义中，出现的幂 α 取决于 f。

事实证明， T 具有一个 $\mathcal{E}_0(S_\phi)$-函数演算，其定义为沿围绕扇形 $S_{\omega'}$、 $\omega' \in (\omega, \phi)$的某个围道进行的柯西积分；但在 ∞附近的区域除外，在那里该围道避开 ∞ 并远离 $\sigma(T)$。更准确地说，令$\omega' \in (\omega, \phi)$、 $R > \|T\|$，并令 Γ为正向围道 $\Gamma = \partial(S_{\omega'} \cap R\mathbb{D})$。则 $\mathcal{E}_0(S_\phi)$-函数演算定义为

$$f(T) := \int_\Gamma f(z)(z - T)^{-1} \frac{\mathrm{d}z}{2i\pi} \quad \text{for every } f \in \mathcal{E}_0(S_\phi).$$

不难验证，如果 E 是 X 的一个闭子空间，并且关于 T 是超不变的（即关于 T的交换子中的每个算子都是不变的），那么对于每个 $f \in \mathcal{E}_0(S_\phi)$， E关于 $f(T)$也都是不变的。

由于对每个 $t > 0$，函数 $z \mapsto z^t$ 都属于 $\mathcal{E}_0(S_\phi)$，因此我们可以利用这个函数演算构造半群 $(T_t)_{t>0}$ ，其定义为 $T_t = z^t(T)$。于是， [24]中的命题 3.1.15 得出以下结果：

命题 8.1。 设 $T \in B(X)$ 是角度为 ω 的扇形算子，并设 $(T_t)_{t>0}$ 是借助针对 T 的 $\mathcal{E}_0(S_\phi)$ 函数演算构造的半群，其中 $\phi \in (\omega, \pi)$。令 $x \in X$. 那么

$$x \in \overline{\mathrm{Ran}(T)} \text{ if and only if } \|T_t x - x\| \longrightarrow 0 \text{ when } t \to 0.$$

特别地$(T_t)_{t>0}$ 是一个 C_0-半群，当且仅当 T 具有稠密值域。

注意，若该巴拿赫空间是自反的，且 $T \in B(X)$ 是扇形算子，则空间 X 可分解为

$$X = \ker(T) \oplus \overline{\mathrm{Ran}(T)}. \tag{48}$$

详见 [24, 命题 2.1。1]因此，当 X 是可分希尔伯特空间时，命题 8.1 给出了可嵌入 C_0-半群的扇形算子的刻画。该结果本质上是 [14, 定理 1。4]和[14, 命题 1。13],的推论，但为求完整起见，我们仍给出证明。

命题 8.2. 设 H 是可分希尔伯特空间，且 $T \in B(H)$ 是扇形算子。当且仅当 $\dim(\ker(T)) = 0$ 或 $\dim(\ker(T)) = \infty$时， T 可嵌入到一个 C_0-半群中。

证明。 若 $\dim \ker(T) = 0$，则由命题 8.1 可知 T可嵌入到一个 C_0-半群中。若 $\ker(T)$ 是有限维且非零的，则根据定理 T 2.2， T不可嵌入。于是只需考虑 $\ker(T)$ 是无限维的情形。

由于 $\ker(T)$ 是一个无限维可分希尔伯特空间，我们可以应用[15, 引理 V.1。12] 从而推出，$\ker(T$上的零算子可嵌入到一个 C_0-半群 $(A_t)_{t>0}$ 中，该半群由 $\ker(T$上的有界算子构成。现在令 $(S_t)_{t>0}$ 为 H 上的算子半群，该半群借助函数演算构造得到，适用于

T（即对每个 $t > 0$, $S_t = z^t(T)$）。由于 $\overline{\text{Ran}(T)}$ 是 T 的超不变子空间，对每个 $t > 0$, 将 B_t 定义为 S_t 在 $\overline{\text{Ran}(T)}$ 上的限制，则 $\mathcal{B}(\overline{\text{Ran}(T)})$ 中包含该算子。因此，根据命题 8.1，$(B_t)_{t>0}$ 是 $\overline{\text{Ran}(T)}$ 上的一个 C_0-半群。利用分解 $H = \ker(T) \oplus \overline{\text{Ran}(T)}$，对每个 $t > 0$，定义 H 上的一个算子 $T_t = A_t \oplus B_t$，即令

$$T_t(x + y) = A_t x + B_t y \quad \text{for every } x \in \ker(T) \text{ and every } y \in \overline{\text{Ran}(T)}.$$

那么显然，$(T_t)_{t>0}$ 是一个半群。设 $x \in H$，并设 $y \in \ker(T)$ $z \in \overline{\text{Ran}(T)}$ 满足 $x = y + z$。那么

$$\|T_t x - x\| = \|A_t y - y + B_t z - z\| \leq \|A_t y - y\| + \|B_t z - z\| \longrightarrow 0 \text{ when } t \to 0.$$

因此，$(T_t)_{t>0}$ 是一个 C_0-半群，并且 $T_1 = A_1 \oplus B_1 = 0 \oplus S_{1|\overline{\text{Ran}(T)}} = T$。由此我们证明了 T 是可嵌入的。□

注 8.3. 命题 8.2 的证明实际上表明，若 T 是巴拿赫空间 X 上的扇形算子，则 T 可嵌入某个 C_0-半群，当且仅当作用于 $\ker(T)$ 上的零算子可嵌入。需要指出的是，存在一些巴拿赫空间 X，其上的零算子不可嵌入：Lotz 在 [26]中证明，只要 X 是具有邓福德–佩蒂斯性质的格罗滕迪克空间，其上的每个 C_0-算子半群都是一致连续的。显然，零算子不能嵌入一致连续半群。具有邓福德–佩蒂斯性质的格罗滕迪克空间的例子包括空间 ℓ_∞ 和 $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$，以及当 K 是紧 σ-Stonian 空间时的 $C(K)$- 空间。这些空间必然是不可分的。若 X 是具有拟内部点的巴拿赫格，则 X 具有如下性质：其上的每个 C_0-算子半群一致连续，当且仅当 X 是具有邓福德–佩蒂斯性质的格罗滕迪克空间 [35]。

在托普利茨算子的情形下，回顾一下 Coburn 引理：对于每个符号 $F \in L^\infty(\mathbb{T})$, T_F 或 T_F^* 是单射，因此 T_F 要么是单射，要么具有稠密值域。特别地，若 T_F 是扇形算子，则 T_F 在 H^p 上是单射且具有稠密值域，见（48）。由此得到命题8.1的如下直接推论：

定理 8.4. 设 $p \in (1, +\infty)$ 且 $F \in L^\infty(\mathbb{T})$。若存在常数 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，使得 aT_F 是 H^p 上的扇形算子，则 T_F 可嵌入到 H^p 上由 C_0 算子组成的半群中。

8.2. **与数值域的联系**。首先提醒一点：本小节不同于本文其余部分所采用的（不寻常的）复可分希尔伯特空间标量积约定——该约定规定标量积对两个变量都是线性的。这里，标量积将采用通常的约定，即对第一个变量线性，对第二个变量共轭线性。

设 H 是复可分希尔伯特空间，并设 $T \in B(H)$。T 的数值域定义为

$$W(T) = \{\langle Tx, x\rangle \, ; \, x \in H \text{ and } \|x\| = 1\}.$$

那么 $W(T)$ 是复数域 中的有界凸子集，并且满足凸包$(\sigma(T)) \subset W(T)$，对于正规算子等号成立。有关数值域性质的详细介绍，请参见 [23] 。

数值域。由冯·诺依曼等式可知，复数域 C 的闭半平面 A 对 T 是谱的（即，对于在 A 上有界的每个有理函数 f，都有 $\|f(T)\| \leq \sup_{z\in A}|f(z)|$），当且仅当它包含 $W(T)$。

事实上，设 A是一个闭半平面。不失一般性，我们可以假设 $A = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ 且 $\sigma(T) \subset A$。设 $S = \phi(T)$，其中 $\phi(z) = \frac{1-z}{1+z}$，$z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$。由于 ϕ 是从 A 到 D 的共形映射，因此 A对 T 是谱的，当且仅当开单位圆盘 D 对 S是谱的；这等价于由冯·诺依曼不等式得到的条件 $\|S\| \leq 1$。但请注意，$S = (I-T)(I+T)^{-1}$是一个压缩算子，当且仅当 $W(T) \subset A$。事实上，算子 $I+T$可逆，并且对于任意 $x \in H$ 和 $y := (I+T)x$，我们有$Sy = (I-T)x$。因此可知，$\|S\| \leq 1$ 当且仅当

$$\|(I-T)x\| \leq \|(I+T)x\| \quad \text{for every } x \in H. \tag{49}$$

由于 $\|(I \pm T)x\|^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 \pm 2$实部 $\langle Tx,\ x\rangle$，（49）等价于条件：对所有 $\langle Tx,\ x\rangle \geq 0$都有 $k \in H$，即 $W(T) \subset A$。

这一观察结合命题8.1 得到了可嵌入性的以下充分条件：

定理 8.5。设 $T \in B(H)$，其中 H 是一个复可分希尔伯特空间。若0不属于 $W(T)$，则 T可嵌入到 H 上算子构成的 C_0-半群中。

证明。若 $0 \notin \overline{W(T)}$，则存在一个对数分支，它在 $W(T)$ 的某个邻域内解析，因此也在 $\sigma(T)$ 的某个邻域内解析。在这种情况下，T 的可嵌入性显然成立。

现在假设 $0 \in \partial W(T)$。由于 $W(T)$是凸的，存在一个闭半平面 A，使得 $0 \in \partial A$且 $W(T) \subseteq A$。如有必要，将 T乘以一个模为一的常数，我们可以假设 $A = \{z: \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$。由于$A = S_{\pi/2}$ 包含数值域，可知 T 是角度为 $\pi/2$的扇形算子。事实上，我们有

$$\sigma(T) \subset \overline{W(T)} \subset \overline{S_{\pi/2}}.$$

现在令 $\lambda \in \{z: \operatorname{Re}(z) < 0\}$。我们有

$$\sup_{z\in A}|(\lambda - z)^{-1}| = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, A)} = \frac{1}{|\operatorname{Re}(\lambda)|}.$$

由上述观察可得

$$\|(\lambda - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, A)} = \frac{1}{|\operatorname{Re}(\lambda)|}.$$

因此，令 $\phi \in (\pi/2,\ \pi]$ 且 $\lambda \in \in$复数域$\setminus S_\phi$。那么 $|\arg(\lambda)| \in (\phi,\ \pi]$，从而

$$\|\lambda(\lambda - T)^{-1}\| \leq \frac{|\lambda|}{|\operatorname{Re}(\lambda)|} \leq \frac{1}{|\cos\phi|} < \infty.$$

因此，T 是角度为 $\pi/2$的扇形算子。

现在注意到 T 具有稠密值域。事实上，若反过来假设$\operatorname{Ran}(T) \neq H$，则存在一个向量 $x \in \in \operatorname{Ran}(T)^\perp$，使得 $\|x\| = 1$，这意味着 $0 = \langle Tx,\ x\rangle \in W(T)$。这与假设 $0 \notin W(T)$矛盾。

现在只需应用命题 8.1即可推出 T 可嵌入到一个C_0-半群中，这就完成了命题8.1的证明。□

如前所述，对于扇形托普利茨算子而言，算子的值域的稠密性是自动成立的。因此，定理 8.5 证明的最后一部分在此背景下并无必要。换言之，完全相同的证明可得到以下结果，该结果已在小节1 中作为定理 E陈述：

定理 E。令 $F \in L^\infty(\mathbb{T})$。假设0 不属于数值域 $W(T_F)$ 的内部$\mathrm{int}(W(T_F))$，其中 T_F。那么， T_F可嵌入到作用于 H^2 上的C_0-算子半群中。

托普利茨算子的数值域是众所周知的：其闭包是谱的闭凸包；例如参见 [4, 25] 。因此我们有：

推论 8.6。令 $F \in L^\infty(\mathbb{T})$。假设存在 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，使得对于几乎处处的 $\tau \in \mathbb{T}$，$\mathrm{Re}(aF(\tau)) \geq 0$。那么， T_F可嵌入到作用于 H^2上的 C_0-算子半群中。

证明。不失一般性，我们可以假设 $a = 1$。如上所述，$W(T_F) = \mathrm{conv}(\sigma(T_F))$，因此 $\overline{W(T_F)}$ 包含于半平面 $S_{\pi/2}$ 中。或者，我们可以观察到，对于每个 $f \in H^2$，都有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\langle T_F f, f\rangle = \mathrm{Re}\,\langle Ff, f\rangle &= \mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})|f(e^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta\right)\\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(F(e^{i\theta}))|f(e^{i\theta})|^2\,\mathrm{d}\theta \geq 0.\end{aligned}$$

因此，0 不属于 $W(T_F)$ 的内部，由定理 E 可知，T_F 可嵌入。□

8.3. **与克赖斯常数及圆凸域的联系**。设 Ω 是复数域 C 的子集，且 Ω $\neq$C，并设 $T \in B(X)$。T 关于子集 Ω 的克赖斯常数定义为

$$\mathcal{K}_T(\Omega) = \sup_{z \notin \overline{\Omega}} \mathrm{dist}(z, \Omega)\|(z - T)^{-1}\|,$$

这里约定，若 $\|(z - T)^{-1}\| = \infty$，则 $z \in \sigma(T_F)$。该克赖斯常数满足以下性质（详情参见 [33] 或 [28]）：

命题 8.7。设 T 是巴拿赫空间 X 上的有界算子。

(1) 设 Ω $\subseteq \mathbb{C}$。若 $\mathcal{K}_T$(Ω) 有限，则 $\sigma(T) \subset \overline{\Omega}$。*(2)* 设 $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$。若 $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$,，则 $\mathcal{K}_T(\Omega_2) \leq \mathcal{K}_T(\Omega_1)$。*(3)* 若 X 是希尔伯特空间，则 $\mathcal{K}_T(W(T)) = 1$。

以下是一个标准事实，后文将会用到。

命题 8.8. 设Ω 是复数域 的一个子集，且Ω $\neq$ 复数域，并设 T 是巴拿赫空间 X 上的有界算子。克赖斯常数 $\mathcal{K}_T$(Ω) 有限，当且仅当以下两个性质成立： $\sigma(T) \subseteq$ Ω，并且存在Ω 的一个开邻域U 以及一个常数 $C \geq 0$ ，使得

$$\|(z - T)^{-1}\| \leq \frac{C}{\mathrm{dist}(z, \Omega)} \quad \textit{for every } z \in U \setminus \overline{\Omega}. \tag{50}$$

证明。直接推论显然。反过来，假设存在某个常数$C \geq 0$ 以及 Ω 的某个开邻域 U，不等式（50）成立。

我们将复数域 $\setminus\overline{\Omega}$ 分解如下。设 $R > \|T\|$。由于 U 是 Ω 的一个开邻域，因此有

$$\mathbb{C}\setminus\overline{\Omega} = \big(\mathbb{C}\setminus U\big)\cup\big(U\setminus\overline{\Omega}\big) = \big(R\overline{\mathbb{D}}\setminus U\big)\cup\big(\mathbb{C}\setminus(R\overline{\mathbb{D}}\cup U)\big)\cup\big(U\setminus\overline{\Omega}\big). \tag{51}$$

因此，为了证明 $\mathcal{K}_T(\Omega) < \infty$，我们需要证明不等式（50）的一个类似结果，其中 $U\setminus\Omega$ 首先替换为 复数域 $\setminus(R\mathbb{D}\cup U)$，然后替换为 $R\mathbb{D}\setminus U$。

令 $z\in$ 复数域 $\setminus(R\mathbb{D}\cup U)$。注意到 $|z| > R > \|T\|$ 因此 $z - T$ 可逆，且

$$\|(z-T)^{-1}\| \le \frac{1}{|z|-\|T\|}.$$

此外，由于 $\sigma(T)\subset\Omega$ 且 $R > \|T\| \ge \rho(T)$，我们得到

$$\operatorname{dist}(z,\Omega) \le \operatorname{dist}(z,\sigma(T)) \le |z| + \rho(T) \le |z| + R.$$

因此，对于每个 $z\in$ 复数域 $\setminus(R\overline{\mathbb{D}}\cup U)$，我们得到

$$\operatorname{dist}(z,\Omega)\|(z-T)^{-1}\| \le \frac{|z|+R}{|z|-\|T\|} = 1 + \frac{R+\|T\|}{|z|-\|T\|} \le \frac{2R}{R-\|T\|}. \tag{52}$$

现在令 $K = R\overline{\mathbb{D}}\setminus U$，并假设 $K\neq\varnothing$。集合 K 是复数域 $\mathbb{C}\setminus\Omega \subset \mathbb{C}\setminus\sigma(T)$ 的紧子集，并且由于映射 $z\mapsto(z-T)^{-1}$ 在复数域 $\mathbb{C}\setminus\sigma(T)$ 上解析，应用 $\phi\colon z\longmapsto \operatorname{dist}(z,\Omega)\|(z-T)^{-1}\|$ 在 K 上连续，因此 ϕ 在 K 上有界。令 $C' = \max_K\phi$。于是我们有

$$\|(z-T)^{-1}\| \le \frac{C'}{\operatorname{dist}(z,\Omega)} \text{ for every } z\in K = R\overline{\mathbb{D}}\setminus U. \tag{53}$$

如果 $K=\varnothing$，则在证明的其余部分取任意常数 $C'\ge 0$。现在令

$$\mathcal{K} = \max\left(C, \frac{2R}{R-\|T\|}, C'\right).$$

利用分解式（51）以及不等式（50）、（52）和（53），可得

$$\|(z-T)^{-1}\| \le \frac{\mathcal{K}}{\operatorname{dist}(z,\Omega)} \text{ for every } z\in\mathbb{C}\setminus\overline{\Omega},$$

也就是说，T 关于 Ω 的克赖斯常数是有限的，并满足 $\mathcal{K}_T(\Omega)\le\mathcal{K}$。 □

我们称集合 D （属于）复数域 $\mathbb{C}$ 是 黎曼球面圆盘，如果它要么是一个开圆盘，要么是一个闭圆盘的外部区域。下一个引理将在定理 8.15 的证明中发挥作用。

引理 8.9。设 $\phi(z) = (az+b)(cz+d)^{-1}$，$z\in$ 复数域 $\setminus\{-d/c\}$ 是一个莫比乌斯变换，且 T 是巴拿赫空间 X 上的有界算子。再设 D 是一个黎曼球面圆盘。假设 $\phi(T)$ 是定义良好的有界算子 X （也就是说，$cT+d$ 可逆），并且 $\phi(D)$ 不是半平面（因此是黎曼球面圆盘）。若 $\mathcal{K}_T(D)$ 是有限的，那么 $\mathcal{K}_{\phi(T)}(\phi(D))$ 也有限。

这个引理是 [2]中引理 2.1 的一个特例。这里我们给出该特例的一个更简单的证明。

证明。 由于 $\phi(D)$ 不是半平面，因此 $-d/c\notin\partial D$。于是，设 U 为满足 $\partial D\subset U\subset\overline{U}\subset\mathbb{C}\setminus\{-d/c\}$的有界开集，并令 $V=\phi(U)$。那么 ϕ 是从 U 的一个邻域到 V的一个邻域的共形映射。特别地，存在常数 $C_1>0$，使得对所有 $z,\ w\in U$，都有 $|\phi(z)-\overline{\phi(w)}|\le C_1|z-w|$。

注意，对于 $z \in \mathbb{C} \setminus D$，由于 D 是一个开圆盘或一个闭圆盘的外部，因此 $\operatorname{dist}(z, D) = \operatorname{dist}(z, \partial D)$。因此

$$\frac{1}{\operatorname{dist}(z, D)} \leq C_1 \frac{1}{\operatorname{dist}(\phi(z), \phi(D))} \quad \text{for every } z \in U \setminus \overline{D}. \tag{54}$$

设 $z \in U \setminus \overline{D}$。那么

$$\begin{aligned}\phi(z) - \phi(T) &= \frac{az+b}{cz+d} - (aT+b)(cT+d)^{-1} \\ &= \Big[(az+b)(cT+d) - (cz+d)(aT+b)\Big](cz+d)^{-1}(cT+d)^{-1} \\ &= (ad-bc)(z-T)(cz+d)^{-1}(cT+d)^{-1}.\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{K}_T(D)$ 是有限的，根据命题 8.7 的断言 (1)，我们知道 $\sigma(T) \subset D$。特别地，对于每个 $z \in U \setminus D$，算子 $(z-T)$ 都可逆，并且我们有

$$\|(\phi(z) - \phi(T))^{-1}\| \leq \frac{\sup_{z \in U \setminus \overline{D}} |cz+d|}{|ad-bc|} \|cT+d\| \|(z-T)^{-1}\|. \tag{55}$$

这意味着存在一个常数 $C_2 > 0$，使得对于每个 $z \in V \setminus \phi(D)$，我们都有

$$\|(z - \phi(T))^{-1}\| \leq C_2 \|(w-T)^{-1}\| \leq C_2 \frac{\mathcal{K}_T(D)}{\operatorname{dist}(w, D)} \leq C_1 C_2 \frac{\mathcal{K}_T(D)}{\operatorname{dist}(z, \phi(D))}$$

（只需将 (55) 应用于上面的 $w = \phi^{-1}(z)$ 即可）。由于 $\sigma(T) \subseteq \overline{D}$，我们有包含关系 $\sigma(\phi(T)) \subseteq \phi(\overline{D})$。由于 $\partial\phi(D) \subset V$，因此 $V \cup \phi(D) = \overline{V \cup \phi(D)}$ 是 $\phi(D)$ 的一个开邻域。于是，根据命题 8.8，我们最终得出 $\mathcal{K}_{\phi(T)}(\phi(D))$ 是有限的。□

下面给出扇形性的一个重要刻画。

定理 8.10。设 T 是巴拿赫空间 X 上的有界算子。以下断言等价：

(1) 存在 $\omega \in [0, \pi)$ 使得 T 是角度为 ω 的扇形算子；*(2)* 存在 $\omega \in [0, \pi)$ 使得 $\mathcal{K}_T(S_\omega)$ 是有限的。

证明。(1) $\Longrightarrow$ (2)：首先，假设 T 是角度为 ω 的扇形算子，并令 $\phi \in (\omega, \pi)$。由于 $0 \in S_\phi$，对于所有 $z \in \mathbb{C} \setminus S_\phi$，我们有 $|z| \geq \operatorname{dist}(z, \overline{S_\phi})$。因此

$$\mathcal{K}_T(S_\phi) = \sup_{z \notin \overline{S_\phi}} \operatorname{dist}(z, S_\phi) \|(z-T)^{-1}\| \leq \sup_{z \notin \overline{S_\phi}} \|z(z-T)^{-1}\| < \infty,$$

这就得到了(2)。

(2) $\Longrightarrow$ (1)：现在假设存在 $\omega \in [0, \pi)$ 使得 $\mathcal{K}_T(S_\omega)$ 是有限的。于是根据命题8.7的断言(1)，我们有 $\sigma(T) \subseteq S_\omega$。

此外，注意，对于所有满足 $r > 0$ 和 $\omega < |\theta| \leq \pi$ 的 $z = re^{i\theta}$，我们有

$$\operatorname{dist}(z, S_\omega) = \begin{cases} r \sin(|\theta| - \omega) & \text{if } |\theta| \leq \omega + \pi/2 \\ r & \text{else.} \end{cases}$$

因此，若 $\omega < \phi \leq \omega + \pi/2$，则令 $C_\phi := \sin(\phi - \omega)$；若 $\phi \geq \omega + \pi/2$，则令 $C_\phi := 1$。那么，对于所有 $\phi \in (\omega, \pi]$ 以及所有 $z \in$ 复数域 $\setminus S_\phi$，我们都有 $\operatorname{dist}(z, S_\omega) \geq C_\phi |z|$。利用这一点

复数域 $\setminus S_\phi \subseteq$ 复数域 $\setminus S_\omega$，这意味着

$$\sup_{z\notin\overline{S_\phi}} \|z(z-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{C_\phi} \sup_{z\notin\overline{S_\phi}} \operatorname{dist}(z,S_\omega)\|(z-T)\|^{-1} \leq \frac{\mathcal{K}_T(S_\omega)}{C_\phi} < \infty.$$

因此我们推得 T 是角度为 ω的扇形算子，由此得到 (1)。 □

注 8.11. 注意，定理 8.10 的证明 $\mathcal{K}_T(S_\omega) < \infty$对某个 $\omega \in [0,\pi)$，则 T 是角度为 ω 的扇形算子。

结合定理8.10 和定理 8.4，我们立即得到以下推论。

推论 8.12. 设 $F \in L^\infty$(圆周) 和 $p > 1$。假设存在 $\omega \in [0,\pi)$使得 $\mathcal{K}_{T_F}(S_\omega)$ 有限，其中 T_F 被视为 H^p上的有界算子。那么T_F 可嵌入到 H^p上的 C_0-半群中。

当 $p = 2$时，我们有 $\mathcal{K}_{T_F}(W(T_F)) = 1$ 由命题 8.7的断言 (3) 得出。因此，推论 8.12 是定理 E的推广。

论文 [21, 29]研究了如何用托普利茨算子的预解式范数来估计其与谱的距离。特别地，文中给出了符号满足的一些条件，以确保谱的克赖斯常数有限。在 [21], 中，作者研究了劳朗多项式的情形；而在 [29], 中，Peller 研究了足够光滑的符号情形 F，使得 $\sigma(T_F)$ 是所谓的 圆凸集 （或者，更一般地， $\sigma(T_F)$ 包含于某个圆凸集中的情形）。现在我们介绍 Peller 关于嵌入问题的若干结果所带来的一些推论，讨论的是 $p = 2$的情形。

我们称复数域 C 的一个紧子集 Ω 为圆凸，如果存在一个半径$r > 0$，使得对每个满足 dist(λ,Ω) $< r$的 $\lambda \in$ C $\setminus$ Ω，都存在两点$\mu \in \partial\Omega$ 和 $\nu \in$ C $\setminus$ Ω，使得 $|\mu - \nu| = r, \lambda \in (\mu,\nu)$，且 $\{\zeta \in$C; $|\nu - \zeta| < r\} \cap \Omega = \varnothing$. 换言之，可以沿着 Ω 的边界滚动一个半径为 r 的圆盘，同时始终处于 Ω 的补集中。注意，如果 Ω 是凸集，或者其边界是 C^2-光滑的，那么 Ω 就是圆凸的。

下面引用的结果并未正式出现在 [29], 中，而且其中只陈述了 Ω $= \sigma(T_F)$ 的情形，但通过逐字重复证明 [29, 定理 4],中所用的论证，我们可以得到定理 8.13。

定理 8.13 ([29,定理 4])。 设 $\mathcal{X}$ 是定义在 圆周 上的函数巴拿赫代数，满足以下性质：

i) $\mathcal{X}$ 连续嵌入于 C(圆周)；*ii)* $P_+(\mathcal{X}) \subseteq L^\infty$(圆周)；*iii)* $\mathcal{X}$ 上的每个乘法线性泛函都与某一点 $\zeta \in$ 圆周处的函数取值泛函相同，即 $f \mapsto f(\zeta)$。

设 $F \in \mathcal{X}$。假设 Ω 是一个包含 $\sigma(T_F)$的圆形凸紧集。那么 $\mathcal{K}_{T_F}$(Ω) $< \infty$，其中托普利茨算子 T_F 被视为作用在 H^2上的算子。

Peller 在 [29] 中给出了一些满足定理 8.13 假设的巴拿赫代数示例。例如，当 $\mathcal{X}$ 是 Wiener 代数时，或当 $\mathcal{X}$ 是 Dini 连续函数空间，即由满足以下条件的函数$f \in C$(圆周) 组成的空间时，

$$\int_0^1 \frac{w_f(t)}{t}\mathrm{d}t < \infty$$

其中 $w_f(t) =$上确界$\{|f(z) - f(z')|,\ |z - z'| \le t\}$是 f的连续模。定理 8.13 的一个直接推论是:

推论 8.14. 设 $\mathcal{X}$ 是定义在 圆周 上的函数巴拿赫代数，满足定理 *8.13*的假设。设 $F \in \mathcal{X}$ 满足 $\sigma(T_F)$ 是圆凸的，并包含于某个闭扇形 S_ω ，其中 $\omega \in [0, \pi)$。则 T_F 可嵌入到一个定义在 C_0上的 -半群 H^2中。

证明。 由定理 8.13 可知 $\mathcal{K}_{T_F}(\sigma(T_F)) < \infty$。接着，根据命题 8.7的断言 (2)， $\mathcal{K}_{T_F}(S_\omega) = K_{T_F}(S_\omega) < \infty$，只需应用推论 8.12 即可得出 T_F 可嵌入到一个定义在 C_0上的 -半群 H^2 中。 □

定理 8.13 的另一个推论是以下结果，其一般性强于推论 8.14以及第 F节中定理1 的陈述。

定理 8.15. 设 $\mathcal{X}$ 是定义在 圆周 上的函数巴拿赫代数，并满足定理 *8.13*的假设。设 $F \in \mathcal{X}$。假设存在一个开圆盘 D，包含于 复数域 $\setminus \sigma(T_F)$的无界连通分支中，使得 $0 \in \partial D$。那么 T_F可嵌入到定义在 C_0上的算子 H^2-半群中。

证明。令 $\Delta = \mathbb{C} \setminus \overline{D}$，且 $\Delta' = \Delta \cap \overline{R\mathbb{D}} = \overline{R\mathbb{D} \setminus D}$，其中 R 是满足 $R > \|T_F\|$的任意正半径。那么 Δ'是圆凸的，并且包含 T_F的谱。由定理 8.13，克赖斯常数 $\mathcal{K}_{T_F}(\Delta')$ 有限，因此根据命题 8.7 的断言 (2)，$\mathcal{K}_{T_F}(\Delta)$ 也有限。令 $a \in D$，并设 $\phi(z) = \frac{z}{z-a}$，$z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$。那么算子 $T - a$ 可逆。由于 Δ 是黎曼球面圆盘，且 $\mathcal{K}_{T_F}(\Delta) < +\infty$，根据引理 8.9，算子 $S := T_F(T_F - a)^{-1} = \phi(T_F)$ 满足 $\mathcal{K}_S(\phi(\Delta))$ 也有限。由于 $\phi(\partial D)$ 是圆，且 $\phi(a) = \infty$ 以及 $\phi(0) = 0$，我们看到 $\phi(\Delta)$ 是一个圆盘，并且 0 属于 $\partial\phi(\Delta)$。因此存在 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得$e^{i\alpha}\phi(\Delta) \subseteq \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) \ge 0\} = S_{\pi/2}$。但是 $\mathcal{K}_{e^{i\alpha}S}(e^{i\alpha}\phi(\Delta)) = \mathcal{K}_S(\phi(\Delta)) < \infty$，所以 $\mathcal{K}_{e^{i\alpha}S}(S_{\pi/2})$ 有限。由定理 8.10 （或注 8.11 ）可知，$e^{i\alpha}S$ 是角度为 $\pi/2$的扇形算子。由于 $S = T_F(T_F - a)^{-1} = (T_F - a)^{-1}T_F$ 且 $(T_F - a)^{-1}$ 可逆，因此 $\ker(S) = \ker(T_F)$ 且 $\mathrm{Ran}(S) = \mathrm{Ran}(T_F)$。于是，再结合 Coburn 引理和分解式 (48)，可得 S 具有稠密值域。因此，根据命题 8.1， S 可嵌入到算子 C_0-半群 $(A_t)_{t>0}$ 中，该半群定义在 H^2 上，其表达式为

$$A_t = e^{-i\alpha t}\int_\Gamma z^t(z - e^{i\alpha}S)^{-1}\frac{\mathrm{d}z}{2i\pi} = e^{-i\alpha t}\int_\Gamma z^t(z - e^{i\alpha}T_F(T_F - \alpha)^{-1})^{-1}\frac{\mathrm{d}z}{2i\pi},$$

其中 $\Gamma = \partial(S_{3\pi/4} \cap R\mathbb{D})$，对某个 $R > \|S\|$。注意，若算子 A 与 T_F可交换，则它也与每个在$\sigma(T_F)$内无极点的有理函数 R作用于 $R(T_F)$所得的算子可交换，因此 A 也将与半群 $(A_t)_{t>0}$中的任意算子可交换。

现在，由于 a 属于复数域 $\mathbb{C} \setminus \sigma(T_F)$的无界连通分支，可知 0 属于复数域 $\mathbb{C} \setminus \sigma(T_F - a)$的无界连通分支，因此在 $\sigma(T_F - a)$的某个邻域上存在对数的解析分支，记为 log。令 $(B_t)_{t>0}$为由 $B_t = e^{t\log(T_F - a)}, t > 0$ 定义的 C_0-算子半群，并设 $S_t := A_tB_t$。由于 B_t 与 T_F可交换，根据上述观察，它也与 A_t可交换，因此 $(S_t)_{t>0}$ 是 H^2 上的算子半群，满足 $S_1 = A_1B_1 = S(T_F - a) = T_F$。最后，由于 $\log(T_F - a) \in \mathcal{B}(H^2)$，可知 $(B_t)_{0<t<1}$ 一致有界，因此 $(S_t)_{t>0}$ 是一个 C_0-半群。□

注意，符号 F 在例 4.5 中所考虑的是 Dini连续的，而相应的托普利茨算子不可嵌入（对于 $p = 2$）。由此可知，

如果将上述定理中关于存在如 D 所示的开圆盘的假设，替换为复数域 C $\setminus F$(T) 的无界连通分支应包含一个顶点在 0 的开扇形这一条件，该定理将不再成立。

致谢：本研究部分受法国国家研究机构 COMOP 项目资助（资助编号：ANR-24-CE40-0892-01）。作者感谢 CDP C^{2}EMPI 项目，以及法国政府通过法国2030计划、里尔大学、里尔大学卓越倡议和里尔欧洲大都会，为 R-CDP-24-004-C2EMPI 项目提供资金与支持。第三位作者也感谢法国国家科学研究中心的支持。第四位作者获得西班牙 Plan Nacional I+D 项目资助，资助编号为 PID2022-137294NB-I00，部分经费来自该项目。部分工作是在他于2025年访问里尔大学 Paul Painlev´e 实验室期间完成的，他对访问期间受到的热情接待表示感谢。

References

[1] P. R. Ahern 和 D. N. Clark, *On eigenvalues in the essential spectrum of a Toeplitz operator*, 《算子理论杂志》 **13** 1985 1, 151 162 768309 ( ), 第 – 期。MR N. Yu. Bakaev,
[2] *The upper bounds for powers of linear operators and some applications to the stability analysis of difference problems* **4** 1998 4, 343 364 , 《微分方程应用》杂志 ( ),
第 – 期。MR1657232[3] A. B¨ottcher 和 B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz operators*, 施普林格出版社，柏林，1990年。MR1071374[4] Arlen Brown 和 P. R. Halmos, *Algebraic properties of Toeplitz operators*, 《纯粹与应用数学杂志》213 (1963/64), 89–102。MR160136[5] Isabelle Chalendar 和 Romain Lebreton, *Embeddability of some classes of operators into strongly continuous semigroups* **68** 2025 1, 219 231 4862237 , 《加拿大数学通报》 ( ), 第
– 期。MR[6] Rapha ¨el Clouˆatre、Maeva Ostermann 和 Thomas Ransford, , 《算子理论杂志》 ( ), 第 – 期。MR *An abstract approach to the Crouzeix conjecture* **90** 2023 1, 209 221 4615732
[7] *Bounds for analytical functions of matrices* M. Crouzeix, , 《积分方程与算子理论》 **48** 2004 4, 461 477 2047592 ( ), 第 – 期。MR ,
[8] *Numerical range and functional calculus in Hilbert space*, 《函数分析杂志》244 (2007), 第2期, 668–690。MR2297040[9] M. Crouzeix 和 C. Palencia, *The numerical range is a* $(1+\sqrt{2})$*-spectral set*, 《工业与应用数学学会矩阵分析与应用杂志》 ——— **38** 2017 2, 649 655 3666309 ( ), 第 – 期。MR Guy David,
[10] *Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe*, 《高等师范学校科学年鉴》 ´(4) 17 (1984), 第1期, 157–189。MR744071[11] Thierry de la Rue 和 Jos ´e de Sam Lazaro, , 《亨利·庞加莱研究所概率与统计年鉴》 ( ), 第 – 期。MR *Une transformation générique peut être insérée dans un flot* ´ **39** 2003 1, 121 134 1959844
[12] B. Delyon 和 F. Delyon, *Generalization of von Neumann's spectral sets and integral representation of operators* **127** 1999 1, 25 41 , 《法国数学会通报》 ( ), 第 – 期。MR[13] *Theory of H^p spaces* 1700467 38, P. L. Duren, , 纯粹与应用数学丛书，第 卷。学术出版社，纽约-伦敦，1970年。MR268655[14] Tanja Eisner, *Embedding operators into strongly continuous semigroups*, 《巴塞尔数学档案》92 (2009), 第5期, 451–460。MR2506946[15] , *Stability of operators and operator semigroups*, 《算子理论：进展与应用》, 第 209, ¨ 2010 2681062 卷，巴塞尔出版社，巴塞尔, 。MR , , 《数学教学》
[16] ———*A "typical" contraction is unitary* 2 **56** ( ) (2010), 第3–4期, 403–410。MR2769030[17] Tanja Eisner 和 Tam´as M´atrai, *On typical properties of Hilbert space operators*, 《以色列数学杂志》195 (2013), 第1期, 247–281。MR3101250[18] Klaus-Jochen Engel 和 Rainer Nagel, *A short course on operator semigroups*, 《大学数学丛书》, 施普林格出版社，纽约, 2006年。MR2229872[19] Emmanuel Fricain、Sophie Grivaux 和 Ma ¨eva Ostermann, , 。*Hypercyclicity of Toeplitz operators with smooth symbols* 2025 04931229 3 v 。

[20] Emmanuel Fricain 和 Javad Mashreghi, *The theory of $\mathcal{H}(b)$ spaces. Vol. 1*, 《新数学专著丛书》第20卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2016年。MR3497010[21] Leonid Golinskii, Stanislas Kupin 和 Anna Vishnyakova, *On the growth of the resolvent of a Toeplitz operator* **20** 2024 4, 481 497 , 《数学物理分析与几何杂志》 ( ), 第 – 期。MR 4849682
[22] *Numerical range* K.E. Gustafson 和 D.K.M. Rao, , 《大学数学丛书》, 施普林格出版社, 纽约, 1997年。线性算子与矩阵的数值域。MR1417493[23] , *Numerical range*, 《大学数学丛书》, 施普林格出版社, 纽约, 1997年。线性算子与矩阵的数值域。MR1417493[24] Markus Haase, *The functional calculus for sectorial operators*, 《算子理论: 进展与应用》, 第 169, ¨ 2006 2244037 卷, 巴塞尔出版社, 巴塞尔, 。MR E.
[25] *The numerical range of a Toeplitz operator* M. Klein, 《美国数学会会刊》35 (1972), 101–103。MR296725[26] Heinrich P. Lotz, *Uniform convergence of operators on L^∞ and similar spaces*, 《数学杂志》190 (1985), 第2期, 207–220。MR797538[27] Bartosz Malman、Javad Mashreghi、Ryan O'Loughlin 和 Thomas Ransford, *Double layer potentials configuration constants and applications to numerical ranges* , , , 《国际数学研究通知》8 (2025年), 论文编号 rnaf084, 34。MR4890874[28] Ma¨eva Ostermann, *Estimation des normes des fonctions d'un opérateur*, 博士论文, 魁北克省, 加拿大, 2021年。[29] V. V. Peller, *Spectrum, similarity, and invariant subspaces of Toeplitz operators*, 《苏联科学院数学系列学报》 **50** 1986 4, 776 787, 878 864176 ( ), 第 – 期。MR I. I. Priwalow, 《数学高等
[30] *Randeigenschaften analytischer Funktionen* 图书》, ¨书籍¨的[数学大学丛书], 第25卷, 德国科学出版社, 柏林, 1956年。第二版, 由 A. I. Markuschewitsch 主编, ¨经修订和¨增补。MR83565[31] T. Ransford 和 F. J. Schwenninger, *Remarks on the Crouzeix–Palencia proof that the numerical range is a $1+\sqrt{2}$ -spectral set* **39** 2018 1, 342 ( ), 《工业与应用数学学会矩阵分析与应用杂志》( ), 第 – 345期。MR3769702[32] B. M. Solomyak 和 A. L. Vol′ berg, *Multiplicity of analytic Toeplitz operators*, 《托普利茨算子与谱函数理论》, – 1989, 87 192 1030051 第 – 页。MR K.-C. Toh 和 L.N.
[33] Trefethen, *The Kreiss matrix theorem on a general complex domain*, 《工业与应用数学学会矩阵分析与应用杂志》 **21** 1999 1, 145 165 1709731 ( ), 第 – 期。MR G. C. Tumarkin 和
[34] *An expansion theorem for analytic functions of class* S. Ja. Havinson, *E_p in multiply connected domains* **13** 1958 2 80 223 228 , 《数学科学进展》(新系列) ( ), 第 ( ) 期, –。MR96803[35] J. M. A. M. van Neerven, *A converse of Lotz's theorem on uniformly continuous semigroups*, 《美国数学会会刊》 **116** 1992 2, 525 527 1097355 ( ), 第 – 期。MR D. V. Yakubovich, 《托普
[36] *Riemann surface models of Toeplitz operators* 利茨算子与谱函数理论》, 1989年, 第305–415页。MR1030055[37] , *On the spectral theory of Toeplitz operators with a smooth symbol*, 《代数与分析》 **3** 1991 4, 208 226 1152611 ( ), 第 – 期。MR ,
[38] *Spectral multiplicity of Toeplitz operators with smooth symbols*, 《美国数学杂志》115 (1993 6, 1335 1346 1254736), 第 – 期。MR ,
[39] *Dual piecewise analytic bundle shift models of linear operators*, 《函数分析杂志》136 (1996), 第2期, 294–330。MR1380657

Univ. Lille, CNRS, UMR 8524 - Laboratoire Paul Painlevé, F-59000 Lille, France
Email address: emmanuel.fricain@univ-lille.fr

Univ. Lille、 CNRS、 UMR 8524 - Laboratoire Paul Painlevé、 F-59000 Lille、 France*Email address*: sophie.grivaux@univ-lille.fr

Univ. Lille, CNRS, UMR 8524 - Laboratoire Paul Painlevé, F-59000 Lille, France
Email address: maeva.ostermann@univ-lille.fr

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, Canto-Blanco, 28049 Madrid, Spain
Email address: dmitry.yakubovich@uam.es