二元分类中不平衡的理论与实证分类

Rose Yvette Bandolo Essomba

开普敦大学数学与应用数学系 *AIMS*研究与创新中心bndros004@myuct.ac.za

Ernest Fokou´e

罗切斯特理工学院数学与统计学院
epfeqa@rit.edu

arXiv:2601.04149v1 [stat.ML] 7 Jan 2026

摘要

类别不平衡会显著降低分类性能，但其影响很少从统一的理论视角进行分析。我们提出一个基于三个基本尺度的原则性框架：不平衡系数 η、样本–维度比 κ和内在可分性 Δ。从高斯贝叶斯分类器出发，我们推导出贝叶斯误差的闭式表达式，并展示类别不平衡如何移动判别边界，由此得到退化斜率，可用于预测四个区域：正常、轻度、极端和灾难性。我们使用一个平衡的高维基因组数据集，仅改变 η，同时保持 κ和 Δ 不变。在参数模型和非参数模型中，实证性能退化与理论预测高度吻合：当 $\log(\eta)$ 超过$\Delta\sqrt{\kappa}$时，少数类召回率会崩溃；精确率则不对称地上升；F1分数和精确率-召回率曲线下面积则按预测的区域逐步下降。这些结果表明，三元组（η、 κ、 Δ）为类别不平衡导致的性能退化提供了一种模型无关且具有几何基础的解释。

1 引言

二元分类仍是机器学习中最基础的问题之一，支撑着医学诊断、欺诈检测、基因组学和金融预测等众多应用。然而，分类模型的性能不仅取决于算法的选择，也取决于底层的数据分布。在实践中，数据集很少是平衡的——某一类别的实例数量往往远远超过另一类别，由此形成所谓的类别不平衡问题 [Japkowicz 和 Stephen，2002年，Weiss 和 Provost， 2003]。这种不平衡会使分类器偏向多数类，导致准确率看似很高，却无法良好识别少数类实例，而这些实例在现实世界中往往更为重要。

因此，不平衡数据分类已成为机器学习中长期存在且跨领域的挑战 [He 和 Garcia，2009年，Krawczyk， 2016]。缓解这一问题的传统方法包括数据层面方法，例如随机欠采样或合成过采样（如合成少数类过采样技术 [Chawla 等人， 2002]），以及通过修改损失函数或决策

阈值来调整的算法层面解决方案 [Lin 等人，2017年，Cui 等人，2019年，Cao 等人， 2019]。尽管这些方法已在实证中取得成功，但它们在很大程度上仍属于启发式方法，通常需要针对特定数据集或模型进行参数调优。更重要的是，这些方法几乎无法从理论上解释为何类别不平衡会导致性能退化，或如何 类别不平衡的程度在定量上影响学习结果。

尽管实用算法取得了长足进展，该领域仍缺乏统一的理论框架来描述类别不平衡在不同模型和领域中的效应。以往大多数研究通过经验方法刻画性能，却没有给出有原则的界限，以区分类别不平衡何时会造成危害或灾难性后果。此外，类别不平衡还会与协方差各向异性、特征维数和信噪比等其他结构性因素相互作用，而这些因素都可能以复杂的方式影响分类器鲁棒性。若没有连接这些维度的形式化模型，我们对类别不平衡的理解仍然是零散的。

为弥合这一差距，我们提出一个理论与实证框架，从贝叶斯最优分类器的视角对类别不平衡的影响进行形式化描述。由于贝叶斯分类器能够达到可能的最低误分类风险，它为量化性能退化提供了一个与算法无关的理论基准。我们推导了贝叶斯风险关于不平衡比率 η、维数比 κ和信噪比 Δ 的解析表达式。这些结果揭示了一个结构化的不平衡情形分类体系 —— 正常、轻度、极端和灾难性——其定义依据是少数类性能退化的斜率。该分类体系不仅提供了描述性框架，也为推理任何类别分类器系列中的类别不平衡提供了预测性框架。

为验证该理论，我们在参数模型和非参数模型上开展了受控实证实验，以补充分析结果，涵盖逻辑回归、线性判别分析和二次判别分析、随机森林、 k-近邻、支持向量机以及 XGBoost。我们系统地将不平衡比率从 1:1 调整至 1:400，并使用少数类 F1分数、召回率、平衡准确率和精确率-召回率曲线下面积来衡量性能退化。观察到的退化模式证实了理论预测，表明参数模型较早发生性能退化，而非参数集成模型表现出更强的韧性。

总而言之，本研究的主要贡献如下：

- 我们利用贝叶斯风险对类别不平衡导致的性能退化进行了理论刻画，推导出了不平衡比率、可分性与错误率之间的闭式关系。
- 我们根据少数类退化的斜率提出了不平衡情形分类，为判断学习何时变得不可靠提供了可解释的阈值。
- 我们分析了协方差几何结构的作用，展示了各向同性、各向异性和异方差结构如何放大或减弱不平衡效应。
- 我们通过针对多种分类器系列和不平衡比率开展的系统实验，从经验层面验证了该理论。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾类别不平衡和不平衡感知学习的相关研究。第 3 节介绍理论框架，并推导基于贝叶斯的分类体系。第 5 节介绍理论模拟和实证验证。第 6 节总结全文，并提出未来研究方向。

2 相关工作

类别不平衡的研究在机器学习和统计模式识别领域历史悠久。早期实证研究表明，类别偏斜会严重扭曲分类器行为，使预测偏向多数类并降低少数类敏感度 [Japkowicz 和 Stephen，2002年，Weiss 和 Provost，2003年，Th¨olke 等人， 2023]。在极端不平衡情况下，模型可能退化为简单的多数类预测器，虽然准确率看似很高，却无法检测少数类实例 [He 和 Garcia，2009年，Krawczyk， 2016]。后续分析表明，这种性能退化的程度取决于学习范式和数据几何。随机森林和提升算法变体等基于集成的非参数模型，往往比参数线性模型保持更高的少数类召回率 [Yang 等人，2019年，Th¨olke 等人，2023]，；而逻辑回归和判别分析通常会随着类别不平衡加剧而更快退化 [Japkowicz 和 Stephen， 2002]。近期，Francazi 等人 [2023] 指出，随机梯度下降的动态过程会通过“少数类初始骤降”行为进一步放大不平衡效应，即早期更新由多数类梯度主导。

为减轻这些影响，人们提出了许多经验性策略。随机欠采样和合成少数类过采样技术（SMOTE） [Chawla 等人， 2002] 等数据层方法通过修改类别先验来重新平衡数据集，而 DeepSMOTE [Dablain 等人， 2022] 等深度方法则利用潜在表示改进合成生成。类别加权损失和代价敏感决策规则 [He 和 Garcia， 2009], 等算法层方法会调整学习目标，以提高少数类的贡献。在深度学习中，焦点损失 [Lin 等人， 2017],类别平衡损失 [Cui 等人， 2019], 和 LDAM（标签分布感知边际损失） [Cao 等人， 2019] 等专门设计的损失函数会明确地抵消偏斜梯度和长尾分布带来的影响。尽管取得了这些进展，大多数方法仍然依赖启发式且针对特定模型，对性能退化的内在机制缺乏深入认识。很少有研究尝试从第一性原理或理论不变量的角度描述类别不平衡行为。

一些综述提出了描述性分类体系，根据固定的不平衡比率（IR）阈值将数据集标记为“中度”或“严重”类别不平衡——通常阈值高于 50:1 或 100:1 [Ak- ter 等人，2022年，Sharma 等人， 2018]。另一些研究则引入了实例级分类体系，将少数类样本区分为安全、边界、稀有和离群样本 [Napierala 和 Stefanowski，2012年，Aguiar 等人，2024]。然而，这些框架仍然停留在经验性和定性层面：它们没有给出类别不平衡从轻度状态转变为灾难性状态的解析条件，也没有解释先验概率、协方差结构或类别可分性如何共同决定模型性能退化。

最后，类别不平衡条件下的评估仍然是一个核心问题。准确率——在基准研究中被广泛使用——通过偏向多数类预测来高估性能 [Weiss 和 Provost，2003年，Th¨olke 等人， 2023]。平衡准确率、F度量和精确率-召回率曲线下面积已成为更公平的指标，能够反映少数类性能 [He 和 Garcia，2009年，Saito 和 Rehmsmeier，2015年，Davis 和 Goadrich， 2006]。近期研究进一步强调了校准和不确定性估计的重要性，表明某些不平衡校正可能会夸大少数类风险估计 [Carriero 等人， 2025]。这些观察表明，指标设计和理论基础对于有意义的评估都至关重要。

总之，现有研究主要通过经验启发式方法和描述性分类体系来刻画类别不平衡。然而，该领域仍缺乏一种通用理论模型，能够将不平衡比率、数据几何与分类器风险联系起来。本研究通过推导贝叶斯最优框架来弥补这一空白，该框架能够以解析方式量化性能退化，并导出一种有原则的

不平衡情形分类。

3 理论框架：不平衡的贝叶斯图景

本节基于贝叶斯决策理论，对类别不平衡的理论分类体系进行形式化。我们刻画类别不平衡、维数和可分性如何共同决定二元分类中的性能退化。我们的分析依赖于三个基本尺度（η，κ，Δ），所有理论结果均由此得出。

3.1 研究动机

不平衡学习文献始终强调三种不同的困难来源。首先，大多数关于类别不平衡学习的综述和实证研究都聚焦于多数类与少数类之间的类别比例，并根据这一不平衡系数[评估方法（Khan等人，2024年；Fotouhi 等，2019年；Chen等人，2024]）。其次，另一类研究强调，在高维情境下，不平衡带来的问题会加剧，此时样本量与特征维数之比会显著影响分类器稳定性 [（Pes，2021年；Blagus 和 Lusa，2010年、2013年；Lin 和 Chen，2013]）。第三，近期多篇综述指出，若不考虑类别重叠或可分性的程度，就无法理解类别不平衡的影响，并研究类别不平衡与重叠对学习性能的联合影响 [（Santos 等，2022年、2023年；Vuttipittayamongkol等人，2021]）。

受这三条研究脉络的启发，我们用三个基本尺度的三元组 (η、κ、Δ) 来刻画类别不平衡分类问题的“难度”，它们分别对应先验不平衡、维数条件性和类别可分性。本节余下部分将形式化定义这些量，并说明它们如何共同决定不平衡的贝叶斯图景。

3.2 控制类别不平衡的基本尺度：Eta、Kappa、Delta

我们将二分类场景下的数据生成过程形式化为

$$(X, Y) \sim p_{XY}, \qquad Y \in \{0, 1\},\ X \in \mathbb{R}^p,$$

其类别先验为

$$\pi_1 = \mathbb{P}(Y = 1), \qquad \pi_0 = \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - \pi_1,$$

类别条件密度为

$$f_1(x) = p_{X|Y}(x|1), \qquad f_0(x) = p_{X|Y}(x|0).$$

贝叶斯后验概率与决策规则。贝叶斯后验概率表示为

$$\mathbb{P}(Y = 1|X = x) = \frac{\pi_1 f_1(x)}{\pi_1 f_1(x) + \pi_0 f_0(x)},$$

而贝叶斯分类器为

$$g^*(x) = \begin{cases} 1, & \pi_1 f_1(x) \geq \pi_0 f_0(x), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

相应的贝叶斯风险为

$$R^* = \mathbb{E}\left[\min\{\pi_1 f_1(X), \pi_0 f_0(X)\}\right].$$

不平衡系数。继He和Garcia [2009], Fotouhi等人 [2019], Khan等人 [2024],Chen等人 [2024],之后，我们通过优势比量化先验不平衡

$$\eta = \frac{\pi_0}{\pi_1}.$$

该参数控制贝叶斯边界的倾斜程度：

$$\frac{f_1(x)}{f_0(x)} \geq \eta \quad \Longleftrightarrow \quad g^*(x) = 1.$$

因此，增大 η 会使决策边界向少数类区域移动。

在实际数据集中，可以根据计数对 η 进行经验估计：

$$\eta = \frac{n_0}{n_1},$$

其中， n_0 和 n_1 分别是每个类别的样本数。

Dim维度缩放。 高维学习的表现受该比率支配 o

$$\kappa = \frac{n}{p},$$

正如 Efron [1975], Donoho 和 Tanner [2005],Sur 与 Cand`es [2019] 的渐近分析所确立的那样。当 $\kappa < 1$ 时，协方差矩阵是奇异的，估计噪声占主导；当 $\kappa \gg 1$ 时，估计方差可以忽略。因此，κ 支配着经验代入分类器的稳定性。

可分性（信噪比）。遵循判别分析理论Jenkins和An- derson [2003], Hastie等人 [2009], 内在类别分离程度可通过马氏距离进行量化

$$\Delta = \sqrt{(\mu_1 - \mu_0)^\top \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0)}.$$

更大的 Δ 会减少 f_1 与 f_0之间的重叠，从而降低 R^*。

（η、 κ、 Δ）三元组。这三个尺度彼此正交：

$$\boxed{\text{(Class priors) } \eta \qquad \text{(Sample–dimension ratio) } \kappa \qquad \text{(Intrinsic separability) } \Delta.}$$

每个参数都会扰动贝叶斯误差的不同组成部分：

$$R^*(\eta, \kappa, \Delta) = R^*_{\text{priors}}(\eta) + R^*_{\text{estimation}}(\kappa) + R^*_{\text{overlap}}(\Delta),$$

而经验上的性能退化则源于它们的联合交互作用 Th¨olke等人 [2023].

因此，我们将（η、 κ、 Δ）作为类别不平衡的基本轴。

4 三元组缩放下的贝叶斯分类器

我们在三元组缩放（η、 κ、 Δ）下分析贝叶斯分类器，其中， η刻画先验不平衡，$\kappa = n/p$ 控制高维估计噪声， Δ 衡量内在类别可分性。本节将贝叶斯判别函数和类别条件贝叶斯错误推导为三元组的显式函数。

4.1 高斯贝叶斯判别函数

考虑 $Y \in \{0,1\}$的二元分类问题，其中类别 1 为多数类（先验概率为 π_1），类别 0 为少数类（先验概率为 π_0）。我们定义不平衡比率

$$\eta = \frac{\pi_1}{\pi_0} > 1,$$

遵循 He 和 Garcia [2009],Fotouhi等人 [2019],Chen等人 [2024]的标准做法。

4.1.1 贝叶斯决策规则

贝叶斯分类器会预测后验概率最高的类别。根据贝叶斯定理，预测类别 1 等价于

$$\pi_1 f_1(x) \;\geq\; \pi_0 f_0(x) \quad\Longleftrightarrow\quad \log \frac{f_1(x)}{f_0(x)} \;\geq\; -\log(\eta). \tag{1}$$

4.1.2 高斯类条件模型

我们假设采用标准的同方差高斯模型:

$$X \mid Y = k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \Sigma), \qquad k \in \{0,1\},$$

具有类条件密度

$$f_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\!\left(-\frac{1}{2}(x-\mu_k)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu_k)\right).$$

4.1.3 对数似然比

将 f_1 和 f_0 代入（1）后，归一化常数相互抵消:

$$\log \frac{f_1(x)}{f_0(x)} = -\tfrac{1}{2}(x-\mu_1)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu_1) + \tfrac{1}{2}(x-\mu_0)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu_0). \tag{2}$$

利用展开式

$$(x-\mu_k)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu_k) = x^\top \Sigma^{-1} x - 2x^\top \Sigma^{-1}\mu_k + \mu_k^\top \Sigma^{-1}\mu_k,$$

二次项 $x^\top \Sigma^{-1} x$ 相互抵消，剩下关于 x的线性函数，这与经典高斯判别分析一致 Jenkins 和 Anderson [2003],McLachlan [2005], Hastie等人 [2009]。

4.1.4 最终贝叶斯判别式

合并其余的线性项和常数项，得到

$$\log \frac{f_1(x)}{f_0(x)} = (\mu_1-\mu_0)^\top \Sigma^{-1} x - \tfrac{1}{2}(\mu_1+\mu_0)^\top \Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_0). \tag{3}$$

将 (3) 代入 (1)，得到贝叶斯判别函数:

$$g^*(x) = (\mu_1-\mu_0)^\top \Sigma^{-1} x - \tfrac{1}{2}(\mu_1+\mu_0)^\top \Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_0) + \log(\eta). \tag{4}$$

当 $g^*(x) \geq 0$ 时，分类器预测为多数类。随着类别不平衡加剧，项 $\log(\eta)$ 会使决策边界向少数类移动，这与 Xie and Qiu [2007] 对类别先验不相等情况下线性判别分析的分析一致。

4.2 三元组缩放下的类别条件贝叶斯错误

Let

$$\Delta^2 = (\mu_1 - \mu_0)^\top \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_0)$$

表示类别均值之间的马氏距离平方，并令 $\kappa = n/p$ 表示样本数与维数之比。

4.2.1 高维有效间隔

现代渐近结果 Efron [1975], Donoho 和 Tanner [2005], Sur 与 Cand`es [2019] 表明，在高维情况下，可用的分离度会收缩至

$$\Delta_{\text{eff}} = \Delta \sqrt{\kappa}.$$

4.2.2 一维约化

定义 $T = w^\top x$，其中 $w = \Sigma^{-1}(\mu_1 - \mu_0)$。在高斯模型下，

$$T \mid Y = 1 \sim \mathcal{N}\left(+\frac{\Delta_{\text{eff}}^2}{2}, \Delta_{\text{eff}}^2\right), \qquad T \mid Y = 0 \sim \mathcal{N}\left(-\frac{\Delta_{\text{eff}}^2}{2}, \Delta_{\text{eff}}^2\right).$$

贝叶斯规则 $g^*(x) \geq 0$ 等价于 $T \geq$ 对数(η)。

4.2.3 少数类和多数类的贝叶斯误差

少数类（类别 0）的误差为

$$e_0(\eta, \kappa, \Delta) = \Pr(T \geq \log(\eta) \mid Y = 0) = \Phi\left(-\frac{\Delta\sqrt{\kappa}}{2} + \frac{\log(\eta)}{\Delta\sqrt{\kappa}}\right),$$

其中 Φ 是标准正态累积分布函数。

多数类（类别 1）的误差为

$$e_1(\eta, \kappa, \Delta) = \Pr(T < \log(\eta) \mid Y = 1) = \Phi\left(-\frac{\Delta\sqrt{\kappa}}{2} - \frac{\log(\eta)}{\Delta\sqrt{\kappa}}\right).$$

4.2.4 贝叶斯风险

因此，三元组缩放下的总体贝叶斯风险为

$$R^*(\eta, \kappa, \Delta) = \pi_0\, e_0(\eta, \kappa, \Delta) \;+\; \pi_1\, e_1(\eta, \kappa, \Delta). \tag{5}$$

该表达式量化了类别不平衡（η）、维数（κ）和类别分离（Δ）对贝叶斯最优性能的联合作用，并构成了下一节所建立分类体系的分析基础。

图1展示了在不同维数比 κ和信噪比 Δ下，贝叶斯风险 $R^*(\eta,\ \kappa,\ \Delta)$ 随不平衡系数 η变化的情况。每个面板对应一个固定的 κ，而面板中的彩色曲线则展示了可分性逐渐增强时的情况。

在所有设置下，贝叶斯风险都随 η单调上升。这反映了先验不平衡引起的阈值偏移$T \geq \log(\eta)$，该偏移使决策边界朝少数类区域移动，并增加少数类错误。 η 的影响受 Δ 和 κ调节。

对于固定的 κ，曲线按 Δ排序：可分性低时，贝叶斯风险较高，对类别不平衡也更敏感；而可分性高时，性能则更加稳定。这与闭式表达式一致

$$e_0(\eta, \kappa, \Delta) = \Phi\left(-\frac{\Delta\sqrt{\kappa}}{2} + \frac{\log(\eta)}{\Delta\sqrt{\kappa}}\right), \qquad e_1(\eta, \kappa, \Delta) = \Phi\left(-\frac{\Delta\sqrt{\kappa}}{2} - \frac{\log(\eta)}{\Delta\sqrt{\kappa}}\right),$$

其中 $\Delta\sqrt{\kappa}$决定了有效类别分离度。

比较各面板可以看出 κ的作用：当 $\kappa < 1$时，有效间隔 $\Delta\sqrt{\kappa}$ 会崩塌，即使类别均衡的问题也会有较高的贝叶斯风险；当 $\kappa \simeq 1$时，风险曲线反映的是内在分离度；而当 $\kappa > 1$时，估计噪声消失，贝叶斯风险趋近于理想的高斯情形。因此， κ 决定了 R^*（η， κ， Δ）的曲率及其对类别不平衡的敏感度。

总体而言，该图强调了这些轴（η、 κ、 Δ）以非线性且不可约的方式相互作用：类别不平衡会使边界发生偏移，维数会重新缩放可用的分离度，而 Δ 控制内在重叠。这些因素中没有任何一个能够单独解释 R^*（η、 κ、 Δ）的行为；只有它们三者的交互作用，才能完整刻画类别不平衡条件下观察到的贝叶斯最优退化。

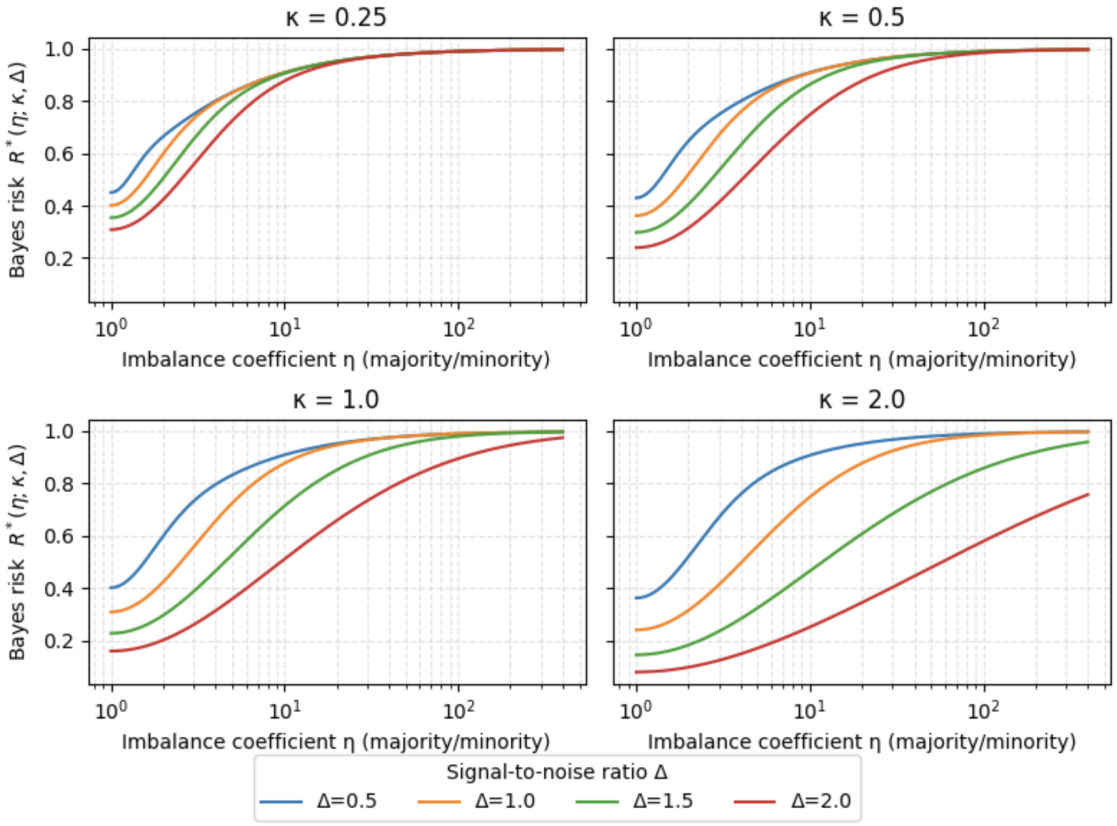


图1： **贝叶斯风险与类别不平衡 η 在 κ （2×2）网格和 δ （曲线）上的关系**

4.3 退化与机制分类

在获得明确的贝叶斯风险后

$$R^*(\eta,\kappa,\Delta) = \pi_0\, e_0(\eta,\kappa,\Delta) + \pi_1\, e_1(\eta,\kappa,\Delta),$$

现在，我们量化随着不平衡系数η 增大，类别不平衡如何扭曲贝叶斯最优性能。我们的目标是刻画性能退化的速率、严重程度和定性转变，这些构成了机制分类体系的基础。

绝对退化。 对于固定的（κ， Δ），我们将类别不平衡程度为 η 时的绝对退化 定义为贝叶斯风险相对于平衡参考点 $\eta = 1$的偏差:

$$D(\eta,\kappa,\Delta) = R^*(\eta,\kappa,\Delta) - R^*(1,\kappa,\Delta). \tag{6}$$

由于 R^* 随 η严格递增，因此退化始终非负。

退化斜率。 为衡量对类别不平衡的瞬时敏感度，我们对退化关于对数 η求导:

$$S(\eta,\kappa,\Delta) = \frac{\partial D(\eta,\kappa,\Delta)}{\partial \log \eta}. \tag{7}$$

对 $\log\eta$ 求导是自然的，因为贝叶斯判别阈值随 $\log\eta$ 线性偏移，而贝叶斯误差取决于 $\log(\eta)/(\Delta\sqrt{\kappa})$。

引理 1（少数类单调退化）。少数类错误

$$e_0(\eta, \kappa, \Delta) = \Phi\left(-\frac{\Delta\sqrt{\kappa}}{2} + \frac{\log(\eta)}{\Delta\sqrt{\kappa}}\right)$$

满足

$$\frac{\partial e_0}{\partial \log \eta} = \frac{1}{\Delta\sqrt{\kappa}}\,\phi\left(-\frac{\Delta\sqrt{\kappa}}{2} + \frac{\log(\eta)}{\Delta\sqrt{\kappa}}\right) > 0,$$

其中 ϕ为标准正态概率密度函数。因此，类别不平衡加剧总会降低少数类的敏感度。

定理 1（凸性退化）。 $e_0(\eta, \kappa, \Delta)$ 和 $e_1(\eta, \kappa, \Delta)$ 关于 $\log\ \eta$ 均为凸函数，因为它们是自变量为仿射函数的高斯累积分布函数。因此，它们的混合项 $R^*(\eta, \kappa, \Delta)$ 和退化函数 $D(\eta, \kappa, \Delta)$ 关于 $\log\ \eta$ 也均为凸函数。这种凸性意味着，随着 η 增大，类别不平衡导致的性能退化会加速。

定理 2（灾难性阈值）。当贝叶斯后验概率始终偏向多数类时，即使对于最有利于少数类的特征向量，该分类器也会进入灾难性类别不平衡状态。在三元组缩放下，判别变量满足

$$T_{\min} = -\frac{\Delta_{\text{eff}}^2}{2} = -\frac{\Delta^2\kappa}{2}.$$

当贝叶斯决策阈值满足以下条件时，会发生灾难性崩溃

$$T_{\min} \geq \log(\eta),$$

由此得到灾难性类别不平衡阈值

$$\eta_{\max} = \exp\left(\frac{\Delta^2\kappa}{2}\right). \tag{8}$$

对于 $\eta > \eta_{\max}$，每个 x 都被归为多数类别；少数类别变得统计上不可检测。较大的 Δ 或 κ会延缓这种崩溃，而较小的 κ 则会加速它。

机制分类。我们使用斜率幅度 $|S|$对类别不平衡严重程度进行分类：

$$\text{Normal: } |S| \leq \tau_1, \qquad \text{Mild: } \tau_1 < |S| \leq \tau_2, \qquad \text{Extreme: } |S| > \tau_2, \qquad \text{Catastrophic: } \eta > \eta_{\max}.$$

这些区域分别对应稳定、早期退化、快速退化和完全崩溃性能。阈值 τ_1 和 τ_2 可通过解析方法或经验方法确定，具体取决于应用需求，但灾难性极限 $\eta_{\max}$ 是精确的，它标志着少数类后验概率处处低于 0.5 的边界。

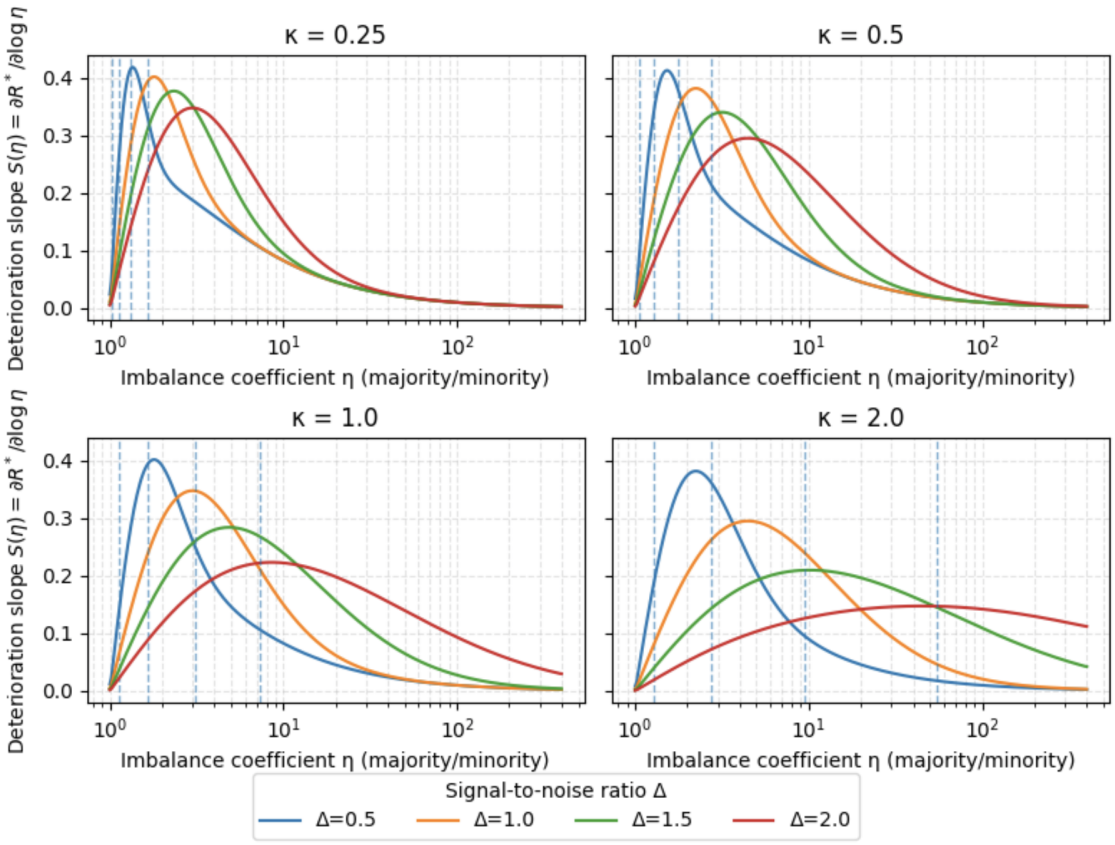


图 2： **退化斜率** S（η， κ， Δ）。

图 2 展示了退化斜率的演变

$$S(\eta;\kappa,\Delta)=\frac{\partial R^*(\eta;\kappa,\Delta)}{\partial \log \eta},$$

在不平衡比率 η 增大的过程中，针对若干维度与样本比 κ和信噪比水平 Δ。每个面板对应一个固定的 κ，而不同颜色的曲线表示不同的 Δ 值。

解读。 斜率 $S(\eta)$量化了性能损失的瞬时速率随类别不平衡加剧而变化的程度。对于平衡数据（ $\eta=1$），斜率几乎为零，表明处于稳定的正常状态。随着类别不平衡加剧， $S(\eta)$上升——这反映了性能退化的开始——并在风险退化最快处达到最大值。该峰值定义了轻度与极端区域之间的转变。超过此点后，斜率逐渐趋近于零：随着分类器崩溃并仅预测多数类，风险趋于饱和，标志着进入灾难性状态。

两个趋零极限。尽管在 $\eta\approx 1$ 处以及当 $\eta\to\infty$时， $S(\eta)$都趋于零，但这两个极限的含义截然相反。在类别平衡时， $S\approx 0$意味着稳定且风险最低。在类别不平衡程度较高时， $S\to 0$则表示已达到饱和：风险已达到最大值（$R^*\approx\pi_{\min}$），进一步加剧偏斜也不会再改变性能。因此，高 η 时斜率趋零意味着完全崩溃，而非恢复。

经验性分区。我们定义参考阈值 $\tau_1 = 0.1\, S_{\max}$ 和 $\tau_2 = 0.5\, S_{\max}$，其中 $S_{\max}$为峰值恶化率。由此得到以下分类体系：

正常： $S/S_{\max} \le 0.1$，轻度： $0.1 < S/S_{\max} \le 0.5$，极端： $S/S_{\max} > 0.5$，灾难性： $\eta > \eta_{\max}$，

其中 $\eta_{\max} = e^{\frac{1}{2}\Delta^2\kappa}$由定理 4.3 给出。图中的竖直虚线表示 $\eta_{\max}$，与极端 和灾难性 区域之间的经验转变高度吻合。

观测模式。在所有设置中，斜率都呈现钟形结构：从零开始上升，达到峰值后再逐渐衰减至零。较小的 κ（上方面板）会产生更尖锐且更早出现的峰值，这表明高维或低样本分区更容易受到类别不平衡的影响。较大的κ 和更强的信号（Δ）会使峰值延后且趋于平缓，显示出更强的鲁棒性。理论与经验容忍度尺度之间的吻合验证了所提出的机制分类。

4.4 三元组空间中的指标与模型家族

利用（5），经典指标可以改写为（η， κ， Δ）的形式：

$$\mathrm{Recall}_-(\eta, \kappa, \Delta) = 1 - e_-(\eta, \kappa, \Delta), \tag{9}$$

$$\mathrm{Precision}_-(\eta, \kappa, \Delta) = \frac{(1-\pi)(1-e_-)}{(1-\pi)(1-e_-) + \pi e_+}, \tag{10}$$

$$\mathrm{F1}_-(\eta, \kappa, \Delta) = \frac{2\,\mathrm{Recall}_-\,\mathrm{Precision}_-}{\mathrm{Recall}_- + \mathrm{Precision}_-}. \tag{11}$$

这些解析表达式表明，随着 $\log \eta$ 和 κ的增加，各项指标会平稳退化，并在 $\eta \to \eta_{\max}$时趋近于零。

每个实际分类器 h_m 都可以被视为对 h^*的近似，其鲁棒性通过经验斜率与理论斜率之比来衡量：

$$\rho_m(\eta, \kappa, \Delta) = \frac{S_m(\eta, \kappa, \Delta)}{S^*(\eta, \kappa, \Delta)}. \tag{12}$$

$\rho_m < 1$ 值表示退化速度较慢（鲁棒性更强），而 $\rho_m > 1$ 则表示其相较于贝叶斯分类器下降更快。

4.5 从退化斜率到实用分类体系

为说明基于退化的机制分类如何体现在标准分类指标中，我们直接根据解析贝叶斯误差表达式计算平衡错误率（BER）、平衡准确率（BA）、Cohen's κ以及少数类的召回率、精确率和 F1 分数。各机制下的汇总统计量列于表3中，而图4通过小提琴图展示了与每种机制相关的类别不平衡范围内各项指标的完整分布。由于这些数值是从 e_0(η、 κ、 Δ) 和 e_1(η、 κ、 Δ) 确定性地获得的，因此它们代表的是理论性能图景，而不是通过拟合模型得到的经验结果。

1. 各区域在所有指标上均呈现单调退化。如表3所示，从正常 $\to$ 轻度 $\to$ 极端 $\to$ 灾难性，所有指标的性能都持续退化：BER 上升，平衡准确率和 Cohen's κ 下降，少数类召回率和 F1 分数则大幅下滑。图4对此进行了确认

从视觉上看：小提琴图分布沿预期方向单调移动，各区域之间几乎没有重叠。这种一致性表明，劣化斜率分类法能够形成鲜明且彼此区分良好的性能表现。

2. 正常和轻度区域保留了有意义的分类能力。表3显示，正常和轻度区域的平衡准确率较高（≈ 0.80–0.90）、Cohen's κ 数值可观，且少数类召回率和 F1 分数表现强劲。图4中对应的小提琴图紧密集中在各项指标的较高范围附近，反映出当 $\log(\eta)$ 相对于有效间隔 $\Delta\sqrt{\kappa}$ 仍较小时，性能具有稳定性。因此，这些区域对应于理论上"可处理"的类别不平衡设定。

3. 极端状态呈现出不对称的性能退化。在表3中，极端状态的特征是少数类召回率大幅下降、少数类精确率上升（反映出预测较为保守），以及平衡准确率和 κ 显著降低。图4中的小提琴图清晰地呈现了这种不对称性：召回率分布向下移动，精确率分布向上移动，而 F1 分数则变得高度集中。这与理论条件一致：当阈值项 $\log(\eta)$ 主导有效间隔 $\Delta\sqrt{\kappa}$ 时，会导致退化加速。

4. 灾难性状态符合预测的崩溃阈值。超过灾难性阈值 $\eta_{\max} = \exp(\Delta^2\kappa/2)$ 后，表3显示，少数类召回率和 F1 分数降至（或接近）零，Cohen's κ 趋近于零，而平衡准确率则收敛至仅多数类基线。在图4中，灾难性点的小提琴图分布变得平坦，并聚集在各项指标的下限附近。这些表现恰好符合以下预测：对于所有 x，贝叶斯后验概率都偏向多数类。

5. 不同区域对应不同且互不重叠的性能区域。表3和图4均显示，每个区域都占据理论性能空间中不同的区域，各分布之间的重叠有限。这些结构性差异证实，该分类体系并非随意划分：它根据三元组（η、κ、Δ）所决定的分类器行为，将不平衡格局划分为性质迥异的区域。这为理论劣化动态与实际评估指标之间提供了直接且易于解释的联系。

kappa	Delta	Regime	eta		BER	BA	Cohen_Kappa	Recall_min
			min	max	mean	mean	mean	mean
1.00	1.50	Catastrophic	3.50	50.00	0.39	0.61	0.29	0.24
1.00	1.50	Extreme	1.80	3.00	0.26	0.74	0.51	0.58
1.00	1.50	Mild	1.10	1.50	0.23	0.77	0.54	0.73
1.00	1.50	Normal	1.00	1.08	0.23	0.77	0.55	0.77
1.00	2.00	Catastrophic	8.00	50.00	0.34	0.66	0.42	0.33
1.00	2.00	Extreme	1.80	5.00	0.19	0.81	0.64	0.68
1.00	2.00	Mild	1.10	1.50	0.16	0.84	0.68	0.81
1.00	2.00	Normal	1.00	1.08	0.16	0.84	0.68	0.84
2.00	1.50	Catastrophic	10.00	50.00	0.33	0.67	0.44	0.34
2.00	1.50	Extreme	1.80	8.00	0.18	0.82	0.67	0.69
2.00	1.50	Mild	1.10	1.50	0.15	0.85	0.71	0.83
2.00	1.50	Normal	1.00	1.08	0.14	0.86	0.71	0.85
2.00	2.00	Extreme	1.80	30.00	0.12	0.88	0.79	0.79
2.00	2.00	Mild	1.10	50.00	0.11	0.89	0.80	0.84
2.00	2.00	Normal	1.00	1.08	0.08	0.92	0.84	0.92

图3： **状态摘要**

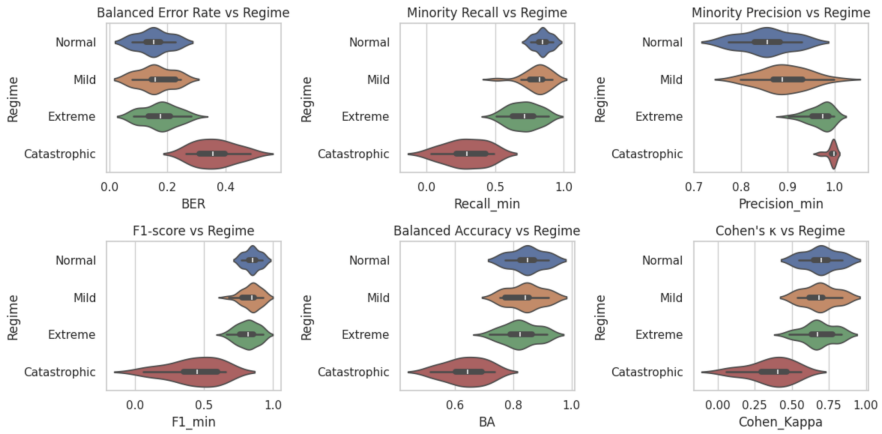


图4： **各区域的退化曲线**

5 受控类别不平衡下的实证评估

现在，我们通过固定内在可分性 Δ 和样本–维度比 κ ，实证考察实际分类器对不同类别不平衡程度的响应。我们的目的并非近似贝叶斯风险，而是验证现实模型中观察到的性能退化模式是否与三元组缩放框架所预测的理论劣化动态相符。

本研究使用的基因组数据集原本是平衡的。我们通过构造受控不平衡

序列，对少数类进行子采样，从而生成类别不平衡系数 ts

$$\eta \in \{1, 2, 3, 5, 10, 20, 50, 100\}.$$

在所有类别不平衡程度下，特征分布、类别分离和维度结构均保持不变；只有类别先验 η 发生变化。这与理论设定相符，在该设定中，$R^*(\eta,\ \kappa,\ \Delta)$仅随不平衡轴变化。

5.1 比较的模型

为研究类别不平衡与模型假设之间的相互作用，我们评估了两类分类器。

参数模型。 这些方法依赖于决策边界或类别条件密度的显式函数形式：

- 逻辑回归,
- 线性判别分析（LDA），
- 二次判别分析（QDA），
- 高斯朴素贝叶斯。

由于它们在结构上接近理论上的贝叶斯分类器，因此其在类别不平衡条件下的表现为三元组缩放预测提供了自然的实证基准。

非参数模型。 这些方法几乎不对分布作出假设，并且能够近似高度非线性的决策边界：

- 随机森林（RF），
- kK 近邻（KNN），
- 采用径向基函数核的支持向量机。

比较这两个族群有助于确定退化主要是由数据几何（如理论预测）还是模型僵化所驱动。

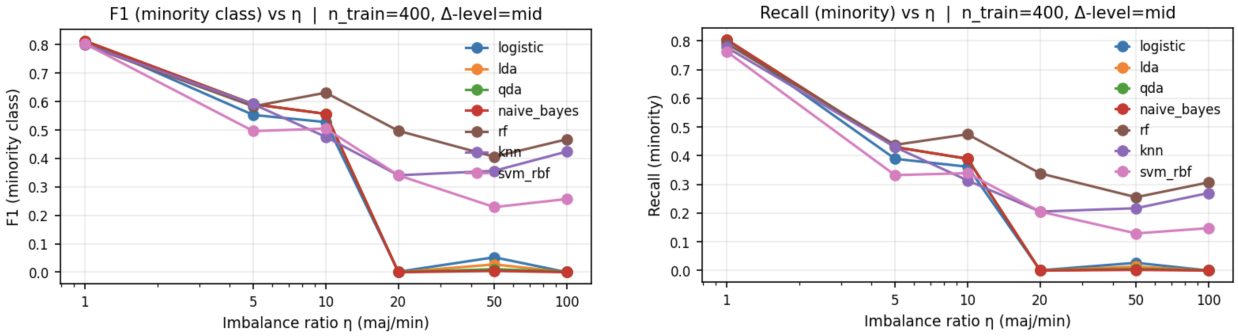
5.2 评估指标

对于每个模型和类别不平衡程度，我们报告五项少数类指标 ：

- **召回率**（少数类敏感度），
- **精确率**（假阳性稳健性），
- **F1分数**（精确率和召回率的综合平衡），
- **精确率-召回率曲线下面积**（少数类可检测性），
- **Cohen's** κ （机会校正一致性）。

这些指标与理论贝叶斯误差 $e_0(\eta, \kappa, \Delta)$ 和 $e_1(\eta, \kappa, \Delta)$ 直接相关，尤其是少数类召回率，它在经验上反映了判别函数偏移 $\log(\eta)$ 所预测的 e_1 单调增加。

5.3 结果：少数类召回率和 F1 分数



(a) 少数类 F1 分数与不平衡比率 η 的关系。　　(b) 少数类召回率与不平衡比率 η 的关系。

图 5：所有模型的少数类 F1 分数和召回率随不平衡比率 η 变化的情况。参数方法（逻辑回归、线性判别分析、QDA、朴素贝叶斯）的召回率和 F1 分数会随着 η 增大而迅速崩溃，而非参数模型（随机森林、K 近邻、径向基函数支持向量机）的性能则逐渐下降。$\eta \approx 10$ 和 $\eta \approx 20$ 之间的转折点与三元组缩放理论预测的从轻度区域向极端区域的转变相吻合。

图 5 展示了少数类的召回率和 F1分数随 η 变化的情况。所有参数模型都呈现出快速下降：在 $\eta = 1$ 时，召回率约为 0.75–0.80，到 $\eta = 20$ 时降至接近零，F1分数也呈现相同趋势。这与理论表达式完全一致

$$e_1(\eta, \kappa, \Delta) = \Phi\left(-\frac{\Delta\sqrt{\kappa}}{2} + \frac{\log \eta}{\Delta\sqrt{\kappa}}\right),$$

一旦.....增加　　当不平衡诱导的偏移 $\log(\eta)$ 超过有效间隔 $\Delta\sqrt{\kappa}$ 时，便会急剧增加　　.

非参数模型呈现类似的单调模式，但退化速度较慢。即使在 $\eta = 100$的情况下，随机森林仍能保持非平凡的召回率，这体现了灵活且能够局部自适应的决策边界的优势。K 近邻和径向基函数支持向量机的退化过程比参数模型更平缓，但最终仍趋向灾难性状态。

5.4 精确率与非对称退化

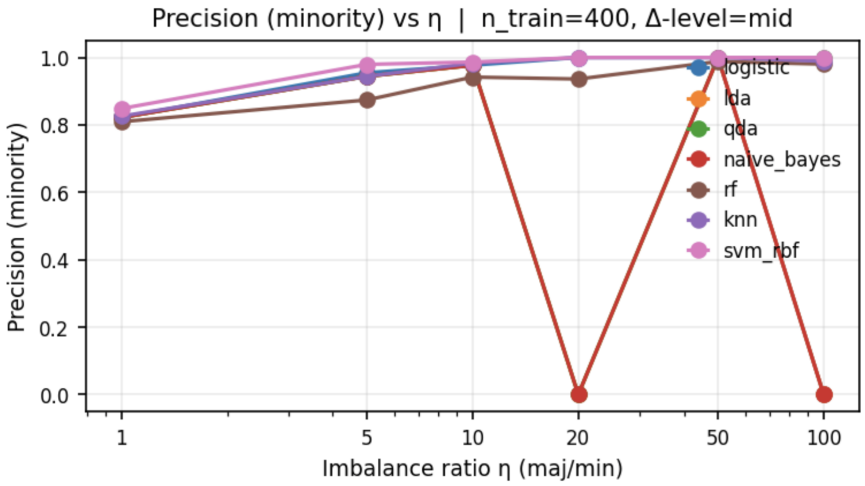


图6：少数类精确率随不平衡比率 η 的变化。随着 η 增大，大多数模型在预测少数类时变得越来越保守，尽管召回率急剧下降，精确率却有所提高（参见图 5）。这种非对称退化与理论判别式偏移一致：贝叶斯决策边界向少数类区域移动，因此少数类预测变得罕见，但通常是正确的。

图6展示了少数类精确率。随着类别不平衡加剧，大多数模型的精确率系统性上升，而召回率则急剧下降。这种非对称退化是理论判别式偏移的直接实证体现：随着 $\log(\eta)$ 增大，决策边界向少数类区域移动，少数类预测变得罕见，但通常是正确的。参数模型表现出最强的非对称性；非参数模型也呈现相同模式，但幅度较小。

5.5 精确率-召回率曲线下面积趋势

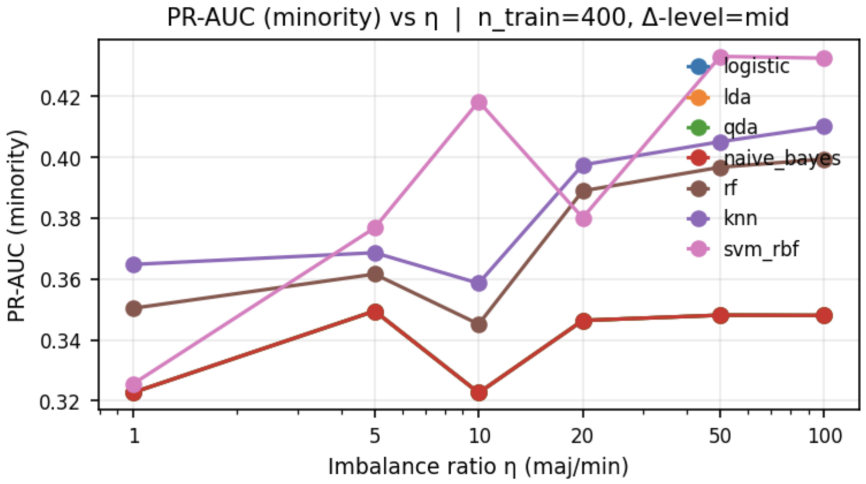


图 7：不同类别不平衡程度下少数类的精确率-召回率曲线下面积。随着 η 增长，参数模型的精确率-召回率曲线下面积稳步下降，而非参数方法——尤其是随机森林和径向基函数支持向量机——在更广泛的类别不平衡范围内保持较高的精确率-召回率曲线下面积。这表明，灵活的决策边界在进入极端和灾难性区域之前，能够部分减轻类别不平衡的早期影响。

图 7 展示了各 η下的精确率-召回率曲线下面积。虽然所有参数模型的精确率-召回率曲线下面积都逐渐下降，但非参数方法——尤其是随机森林和径向基函数支持向量机——在整个类别不平衡范围内始终保持较高值。这些结果表明，灵活的决策曲面可以在一定程度上弥补类别不平衡引起的阈值偏移，从而延缓进入极端和灾难性状态。

5.6 灾难性崩溃：混淆矩阵

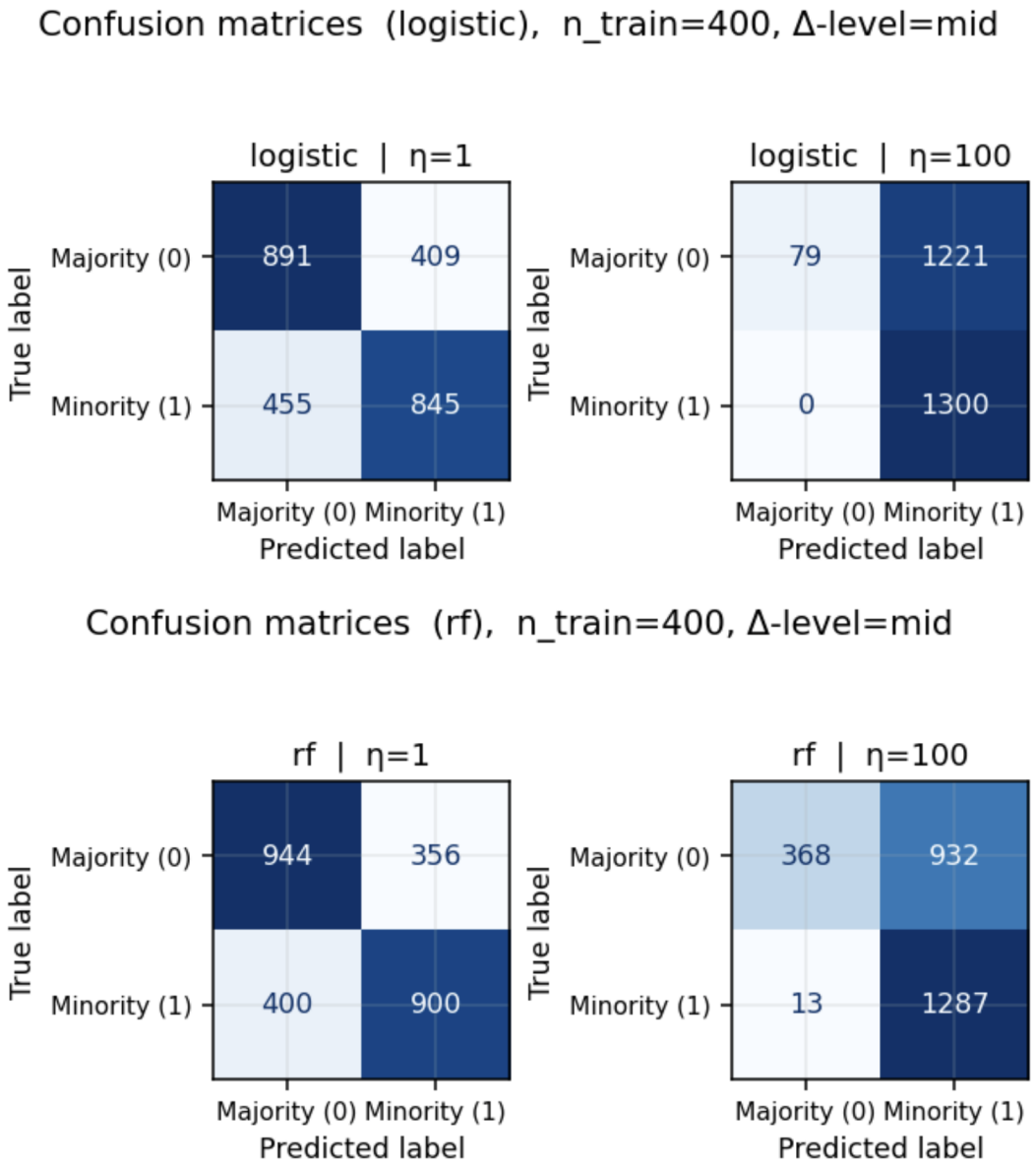


图 8：逻辑回归（上排）和随机森林（下排）在 $\eta = 1$ （左列）和 $\eta = 100$ （右列）下的混淆矩阵，其中 $n_{\text{train}} = 400$ ，分离程度为中等（ Δ）。在 $\eta = 1$ 时，两种模型的表现均衡，并找回了很大一部分少数类样本。在 $\eta = 100$ 时，逻辑回归退化为只预测多数类（少数类真正例为零），而随机森林仍能识别出少量但非零的少数类样本。这种经验上的灾难性崩溃符合理论条件 $\eta > \eta_{\max}$；在该条件下，对于所有 x，少数类的贝叶斯后验概率都低于 0.5。

为直观展示当 η 超过理论阈值 $\eta_{\max}$时预测的灾难性状态，图 8 给出了逻辑回归（参数模型）和随机森林（非参数方法）在 $\eta = 1$ 和 $\eta = 100$ 下的代表性混淆矩阵。在 $\eta = 100$时，逻辑回归完全无法识别少数类别，真正例为零。相比之下，随机森林仍保留了少量但非零的

少数类召回率，体现了其较慢的退化。这些模式反映了这样的理论条件：对于所有 x， $\mathbb{P}(Y = 1 \mid X = x)$ 都低于 0.5，导致分类器默认采用多数类预测。

5.7 实证结果总结

在所有指标和模型上，实证结果都与理论框架高度吻合：

- 少数类召回率迅速下降，与 $e_1(\eta, \kappa, \Delta)$ 的上升相呼应。
- 随着分类器变得愈发保守，精确率也随之上升。
- F1分数和精确率-召回率曲线下面积均呈下降趋势，斜率因模型而异。
- 参数模型最早出现退化，这反映了其决策边界的僵化。
- 非参数模型的抵抗时间更长，尤其是随机森林和径向基函数支持向量机。
- 灾难性崩溃大约在 $\eta \approx 20$–50 时出现，这与给定 (Δ, κ) 时理论上的 $\eta_{\text{最大值}}$ 一致。

这些发现表明，三元组 (η, κ, Δ) 能够准确预测类别不平衡条件下真实高维分类器在定性和定量上的退化模式。因此，实证结果验证了理论上的退化分类体系及其区域边界。

6 结论

我们提出了一个统一的理论框架，通过基本尺度三元组 (η, κ, Δ) 分析类别不平衡，这三个尺度分别表示类别先验比、样本—维度几何关系，以及底层分布的内在可分性。我们从高斯假设下的贝叶斯分类器出发，推导出贝叶斯误差的闭式表达式，并刻画类别不平衡如何影响有效决策边界。由此，我们定义了退化斜率 ，并建立了有原则的不平衡情形分类——正常、轻度、极端和灾难性；每种情形都对应贝叶斯判别函数的一种独特定性变形。最终形成的分类体系具有解析性、模型无关性，并以 (η, κ, Δ) 所诱导的几何结构为基础。

随后，我们考察了这些理论模式是否会在高维基因组分类中显现。通过改变不平衡系数，同时保持 κ和 Δ 不变，我们发现，实际分类器的性能退化行为与理论预测高度吻合。当 $\log(\eta)$ 超过有效间隔 $\Delta\sqrt{\kappa}$ 后，少数类召回率会骤然崩溃；由于对少数类的预测趋于保守，精确率有所提高；F1分数和精确率-召回率曲线下面积则以符合预测区域转换的速度下降。参数方法（逻辑回归、线性判别分析、QDA、朴素贝叶斯）最早进入极端和灾难性状态；非参数模型（随机森林、K 近邻、径向基函数支持向量机）能在更长时间内保持稳健，但一旦 η 超过理论阈值 $\eta_{\max}$，最终也会出现同样的崩溃。

综上，这些发现表明，类别不平衡效应源于先验、维数与可分性之间的基本相互作用，而非模型特有的伪影。因此，三元组缩放（η， κ， Δ）为预测和解释不同模型家族在类别不平衡条件下的分类器行为提供了有理论依据的视角。除了提供严谨的

不平衡情形分类体系之外，我们的框架还为算法开发指明了新的方向，包括明确针对退化斜率或补偿几何坍缩的程序。未来的工作将探索在复杂数据领域中估计（κ，Δ），放宽高斯假设，并设计以这些理论见解为基础的不平衡感知学习策略。

参考文献

Gabriel Aguiar、Bartosz Krawczyk 和 Alberto Cano。不平衡数据流学习综述：分类体系、挑战、实证研究与可复现实验框架。机器学习，113(7):4165–4243，2024年。Shamima Akter、Depro Das、Rakib Ul Haque、Mahafujul Islam Quadery Tonmoy、Md Rakibul Hasan、Samira Mahjabeen 和 Manik Ahmed。Ad-covnet：使用混合深度学习模型处理数据不平衡、预测阿尔茨海默病患者新冠肺炎死亡率及风险因素的探索性分析。《计算机生物学与医学》，146:105657，2022年。Rok Blagus 和 Lara Lusa。高维类别不平衡数据的类别预测。《*BMC*生物信息学》，11(1):523，2010年。Rok Blagus 和 Lara Lusa。用于高维类别不平衡数据的合成少数类过采样技术。《*BMC*生物信息学》，14(1):106，2013年。Kaidi Cao、Colin Wei、Adrien Gaidon、Nikos Arechiga 和 Tengyu Ma。使用标签分布感知边际损失学习不平衡数据集。在神经信息处理系统大会，2019年。Alex Carriero、Kim Luijken、Anne de Hond、Karel GM Moons、Ben van Calster 和 Maarten van Smeden。类别不平衡校正对基于机器学习的预测模型的危害：一项模拟研究。《医学统计学》，44(3-4):e10320，2025年。Nitesh V Chawla、Kevin W Bowyer、Lawrence O Hall 和 W Philip Kegelmeyer。合成少数类过采样技术。人工智能研究杂志，16:321–357，2002年。Wuxing Chen、Kaixiang Yang、Zhiwen Yu、Yifan Shi 和 CL Philip Chen。不平衡学习综述：最新研究、应用与未来方向。《人工智能评论》，57(6):137，2024年。Yin Cui、Menglin Jia、Tsung-Yi Lin、Yang Song 和 Serge Belongie。基于有效样本数的类别平衡损失。在计算机视觉与模式识别会议，页码9268–9277，2019年。Damien Dablain、Bartosz Krawczyk 和 Nitesh V Chawla。DeepSMOTE：融合深度学习与合成少数类过采样技术以处理不平衡数据。*IEEE* 神经网络与学习系统汇刊，34(9):6390–6404，2022年。Jesse Davis 和 Mark Goadrich。精确率-召回率与ROC曲线之间的关系。在国际机器学习大会，页码233–240，2006年。doi：10.1145/1143844.1143874。David L Donoho 和 Jared Tanner。通过线性规划求解欠定线性方程的稀疏非负解。美国国家科学院院刊，102(27):9446–9451，2005年。Bradley Efron。逻辑回归与正态判别分析的效率比较。《美国统计学会杂志》，70(352):892–898，1975年。Sara Fotouhi、Shahrokh Asadi 和 Michael W Kattan。针对不平衡数据的癌症诊断综合数据层面分析。《生物医学信息学杂志》，90:103089，2019年。Emanuele Francazi、Marco Baity-Jesi 和 Aurelien Lucchi。类别不平衡条件下学习动态的理论分析。在国际机器学习大会，页码10285–10322。PMLR，2023年。

Trevor Hastie、Robert Tibshirani 和 Jerome Friedman。统计学习要素：数据挖掘、推断与预测。Springer统计学丛书。Springer科学与商业媒体，美国纽约州纽约市，第二版，2009年。国际标准书号978-0387848570。网址：https://web. stanford.edu/~hastie/ElemStatLearn/。何海波和Edwardo A. Garcia。不平衡数据学习。*IEEE*知识与数据工程汇刊，21(9):1263–1284，2009年。doi：10.1109/TKDE.2008.239。Nathalie Japkowicz 和 Stephen Stephen。类别不平衡问题：一项系统研究。智能数据分析，6(5):429–449，2002年。Larry Jenkins 和 Murray Anderson。减少数据包络分析中变量数量的多变量统计方法。《欧洲运筹学杂志》，147(1):51–61，2003年。Azal Ahmad Khan、Omkar Chaudhari 和 Rohitash Chandra。类别不平衡问题的集成学习与数据增强模型综述：组合、实现与评估。《应用专家系统》，244:122778，2024年。Bartosz Krawczyk。不平衡数据学习：开放挑战与未来方向。《人工智能进展》，5(4):221–232，2016年。Tsung-Yi Lin、Priya Goyal、Ross Girshick、何恺明和Piotr Doll´ar。用于密集目标检测的焦点损失。在国际计算机视觉大会，页码2980–2988，2017年。Wei-Jiun Lin 和 James J Chen。面向高维数据的类别不平衡分类器。《生物信息学简报》，14(1):13–26，2013年。Geoffrey J McLachlan。判别分析与统计模式识别。约翰·威立父子公司，2005年。Krystyna Napierala 和 Jerzy Stefanowski。不平衡数据中不同类型少数类样本的识别。在国际混合人工智能系统会议，页码139–150。施普林格，2012年。Barbara Pes。使用随机森林学习高维和类别不平衡数据集。《信息》，12(8):286，2021年。Takahiro Saito 和 Marc Rehmsmeier。在不平衡数据集上评估二分类器时，精确率-召回率图比ROC图提供更多信息。《公共科学图书馆·综合》，10(3):e0118432，2015年。doi：10.1371/journal.pone.0118432。Miriam Seoane Santos、Pedro Henriques Abreu、Nathalie Japkowicz、Alberto Fern´andez、Carlos Soares、Szymon Wilk 和 Joao Santos。类别不平衡与重叠的联合效应：一项批判性综述。《人工智能评论》，55(8):6207–6275，2022年。Miriam Seoane Santos、Pedro Henriques Abreu、Nathalie Japkowicz、Alberto Fern´andez 和 Jo˜ao Santos。类别重叠与不平衡的统一视角：关键概念、多视角全景与开放研究方向。《信息融合》，89:228–253，2023年。Shiven Sharma、Colin Bellinger、Bartosz Krawczyk、Osmar Zaiane 和 Nathalie Japkowicz。与多数类进行合成过采样：处理极端不平衡的新视角。在*2018*年*IEEE*国际数据挖掘会议，页码447–456。IEEE，2018年。

Pragya Sur 和 Emmanuel J Cand`es. 一种适用于高维逻辑回归的现代最大似然理论。美国国家科学院院刊，116(29):14516–14525，2019年。Philipp Th¨olke、Yorguin-Jose Mantilla-Ramos、Hamza Abdelhedi、Charlotte Maschke、Arthur De- hgan、Yann Harel、Anirudha Kemtur、Loubna Mekki Berrada、Myriam Sahraoui、Tammy Young 等。类别不平衡不应让你失衡：为不平衡数据上的脑解码选择合适的分类器和性能指标。*NeuroImage*，277:120253，2023年。Pattaramon Vuttipittayamongkol、Eyad Elyan 和 Andrei Petrovski。关于不平衡数据分类中的类别重叠问题。*Knowledge-based systems*，212:106631，2021年。Gary M. Weiss 和 Foster Provost。当训练数据成本高昂时进行学习：类别分布对树归纳的影响。人工智能研究杂志，19:315–354，2003年。Jigang Xie 和 Zhengding Qiu。类别不平衡数据集对线性判别分析的影响：理论与实证分析。模式识别，40(2):557–562，2007。Kaixiang Yang、Zhiwen Yu、Xin Wen、Wenming Cao、CL Philip Chen、Hau-San Wong 和 Jane You。用于不平衡数据的混合分类器集成。*IEEE* 神经网络与学习系统汇刊，31(4):1387–1400，2019年。