arXiv:2601.04150v1 [econ.TH] 7 Jan 2026

国际河流中水权的几何裁决 *

Ricardo Mart´ínez† Juan D. Moreno-Ternero‡

2026年1月8日

摘要

我们研究国际河流中的水权裁定。在一个基础模型中，我们刻画了将核心原则形式化、用于处理水资源争端的分配规则。我们的分析以一类几何规则为核心，这些规则在下游实施串联转移。可以认为，这些规则将《里约环境与发展宣言》中所倡导的有限领土主权形式化。我们将这些规则应用于尼罗河案例；围绕该河流，下游和上游国家之间的争端由来已久。

JEL分类编号：*D23*、*D63*、*Q25*。

关键词：水、水权、共享、国际河流、公平。

*感谢 William Thomson 提供宝贵的意见和建议。我们衷心感谢以下资助项目：PID2023-147391NB-I00 和 PID2023-146364NB-I00，分别由西班牙大学部/国家研究署/10.13039/501100011033 和 FSE+资助。

†格拉纳达大学。
‡巴勃罗·德·奥拉维德大学。

1 引言

如今，许多自然资源遭到过度开发。地下水就是一个典型例子，其枯竭已成为全球范围内亟待解决的问题（例如，Jasechko 等，2024年）。相比之下，配给制等很少得到实施的管理方案（例如，Ryan 和 Sudarshan，2022），地下水的个人产权则更为普遍（例如，Edwards 等，2024年）。长期以来，水权一直是经济学家关注的问题（例如，Libecap，2011年）。[1]根据所谓的河岸权原则，水权仅属于用益权，尽管河岸权持有者可以进行某些引水活动（例如，Burness 和 Quirk，1979）。根据先占用水原则（美国西部广泛采用），对一定水量的权利只有通过使用才能确立并维持（例如，Burness 和 Quirk，1979）。总体而言，水权往往界定模糊且执行成本高昂，由此造成频繁的争端和扭曲（例如，Donna 和 Esp´ın-S´anchez，2024年）。历史上，法官会以临时、个案处理的方式解决水权争端。近年来，为尽量减少争端，流域全面裁决程序逐渐得到认可。在这一程序中，法院正式核实流域内哪些用户拥有有效水权，以及他们享有何种权利（例如，Browne 和 Ji，2023）。

本文旨在为河岸权裁决提供一个基本模型。在我们的模型中，主体（自然可以理解为国家，也可以视为地区或城镇）沿着一条线性结构的河流分布。每个主体都有来自支流的河流入流。我们希望设计规则，将每一种可能的流入量组合与一种分配相对应，指出每个主体获得的水量。我们从一开始就要求分配是可行 且无浪费的。也就是说，在河流的每个位置，分配给上游主体的总水量不得超过上游的总流入量；并且分配所提供的总水量应与总流入量相等。

设计规则的一个自然起点，是将现有的核心原则形式化，以防止或解决国际河流流域内的水资源争端（例如，Kilgour 和 Dinar，1995）。其中一种是所谓的绝对领土主权原则（ATS），也称为哈蒙原则。该原则主张，国家可以使用流入其境内河流的任何水量，而无需考虑对下游造成的影响。在我们的设定中，这将被形式化为所谓的不转移规则，该规则简单地将初始流入量组合视为分配问题的解。与之相当对立的原则是所谓的无限领土完整原则（UTI）。该原则规定，国家不得以任何方式改变流经其领土的自然水流，只要这种改变会影响另一国家的水量。在我们的设定中，这将被形式化为所谓的全部转移规则，即将每一份流入量转移给最下游的代理人。

[1]早在《美国经济评论》创刊号的导言文章中就已提及（例如，Coman，2011年）。

对上述两种极端原则的折中方案，即有限领土主权，见于1992年的《里约环境与发展宣言》，其原则2内容如下：[2]

“国家有权依照《联合国宪章》和国际法原则，根据本国的环境与发展政策开发本国资源，并有责任确保其管辖或控制范围内的活动不会对其他国家的环境或国家管辖权范围以外区域的环境造成损害。”

我们通过一系列在无转移规则与完全转移规则之间折中、以几何式下游转移为基础的规则，将这一原则形式化。具体而言，设 $\gamma \in [0,1]$。假设主体 1 保留其流入量的固定部分 γe_1，并将剩余部分转移给主体 2（下一个下游主体）。那么，主体 2 的可支配流入量由其流入量 e_2 以及从主体 1 接收的流入量 $(1-\gamma)e_1$构成。现在假设主体 2 也保留其可支配流入量的 γ 份额，即 $\gamma(e_2 + (1-\gamma)e_1)$，并将剩余部分转移给下一个下游主体。这个过程依次持续，直至到达最下游主体。由此得到一系列（单参数）几何规则。当 $\gamma = 0$时，我们得到完全转移规则，它将上文所述的UTI原则形式化。当 $\gamma = 1$时，我们得到无转移规则，它将上文所述的ATS原则形式化。随着 γ 在 (0,1) 内变化，我们可以选择多种方案，将这两项原则之间的折中形式化，并将其解释为有限领土主权的各种形式化表达。

我们通过结合四条公理，刻画上述定义的（单参数）几何规则族：尺度不变性、上游不变性、部分实施不变性和来源相等。第一条公理（尺度不变性）是公理化文献中的标准公理，其含义很简单：如果所有流入量都乘以相同的因子，那么分配也会乘以该因子。第二条公理（上游不变性）指出，河流某一位置发生的冲击（即改变该处的流入量）不会影响上游，因为水流向下游。第三条公理（部分实施不变性）形式化了一种不变性（针对下游主体）：当某主体的流入量增加，且增加的部分来自上游未分配给上游主体的剩余流量（此时这些主体的流入量均视为零）时，该不变性仍然成立。最后，第四公理（来源相等）指出，如果两条河流的源头具有相同的（严格为正的）流入量，那么这些源头获得的分配量相同。[3]

上述最后一条公理在规范层面上的合理性或许值得质疑，因为它忽略了下游主体的数量及其流入量。事实证明，若将其从公理列表中删除，我们便能刻画出一个更大的规则族，称为多参数几何规则，它们将单参数几何规则自然地扩展为允许

[2]《里约环境与发展宣言》，联合国环境与发展会议，1992年6月13日，联合国文件 A/CONF.151/26（第一卷），转载于《国际法律材料》第31卷，第874页（1992年）。[3]我们将河流源头理解为具有严格正流入的最上游位置。

在每个阶段采用个体特定份额。也就是说，主体 1 保留其流入量$\gamma_1 e_1$ 的一部分，并将剩余部分转给主体 2。随后，主体 2 的可支配流入量由其自身的流入量 e_2 以及从主体 1 接收的流入量 $(1-\gamma_1)e_1$ 构成。接着，主体 2 保留其可支配流入量的 γ_2 一部分，即 $\gamma_2(e_2+(1-\gamma_1)e_1)$，并将剩余部分转给下一个下游主体。这个过程依次持续，直至到达最下游的主体。这一规则族的一个有趣特点是，主体特定份额或许能够体现某些特征（例如人口、历史需求/使用情况等）；这些特征虽未明确纳入我们简化的模型，却仍可能在分配过程中发挥作用。

一个引人注目的多参数几何规则，不属于单参数几何规则这一类，它就是所谓的串行规则，由Martínez 和 Moreno-Ternero（2025a）提出，其名称令人联想到Moulin 和 Shenker（1992）提出的同名成本分摊规则。它将每个主体的流入量平均分配给所有位于其下游的主体，包括该主体自身。也就是说，该规则兼顾了每个主体对消耗自身流入量所享有的正当权利，以及下游主体享用上游产生的部分资源的权利。我们证明，这一规则是唯一满足中性公理的多参数几何规则。该公理规定，在规范情形下（只有河流源头产生正流入量），源头获得的数量等于下游主体所得数量的平均值。[4] 换言之，串行规则由以下性质共同刻画：尺度不变性、上游不变性、部分实施不变性和中性。

最后，为总结我们的分析，我们将研究结果应用于尼罗河——它可能是世界上最著名的河流之一，围绕它的争端由来已久。我们利用 AQUAS-TAT 的数据，计算坦桑尼亚、乌干达、埃塞俄比亚、南苏丹、苏丹和埃及的流入量，以及它们实际从河流中取水的数量。我们承认，尼罗河河岸水权的分配问题比我们的模型所能刻画的更为复杂，因为它涉及历史、政治、文化、经济和社会等方面的影响。因此，我们采用多参数几何规则这一系列规则，以便将其中一些方面纳入考量。具体而言，我们试图确定各国特定的流入量份额，即向量 $\gamma=(\gamma^1,\ \gamma^2\dots\gamma^n)$，使其能够合理解释尼罗河协定所产生的现行水资源分配。我们还根据分析中介绍的其他规则，提出了可供考虑的替代分配方案。

本文其余部分安排如下。第2节介绍模型，以及我们分析所依据的主要公理和规则。第3节呈现主要刻画，并进一步探讨其他公理所导出的刻画。第4节以尼罗河案例为例进行说明。第5节为结论。为使行文流畅，所有证明均置于附录中。

[4]请注意，这一要求弱于在下游进行等分。

2 模型

一组**主体** $N = \{1, \ldots, n\}$（其中有 $n \geq 3$）分布在一条呈线性结构的河流沿岸。数字越小，表示位置越靠上游，因此主体1位于最上游，主体 n 位于最下游，而 $i \leq j$ 表示主体 i 位于主体 j的上游。对于每个 $i \in N$，河流都有一个流入量，记为 $e_i \geq 0$。令 $e = (e_1, \ldots\ldots, e_n) \in \mathbb{R}^n_+$ 表示**流入量组合**。令 $\mathcal{D}$ 表示所有流入量组合构成的定义域。

我们的目标是提出一套规则，将每种流入量组合与**河岸水权**的分配相对应。也就是说，另一种组合表示每个主体有权获得的水量。随着水流向下游，我们要求分配必须可行且无浪费，即 $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ 满足 $\sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k e_i$，对每个 $k = 1, \ldots\ldots, n-1$均成立，且 $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n e_i$。**规则** $R\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n_+$ 是一个映射，它将每种流入量组合 $e \in \mathcal{D}$ 与分配 $R(e) \in \mathbb{R}^n_+$相对应。

2.1 规则

以下两条规则将水权分配的两种极端理念形式化。第一条规则规定，每个主体保留其流入量。第二条规则规定，除最后一个主体外，每个主体都转让其全部流入量。形式上，

无转移规则。对于每个 $e \in \mathcal{D}$ 和每个 $i \in N$，

$$R_i^{NT}(e) = e_i.$$

完全转移规则。对于每个 $e \in \mathcal{D}$ 和每个 $i \in N$，

$$R_i^{FT}(e) = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq n \\ \sum_{k=1}^n e_k & \text{if } i = n \end{cases}$$

下一类规则是对上述两种极端方案的折中。令 $\gamma \in [0, 1]$。假设主体 1 保留其流入量的固定份额 γe_1，并将剩余部分转给主体 2（下游的下一个主体）。于是，主体 2 的可支配流入量由其流入量 e_2 以及从主体 1 接收的流入量 $(1-\gamma)e_1$ 构成。现在假设主体 2 也保留其可支配流入量的 γ 份额，即 $\gamma(e_2 + (1-\gamma)e_1)$，并将剩余部分转给下游的下一个主体。该过程依次继续，直到到达最下游的主体。形式化地说，

参数为 $\gamma \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]$、$\mathbf{R}^{\gamma}$ 的几何规则：对于每个 $e \in \mathcal{D}$ 以及每个 $i \in N$ ，

$$R_i^{\gamma}(e) = \begin{cases} \gamma e_1 & \text{if } i = 1 \\ \gamma\left(e_i + \sum_{k=1}^{i-1}\left(e_k - R_k^{\gamma}(e)\right)\right) & \text{if } i \in \{2,\ldots,n-1\} \\ e_n + \sum_{k=1}^{n-1}\left(e_k - R_k^{\gamma}(e)\right) & \text{if } i = n. \end{cases}$$

或者，

$$R_i^{\gamma}(e) = \gamma\left(e_i + \sum_{k=1}^{i-1}(1-\gamma)^{i-k}e_k\right),$$

对于每个 $i \in \{1,\ldots,n-1\}$，且

$$R_n^{\gamma}(e) = e_n + \sum_{k=1}^{n-1}(1-\gamma)^{n-k}e_k.$$

请注意，当 $\gamma = 0$ 时，我们得到完全转移规则；而当 $\gamma = 1$ 时，我们得到无转移规则，即 $R^0 \equiv R^{FT}$，且 $R^1 \equiv R^{NT}$。

例1. 考虑两个流入向量：$e^1 = (0,\ 36,\ 0,\ 0)$ 和 $e^2 = (12,\ 4,\ 0,\ 10)$。下表展示了两种特定的单参数几何规则如何应用于这些问题。

	$\gamma = \frac{1}{2}$		$\gamma = \frac{2}{3}$	
主体	$R^{\gamma}(e^1)$	$R^{\gamma}(e^2)$	$R^{\gamma}(e^1)$	$R^{\gamma}(e^2)$
1	0	6	0	8
2	18	5	24	$\frac{16}{3}$
3	9	$\frac{5}{2}$	8	$\frac{16}{9}$
4	9	$\frac{25}{2}$	2	$\frac{98}{9}$

单参数几何规则这一族可以自然地扩展为允许在每个阶段包含个体特定份额。也就是说，

参数为 $\alpha = (\alpha_{\mathbf{1}},\ldots,\alpha_{\mathbf{n-1}},\alpha_{\mathbf{n}}) \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]^{\mathbf{n-1}} \times \{\mathbf{1}\}, \mathbf{R}^{\alpha}$：对于每个$e \in \mathcal{D}$ 以及每个 $i \in N$，**的几何规则**

$$R_i^{\alpha}(e) = \alpha_i\left[e_i + \sum_{k=1}^{i-1}\left(e_k - R_k^{\alpha}(e)\right)\right].$$

或者，

$$R_i^{\alpha}(e) = \alpha_i\left[e_i + \sum_{k=1}^{i-1}\prod_{j=k}^{i-1}(1-\alpha_j)e_k\right].$$

一种有趣的多参数几何规则，不属于单参数几何规则这一类，它将每个主体的流入量平均分配给所有位于其下游的主体，包括该主体自身。

串行规则，$\mathbf{R^S}$。对于每个 $e \in \mathcal{D}$ 和每个 $i \in N$，

$$R_i^S(e) = \frac{e_1}{n} + \frac{e_2}{n-1} + \frac{e_3}{n-2} + \ldots + \frac{e_i}{n-i+1} = \sum_{j \leq i} \frac{e_j}{n-j+1}.$$

2.2 公理

我们不直接认可上述规则中的任何一条，而是采用公理化方法从中进行选择。

我们首先 介绍Martínez 和 Moreno-Ternero (2025a已经考察过的四条公理).

第一条公理指出，如果所有流入量都乘以同一个因子，那么分配也会乘以该因子。

尺度不变性。对于每个 $e \in \mathcal{D}$ 和每个 $\rho \in \mathbb{R}_+$, $R(\rho e) = \rho R(e)$。

第二条公理指出，如果某个主体的流入量发生变化，那么位于其上游的主体所获得的分配保持不变。形式化地说，

上游不变性。对于每一对 e， $e' \in \mathcal{D}$，若对所有 $j \in N \backslash \{i\}$都有 $e_j = e'_j$，则对每个 $k < i$,

$$R_k(e) = R_k(e').$$

对于每个 $e \in \mathcal{D}$，其源头 为 $s(e) = \min\{k \in \{1, 2, \ldots n-1\} : \ e_k > 0\}$。下一条公理指出，如果两条河流的源头具有相同的流入量，那么这两个源头获得的数量也相同。

来源相等。对于每一对 e， $e' \in \mathcal{D}$，若 $e_{s(e)} = e'_{s(e')}$,

$$R_{s(e)}(e) = R_{s(e')}(e').$$

第四公理关注这样一些特殊情形：源头是唯一具有严格正流入的主体。在这些情形下，规则要求源头与下游平均代理人之间保持中立 。更确切地说，该公理指出，在这些情形下，源头获得的数量应恰好等于下游主体获得的平均数量。

中性。对于每个 $e \in \mathcal{D}$，使得对于某个 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$， $e_i > 0$，且对于所有 $j \in N \backslash \{i\}$， $e_j = 0$，

$$R_i(e) = \frac{1}{n-i} \sum_{k>i} R_k(e).$$

我们还针对这一情境引入了一条新的公理，它是对 Dietzenbacher 等人 (2024年) 最近为索赔问题提出的一种不变性的情境化改编。为了说明这一公理的含义，设想某条规则已应用于一个给定问题。现在，对于每个主体 $i \in N$，假设其所有上游主体都按照该规则的指示获得了分配。这会产生一个剩余问题：这些上游主体的流入量被设为零，而主体 i 则获得新的流入量，该流入量等于其原有流入量加上尚未分配的任何上游剩余流量。位于下游的主体，其流入量则保持与原问题相同。该规则的不变性要求是：它分配给每个下游主体的量与最初分配的量相同。形式化地说，

部分实施不变性。对于每个 $e \in \mathcal{D}$ 以及每个 $i \in N$，

$$R_{D(i)} = R_{D(i)}\left(0_{U(i)\setminus\{i\}}, e_i + \sum_{k=1}^{i-1}(e_k - R_k(e)), e_{D(i)\setminus\{i\}}\right)$$

正如下一节所示，在这一设定下，这条新公理将有助于得出刻画结果。

3 结果

3.1 主要刻画

我们的第一个结果表明，部分实施不变性、上游不变性和尺度不变性的组合刻画了多参数几何规则（即上文引入的范围最广的规则族）。

定理1。规则满足部分实施不变性、上游不变性和尺度不变性，当且仅当它是多参数几何规则。

如果再加入来源相等公理，这一规则族就会缩小为单参数几何规则的子族，正如下一个结果所述。

定理2。 一个规则满足部分实施不变性、上游不变性、尺度不变性和来源相等，当且仅当它是单参数几何规则。

最后，以中性替代来源相等，我们可以刻画串行规则。事实上，陈述中可以省去尺度不变性（尽管串行规则也满足这一公理）。

定理 3. 一个规则满足部分实施不变性、上游不变性和中性，当且仅当它是串行规则。

3.2 下游公平性

Mart´ınez and Moreno-Ternero (2025a) 给出了与定理 1-3 中结论相对应的刻画，其中以一条替代公理取代部分实施不变性，该公理称为下游公平性。这条公理与上游不变性类似，涉及一个主体的流入量增加对其他主体分配的影响。不过，它关注的是这一增加对位于下游的主体所产生的后果。具体而言，该公理指出，如果两个下游主体的流入量相等，那么这一影响对二者也应相同。形式化地说，

下游公平性。设 $e,\ e' \in \mathcal{D}$ 满足：对于某个 $i \in N$，有 $e_i < e'_i$；对于所有 $j \in N\backslash\{i\}$，有 $e'_j = e_j$。那么，对于每一对满足 $e_k = e_l$的 $k,\ l > i$，

$$R_k(e') - R_k(e) = R_l(e') - R_l(e).$$

为便于说明，我们在此重述Mart´ınez 和 Moreno-Ternero (2025a)中的刻画结果。

命题1。 以下结论成立：

- 一个规则满足下游公平性、上游不变性和尺度不变性，当且仅当存在 $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in [0,1]^{n-1} \times \{1\}$，使得对于每个 $e \in \mathcal{D}$和 $i \in N$，

$$R_i^{\delta}(e) = \delta_i e_i + \sum_{k<i} \frac{(1-\delta_k)e_k}{n-k}.$$

- 一个规则满足下游公平性、上游不变性、尺度不变性和来源相等，当且仅当存在 $\lambda \in [0,1]$，使得对于每个 $e \in \mathcal{D}$以及每个$i = 1$，2、3、 $\ldots n-1$,

$$R_i^{\lambda}(e) = \lambda e_i + (1-\lambda)\sum_{j<i} \frac{e_j}{n-j},$$

and

$$R_n^{\lambda}(e) = e_n + (1-\lambda)\sum_{j<n} \frac{e_j}{n-j}.$$

- 当且仅当某一规则是串行规则时，它才满足下游公平性、上游不变性和中性。

乍看之下，定理1 和命题1（第一项）所刻画的规则族，其结构截然不同。它们分别具有乘法形式和加法形式。然而，正如两个定理所述，它们都满足尺度不变性和上游不变性公理。两者仅在一条公理上有所不同（分别为部分实施不变性和下游公平性）。由此自然引出一个问题：这两条公理是否互不相容？以下结果表明，它们并非互不相容。

定理4 实际上刻画了同时满足这两条公理（部分实施不变性和下游公平性）以及其余两条一般性公理（尺度不变性和上游不变性）的规则。由此得到的规则族尤其引人关注，因为它的构造源自无转移规则和串行规则，尽管并非通过人们通常预期的组合方式（凸组合、中点组合或加权组合）构造而成。

形式上，令 $\beta = (\beta_1, \ldots\ldots, \beta_{n-1}) \in [0,1)^{n-1}$。对于每个 $k = 1, \ldots n-1$，我们将规则R^{β_k} 定义为如下单参数几何规则 $R^{\alpha(\beta_k)}$。

对于每个 $e \in \mathcal{D}$ 以及每个 $i \in N$，

$$R_i^{\beta_k}(e) = R_i^{\alpha(\beta_k)}(e),$$

其中

$$\alpha_i(\beta_k) = \begin{cases} 1 & \text{if } i < k \\ \beta_k & \text{if } i = k \\ \dfrac{1}{n-i+1} & \text{if } k < i < n-1. \end{cases}$$

该 β-族 R^{β}由上述所有 R^{β_k} 规则构成。如表 1所示，这些参数呈现出一种特殊模式，兼具无转移规则（$\alpha_i(\beta_k) = 1$）和串行规则（$\alpha_i(\beta_k) = \frac{1}{n-i+1}$。在每种情况下，$\alpha_k = \beta_k$ 都是自由的；上游各方的参数取值与无转移规则相同，下游各方的参数取值则与串行规则相同。

Rule	α_1	α_2	α_3	α_4	$\cdots$	α_{n-1}	α_n
R^{β_1}	β_1	$\frac{1}{n-1}$	$\frac{1}{n-2}$	$\frac{1}{n-3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	1
R^{β_2}	1	β_2	$\frac{1}{n-2}$	$\frac{1}{n-3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	1
R^{β_3}	1	1	β_3	$\frac{1}{n-3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	1
R^{β_4}	1	1	1	β_4	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$R^{\beta_{n-1}}$	1	1	1	1	1	β_{n-1}	1
R^{NT}	1	1	1	1	1	1	1

表 1： β-族中参数的结构。

定理 4. 一个规则满足部分实施不变性、下游公平性、上游不变性和尺度不变性，当且仅当它属于 β 族。

4 应用：尼罗河。

尼罗河全长约 6,650 公里，是世界上最长的河流。它从赤道以南向北流经非洲东北部，最终注入地中海流域横跨 11 个国家，包括坦桑尼亚、乌干达、南苏丹、埃塞俄比亚、苏丹和埃及。约有 2.5 亿人依赖尼罗河水资源，其中约 10% 已面临水资源短缺。因此，围绕尼罗河水资源的争端持续数十年也就不足为奇了。殖民时代条约至今仍影响着尼罗河水资源的分配。这些条约将大量水资源分配给下游国家（主要是埃及和苏丹），基本无视上游沿岸国家（如肯尼亚、坦桑尼亚和南苏丹）。此外，未经下游国家（尤其是埃及）批准，这些国家不得修建大坝或启动河流项目。上游国家始终对这些协议提出异议并表示质疑。埃及和苏丹坚持要求保障其应得的水资源份额，而上游国家则认为这些协议有失公允，并损害了其农业和发展目标。[5]

本节将运用前文介绍并加以界定的规则，为尼罗河流域的合作行动提供一个框架。正如引言中所述，我们承认，分配尼罗河河岸水权是一个高度复杂的问题，受到历史、政治、文化、经济和社会因素的影响。尽管我们所考虑的理论模型存在局限（诚然，它并未涵盖所有相关因素），但我们仍然相信，这一实证示例能够提供有价值的见解。

尼罗河流域由两条主要支流形成：白尼罗河发源于大湖地区，流经乌干达和南苏丹；青尼罗河则发源于埃塞俄比亚的塔纳湖。这两条支流在喀土穆（苏丹）汇合，此后尼罗河继续向北流经苏丹和埃及，最终注入地中海。图1展示了尼罗河的流向及流域内的主要国家。图 2呈现了整个流域。

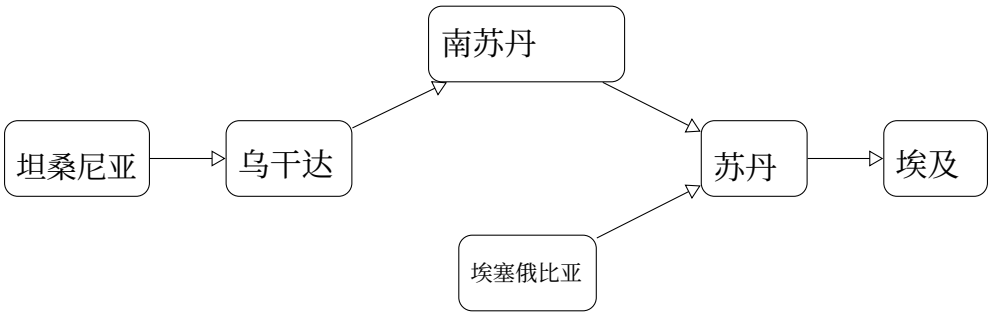

图1：尼罗河的流量结构。

[5]https://arabcenterdc.org/resource/water-conflict-between-egypt-and-ethiopia-a-defining-moment-for-both-countries/。最后访问日期：2025年10月30日。

我们使用 AQUASTAT 估算所分析六个国家的流入量和实际水资源分配。[6]

至于流入量，维多利亚湖为尼罗河贡献了可观的 33 km^3/year。湖面由三个国家共有：坦桑尼亚（51%）、乌干达（43%）和肯尼亚（6%）。坦桑尼亚的流入量占维多利亚湖对尼罗河贡献量的 51%。乌干达的流入量则由其分得的维多利亚湖贡献量（按湖面面积计算）以及来自艾伯特湖的水量组成，后者估计为 2 km^3/year。在南苏丹，尼罗河接纳两条主要支流的来水：几乎完全流经该国、注入尼罗河 1.5 km^3/year 水量的加扎勒河，以及由皮博尔河和巴罗河汇流形成的索巴特河，两河分别贡献 3.1 和 13 k m^3/year。南苏丹的流入量合计为 17.6 km^3/year。埃塞俄比亚的贡献来自发源于塔纳湖的青尼罗河，其流入量估计为 52.6 km^3/year。沿河而下的下一个国家苏丹，则从阿特巴拉河获得额外的 0.7 km^3/year。最后，根据 AQUASTAT，埃及完全依赖上游流入量，因为它没有向尼罗河贡献水量。本段所述六个国家的相应水量列于表2 (e)的第二列。



图 2：尼罗河流域

[6]AQUASTAT 由联合国粮食及农业组织（FAO）开发，是一个专注于水资源和农业水资源管理的全球信息系统。该系统汇编、分析并免费提供按国家划分的 180 多项变量和指标。数据可通过 https://www.fao.org/aquastat/en/databases/ 免费获取。

为估算尼罗河沿岸各国的实际水资源分配，我们采用 AQUASTAT 中所谓的淡水取水总量变量作为替代指标。坦桑尼亚、乌干达、南苏丹、埃塞俄比亚、苏丹和埃及的取水量分别为 5.18 km^3/year、0.64 km^3/year、0.66 km^3/year、10.55 km^3/year、26.93 km^3/year 和 77.7 km^3/year。这些取水量累计分配总量为 121.66km^3/year，略高于 103.9 km^3/year 的总流入量。为与我们的理论模型保持一致，我们按比例调整了取水量，使总和同样达到 103.9 km^3/year。调整后的数值列于表2 (z)的第三列。

			水权						
国家	e	z	R^{FT}	$R^{\gamma=\frac{1}{4}}$	$R^{\gamma=\frac{1}{2}}$	$R^{\gamma=\frac{3}{4}}$	R^{NT}	R^{S}	R^{g^*}
坦桑尼亚	16.8	4.42	0	4.2	8.4	12.6	16.8	3.36	4.42
乌干达	16.2	0.55	0	7.2	12.3	15.3	16.2	7.41	0.55
南苏丹	17.6	0.56	0	9.8	14.95	17.02	17.6	13.28	0.56
埃塞俄比亚	52.6	9.01	0	13.15	26.3	39.45	52.6	11.53	9.01
苏丹	0.7	22	0	17.38	20.97	14.64	0.7	31.16	22
埃及	0	66.35	103.9	52.16	20.97	4.88	0	31.16	66.35

表2：尼罗河的流入量（e）、实际分配量（z）和用水权（g^* =(0.26, 0.02, 0.01, 0.17,0.26)）。

表2y　　呈现了基于我们分析中所描述的规则得出的不同分配结果。[7]

最后一列实际上给出了多参数几何规则R^{g^*}在 g^* =(0.26, 0.02,0.01, 0.17,0.26) 条件下产生的分配结果。该结果恰好与实际水资源分配（z）一致。也就是说，我们的多参数几何规则族通过假定上游国家仅保留其流入量中较小的份额（尤其是乌干达和南苏丹），使实际水资源分配具有了合理性。

此外，我们还给出了某些单参数几何规则所产生的分配（当所有国家被要求获得其流入量的相同比例 γ 时，且 $\gamma \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1\}$），以及串行规则的分配。除无转移规则这一显而易见的例外外，我们可以看到，相较于实际水资源分配，这些分配通常更有利于上游国家（尤其是乌干达和南苏丹）。

[7]请注意，为了呈现这些结果，我们相应地调整了分析中的规则，以适应尼罗河的实际结构。由于埃塞俄比亚的地理位置，尼罗河并非完全呈线性。

5 讨论

我们的论文可视为河流共享文献中的一个新案例。该领域由Ambec 和 Sprumont (2002) 开创，随后由Ambec 和 Ehlers (2008)、Ansink 和 Weikard (2012)、van den Brink 等人 (2012)、Gudmundsson 等人 (2019)以及¨Ozt¨urk (2020)等学者进一步发展。[8] 与Mart´ınez 和 Moreno-Ternero (2025a)一样，我们不同于现有文献，研究水权裁定，而非水的最终分配。也就是说，我们假设水的最终分配是在一个两阶段过程中形成的：首先仅依据有关主体的客观信息分配水权，随后通过市场交易这些水权。我们只关注这一过程的第一阶段。因此，我们不考虑将水转化为福利的效用函数，这使得我们的模型在信息要求方面较低。 Ansink 和 Weikard (2012)也在不考虑效用函数的情况下分析河流共享问题。不过，在他们的设定中，主体也有诉求（而不只有流入量）。分配可能违反我们分析中设定的可行性约束（这或许可以解释为允许通过外部手段将水向上游转移），但诉求构成分配的上限。因此，他们设定中的规则与我们在此考虑的规则大不相同。

类似的模型也用于分析污染河流治理问题，其中输入是沿河各主体所承担的成本（例如，Ni 和 Wang，2007；Dong 等人，2012；Alcalde-Unzu 等人，2015；van den Brink 等人，2018）。在这种情形下，起初只施加非浪费性约束，不施加其他可行性约束。这就是为什么该情形下使用的规则在我们的问题中可能定义不当。近期，Yang 等人(2025) 研究了所谓的河流污染诉求问题，其目标是在沿河分布的主体之间分配排放许可证预算。在这种情况下，输入包括每个主体的诉求（反映人口、排放历史和照常排放量），以及一个低于（或等于）总诉求的预算。Mart´ınez 和 Moreno-Ternero (2025b) 提出了一些适用于该情形的规则，对本文研究的几何规则进行调整。

最后，我们的模型也与层级中的收入分享问题相似（例如，Hougaard 等人，2017），该问题旨在分配由按层级结构组织的主体所创造的收益。在基准情形中，层级结构是一条线，因此主体仅由其在线上的位置以及其为该层级带来的收入来刻画。转移规则决定了沿线对总收入进行再分配，但收入只能沿层级向上转移。因此，该模型可以简单地解释为我们模型的镜像（河流最下游的主体扮演层级顶端主体的角色），而我们关于分配的可行性约束，根据层级中的（向上）转移规则的定义也得以满足。Hougaard 等人(2017) 刻画了几何转移规则族

[8] Beal 等人（2013）是对该领域早期研究成果的综述。

规则在其研究设定中的形式，并借助了其中一些公理；这些公理很难自然地转化到我们的设定中（尺度不变性除外，因为两种设定都考虑了这一点）。[9]

我们还以尼罗河为例，对我们的分析进行了说明。我们确定了能够合理解释该河流实际水分配情况的多参数几何规则。该规则意味着，上游国家仅保留其流入量中相当小的部分（尤其是乌干达和南苏丹）。在我们的分析中，由其他规则产生的替代分配通常会为这些国家带来更大的份额。

6 附录。结果的证明

我们首先给出一个引理，该引理本身就很有意思，并将为上述定理的证明铺平道路。

引理 1。 如果一个规则 R 满足上游不变性和部分实施不变性，那么存在 $n-1$ 个函数 α_1、...、 α_{n-1}： $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 使得，对于 $i \in \{1,\dots,n-1\}$ 中的每一个， $\alpha_i(r) \leq r$，并且

$$R_i(e) = R_i^{(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})}(e) = \begin{cases} \alpha_1(e_1) & if\ i=1 \\ \alpha_i\left(e_i + \sum_{k=1}^{i-1}\left(e_k - R_k^{(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})}(e)\right)\right) & if\ i \in \{2,\dots,n-1\} \\ e_n + \sum_{k=1}^{n-1}\left(e_k - R_k^{(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})}(e)\right) & if\ i=n. \end{cases}$$

证明。设 $e \in \mathcal{D}$ 和 R 是满足 上游不变性和 部分实施不变性的规则。对于每个 $r \in \mathbb{R}_+$，令

$$\alpha_i(r) = R_i(\overbrace{0,\dots,0}^{i-1}, r, \overbrace{0,\dots,0}^{n-i}).$$

注意，根据规则的定义， $\alpha_i(r) \leq r$。我们对 e 中非空项的数量进行归纳。根据定义， $R(0,\dots,0) = (0,\dots,0) = R^{(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})}(0,\dots,0)$。令 $e^n = (0,\dots,0,e_n) \in \mathcal{D}$。同样，根据定义，

$$R(e^n) = (0,\dots,0,e_n) = R^{(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})}(e^n).$$

现在，令 $e^{n-1} = (0,\dots,0,e_{n-1},0) = \alpha_{n-1}(e_{n-1}) = R^{(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})}(e^{n-1}) = (0,\dots,0,\alpha_{n-1}(e_{n-1}),0) \in \mathcal{D}$。根据上游不变性， $R_{n-1}(e^{n-1}) = (0,\dots,0,\alpha_{n-1}(e_{n-1}))$。因此，

$$R(e^{n-1}) = (0,\dots,0,\alpha(e_{n-1}), e_n + (e_{n-1} - \alpha(e_{n-1}))) = R^{(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})}(e^{n-1}).$$

现在假设该命题对 $e^i = (0,\dots,0,e_i,e_{i+1},\dots,e_n)$ 成立。我们证明它对 $e^{i-1} = (0,\dots,0,e_{i-1},e_i,\dots,e_n)$ 也成立。显然，对于每个 $k < i-1$， $R_k(e^{i-1}) =$

[9]层级中的收入分享中间几何规则，让人联想到广受欢迎的社会动员或多层次营销激励机制（例如，Pickard等人，2011年）。

$0 = R^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})}{}_{\alpha_{i-1}}{}^{k}_{e_{i-1}} = R^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}}{}_{e^{i-1}} =$ (e^{i-1})。

现在，根据上游不变性（如上所述），$R_{i-1}(e^{i-1})$ ( ) $_{i-1}$ ( )。最后，根据部分实施不变性，

$$R_k(e^{i-1}) = R_k\left(0,\ldots,0,e_i+\sum_{j=1}^{i-1}(e_j - R_j(e^{i-1})),e_{i+1},e_n\right).$$

然后，将归纳假设应用于增加一个额外空流入量的问题$\Big(0,\ldots,0,e_i+\sum_{j=1}^{i-1}(e_j - R_j(e^{i-1}))$ $e_{i+1},\ e_n\Big)$，我们得到

$$R_k(e^{i-1}) = R_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})}\left(0,\ldots,0,e_i+\sum_{j=1}^{i-1}(e_j - R_j(e^{i-1})),e_{i+1},e_n\right).$$

我们已经证明，对于每个 $j \le i-1$, $R_j(e^{i-1}) = R^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})}{}_j(e^{i-1})$。因此，$\sum_{j=1}^{i-1}($ $e_j - R_j(e^{i-1})) = \sum_{j=1}^{i-1}(e_j - R_j^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})}(e^{i-1}))$，从而

$$R_k(e^{i-1}) = R_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})}\left(0,\ldots,0,e_i+\sum_{j=1}^{i-1}(e_j - R_j^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})}(e^{i-1})),e_{i+1},e_n\right) = R_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})}(e^{i-1}),$$

如所要求的。 □

定理1的证明

证明。我们首先证明该陈述的直接推论。设 α $=(\alpha_1,\ \ldots\ldots,\ \alpha_{n-1},\ \alpha_n)$ $\in [0,1]^{n-1}\times\{1\}$ 以及 R^α 为相应的多参数几何规则。

(a) 部分实施不变性。设 $e\in\mathcal{D}$ 和 $i\in N$。我们将$e^i\in\mathcal{D}$ 定义为

$$\overline{e}^i = \left(0_{U(i)\setminus\{i\}}, e_i+\sum_{k=1}^{i-1}(e_k - R_k^\alpha(e)), e_{D(i)\setminus\{i\}}\right).$$

我们必须检查，对于每个 $j\in\{i,\ldots,n-1\}$, $R_j^\alpha(e^i) = R_j^\alpha(e)$。若 $j=i$，根据多参数几何规则的定义，我们有

$$R_i^\alpha(\overline{e}^i) = \alpha_i\left(\overline{e}_i^i + \sum_{k=1}^{i-1}(\overline{e}_k^i - R_k^\alpha(\overline{e}^i))\right) = \alpha_i\overline{e}_i^i = \alpha_i\left(e_i+\sum_{k=1}^{i-1}(e_k - R_k^\alpha(e))\right) = R_i^\alpha(e).$$

若 $j = i+1$,

$$\begin{aligned}
R^{\alpha}_{i+1}(\overline{e}^i) &= \alpha_{i+1}\left(\overline{e}^i_{i+1} + \sum_{k=1}^{i}(\overline{e}^i_k - R^{\alpha}_k(\overline{e}^i))\right)\\
&= \alpha_{i+1}\left(\overline{e}^i_{i+1} + (\overline{e}^i_i - R^{\alpha}_i(\overline{e}^i))\right)\\
&= \alpha_{i+1}\left(e_{i+1} + e_i + \sum_{k=1}^{i-1}(e_k - R^{\alpha}_k(e)) - R^{\alpha}_i(e)\right)\\
&= \alpha_{i+1}\left(e_{i+1} + \sum_{k=1}^{i}(e_k - R^{\alpha}_k(e))\right)\\
&= R^{\alpha}_{i+1}(e).
\end{aligned}$$

假设根据归纳法，该结论对主体 j 成立；现在我们证明它对主体 $j+1 \in \{i,\dots,n-1\}$ 也成立。

$$\begin{aligned}
R^{\alpha}_{j+1}(\overline{e}^i) &= \alpha_{j+1}\left(\overline{e}^i_{j+1} + \sum_{k=1}^{j}(\overline{e}^i_k - R^{\alpha}_k(\overline{e}^i))\right)\\
&= \alpha_{j+1}\left(\overline{e}^i_{j+1} + (\overline{e}^i_i - R^{\alpha}_i(\overline{e}^i)) + \sum_{k=i+1}^{j}(\overline{e}^i_k - R^{\alpha}_k(\overline{e}^i))\right)\\
&= \alpha_{j+1}\left(e_{j+1} + e_i + \sum_{k=1}^{i-1}(e_k - R^{\alpha}_k(e)) - R^{\alpha}_i(e) + \sum_{k=i+1}^{j}(e_k - R^{\alpha}_k(e))\right)\\
&= \alpha_{j+1}\left(e_{j+1} + \sum_{k=1}^{j}(e_k - R^{\alpha}_k(e))\right)\\
&= R^{\alpha}_{j+1}(e).
\end{aligned}$$

注意，根据规则的定义，我们还有 $R^{\alpha}_n(e^i) = R^{\alpha}_n(e)$。因此，我们得出，对于每个 $j \in \{i,\dots,n\}$， $R^{\alpha}_j(e^i) = R^{\alpha}_j(e)$，从而该性质得到满足。

（b）上游不变性。令 $e, e' \in \mathcal{D}$，使得对于某个 $i \in N$ 有 $e_i < e'_i$，并且对于所有 $j \in N\backslash\{i\}$，对每个 $k < i$，我们有

$$R^{\alpha}_k(e') = \alpha_k\left(e'_k + \sum_{j=1}^{k-1}\prod_{l=j}^{k-1}(1-\alpha_l)e'_j\right) = \alpha_k\left(e_k + \sum_{j=1}^{k-1}\prod_{l=j}^{k-1}(1-\alpha_l)e_j\right) = R^{\alpha}_k(e),$$

如所需。

(c) 尺度不变性。设 $\rho \in \mathbb{R}_+$。对于每个 $e \in \mathcal{D}$ 和每个 $i \in \{1,\dots,n-1\}$,

$$R^{\alpha}_i(\rho e) = \alpha_i\left(\rho e_i + \sum_{k=1}^{i-1}\prod_{j=k}^{i-1}(1-\alpha_j)\rho e_k\right) = \rho\left[\alpha_i\left(e_i + \sum_{k=1}^{i-1}\prod_{j=k}^{i-1}(1-\alpha_j)e_k\right)\right] = \rho R^{\alpha}_i(e),$$

and

$$R_n^{\alpha}(\rho e) = \rho e_n + \sum_{k=1}^{n-1}\prod_{j=k}^{n-1}(1-\alpha_j)\rho e_k = \rho\left[e_n + \sum_{k=1}^{n-1}\prod_{j=k}^{n-1}(1-\alpha_j)e_k\right] = \rho R_n^{\alpha}(e),$$

按需。

现在我们关注逆命题。设 $e \in \mathcal{D}$ 和 R 是满足部分实施不变性、上游不变性和尺度不变性的规则。根据引理1，存在 $n-1$ 函数 α_1、……、α_{n-1}：$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 使得 $\alpha_i(r) \leq r$ 对每个 $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ 均成立，并且

$$R_i(e) = R_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})}(e) = \begin{cases} \alpha_1(e_1) & \text{if } i = 1 \\ \alpha_i\left(e_i + \sum_{k=1}^{i-1}\left(e_k - R_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})}(e)\right)\right) & \text{if } i \in \{2,\ldots,n-1\} \\ e_n + \sum_{k=1}^{n-1}\left(e_k - R_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})}(e)\right) & \text{if } i = n. \end{cases}$$

此外，

$$\alpha_i(r) = R_i(\overbrace{0,\ldots,0}^{i-1}, r, \overbrace{0,\ldots,0}^{n-i}).$$

现在，根据尺度不变性，

$$R_i(\overbrace{0,\ldots,0}^{i-1}, r, \overbrace{0,\ldots,0}^{n-i}) = rR_i(\overbrace{0,\ldots,0}^{i-1}, 1, \overbrace{0,\ldots,0}^{n-i}).$$

因此，$\alpha_i(r) = r\alpha_i(1)$。令 $\alpha_i = \alpha_i(1) \in [0,1]$。于是，对于每个 $i \in \{1,\ldots,n-1\}$，存在 $\alpha_i \in [0,1]$ 使得 $\alpha_i(r) = \alpha_i r$。综上，R 是一个多参数几何规则。

□

定理2的证明

证明。根据定理1，可知每个单参数几何规则都满足上游不变性、部分实施不变性和尺度不变性。不难证明，它们还满足来源相等。反之，设 R 是满足四条公理的规则，并设 $e \in \mathcal{D}$。根据定理1，存在 $(\alpha_1、\ldots\ldots、\alpha_{n-1}) \in [0,1]^{n-1}$ 使得

$$R_i(e) = R_i^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})}(e) = \begin{cases} \alpha_1 e_1 & \text{if } i = 1 \\ \alpha_i\left(e_i + \sum_{k=1}^{i-1}\left(e_k - R_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})}(e)\right)\right) & \text{if } i \in \{2,\ldots,n-1\} \\ e_n + \sum_{k=1}^{n-1}\left(e_k - R_k^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})}(e)\right) & \text{if } i = n. \end{cases}$$

此外，

$$\alpha_i = R_i(\overbrace{0,\ldots,0}^{i-1}, 1, \overbrace{0,\ldots,0}^{n-i}).$$

现在，根据来源相等，$\alpha_i = \alpha_j$ 对每一对 $i,j \in \{2,\ldots,n-1\}$ 均成立。总之，我们得到 R 是单参数几何规则。

□

定理的证明 3

证明。 首先注意，当 $\alpha_i = \frac{1}{n-i+1}$ 对每个 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$均成立时，串行规则与多参数几何规则相同。因此，它满足部分实施不变性和上游不变性（定理 1）。至于中性，令 $e \in \mathcal{D}$，使得$e_i > 0$ 对某个 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$成立，并且 $e_j = 0$ 对所有 $j \in N \backslash \{i\}$成立。那么，

$$R_i^S(e) = \alpha_i e_i = \frac{1}{n-i+1} e_i = \frac{1}{n-i} \left[e_i - \frac{1}{n-i+1} e_i \right] = \frac{1}{n-i} \sum_{k=i+1}^{n} R_k^S(e),$$

如所求。

反过来，设 R 是满足陈述中公理的规则。由引理 1，我们知道，对于每个 $e \in \mathcal{D}$，

$$R_i(e) = \begin{cases} \alpha_1(e_1) & \text{if } i = 1 \\ \alpha_i \left(e_i + \sum_{k=1}^{i-1} (e_k - R_k(e)) \right) & \text{if } i \in \{2, \ldots, n-1\} \\ e_n + \sum_{k=1}^{n-1} (e_k - R_k(e)) & \text{if } i = n, \end{cases},$$

其中，对于每个 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$，$\alpha_i(e_i) = R_i(0, \ldots\ldots, 0, e_i, 0, \ldots\ldots, 0)$。

现在，根据 中性，

$$\alpha_i(e_i) = \frac{1}{n-i}(e_i - \alpha_i(e_i)).$$

等价地，$\alpha_i(e_i) = \frac{e_i}{n-i+1}$。令 $\alpha_i = \frac{1}{n-i+1}$。于是，$\alpha_i(e_i) = \alpha_i e_i$，并且 $\alpha_i \in [0, 1]$，因为 $0 \leq \alpha_i(e_i) \leq e_i$。也就是说，$R$ 实际上是一个多参数几何规则，其中$\alpha_i = \frac{1}{n-i+1}$ 对于每个 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$，且 $\alpha_n = 1$，证明至此完成。 □

定理 4的证明

证明。 我们首先证明，β族中的每个成员都满足陈述中的公理。根据定义，每个 β规则都是多参数几何规则。因此，它满足尺度不变性、上游不变性和部分实施不变性。此外，每个 β规则也是一个 R^δ 规则。事实上，对于每个 $\beta_k \in [0, 1)$，我们定义 $\delta(\beta_k) = \delta^k = (\delta_1^k, \ldots, \delta_n^k) \in [0, 1]^{n-1} \times \{1\}$ 如下：

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1 & \text{if } i < k \\ \beta_k & \text{if } i = k \\ \frac{1}{n-i+1} & \text{if } k < i < n. \end{cases}$$

接下来，令 $e \in \mathcal{D}$ 和 $i \in N$。我们考虑三种情形。

(i) $i < k$。根据 δ^k 的定义，

$$R_i^{\delta_k}(e) = \delta_i^k e_i + \sum_{j<i} \frac{1-\delta_j^k}{n-j} e_j = e_i.$$

根据 R^{β_k} 的定义，由于 $i < k$, $\alpha_r = 1$ 对所有 $r \in \{1, \ldots, i\}$ 均成立，因此

$$R_i^{\beta_k}(e) = \alpha_i \left[e_i + \sum_{j<i} \prod_{j \le r < i} (1-\alpha_r) e_j \right] = e_i.$$

因此，当 $i < k$ 时，$R_i^{\delta_k}(e) = R_i^{\beta_k}(e)$。

(ii) $i = k$。我们计算 $R_k^{\delta_k}(e)$ 和 $R_k^{\beta_k}(e)$，以验证二者相等：

$$R_k^{\delta_k}(e) = \delta_k^k e_k + \sum_{j<k} \frac{1-\delta_j^k}{n-j} e_j = \delta_k^k e_k = \beta_k e_k,$$

and

$$R_k^{\beta_k}(e) = \alpha_k \left[e_k + \sum_{j<k} \prod_{j \le r < k} (1-\alpha_r) e_j \right] = \beta_k e_k.$$

(iii) $k < i \le n$。我们先指出，

$$\prod_{j \le r < i} (1-\alpha_r) = \prod_{j \le r < i} \frac{n-r}{n-r+1} = \frac{n-i+1}{n-j+1}. \tag{1}$$

根据 R^{β_k} 的定义，由于对所有 $r < k$ 均有 $\alpha_r = 1$，因此我们得到

$$\begin{aligned} R_i^{\beta_k}(e) &= \alpha_i \left[e_i + \sum_{j<k} \prod_{j \le r < i} (1-\alpha_r) e_j + \prod_{k \le r < i} (1-\alpha_r) e_k + \sum_{k<j<i} \prod_{j \le r < i} (1-\alpha_r) e_j \right] \\ &= \alpha_i \left[e_i + \prod_{k \le r < i} (1-\alpha_r) e_k + \sum_{k<j<i} \prod_{j \le r < i} (1-\alpha_r) e_j \right]. \end{aligned}$$

利用（1），并根据每个 α_i 在 β_k-子族中的定义，上一个表达式可化简为：

$$\begin{aligned} R_i^{\beta_k}(e) &= \frac{1}{n-i+1} e_i + \frac{1}{n-i+1} \frac{n-i+1}{n-(k+1)+1} (1-\beta_k) e_k + \frac{1}{n-i+1} \sum_{k<j<i} \frac{n-i+1}{n-j+1} e_j \\ &= \frac{1}{n-i+1} e_i + \frac{(1-\beta_k)}{n-k} e_k + \sum_{k<j<i} \frac{1}{n-j+1} e_j. \end{aligned}$$

另一方面，根据 δ^k 的定义，

$$\begin{aligned} R_i^{\delta^k}(e) &= \delta_i^k e_i + \sum_{j<k} \frac{(1-\delta_j^k)}{n-j} e_j + \frac{(1-\delta_k^k)}{n-k} e_k + \sum_{k<j<i} \frac{(1-\delta_j^k)}{n-j} e_j \\ &= \frac{1}{n-i+1} e_i + \frac{(1-\beta_k)}{n-k} e_k + \sum_{k<j<i} \frac{1}{n-j+1} e_j. \end{aligned}$$

因此，当 $k < i \le n$, $R_i^{\delta_k}(e) = R_i^{\beta_k}(e)$。

总而言之，

$$R_i^{\delta^k}(e) = \delta_i^k e_i + \sum_{j<i} \frac{(1-\delta_j^k)e_j}{n-j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i < k \\ \beta_k & \text{if } i = k \\ \frac{1}{n-i+1} & \text{if } k < i < n, \end{cases}$$

and

$$R_i^{\beta_k}(e) = \alpha_i \left(e_i + \sum_{k=1}^{i-1} \prod_{j=k}^{i-1} (1-\alpha_j) e_k \right).$$

由此，我们证明了每个 β规则都属于 R^δ 族，这保证了（根据命题1），每个 β规则也满足下游公平性。

现在，我们关注逆命题。也就是说，设 R 是一个满足陈述中四条公理的规则。根据定理1和命题1， R 属于族 R^α 与 R^δ的交集。设 $e^i \in \mathcal{D}$ 满足 $e_i^i = 1$ 且 $e_j^i = 0$ 对所有 $j \in N\backslash\{i\}$均成立。那么， $R^\alpha(e^i) = R^\delta(e^i)$ 对所有 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$均成立。因此，根据定义，

$$\alpha_1 = R_1^\alpha(e^1) = R_1^\delta(e^1) = \delta_1.$$

我们区分两种情况。

(1.a) $\alpha_1 = \delta_1 \neq 1$。由于 $R_2^\alpha(e^1) = R_2^\delta(e^1)$，我们有

$$\alpha_2(1-\alpha_1) = \frac{1-\delta_1}{n-1} \equiv \alpha_2 = \frac{1}{n-1}.$$

类似地， $R_3^\alpha(e^1) = R_3^\delta(e^1)$ 意味着

$$\alpha_3(1-\alpha_2)(1-\alpha_1) = \frac{1-\delta_1}{n-1} \equiv \alpha_3 = \frac{1}{n-2}.$$

现在，我们通过归纳法进行证明。假设对每个 $1 < j \lessdot k$， $\alpha_j = \frac{1}{n-j+1}$，我们证明 $\alpha_k = \frac{1}{n-k+1}$。事实上，由于 $R_k^\alpha(e^1) = R_k^\delta(e^1)$，我们有

$$\alpha_k(1-\alpha_{k-1}) \cdots (1-\alpha_1) = \frac{1-\delta_1}{n-1} \equiv \alpha_k = \frac{1}{n-k+1}.$$

因此，在这种情况下， $\alpha_1 \in [0,1)$，且对每个 $i \in \{2, \ldots, n-1$， $\alpha_i = \frac{1}{n-i+1}$ $\}$.

(1.b) $\alpha_1 = \delta_1 = 1$。我们考虑问题 $e^2 \in \mathcal{D}$。由于 $R_2^\alpha(e^2) = R_2^\delta(e^2)$，因此$\alpha_2 = \delta_2$。我们区分两种情况：

(2.a) $\alpha_2 = \delta_2 \neq 1$。由于 $R_3^\alpha(e^2) = R_3^\delta(e^2)$，我们有

$$\alpha_3(1-\alpha_2) = \frac{1-\delta_2}{n-2} \equiv \alpha_3 = \frac{1}{n-2}.$$

与情形（1.a）一样，我们通过归纳法进行证明。假设对于每个 $2 \lessdot j \lessdot k$，都有 $\alpha_j = \frac{1}{n-j+1}$，我们证明 $\alpha_k = \frac{1}{n-k+1}$。事实上，由于 $R_k^\alpha(e^2) = R_k^\delta(e^2)$，我们有

$$\alpha_k(1-\alpha_{k-1}) \cdots (1-\alpha_2) = \frac{1-\delta_2}{n-1} \equiv \alpha_k = \frac{1}{n-k+1}.$$

因此，在这种情况下，对于每个 $i \in\{3,\ldots,n-1\}$， $\alpha_1 = \cancel{1,}\ \alpha_2 \in [0,1)$ 和 $\alpha_i = \frac{1}{n-i+1}$。 (2.b) $\alpha_2 = \delta_2 = 1$。我们来考虑问题 $e^3 \in \mathcal{D}$。由于 $R_3^{\alpha}(e^3) = R_3^{\delta}(e^3)$，于是$\alpha_3 = \delta_3$。同样，我们分两种情况：(3.a) $\alpha_3 = \delta_3 \neq 1$。仿照情形（2.a）的论证，我们得出 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$,$\alpha_3 \in [0,1)$，并且对于每个 $i \in \{4,\ldots,n-1\}$，都有 $\alpha_i = \frac{1}{n-i+1}$。(3.b) $\alpha_3 = \delta_3 = 1$.....

——

我们可以通过迭代来完成证明。 □

参考文献

Alcalde-Unzu, J., G´omez-R´ua, M., and Molis, E. (2015). 河流清理成本分摊：上游责任规则。《博弈与经济行为》, 90:134–150. Ambec, S. and Ehlers, L. (2008). 可满足主体之间的河流分配。《博弈与经济行为》, 64:35–50. Ambec, S. and Spru mont, Y. (2002). 河流分配。《经济理论杂志》, 107:453–462. Ansink, E. and Weikard, H.-P. (2012). 河流分配问题的序贯分配规则。《社会选择与福利》, 38:187–210. Beal, S., Ghintran, A., Remila, E., and Solal, P. (2013). 河流分配问题：综述。《国际博弈论评论》, 15:1340016. Browne, O. R. and Ji, X. J. (2023). 明晰产权的经济价值：来自爱达荷州斯内克河流域水资源的证据。《环境经济学与管理杂志》, 119:102799. Burness, H. S. and Quirk, J. P. (1979). 先占式水权与资源有效配置。《美国经济评论》, 69:25–37. Coman, K. (2011). 灌溉的一些悬而未决的问题。《美国经济评论》, 101:36–48. Dietzenbacher, B., Tamura, Y., and Thomson, W. (2024). 部分实施不变性与索赔问题。《社会选择与福利》, 63:203–229. Dong, B., Ni, D., and Wang, Y. (2012). 受污染河网的分配。《环境与资源经济学》, 53:367–387. Donna, J. D. and Esp´ın-S´anchez, J. A. (2024). 水市场的流动性不足：西班牙东南部水资源分配的有效制度。《经济研究评论》. Edwards, E. C., Hendricks, N. P., and Sampson, G. S. (2024). 地下水产权的资本化。《美国农业经济学杂志》, 107:390–410. Gudmundsson, J., Hougaard, J. L., and Ko, C. Y. (2019). 河流分配的去中心化机制。《环境经济学与管理杂志》, 94:67–81. Hougaard, J. L., Moreno-Ternero, J. D., Tvede, M., and Østerdal, L. P. (2017). 层级式合资项目收益的分配。《博弈与经济行为》, 102:98–110. Jasechko, S., Seybold, H., Perrone, D., Fan, Y., Shamsudduha, M., Taylor, R. G., Fallatah, O., and Kirchner, J. W. (2024). 全球含水层地下水位迅速下降及部分地区的恢复案例。《自然》, 625:715–721。

Kilgour, D. 和 Dinar, A.（1995）。现在是否有可能就国际河流水资源共享达成稳定协议？政策研究工作论文 1474。Libecap, G. D.（2011）。气候适应中的制度路径依赖：Coman 的《灌溉中的若干未决问题》。《美国经济评论》，101：64–80。Mart´ınez, R. 和 Moreno-Ternero, J. D.（2025a）。河岸水权分配。《环境与资源经济学》。即将出版。———（2025b）。河岸污染的公平减排。可在 *SSRN 5193807* 查阅。Moulin, H. 和 Shenker, S.（1992）。序贯成本分摊。《计量经济学》，60：1009–1037。Ni, D. 和 Wang, Y.（2007）。共享一条受污染河流。《博弈与经济行为》，60：176–186。¨Ozt¨urk, Z. E.（2020）。国际河流共享的公平社会排序：一种基于词典序极小化的方法。《环境经济学与管理杂志》，101：102302。Pickard, G.、Pan, W.、Rahwan, I.、Cebrian, M.、Crane, R.、Madan, A. 和 Pentland, A.（2011）。时间紧迫型社会动员。《科学》，334：509–512。Ryan, N. 和 Sudarshan, A.（2022）。公地配给。《政治经济学杂志》，130：210–257。van den Brink, R.、He, S. 和 Huang, J.-P.（2018）。受污染河流问题与具有许可结构的博弈。《博弈与经济行为》，108：182–205。van den Brink, R.、van der Laan, G. 和 Moes, N.（2012）。在多个源头和外部性的情况下共享国际河流的公平协议。《环境经济学与管理杂志》，63：388–403。Yang, Y.、Ansink, E. 和 Gudmundsson, J.（2025）。如果必须污染河流，该怎么做？《环境经济学与管理杂志》，130：103105。