arXiv:2601.04152v1 [gr-qc] 7 Jan 2026

渐近平坦时空中奇点全局可见性的障碍

KANABAR JAY、KHARANSHU N. SOLANKI 和 PANKAJ S. JOSHI

2026年1月8日

摘要。考虑一个 $(N+1)$ 维渐近平坦时空，以及非时序边界 $\partial J^+(S_\varepsilon)$ 的一个未来指向、仿射参数化的出射零生成线 γ，其中 $\{S_\varepsilon\}$ 是一族嵌套的光滑紧致余维二曲面，在过去趋近于奇异边界集 S。在无扭转情形并满足零能量条件时，$m := N-1$ 维屏幕丛上的 Raychaudhuri 方程为：

$$\theta' = -\frac{1}{m}\theta^2 - \|\sigma\|^2 - \mathrm{Ric}(k,k),$$

其中 k 是 γ 的切向量。通过如下重标度，该方程可线性化：$u := A^{1/m}$，其中 $A := |\det D|$ 表示雅可比映射的 m 体积，从而得到斯图姆型常微分方程

$$u'' + \frac{1}{m} f\, u = 0, \qquad f := \|\sigma\|^2 + \mathrm{Ric}(k,k) \geqslant 0.$$

我们提出两种完全沿生成线的判据，以迫使 u 出现首个零点：(i) 精确的沃尔泰拉恒等式结合凹性，导出障碍加权积分不等式；(ii) 斯图姆比较和普吕弗角估计表明，只要 $\int_c^d \sqrt{f/m}\, d\lambda > \pi$ 在某个子区间上成立，非共轭性便会失效。我们证明，$u(\lambda_*) = 0$ 等价于存在焦点（共轭点），并意味着 $\theta = mu'/u \to -\infty$ 在 λ_*。利用类空边界的标准结构，我们得到沿测地线的障碍：若所有可能到达 $\mathscr{I}^+$ 的生成线，在正则时空区域中均满足上述条件之一，则 $J^+(S_\varepsilon) \cap \mathscr{I}^+ = \varnothing$，因此 S 并非全局可见。作为应用，我们在 Christodoulou 的爱因斯坦无质量标量场塌缩模型中展示其中一种判据。

目录

1. 引言2. 几何框架与预备知识 3. 通往共轭点的障碍方法 1
4. 通向共轭的斯图姆方法 5. 共轭点与爆破 6. 表观视界与 3
全局可见性的失效 7. 标量场引力坍缩的应用。参考文献 5
6
8
9
11
15

1. 引言

广义相对论的经典奇点定理表明，在满足适当的能量条件和因果条件时，时空测地线是不完备的 [7]。这些定理本身并不能判定的是，与这种测地线不完备相关联的奇异边界究竟隐藏在俘获区之后，还是（至少在局部）可见。寻找能导致局部裸奇点形成的适当条件，仍是一项远未解决且通常

本研究部分由奥地利科学基金（FWF）资助 [资助项目 DOI10.55776/STA32]。为实现开放获取，作者已对由本次投稿产生的任何作者接收稿版本采用 CC BY 公共版权许可协议。

颇具挑战性的研究。本文探讨一个相关问题：在某一类时空中，寻找阻碍局部可见奇点实现全局可见的条件。这里的全局可见是指，任何从局部裸奇点发出的零测地线都无法逃逸至未来零无穷远。特别要指出的是，这些阻碍条件并未直接涉及宇宙审查 [12] ，因为我们已经假定所考察时空存在一个过去奇异边界。然而，这些阻碍条件及其推导方法本身可能具有独立的研究价值，有助于更好地理解裸奇点的某些方面。尤其是，本文提出的条件将表明，沿着从此类奇点发出的零测地线，曲率和剪切的行为会如何影响其全局可见性。这些方法高度依赖洛伦兹因果理论中的各种概念；不熟悉这一领域的读者可参阅 [10]。值得注意的是，Tipler [13, 15, 14],Mingarelli [9], 以及霍金和彭罗斯此前已在各种不同的背景下采用过这类方法 [6]。

1.1. 设定与指导思想。 固定一条未来指向的、仿射参数化的零测地线 $\gamma\colon I \to M$，并选取一个满足 $g(k,\ n) = -1$ 的辅助零向量场 $n \in \Gamma(TM)$，其中 k 是 γ 的切向量。 M 的<闲style id='12'>屏幕丛 是定义在 M 上的 $m := N-1$ 维向量丛，其底层集合为 $S_\lambda := \{X :\ g(X,\ k) = g(X,\ n) = 0\}$。 γ 周围薄零测地线丛的形变由<闲style id='28'>光学自同态 $B : S_\lambda \to S_\lambda$ 编码，该自同态由 $(J^\perp)' = B(J^\perp)$ 针对屏幕投影的雅可比场 $J^\perp$ 定义。它分解为，

$$B = \frac{1}{m}\theta\,\mathrm{Id} + \sigma + \omega,$$

其中， θ 是膨胀， σ 是无迹剪切， ω 是扭转。下文始终在无扭转情形（$\omega \equiv 0$）下工作，并施加零能量条件（NEC），即 $\mathrm{Ric}(k,\ k) = T(k,\ k) \geqslant 0$。令 $\Pi :\ TM \to S_\lambda$ 为到屏幕丛的正交投影。于是，对光学演化恒等式 $\nabla_k B = -B^2 - \Pi \circ R(\cdot,\ k)k$ 取迹可得 Raychaudhuri 方程

$$\theta' = -\frac{1}{m}\theta^2 - \|\sigma\|^2 - \mathrm{Ric}(k,k), \tag{1.1}$$

其中 $(\cdot)'$ 表示对仿射参数 λ 求导（本文中我们将始终使用此记号）。令 $D(\lambda)\colon S_{\lambda_0} \to \mathcal{S}_\lambda$ 为雅可比映射，它将λ_0 处的初始屏幕向量映射为 λ处相应的雅可比场。为从 Raychaudhuri 方程中提取一个线性 方程，我们将测地线族的 m-体积 $\mathcal{A}(\lambda) := |\det D(\lambda)|$（其中 $D' = BD$, $D(\lambda_0) = \mathrm{Id}$）按如下方式重新缩放：

$$u(\lambda) := \mathcal{A}(\lambda)^{1/m} \quad \Longrightarrow \quad \theta = m\,\frac{u'}{u}.$$

对 λ 求导并利用（1.1），可消去二次项，从而得到标量常微分方程

$$u'' + \frac{1}{m} f\, u = 0, \qquad f := \|\sigma\|^2 + T(k,k). \tag{1.2}$$

方程（1.2）是我们分析的基础。它将几何聚焦问题化为沿着一条 零测地线（它属于某个测地线族）上的二阶 Sturm 型方程。

1.2. 的零点、共轭点与视界前的位置。 首次出现零点会立即带来两个推论。首先，$u(\lambda_*) = 0$ 当且仅当 $\det D(\lambda_*) = 0$，也就是说，存在一个非平凡的屏幕雅可比场 J 满足 $J(\lambda_*) = 0$ （一个共轭点）。其次， $\theta = m\,u'/u \to -\infty$ 当$\lambda \to \lambda_*$时，这意味着聚焦是真实的，而非坐标假象。此外，若时空渐近平坦，且其未来零无穷远满足某些性质（具体见定理6.7），并且零测地线（及其测地线族）过去不完备，即它在过去终止于一个奇点；首次出现零点的位置为 $\lambda_* < \lambda_{\mathrm{AH}}$（其中 λ_{AH} 是某个合适测地线族的出射膨胀率 θ_+ 变为零时对应的第一个参数），并且直到 λ_{AH} 的线段正则且非俘获，那么我们将证明，该奇点沿并非全局可见 的方向 γ。

1.3. **全局可见性的两种可能障碍**。 我们提供两种不同的途径，以迫使 u 在视界前出现零点：

(1) 障碍函数路线：在 $f \geqslant 0$ 和仿射线性障碍函数 $b(\lambda) = u(\lambda_0) + u'(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)$ 保持为正的任一区间上，形如

$$\frac{1}{m}\int (\lambda_1 - s)\, f(s)\, b(s)\, \mathrm{d}s > u(\lambda_0) + u'(\lambda_0)(\lambda_1 - \lambda_0)$$

的加权不等式迫使 $u(\lambda_1) < 0$，从而保证 u 在 $(\lambda_0,\ \lambda_1)$ 中有一个零点。

(2) Sturm/Prüfer 路线：令 $q := f/m$，若 $\int_c^d \sqrt{q(\lambda)}\,\mathrm{d}\lambda > \pi$ 在包含于正则区域内的某个子区间 $(c,\ d)$ 上成立，则方程（1.2）的解在 u 中有一个零点 $(c,\ d)$。

这两种检验都要求沿选定的单条测地线满足关于 f 的条件。回想一下，所有这些结论均在沿 γ 的无扭转演化以及零能量条件下成立。辅助零向量场 n 仅确定屏幕，最终会从所有不变量中消失。此外，仿射重参数化不会改变判据。

2. 几何框架与预备知识

设 $(M,\ g)$ 为时间定向的洛伦兹流形。固定一个未来指向的零测地线丛，其切向量为 k，并以 λ 作仿射参数化，使得沿测地线丛中的每条测地线都有 $\nabla_k k = 0$。选取一个辅助的未来指向零向量场 n，满足 $g(k,\ n) = -1$。参数 λ 处的屏幕丛是一个 m 维向量丛，其底层集合为，

$$\mathcal{S}_\lambda := \{X \in T_{\gamma(\lambda)}M :\ g(X,k) = g(X,n) = 0\}, \qquad m := N - 1,$$

其内积为 $h := g|_{\mathcal{S}_\lambda}$。令 $\Pi :\ TM \to \mathcal{S}_\lambda$ 为正交投影算子。

定义 2.1（光学映射与标量）。若 J 是沿某条测地线的雅可比场，则其屏幕投影 $J^\perp := \Pi \circ J$ 满足 $(J^\perp)' = B(J^\perp)$，从而定义光学自同态 $B :\ \mathcal{S}_\lambda \to \mathcal{S}_\lambda$。可以将其分解为

$$B = \frac{1}{m}\theta\,\mathrm{Id} + \sigma + \omega, \qquad \theta := \mathrm{tr}B, \quad \mathrm{tr}\sigma = 0, \quad \omega^\top = -\omega.$$

我们假设测地线丛始终是无扭转的（$\omega \equiv 0$）。定义 $\|\sigma\|^2 := \mathrm{tr}(\sigma^\top\sigma) \geqslant 0$。

注记 2.2（能量条件）。在零能量条件下，$T(X,X) \geqslant 0$ 对每个零 X 都成立。$(N+1)$ 维时，爱因斯坦方程给出里奇曲率 $(k,k) = T(k,k) \geqslant 0$。

2.1. **Raychaudhuri 方程**。为完整起见，我们先建立光学演化恒等式，再通过对屏幕丛取迹推导 Raychaudhuri 方程。

引理 2.3。设 $R(U,V)W := \nabla_U\nabla_V W - \nabla_V\nabla_U W - \nabla_{[U,V]}W$ 为 $U, V, W \in \Gamma(TM)$ 的黎曼曲率算子。沿每条切向量为 k 的测地线 γ，有：

$$\nabla_k B = -B^2 - \Pi \circ R(\,\cdot\,,k)k\big|_S. \tag{2.1}$$

证明。固定一条测地线 $\gamma :\ I \to M$，以及其上的一个屏幕雅可比场 J，即 $J(\lambda) \in \mathcal{S}_\lambda$ 且 $g(J(\lambda),k) = g(J(\lambda),n) = 0$ 对所有 $\lambda \in I$ 均成立。雅可比方程为 $J'' = R(k,J)k$。用 Π 投影两边，得到 $\Pi \circ J'' = \Pi \circ R(k,J)k$。由于 $J^\perp := \Pi \circ J$ 且 Π 沿 S 上的 k 平行（我们通过平行移动来识别屏幕纤维），左边等于 $(J^\perp)''$。根据定义，$(J^\perp)' = B(J^\perp)$。因此，

$$(J^\perp)'' = B'(J^\perp) + B\big((J^\perp)'\big) = B'(J^\perp) + B^2(J^\perp).$$

因此，对于形如 $J^\perp$ 的每个屏幕向量场，我们有

$$B'(J^\perp) + B^2(J^\perp) = \Pi\, R(k,J)k.$$

由于向量场 $J^{\perp}$ 张成 $\mathcal{S}_{\lambda}$ （通过为两个线性无关的屏幕雅可比场选取初始数据并进行传播），我们可以确定作用于 S 上的算子，从而得到

$$\nabla_k B = -B^2 - \Pi \circ R(\,\cdot\,,k)k\big|_S.$$

证明至此完成。

□

命题 2.4. 对于 $m = N-1$ 和 $\omega = 0$，有：

$$\theta' = -\frac{1}{m}\theta^2 - \|\sigma\|^2 - \mathrm{Ric}(k,k). \tag{2.2}$$

证明。 对方程 2.1取屏幕丛迹，得到：

$$\mathrm{tr}(\nabla_k B) = -\mathrm{tr}(B^2) - \mathrm{tr}\big(\Pi \circ R(\,\cdot\,,k)k\big).$$

由于 $\mathrm{tr}(\nabla_k B) = \nabla_k(\mathrm{tr}B) = \theta'$，只需计算 $\mathrm{tr}(B^2)$ 和曲率迹。令$B = (\theta/m)\mathrm{Id} + \sigma$。于是有：

$$B^2 = \Big(\frac{1}{m}\theta\,\mathrm{Id} + \sigma\Big)^2 = \frac{\theta^2}{m^2}\mathrm{Id} + \frac{2\theta}{m}\sigma + \sigma^2,$$
$$\mathrm{tr}(B^2) = \frac{\theta^2}{m^2}\mathrm{tr}(\mathrm{Id}) + \frac{2\theta}{m}\mathrm{tr}(\sigma) + \mathrm{tr}(\sigma^2) = \frac{\theta^2}{m} + \|\sigma\|^2,$$

Here 我们用到了 $\mathrm{tr}(\mathrm{Id}) = m$ 和 $\mathrm{tr}(\sigma) = 0$。对于曲率，正交投影并不 n ot 影响迹于 S，因此，

$$\mathrm{tr}\big(\Pi \circ R(\,\cdot\,,k)k\big) = \mathrm{tr}\big(R(\,\cdot\,,k)k|_S\big) = \mathrm{Ric}(k,k).$$

因此 $\theta' = -\theta^2/m - \|\sigma\|^2 -$ 里奇曲率$(k,\ k)$ 如所述。

□

2.2. **雅可比映射、重标度与线性化**。

定义 2.5 （雅可比映射与光束 m-体积）。 固定 λ_0，并沿 k平行移动，将 $\mathcal{S}_{\lambda_0}$ 与 $\mathcal{S}_{\lambda}$ 等同。雅可比映射 $D(\lambda)$：$\mathcal{S}_{\lambda_0} \to \mathcal{S}_{\lambda}$ 将初始屏幕向量映射为相应的雅可比场在 λ处的取值，并满足 $D(\lambda_0) =$Id，$D' = BD$。定义无符号的 m-体积密度和光束尺度

$$\mathcal{A}(\lambda) := |\det D(\lambda)|, \qquad u(\lambda) := \mathcal{A}(\lambda)^{1/m}.$$

引理 2.6. 对于 $u > 0$，有，

$$\theta = \frac{1}{\mathcal{A}}\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}\lambda} = m\,\frac{u'}{u}.$$

证明。 矩阵值常微分方程的刘维尔公式给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\det D = \mathrm{tr}(B)\,\det D = \theta\,\det D.$$

取绝对值并利用 $\mathcal{A} = |\det D|$，我们得到 $\mathcal{A}' = \theta\mathcal{A}$，其中 $\det\ D \neq 0$ 不为零（因此 $\mathcal{A} > 0$）。由于 $\mathcal{A} = u^m$，对 λ 求导可得，

$$\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = \frac{(u^m)'}{u^m} = m\,\frac{u'}{u}.$$

结合这两个表达式即可得到所需的恒等式。

□

命题 2.7. 在 $u > 0$ 的任意区间上，有：

$$u'' + \frac{1}{m}\,f\,u = 0, \qquad f := \|\sigma\|^2 + T(k,k)\ (\geqslant 0\ \textit{under NEC}).$$

证明. 根据 定理 2.6， $\theta = m\,u'/u$。对 λ 求导，得到：

$$\theta' = m\left(\frac{u''}{u} - \frac{(u')^2}{u^2}\right).$$

代入 Raychaudhuri 方程2.2 可得，

$$m\left(\frac{u''}{u} - \frac{(u')^2}{u^2}\right) = -\frac{1}{m}\theta^2 - \|\sigma\|^2 - T(k,k) = -\frac{1}{m}\,m^2\frac{(u')^2}{u^2} - \|\sigma\|^2 - T(k,k).$$

中的各项 $(u'/u)^2$ 恰好抵消，剩下

$$m\,\frac{u''}{u} = -\big(\|\sigma\|^2 + T(k,k)\big).$$

两边乘以 u可得 $u'' + (f/m)\,u = 0$，其中 $f := \|\sigma\|^2 + T(k,\ k) \geqslant 0$由零能量条件得出。

□

3. 通往共轭点的障碍方法

引理 3.1. 设 u满足 $u'' + (f/m)\,u = 0$，其中 $f \in C^0([\lambda_0, \lambda_1])$。那么对于任意初始数据 $u(\lambda_0) = u_0 > 0,\ u'(\lambda_0) = u_0'$，有：

$$u(\lambda_1) = u_0 + u_0'(\lambda_1 - \lambda_0) - \frac{1}{m}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}(\lambda_1 - s)\,f(s)\,u(s)\,\mathrm{d}s. \tag{3.1}$$

证明。 将常微分方程从 λ_0 积分到 t ，得到：

$$u'(t) - u_0' = -\frac{1}{m}\int_{\lambda_0}^{t} f(s)u(s)\,\mathrm{d}s.$$

再对 t从 λ_0 积分到 λ_1 ，得到：

$$u(\lambda_1) - u_0 = u_0'(\lambda_1 - \lambda_0) - \frac{1}{m}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\left(\int_{\lambda_0}^{t} f(s)u(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t.$$

积分区域是三角形 $\{(s,\ t):\ \lambda_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \lambda_1\}$。交换积分顺序（被积函数连续，因此可应用 Fubini–Tonelli 定理）可得：

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\left(\int_{t=\,s}^{\lambda_1}\mathrm{d}t\right)f(s)u(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1}(\lambda_1 - s)\,f(s)u(s)\,\mathrm{d}s.$$

将此式代入前一个方程，即得所述恒等式。

□

引理 3.2。 若 $f \geqslant 0$ 和 $u \geqslant 0$ 在区间 I上，则在 I上有 $u'' = -(1/m)fu \leqslant 0$ 。特别地，若在 $[\lambda_0$ 上有 $u > 0$ ， $\lambda_1]$，则 u 在该区间上是凹函数。

证明。 由常微分方程以及 f 和 u的非负性立即可得。

□

定理 3.3。 设 $b(s):=u_0 + u_0'(s - \lambda_0)$ ，并假设在 $[\lambda_0$、 $\lambda_1]$、 $u_0 > 0$、 $u_0' < 0$ 上有 $f \geqslant 0$ ，且在 $[\lambda_0$、 $\lambda_1]$ 上有$b > 0$ 。那么，

(a) 在 $[\lambda_0$、 $\lambda_1]$ 上有 $u \geqslant b$ ，并且，

(b) 如果

$$\frac{1}{m}\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}(\lambda_1 - s)\,f(s)\,b(s)\,\mathrm{d}s \ > \ u_0 + u_0'(\lambda_1 - \lambda_0),$$

于是 $u(\lambda_1) < 0$。因此存在 $\lambda_* \in (\lambda_0$、 $\lambda_1)$ ，使得 $u(\lambda_*) = 0$。

证明。 (a) 定义 $w := u - b$。于是 $w(\lambda_0) = w'(\lambda_0) = 0$。在满足 $u \geqslant 0$ 的任何子区间上，我们有

$$w'' = u'' - b'' = -\frac{1}{m} f u - 0 \leqslant 0,$$

因此 w 是凹的。如果 w 首先在 $\lambda \in (\lambda_0$处变为负值，$\lambda_1]$根据凹性，有 $w(\lambda) =$最小值$w < 0$且 $w'(\lambda) = 0$，但此时 w 的图像将严格位于 λ_0 处的切向量之下（该切向量恒为零），即使 λ 接近 λ_0时也是如此，这与 $w(\lambda_0) = w'(\lambda_0) = 0$矛盾。因此 $w \geqslant 0$ 且 $u \geqslant b$。 (b) 将 $u \geqslant b$ 代入不等式 3.1 可得，

$$u(\lambda_1) \leqslant u_0 + u_0'(\lambda_1 - \lambda_0) - \frac{1}{m} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} (\lambda_1 - s)\, f(s)\, b(s)\, \mathrm{d}s.$$

如果右端为负，则 $u(\lambda_1) < 0$。由于 $u(\lambda_0) = u_0 > 0$ 和 u 是连续的，介值定理保证在 $(\lambda_0,\ \lambda_1)$ 中存在一个零点。

□

4. The Sturm route to conjugacy

本节将 Raychaudhuri 方程写作 $y'' + q(\lambda) y = 0$，其中 $q(\lambda) := f(\lambda)/m \geqslant 0$.

引理 4.1. 对于 $j \in \{0,\ 1\}$，若 $y_j'' + q_j y_j = 0$ 且 q_j连续，则

$$\big(y_0 y_1' - y_0' y_1\big)' = (q_0 - q_1)\, y_0 y_1.$$

证明. 对 $y_0 y_1' - y_0' y_1$ 求导并利用 $y_j'' = -q_j y_j$，得到:

$$(y_0 y_1' - y_0' y_1)' = y_0' y_1' - y_0'' y_1 - y_0' y_1' + y_0 y_1'' = -(-q_0 y_0) y_1 + y_0(-q_1 y_1) = (q_0 - q_1) y_0 y_1.$$

□

定理 4.2. 设 $q_1 \geqslant q_0 \geqslant 0$ 在 $[\alpha$上，$\beta]$。若 $y_0'' + q_0 y_0 = 0$ 的一个非平凡解 y_0 在 $\xi < \eta$处有相邻零点，则 $y_1'' + q_1 y_1 = 0$ 的任意解 y_1 在 $(\xi,\ \eta)$之间有一个零点。

证明. 反设解 y_1 在 $(\xi,\ \eta)$之间没有零点。必要时乘以 -1，使得 $y_1 > 0$ 在那里成立。在相邻零点之间，y_0 符号不变。必要时将 y_0 替换为 $-y_0$，使得 $y_0 > 0$ 在 $(\xi,\ \eta)$上成立。定义类似朗斯基的量 $W := y_0 y_1' - y_0' y_1$。由定理 4.1，$W' = (q_0 - q_1) y_0 y_1 \leqslant 0$，因此 W单调不增。接着计算端点处的单侧极限。由于 $y_0(\xi) = 0$ 且 $y_0'(\xi) > 0$ （一个单零点，符号由负变正），我们有$W(\xi) = -y_0'(\xi) y_1(\xi) < 0$。类似地，$y_0(\eta) = 0$且 $y_0'(\eta) < 0$，因此 $W(\eta) = -y_0'(\eta) y_1(\eta) > 0$。但是，单调不增的 W 不可能从负变正，故得证。

□

定理 4.3。若 y 是 $y'' + q y = 0$ 的一个非平凡解，且具有连续的 q，则在 y的两个相邻零点之间，每个线性无关解恰有一个零点。

证明。固定两个相邻零点 $\xi < \eta$，它们属于 y。由 定理 4.2 应用于 $q_0 = q_1 = q$可知，每个解在 $(\xi,\ \eta)$中至少有一个零点。若一个线性无关解 $\tilde{y}$ 在其中有两个或更多零点，则朗斯基行列式 $W = y\tilde{y}' - y'\tilde{y}$会在两个点处消失，因此恒等于零（例如，由连续 q的阿贝尔恒等式可知），这意味着线性相关。因此恰有一个零点。

□

4.1. 普吕弗变换与积分判据。

定义 4.4 （普吕弗坐标）。假设 $q \in C^1([a,\ b])$ 以及 $q > 0$ 在 $[a,\ b]$上成立。对于任意非平凡解 y，定义函数 $\rho > 0$ 和连续角度 ϑ 如下:

$$y := \rho \sin\vartheta, \qquad \frac{y'}{\sqrt{q}} := \rho \cos\vartheta,$$

其中分支由 $\vartheta(a) = 0$ 确定，当 $y(a) = 0$ 且 $y'(a) > 0$时。

引理 4.5。 对于 $q \in C^1$ 和 $q > 0$，有：

$$\vartheta' = \sqrt{q} + \frac{q'}{2q} \sin\vartheta\cos\vartheta, \qquad \frac{\rho'}{\rho} = -\frac{q'}{2q} \sin^2\vartheta.$$

证明。 对 $y = \rho\sin\vartheta$ 求导，得到：

$$y' = \rho' \sin\vartheta + \rho\vartheta' \cos\vartheta.$$

但根据定义，$y' = \sqrt{q}\,\rho\cos\vartheta$，因此，

$$\rho' \sin\vartheta + \rho\vartheta' \cos\vartheta = \sqrt{q}\,\rho\cos\vartheta. \tag{4.1}$$

对 $y'/\sqrt{q} = \rho\cos\vartheta$ 求导，得到：

$$\frac{y''}{\sqrt{q}} - \frac{q'}{2q\sqrt{q}}\, y' = \rho' \cos\vartheta - \rho\vartheta' \sin\vartheta.$$

由于 $y'' = -qy = -q\rho\sin\vartheta$ 和 $y' = \sqrt{q}\,\rho\cos\vartheta$，可得：

$$-\sqrt{q}\,\rho\sin\vartheta - \frac{q'}{2q}\,\rho\cos\vartheta = \rho' \cos\vartheta - \rho\vartheta' \sin\vartheta \tag{4.2}$$

将方程（4.1）和（4.2）视为关于未知数 ρ' 和 ϑ'的线性方程组，我们将（4.1）乘以 $\sin\vartheta$，将（4.2）乘以 $\cos\vartheta$，然后相加以消去 ρ'，得到：

$$\rho\vartheta'(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) = \sqrt{q}\,\rho\cos^2\vartheta - \sqrt{q}\,\rho\sin^2\vartheta - \frac{q'}{2q}\,\rho\cos^2\vartheta.$$

由此可得，

$$\vartheta' = \sqrt{q}\,(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) - \frac{q'}{2q}\cos^2\vartheta = \sqrt{q}\,\cos(2\vartheta) - \frac{q'}{2q}\frac{1+\cos(2\vartheta)}{2}.$$

等价地，利用 $\cos(2\vartheta) = 1 - 2\sin^2\vartheta$ 和 $\sin\vartheta\cos\vartheta = \sin(2\vartheta)/2,$，可化简为，

$$\vartheta' = \sqrt{q} + \frac{q'}{2q}\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

为得到 $\rho'/\rho,$，我们将 (4.1) 乘以 $\cos\vartheta$，将 (4.2) 乘以 $\sin\vartheta$，然后两式相减，消去 θ'。于是得到，

$$\rho' \sin\vartheta\cos\vartheta + \rho\vartheta' \cos^2\vartheta = \sqrt{q}\,\rho\cos^2\vartheta,$$

$$-\sqrt{q}\,\rho\sin^2\vartheta - \frac{q'}{2q}\,\rho\sin\vartheta\cos\vartheta = \rho' \cos^2\vartheta - \rho\vartheta' \sin\vartheta\cos\vartheta.$$

将两个方程相加以消去 ϑ'，并求解 ρ'/ρ，可得，

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{q'}{2q}\sin^2\vartheta.$$

证明至此完成。

□

引理 4.6。 对于满足 $q > 0$ 和 $a < b$的 $q \in C^1$，

$$\vartheta(b) - \vartheta(a) \;\geqslant\; \int_a^b \sqrt{q}\,\mathrm{d}\lambda - \frac{1}{4}\int_a^b \frac{|q'|}{q}\,\mathrm{d}\lambda.$$

证明。 由 定理 4.5可得 $\vartheta' = \sqrt{q} + (q'\text{正弦}\ \vartheta\text{余弦}\ \vartheta)/2q$。利用 $|\text{正弦}\,\vartheta\ \text{余弦}\ \vartheta| \leqslant 1/2,$可得，

$$\vartheta' \;\geqslant\; \sqrt{q} - \frac{|q'|}{4q}.$$

从 a积分到 b即可完成证明。

□

定理 4.7。 设 $q = f/m$ 在 $[a、\ b]$上连续且非负。若存在一个紧子区间 $[c、\ d] \subset [a、\ b]$，满足

$$\int_c^d \sqrt{q(\lambda)}\,\mathrm{d}\lambda \;=\; \int_c^d \sqrt{\frac{f(\lambda)}{m}}\,\mathrm{d}\lambda \;>\; \pi,$$

那么， $y'' + qy = 0$ 在 $[c, d]$上不不共轭。特别地，满足 $y(c) = 0,\ y'(c) = 1$的解在 $(c, d]$中有第二个零点。

证明。 首先考虑以下情形： $q \in C^1$ 且 $q > 0$ 在 $[c, d]$上。令 y 满足条件 $y'' + qy = 0$ 的解 $y(c) = 0,\ y'(c) > 0$。在普吕弗坐标中， $\vartheta(c) = 0$。根据定理 4.6，有：

$$\vartheta(d) - \vartheta(c) \;\geqslant\; \int_c^d \sqrt{q}\,\mathrm{d}\lambda - \frac{1}{4}\int_c^d \frac{|q'|}{q}\,\mathrm{d}\lambda.$$

由于 $\int_c^d \sqrt{q} > \pi$，连续性确保存在一个子区间，使总下界仍大于 π （必要时缩小$[c, d]$，以使变差项有限且足够小）。当 ϑ 达到 π时，$\sin\vartheta = 0$，因此$y = 0$。于是， $(c, d]$中存在一个零点。对于仅连续的 $q \geqslant 0$，我们用从下方逼近的$q_\epsilon \in C^1$，使得 $0 < q_\epsilon \leqslant q$ 且 $q_\epsilon \to q$ 一致收敛。于是 $\int_c^d \sqrt{q_\epsilon} \to \int_c^d \sqrt{q} > \pi$。对于每个 ϵ，方程$y_\epsilon'' + q_\epsilon y_\epsilon = 0$ 在 $(c, d]$中有第二个零点。根据斯图姆比较（定理 4.2）， q的任意解都必须至少有同样多的零点。特别地，满足 $y(c) = 0,\ y'(c) = 1$ 的解在 $(c, d]$中也有第二个零点。

□

推论 4.8。 如果 $f \geqslant f_0 > 0$ 在 $[\lambda_0, \lambda_0 + L]$ 上，那么 $u'' + (f/m)u = 0$ 的每个非平凡解都会在此前有一个零点

$$\lambda_0 + \pi\sqrt{\frac{m}{f_0}}.$$

证明。 这里 $q \equiv f_0/m$ 为常数。比较方程 $y'' + (f_0/m)y = 0$ 的零点间距为$\pi\sqrt{m/f_0}$。应用 定理 4.2，取 $q_1 = q$ 和 $q_0 = f_0/m$ 即可得到结论。

□

5. 共轭点与爆破

命题 5.1。 设 $D(\lambda)$ 为雅可比映射，且 $\mathcal{A} = |$行列式 $D|$。则 $u(\lambda) := \mathcal{A}^{1/m}$满足$u(\lambda_*) = 0$ 当且仅当行列式 $D(\lambda_*) = 0$，即存在一个在 λ_* 处消失的非平凡屏幕雅可比场，并且 $\gamma(\lambda_*)$ 与 S 共轭。

证明。 由于 $\mathcal{A} = |\det D|$，我们有 $u(\lambda_*) = 0 \iff \det D(\lambda_*) = 0$。如果 $\det D(\lambda_*) = 0$，那么 $D(\lambda_*)$ 的列向量 $J_1(\lambda_*), \ldots, J_m(\lambda_*)$ 在 S_{λ_*} 中线性相关。因此存在一个非平凡组合 $J = \sum_i \alpha_i J_i$，满足 $J(\lambda_*) = 0$。在 λ_0 处，集合 $\{J_i(\lambda_0)\}$ 构成 $\mathcal{S}_{\lambda_0} \cong T_{\gamma(\lambda_0)}S$ 的一组基，因此 $J(\lambda_0) \in TS$ 非零。于是 $\gamma(\lambda_*)$ 与 S 共轭。

□

命题 5.2。 假设 $u > 0$ 在 $(\lambda_0、\ \lambda_*)$ 和 $u(\lambda_*) = 0$ 上成立。则 $\theta = m\,u'/u \to -\infty$ 当 $\lambda \to \lambda_*$ 时成立。此外，若 $\theta(\lambda_0) < 0$，则对于满足 $\theta < 0$ 的 $\lambda \geqslant \lambda_0$，有：

$$\theta(\lambda) \leqslant \frac{\theta(\lambda_0)}{1 + \dfrac{1}{m}\theta(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)}.$$

因此，即使满足 $f \equiv 0$， θ 也会根据 $\lambda \leqslant \lambda_0 - m/\theta(\lambda_0)$ 发散至 $-\infty$。

证明。 由于 $\lambda \to \lambda_*$，有 $u(\lambda) \to 0$ 其中 u' 有界（因为线性常微分方程的解是 C^2），因此 $u'/u \to -\infty$ 在第一个零点左侧。对于这个微分不等式，定理 2.4 结合$\|\sigma\|^2 \geqslant 0$ 和 里奇曲率$(k,\ k) \geqslant 0$ 可得，

$$\theta' \leqslant -\frac{1}{m}\theta^2.$$

在满足 $\theta<0$ 的任意区间上，这意味着，

$$\left(\frac{1}{\theta}\right)'=-\frac{\theta'}{\theta^2}\geqslant\frac{1}{m}.$$

从 λ_0 到 λ 积分得 $1/\theta(\lambda)\geqslant 1/\theta(\lambda_0)+(\lambda-\lambda_0)/m,$，整理后即可得到所声称的界。

□

6. 表观视界与全局可见性的失效

现在，我们终于可以将截至目前的全部分析与适当时空类中的奇点全局可见性联系起来。首先，我们回顾洛伦兹几何中的一个标准事实：零测地线经过其第一个焦点后便不再是极值的。

引理 6.1。设 $B\subseteq M$ 是 M 中的光滑余维 2 类空子流形，且 γ 是与 B 正交的零测地线。若 $q=\gamma(\lambda_*)$ 沿 γ 是 B 的焦点，则 $q\in I^+(B)$；特别地，γ 不可能在 λ_* 之后包含于 $\partial J^+(B)=J^+(B)\backslash I^+(B)$ 中。

证明。例如，参见 [11]中的第 10 章命题 48 的证明。

□

定义 6.2（局部和全局裸奇点）。设 $(M,\ g)$ 是一个渐近平坦~时空，具有共形延拓 $(M,\ \tilde{g})$，即，$\iota\colon M\hookrightarrow M$ 是一个等距嵌入，并令$\mathscr{I}^+$表示 M的未来零无穷远。设 $\mathcal{S}\subseteq\partial_\iota(M)$ 为一个奇异边界集，并考虑 M 中的一族嵌套的[1] $\{\mathcal{S}_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]}$ 光滑余维 2 紧致类空子流形，满足$\iota(\mathcal{S}_\varepsilon)\to\mathcal{S}$ 在 Kuratowski 意义下为 $\varepsilon\to 0$ [8],，即满足以下条件：

~（1）对于 M中 $\mathcal{S}$ 的任意开邻域 U，存在 $\varepsilon_U>0$ 使得 $0<\varepsilon<\varepsilon_U\implies\iota(\mathcal{S}_\varepsilon)\subset U$；并且（2）对于任意 $p\in\mathcal{S}$，以及 $\tilde{M}$中的任意开邻域 $V\ni p$，存在 $\varepsilon_V^p>0$ 使得 $0<\varepsilon<\varepsilon_V^p\implies\iota(\mathcal{S}_\varepsilon)\cap V\neq\varnothing$。

我们称奇异边界 $\mathcal{S}$ 是全局可见的，若存在一个序列 $\varepsilon_n\to 0$ 满足$J^+(\mathcal{S}_{\varepsilon_n})\cap\mathscr{I}^+\neq\varnothing$。反之，若存在 $\varepsilon_1>0$，使得对所有 $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_1]$，均有 $J^+(\mathcal{S}_\varepsilon)\cap\mathscr{I}^+=\varnothing$，则奇异边界不是全局可见的。

Eardley 和 Smarr 对局部可见性和全局可见性作了类似的分类，[5] 发表于 1978 年。举例来说，若时空存在一个连续的半径函数 $r\colon\ M\to(0,\ \infty)$且奇异边界集在某个延拓中对应于 $\{r=0\}$，那么可以取 $\mathcal{S}_\varepsilon:=\{r=\varepsilon\}\cap\Sigma$对于一个合适的类空超曲面 Σ，它给出一族按上述意义趋近于 $\{r=0\}$ 的对象。关于球对称 I 型物质场引力坍缩所产生的奇点情形下这一界定的示例，见上文图 1。[4]。

注记 6.3. 由于 $\mathscr{I}^+\subset\tilde{M}\backslash M$，我们可以将 $J^+(\mathcal{S}_\varepsilon)\cap\mathscr{I}^+$解释为 $J^+_{\tilde{M}}(\iota(\mathcal{S})_\varepsilon)\cap\mathscr{I}^+$，其中 $J^+_{\tilde{M}}$~表示 $(M$中的因果未来，$\tilde{g})$

Le引理 6.4. 假设未来零无穷远 $\mathscr{I}^+$ 上存在连续函数 $u\colon\mathscr{I}^+\to\mathbb{R}$ *such* 使得，

(1) 对于每个紧区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}$，集合 $u^{-1}([a,b])\subset\mathscr{I}^+$ 都是紧的；*(2)* 对于每个 $x\in\mathscr{I}^+$ 以及 $\mathscr{I}^+$ 中的每个开邻域 $W\ni x$，都存在 $y\in W$ 使得$u(y)<u(x)$；*(3)* 因果关系 $J^+_{\tilde{M}}\subset\tilde{M}\times\tilde{M}$在 $\iota(M)\cup\mathscr{I}^+$ 的某个邻域上是闭的（等价地，$(M,\tilde{g})$ 在那里是因果简单的）。

[1]这是一个嵌套族，因为对于 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$，有 $\mathcal{S}_{\varepsilon_1}\subseteq J^-(S_{\varepsilon_2})$。

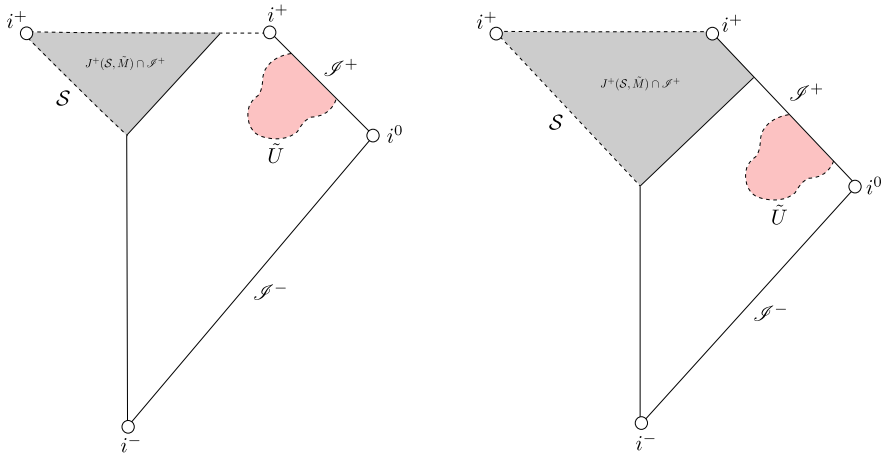

图 1. 球对称时空的共形延拓，这些时空由 I 型物质场的引力坍缩形成。左侧的延拓允许存在局部可见奇点，而右侧的延拓允许存在全局可见奇点。坍缩物质的内部可以与施瓦西外部区域相匹配，后者是全局双曲的，因此尤其是U 是 $\mathscr{I}^+$的因果简单邻域。

设 $K\subset M$ 是紧的。若 $J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))\cap\mathscr{I}^+\neq\varnothing$，则 $\partial J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))\cap\mathscr{I}^+\neq\varnothing$。

证明。设 $A:=J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))\cap\mathscr{I}^+$ 并假设 $A\neq\varnothing$。令 $u_0:=\inf\{u(x)\colon x\in A\}$. 取一个序列 $x_n\in A$，使得 $u(x_n)\to u_0$。根据 (1)，我们可以抽取一个子序列，使得 $x_n\to x_0\in\mathscr{I}^+$且 $u(x_0)=u_0$。我们断言 $x_0\in J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))$。事实上，取 $p_n\in\iota(K)$ 使得 $p_n\leqslant_{\tilde{M}}x_n$。由于 $\iota(K)$ 是紧的，我们可以转而考虑 $p_n\to p_0\in\iota(K)$。根据 (3)（即，根据 $J^+_{\tilde{M}}$的闭性），有 $(p_0,\ x_0)\in J^+_{\tilde{M}}$，从而 $x_0\in J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))$，即 $x_0\in A$。若 $x_0\in\mathrm{Int}\big(J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))\big)$，则取一个开集 $U\subset\tilde{M}$ 使得$x_0\in U\subset J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))$。那么 $W:=U\cap\mathscr{I}^+$ 是 $\mathscr{I}^+$ 中 x_0 的一个开邻域。根据 (2)，我们可以选取 $y\in W$ 使得 $u(y)<u(x_0)=u_0$。但是 $y\in U\subset J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))$，因此 $y\in A$，这与 u_0 的定义矛盾。因此 $x_0\notin\mathrm{Int}\big(J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))\big)$，从而 $x_0\in\partial J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))\cap\mathscr{I}^+$。

□

推论 6.5. 在引理 6.4的假设下，对于每个紧集 $K\subset M$ 都有

$$J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))\cap\mathscr{I}^+\neq\varnothing\quad\Longleftrightarrow\quad\partial J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))\cap\mathscr{I}^+\neq\varnothing.$$

证明。(⇒) 这是引理 6.4。
(⇐) 我们先证明 $J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))$在 $\tilde{M}$中是闭集。取满足 $x_n\to x$的 $x_n\in J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))$。选择 $p_n\in\iota(K)$使得 $p_n\leqslant_{\tilde{M}}x_n$。由于 $\iota(K)$ 是紧的，我们可以取子序列 $p_{n_j}\to p\in\iota(K)$。根据引理 6.4 中的第 (3) 点，集合 $J^+_{\tilde{M}}=\{(a,b)\colon a\leqslant_{\tilde{M}}b\}$在 $\tilde{M}\times\tilde{M}$中是闭集，因此由 $(p_{n_j},x_{n_j})\to(p,x)$可得 $p\leqslant_{\tilde{M}}x$。于是 $x\in J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))$。因此 $J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))$ 是闭集。现在，由于对于每个集合 A都有 $\partial A\subset A$，而此处 $J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))=J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))$，故有 $\partial J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))\subset J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))$. 因此，$\partial J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))\cap\mathscr{I}^+$ 中的任意点都属于 $J^+_{\tilde{M}}(\iota(K))\cap\mathscr{I}^+$。

□

Le引理 6.6。设 $B\subset M$ 是一个光滑紧致类空余维 2 子流形。若 $x\in J^+_{\tilde{M}}(\quad\iota(B))\backslash\iota(B)$，则存在一段未来指向的零测地线 $\gamma\colon\ [0,1]\to M$ 使得 t

$$\gamma(0)\in\iota(B),\qquad\gamma(1)=x,\qquad\gamma([0,1])\subset\partial J^+_{\tilde{M}}(\iota(B)).$$

此外，$k(0)\perp T_{\gamma(0)}\iota(B)$。

证明。 这是类空边界的标准结构定理。例如，请参见 [11]第14章推论5的证明。

□

定理 *6.7.* 假设引理*6.4* 的假设成立。设 $S \subset \partial_\iota(M)$ 是奇异边界集，且 $\{S_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]}$ 是 M 中带有 $\iota(S_\varepsilon) \to S$ 的光滑紧致类空余维 *2* 子流形的嵌套族，其含义见定义 *6.2*。固定 $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_0]$。假设每一条到达 $\mathscr{I}^+$ 的 $\partial J^+_{\tilde{M}}(\iota(S_\varepsilon))$ 的零生成元 γ，都包含在一个 C^2 零超曲面中，该超曲面由正交于 S_ε 的零测地线生成，因此 $\omega \equiv 0$。此外，假设雅可比映射 D 和 $u := |\det D|^{1/m}, m := N-1$（均定义至第一个焦点），并且沿着 γ，标量常微分方程，

$$u'' + \frac{1}{m} f\, u = 0, \qquad f = \|\sigma\|^2 + \mathrm{Ric}(k,k) \geqslant 0,$$

在 $u > 0$ 的区间上成立。此外，假设对每个这样的生成元 γ，其仿射参数域中都存在一个子区间 $[c,\ d]$，满足 $u(c) \neq 0$，并且

$$\int_c^d \sqrt{\frac{f(\lambda)}{m}}\, d\lambda > \pi. \tag{6.1}$$

于是 $J^+_{\tilde{M}}(\iota(S_\varepsilon)) \cap \mathscr{I}^+ = \varnothing$. 因此，若(6.1) 对所有 $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_1]$ 在某个 $\varepsilon_1 > 0$下成立，则奇异边界集 S 并非全局可见，即存在 $\varepsilon_1 > 0$，使得对所有 $\varepsilon \in (0,\ \varepsilon_1]$都有 $J^+_{\tilde{M}}(\iota(S_\varepsilon)) \cap \mathscr{I}^+ = \varnothing$。

证明。固定 $\varepsilon \in (0,\ \varphi_0]$，我们用反证法。假设 $J^+_{\tilde{M}}(\iota(S_\varepsilon)) \cap \mathscr{I}^+ \neq \varnothing$。由引理6.4，存在 $x \in \partial J^+_{\tilde{M}}(\iota(S_\varepsilon)) \cap \mathscr{I}^+$.。由引理 6.6， x 位于零生成元 $\gamma \subset \partial J^+_{\tilde{M}}(\iota(S_\varepsilon))$ 上，该生成元从 $\iota(S_\varepsilon)$ 正交出发并到达 x。将假设 (6.1) 应用于这个 γ，可由定理 4.7 得到 u 沿着 γ 的一个零点 $\lambda_* \in (c,\ d]$ 。由命题 5.1， $\gamma(\lambda_*)$ 沿着 γ 与 B 焦共轭：$= \iota(S_\varepsilon)$ 。引理 6.1 现在推出，对所有 $\lambda > \lambda_*$，都有 $\gamma(\lambda) \in I^+_{\tilde{M}}(B)$，因此 γ 不可能包含于 $\partial J^+_{\tilde{M}}(B)$ 超过 λ_* 的部分。这与 $\gamma \subset \partial J^+_{\tilde{M}}(B)$ 到达 $x \in \mathscr{I}^+$ 矛盾。因此 $J^+_{\tilde{M}}(\iota(S_\varepsilon)) \cap \mathscr{I}^+ = \varnothing$。最后的结论直接由全局可见性的定义得出。

□

注 6.8： 也可以表述一个使用定理 3.3 所给出的屏障判据的定理 6.7版本。不过，就应用而言，Sturm 判据更便于使用，这一点将在爱因斯坦无质量标量场系统的情形中得到展示。

7. Application to gravitational collapse of a scalar field.

我们在 $3+1$ 维空间中工作。设 $(M,\ g,\ \phi\colon\ M \to \mathbb{R})$ 是爱因斯坦-无质量标量场系统的一个光滑的球对称解，其定义依照 Christodoulou [2, 3]。我们只在正则区域进行局部分析，并假设度量 g 至少是 C^2。

定义 7.1（球对称）**：** 若在一个开稠密集上，SO(3) 在 M 上存在有效等距作用，且其轨道是类空二维球面，则称时空 $(M,\ g)$ 是球对称的。

引理 7.2。 设 $(M,\ g)$ 为球对称的，且 $p \in M$ 位于主轨道 $\mathcal{O}_p \simeq \mathbb{S}^2$ 上。则存在一个邻域 $U \ni p$ 以及一个2维洛伦兹流形 $(\mathcal{Q},\ h)$，在坐标图 $V \subset \mathcal{Q}$ 上具有坐标 $(x^0,\ x^1)$，并存在一个光滑函数 $r\colon\ V \to (0,\ \infty)$，使得

$$(U, g) \ \cong\ (V \times \mathbb{S}^2, h_{ab}(x)\,\mathrm{d}x^a \otimes \mathrm{d}x^b + r(x)^2\,(g_{\mathbb{S}^2})_{AB}(\omega)\ \mathrm{d}\omega^A \otimes \mathrm{d}\omega^B), \tag{7.1}$$

其中， $g_{\mathbb{S}^2}$ 是 $\mathbb{S}^2$上的标准圆度量。

证明。固定主轨道 $\mathcal{O}_p$上的 p 。令 $E_p := T_p(\mathcal{O}_p)$ （一个类空二维平面）。由于 g具有 SO(3)-不变性，正交补 $E_p^{\perp}$在 p处的各向同性子群作用下保持不变，并且是具有洛伦兹号差的二维空间（因为 dim $M = 4$，且 $\mathcal{O}_p$ 是类空的）。根据适当李群作用的切片定理，存在一个 p 邻域的局部 SO(3)-等变微分同胚，将其映射到乘积 $V \times \mathbb{S}^2$，其中 V是轨道空间 $\mathcal{Q}$ 中的邻域：$= M/\mathrm{SO}(3)$；度量按式（7.1）分解，其中 V 上带有某个洛伦兹度量 h，并且翘曲因子 r^2 乘以每个轨道上唯一的 SO(3)-不变度量（该度量必定是一个按比例缩放的圆度量）。该比例由光滑函数 $r > 0$ （面积半径）编码，对于 $x \in V$定义为：

$$\mathrm{Area}(\{x\} \times \mathbb{S}^2) = 4\pi r(x)^2.$$

至此，证明完成。

□

引理 7.3. 设 $(\mathcal{Q}, h)$ 是任意一个2维洛伦兹流形。则存在坐标 (u, v)，使得在 $\mathcal{Q}$ 上，

$$h = -\Omega(u,v)^2 \mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}v \tag{7.2}$$

其中 $\Omega > 0$ 是某个光滑函数。因此，在 $U \simeq V \times \mathbb{S}^2$ 上，时空度量可写为：

$$g = -\Omega(u,v)^2 \, \mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}v + r(u,v)^2 \, (g_{\mathbb{S}^2})_{AB}(\omega) \, \mathrm{d}\omega^A \otimes \mathrm{d}\omega^B. \tag{7.3}$$

证明. 在 2 维情形下，每个洛伦兹度量局部都是共形平坦的：选取局部零向量场 L, L，使其满足 $h(L, L) = h(L, L) = 0$ 和 $h(L, L) < 0$。令 u（分别为 v）满足 $L(u) = 0$（分别为 $L(v) = 0$），且梯度处处非零。则 $\mathrm{d}u$ 和 $\mathrm{d}v$ 是零协向量，而 h 必与 $\mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}v$ 成比例。将比例因子写作 $-\Omega^2$，便得到 (7.2)。将其代入 (7.1)，得到 (7.3)。

□

现在固定一点 (u_*, v_*, ω_*) 满足 $r(u_*, v_*) > 0$ 并考虑由下式给出的向外零曲线 $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$，

$$\gamma(v) := (u_*, v, \omega_*).$$

Its 的切向量为 ∂_v，由于 $g_{vv} = 0$ 在（7.3）中，因此它是零向量。现在我们选择一个仿射参数化 n.

引理 7.4. 沿每条向外零曲线 u =const，向量场

$$k := \Omega^{-2} \partial_v \tag{7.4}$$

满足 $\nabla_k k = 0$。因此 k 是仿射参数化零测地线的切向量。

证明。 由于 ω 在 γ上为常数，因此只有 (u, v)部分起作用。在 $\mathcal{Q}$上的坐标 (u, v) 中， h 的唯一非零分量是 $h_{uv} = h_{vu} = -\Omega^2/2$ （按惯例对称化）。对 $h = -\Omega^2 \mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}v$ 进行直接的克里斯托费尔符号计算可得，

$$\nabla_{\partial_v} \partial_v = 2(\partial_v \log \Omega) \, \partial_v,$$

i.e. ∂_v 是测地线，但除非 $\partial_v \Omega = 0$，否则不是仿射参数化的。通过 Ω^{-2} 重标度消除非仿射性，从而得到 g,

$$\nabla_k k = \nabla_{\Omega^{-2}\partial_v}(\Omega^{-2}\partial_v) = \Omega^{-4}\nabla_{\partial_v}\partial_v + \Omega^{-2}(\partial_v \Omega^{-2}) \, \partial_v = \Omega^{-4} \cdot 2(\partial_v \log \Omega)\partial_v - 2\Omega^{-4}(\partial_v \log \Omega)\partial_v = 0.$$

$\mathbb{S}^2$部分没有贡献，因为 k 没有角向分量，且该度量是扭曲乘积。这就完成了证明。

□

定义 7.5。 在零测地线 γ 上的一点 p 处，该零测地线的切向量为 k，定义<screen space>屏幕空间</screen>

$$\mathcal{S}_p := k_p^{\perp}/\mathrm{span}\{k_p\}.$$

沿着 γ，不交并 $\mathcal{S} := \bigsqcup_{p \in \gamma} \mathcal{S}_p$ 是屏幕丛。其秩为 $m := \dim \mathcal{S}_p = 2$ （ $3 + 1$维）。

引理 7.6. 设 $p=(u,v,\omega)\in M$满足 $r(u,v)>0$，并设 $k=\Omega^{-2}\partial_v$位于 p。则映射

$$T_\omega\mathbb{S}^2\longrightarrow\mathcal{S}_p,\qquad X\mapsto[\tilde{X}],$$

其中，X 是 T_pM 中的相应角向切向量（即 X 仅有 ω分量），是一个线性同构。特别地，$\mathcal{S}_p$ 可自然地识别为 $T_\omega\mathbb{S}^2$。

证明。利用（7.3），切空间可分解为：

$$T_pM\cong T_{(u,v)}\mathcal{Q}\oplus T_\omega\mathbb{S}^2,$$

相对于 g，该分解是正交的，其中 $g|_{T_\omega\mathbb{S}^2}=r(u,v)^2g_{\mathbb{S}^2}$ 正定。由于$k\in T_{(u,v)}\mathcal{Q}$，对于任意 $\tilde{X}\in T_\omega\mathbb{S}^2$，都有 $g(k,\tilde{X})=0$，因此 $\tilde{X}\in k^\perp$。此外，$\tilde{X}\notin$ 张成$\{k\}$，除非 $X=0$（因为它们属于正交直和项）。因此，等价类 $[X]\in\mathcal{S}_p$ 定义良好，并且在 X中是单射的。反过来，任取 $Y\in k^\perp\subset T_pM$ 并将其分解为 $Y=Y_{\mathcal{Q}}+Y_{\mathbb{S}^2}$。于是$0=g(k,Y)=g(k,Y_{\mathcal{Q}})$（因为 $k\perp T_\omega\mathbb{S}^2$）。在二维洛伦兹空间 $T_{(u,v)}\mathcal{Q}$中，零向量的正交补是一维的，且等于其张成空间。因此 $Y_{\mathcal{Q}}\in$张成$\{k\}$。所以 $[Y]=[Y_{\mathbb{S}^2}]$ 属于 $k^\perp$/张成的空间$\{k\}$，从而证明了 $T_\omega\mathbb{S}^2\to\mathcal{S}_p$的满射性。证明完毕。□

令 $S_{u,v}:=\{(u,v)\}\times\mathbb{S}^2$ 表示经过 (u,v)的对称 2-球面 。根据引理 7.6，$S_{u,v}$ 的切向量代表屏幕方向。

定义 7.7。 固定 $p\in S_{u,v}$，并令 k 为经过 p的出射零生成元的仿射参数化切向量。对于 $X,Y\in T_pS_{u,v}$，我们定义零第二基本形式 为

$$B(X,Y):=g(\nabla_Xk,Y).$$

由于 $g|_{T_pS_{u,v}}$ 正定，存在唯一的端同态 $b\colon T_pS_{u,v}\to T_pS_{u,v}$，使得对于所有 X，$Y\in T_pS_{u,v}$，均有 $B(X,Y)=g(bX,Y)$。零膨胀 为 $\theta:=\operatorname{tr}b$，而剪切 为其无迹部分 $\hat{b}:=b-(\theta/2)\mathrm{id}$（因此 $\sigma^2:=\operatorname{tr}(\hat{b}^2)\geqslant0$）。

引理 7.8。 沿着切向量为 k的出射径向零生成元 γ，有：

$$B=\frac{k(r)}{r}\,g\big|_{TS_{u,v}},\qquad i.e.\qquad b=\frac{k(r)}{r}\,\mathrm{id}_{TS_{u,v}}.\tag{7.5}$$

因此，

$$\theta=2\,\frac{k(r)}{r},\qquad\hat{b}\equiv0,\qquad\sigma\equiv0.\tag{7.6}$$

证明。令 ω^A 为 $\mathbb{S}^2$ 上的局部坐标，并将 $e_A:=\partial_{\omega^A}$ 写作与S_u相切的坐标向量场$_{,v}$。于是 $[e_A,\partial_v]=0$，因而 $[e_A,k]=0$ 也成立。利用度量相容性以及 $g(k,e_A)=0$，可得：

$$k\big(g(e_A,e_B)\big)=g(\nabla_ke_A,e_B)+g(e_A,\nabla_ke_B).$$

但 $[e_A,k]=0$ 意味着 $\nabla_ke_A-\nabla_{e_A}k=0$，因此，

$$k\big(g(e_A,e_B)\big)=g(\nabla_{e_A}k,e_B)+g(e_A,\nabla_{e_B}k)=B(e_A,e_B)+B(e_B,e_A).$$

因此，B 是对称的，而且 $2B(e_A,e_B)=k\big(g(e_A,e_B)\big)$. 由（7.3）可得 $g(e_A,e_B)=r(u,v)^2(g_{\mathbb{S}^2})_{AB}(\omega)$，因此沿着 γ（其中 u 和 ω 为常数），有：

$$k\big(g(e_A,e_B)\big)=k(r^2)\,(g_{\mathbb{S}^2})_{AB}=2r\,k(r)\,(g_{\mathbb{S}^2})_{AB}.$$

因此，

$$B(e_A,e_B)=r\,k(r)\,(g_{\mathbb{S}^2})_{AB}=\frac{k(r)}{r}\,(r^2(g_{\mathbb{S}^2})_{AB})=\frac{k(r)}{r}\,g(e_A,e_B),$$

这正是（7.5）。对 $S_{u,v}$ 上的诱导度量取迹，得到 $\theta=2(k(r)/r),$；由于 b 是单位矩阵的标量倍数，其无迹部分为零。

□

爱因斯坦-无质量标量场系统表示为：

$$G_{ab} = T_{ab}, \qquad T_{ab} = \nabla_a\phi\,\nabla_b\phi - \frac{1}{2}g_{ab}(\nabla\phi)^2, \qquad \Box_g\phi = 0.$$

引理 7.9. 在 $3+1$ 维中，爱因斯坦方程蕴含

$$\mathrm{Ric}_{ab} = \nabla_a\phi\,\nabla_b\phi. \tag{7.7}$$

特别地，对于任意零向量 k,

$$\mathrm{Ric}(k,k) = (k\phi)^2. \tag{7.8}$$

证明. 对 T_{ab} 取迹，得到：

$$T := g^{ab}T_{ab} = (\nabla\phi)^2 - 2(\nabla\phi)^2 = -(\nabla\phi)^2.$$

对爱因斯坦方程 $G_{ab} = T_{ab}$ 取迹，得到：

$$G := g^{ab}G_{ab} = -R = T = -(\nabla\phi)^2.$$

因此 $R = (\nabla\phi)^2$。我们将 $G_{ab} = R_{ab} - (R/2)g_{ab} = T_{ab}$ 改写为

$$R_{ab} = \nabla_a\phi\nabla_b\phi - \frac{1}{2}g_{ab}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}Rg_{ab}.$$

代入 $R = (\nabla\phi)^2$ 得到 $R_{ab} = \nabla_a\phi\nabla_b\phi$. 与 k^ak^b 进行缩并并利用 $g(k,\ k) = 0$ 可得（7.8）。

□

命题 7.10。 在球对称爱因斯坦-标量场时空中的任意出射径向零生成元 γ 上，若其仿射切向量为 k，则

$$u'' + \frac{1}{2}(k\phi)^2\,u = 0, \tag{7.9}$$

此外，有 $u = r/r(\lambda_0),$，因此等价地

$$r'' + \frac{1}{2}(k\phi)^2\,r = 0. \tag{7.10}$$

证明。 球对称性给出 $\sigma \equiv 0$ 由引理7.8。于是方程（7.9）恰好是爱因斯坦无质量标量场系统的雷恰杜里方程。现在，若 $E_A(\lambda)$ （$A = 1,\ 2$）是 S_{λ_0}的一组平行输运正交基，则相应的屏幕雅可比场满足$J_A(\lambda) = (r(\lambda)/r(\lambda_0)) \cdot E_A(\lambda),$，因此雅可比映射在 S_{λ_0}上就是 $D(\lambda) = (r(\lambda)/r(\lambda_0))\mathrm{Id}$。由此可得，

$$A(\lambda) = |\det D(\lambda)| = \left(\frac{r(\lambda)}{r(\lambda_0)}\right)^2, \qquad u(\lambda) = A(\lambda)^{1/2} = \frac{r(\lambda)}{r(\lambda_0)}.$$

特别地，u （除一个无关紧要的常数因子外）就是沿着 γ 的面积半径 r。证明至此完成。

□

定理 4.7 （针对 $m = 2$ 和 $\sigma = 0$的特例）给出的 Prüfer/Sturm 聚焦判据指出：若对于某个区间 $[\lambda_c,\ \lambda_d]$有，

$$\int_{\lambda_c}^{\lambda_d}\sqrt{q(\lambda)}\,d\lambda > \pi, \qquad q(\lambda) := \frac{1}{2}\mathrm{Ric}(k,k) = \frac{1}{2}(k\phi)^2, \tag{7.11}$$

那么 u 在 (λ_c, λ_d) 中有一个零点，因此 γ 在 (λ_c, λ_d) 中有一个共轭点。代入 $q = (k\phi)^2/2$得到

$$\int_{\lambda_c}^{\lambda_d}|k\phi|\mathrm{d}\lambda > \sqrt{2}\pi \tag{7.12}$$

引理 7.11. 沿着一个满足 $k = \Omega^{-2}\partial_v$ 的出射生成元 $u = u_*$，并取仿射参数 λ，有 $\mathrm{d}\lambda = \Omega^2 \mathrm{d}v$，且 $(k\phi)\mathrm{d}\lambda = (\partial_v\phi)\mathrm{d}v$。因此

$$\int_{\lambda_c}^{\lambda_d} |k\phi| \, \mathrm{d}\lambda = \int_{v_c}^{v_d} |\partial_v \phi(u_*, v)| \, \mathrm{d}v. \tag{7.13}$$

证明。由于 $k \equiv \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ 和 $k = \Omega^{-2}\partial_v$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} = \Omega^{-2}\frac{\partial}{\partial v} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda} = \Omega^{-2} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}\lambda = \Omega^2 \mathrm{d}v.$$

于是，

$$(k\phi)\mathrm{d}\lambda = (\Omega^{-2}\partial_v\phi) \cdot (\Omega^2 \mathrm{d}v) = (\partial_v\phi)\mathrm{d}v,$$

取绝对值并积分得到（7.13）。 □

命题 7.12。 如果沿某个出射径向零生成元 $u = u_*$ 在正则区域中存在 $v_c < v_d$，使得

$$\int_{v_c}^{v_d} |\partial_v \phi(u_*, v)| \, \mathrm{d}v > \sqrt{2}\pi, \tag{7.14}$$

那么该生成元包含一对零共轭点（等价地，$u = r/r(\lambda_0)$ 为零），位于$(v_c, \ v_d)$中。

证明。根据引理 7.11，方程（7.14）等价于（7.12）中的不等式。这正是（7.11）。将定理 4.7 应用于方程（7.9），可在内部得到 u 的一个零点，因此也得到一个共轭点。

□

Christodoulou 的标量场塌缩模型是渐近平坦的 [1], ，且其模型的一个子类存在局部裸奇点。此外，研究表明，未来零无穷远附近的几何表现得如同真空（在球对称情形下，真空由整体双曲 Schwarzschild 外部时空唯一确定）。这尤其意味着，他的模型在 $\mathscr{I}^+$ 的邻域内是渐近平坦且整体双曲的（因而也是因果简单的）。此外，存在一个迟滞时间函数u： $\mathscr{I}^+ \to \mathbb{R}$，它是适当映射，且在$\mathscr{I}^+$上没有局部极小值。因此，引理 6.4 适用于爱因斯坦-无质量标量场系统。因此，若沿着从局部裸奇点发出的每一条出射零测地线（在指定子类中），方程（7.14）给出的下界均成立，则定理 6.7 保证这些测地线无法逃逸至 $\mathscr{I}^+$，因而该奇点并非全局可见。方程（7.14）表示沿着从奇点发出的零测地线，标量场积分通量的一个下界。反过来，若该奇点是全局裸露的，则沿着所有从奇点发出的出射零测地线，均有 $\int_\gamma |\partial_v\phi| \, \mathrm{d}\lambda < \sqrt{2}\pi$，即标量场积分通量具有一致的上界。

–

参考文献

[1] D. Christodoulou。《引力塌缩的数学理论》。载于：《数学物理通讯》109（1987），第 613–647 页。DOI：10.1007/BF01208960。[2] Demetrios Christodoulou。“标量场引力坍缩中裸奇点形成的实例”。载于：《数学年刊》。第二辑 140.3（1994），第 607–653 页。DOI：10.2307/2118619。[3] Demetrios Christodoulou。“标量场引力坍缩中裸奇点的不稳定性”。载于：《数学年刊》。第二辑 149.1（1999），第 183–217 页。DOI：10.2307/121023。[4] I. H. Dwivedi 和 Pankaj S. Joshi。“球对称引力坍缩中裸奇点的出现”。载于：《数学物理通讯》166（1994），第 117–128 页。DOI：https://doi.org/10.1007/BF02099303。

[5] Douglas M. Eardley 和 Larry Smarr。“数值相对论中的时间函数：边际束缚尘埃坍缩”。载于：《物理评论 D》19（8，1979），第 2239–2259 页。doi：10.1103/PhysRevD. 19.2239。[6] S. W. Hawking 和 R. Penrose。“引力坍缩与宇宙学中的奇点”。载于：《伦敦皇家学会会刊 A 辑》314（1970），第 529–548 页。doi：10.1098/rspa.1970.0021。[7] Stephen W. Hawking 和 George F. R. Ellis。《时空的大尺度结构》。剑桥数学物理专著。剑桥大学出版社，2023 年 2 月。isbn：978-1-009-25316-1。doi：10.1017/9781009253161。[8] Kazimierz Kuratowski。《拓扑学》。第 I 卷。Academic Press 和波兰科学出版社，1966 年。[9] Angelo B. Mingarelli。“二阶常微分方程共轭点的存在性”。载于：《SIAM 数学分析杂志》17.1（1986），第 1–6 页。doi：10.1137/0517001。[10] E. Minguzzi。“洛伦兹因果理论”。载于：Living Rev. Rel. 22.1（2019）。doi：10.1007/ s41114-019-0019-x。[11] Barrett O’Neill。《半黎曼几何及其在相对论中的应用》。第 103 卷。纯粹与应用数学。圣迭戈，加利福尼亚州：Academic Press，1983 年。isbn：978-0-12-526740-3。[12] Yakov Shlapentokh-Rothman。“爱因斯坦真空方程的弱宇宙监督假说、俘获面与裸奇点”。载于：《科学院报告：力学》353（2025 年 2 月），第 379–410 页。doi：10.5802/crmeca.284。[13] Frank J Tipler。“广义相对论与共轭常微分方程”。载于：《微分方程杂志》30.2（1978 年），第 165–174 页。doi：https://doi.org/10.1016/0022- 0396(78)90012-8。[14] Frank J. Tipler。“广义相对论中奇点的性质”。载于：《物理评论 D》15（1977），第 942–945 页。doi：10.1103/PhysRevD.15.942。[15] Frank J. Tipler。“共形平直时空中的奇点”。载于：《物理快报 A》64（1977），第 8–10 页。doi：10.1016/0375-9601(77)90508-4。

数学系，MG科学研究所，古吉拉特大学，艾哈迈达巴德380009，印度
电子邮件地址：kanabarjaymgsi@gmail.com

数学系，维也纳大学，奥斯卡·摩根斯特恩广场1号，维也纳1090区，奥地利
电子邮件地址：kharanshu.nilesh.solanki@univie.ac.at

国际空间与宇宙学中心，艾哈迈达巴德大学，艾哈迈达巴德380009，印度电子邮件地址：psjcosmos@gmail.com