面向免授权无蜂窝大规模 MIMO 中分布式推断的期望传播

Christian Forsch，*IEEE*研究生会员，以及Laura Cottatellucci，*IEEE*会员

arXiv:2601.04166v1 [cs.IT] 7 Jan 2026

摘要—**免授权无蜂窝大规模多输入多输出（GF-CF-MaMIMO）系统被认为是下一代物联网（IoT）网络的关键使能技术，因为其无需显式调度即可支持大规模连接。然而，大量连接设备使得正交导频序列无法使用，从而产生严重的导频污染（PC），降低信道估计和数据检测性能。此外，可扩展的免授权云无线接入网大规模MIMO网络本质上依赖于分布式信号处理。在本文中，我们考虑GF-CF-MaMIMO系统的上行链路，并提出两种基于期望传播（EP）**分布式**的**联合活动检测、信道估计与数据检测（***JACD***）**新算法。**第一种算法称为JACD-EP，采用高斯近似对信道变量进行建模；第二种算法称为JACD-EP-BG，将其建模为伯努利-高斯（BG）随机变量。为将BG分布纳入EP框架，我们推导了其指数族表示，并将这两种算法构造为在由后验概率（APP）分布构成的因子图上进行的高效消息传递。所提出的框架在接入点（AP）和用户设备（UE）的数量方面均具有内在可扩展性。仿真结果表明，所提出的分布式算法能够有效缓解导频污染，并且与（理想先验辅助的）集中式线性检测器相比，具有更高的检测准确率。**

索引词—**期望传播、伯努利-高斯分布、分布式推断、活动检测、信道估计、数据检测、免授权无小区大规模 MIMO。**

I. 引言

THE 物联网（IoT）设备的爆炸式增长，以及大规模关键机器类通信（MTC）对超低时延、高可靠性和能效不断演进的需求，促使人们设计新型通信系统 [2]。由于信令开销和时延问题，传统授权式多址方案无法满足这些高要求，在密集设备部署和稀疏突发流量场景下尤为如此。因此，免授权随机接入已成为一种极具吸引力的替代方案，无需显式调度授权即可实现高效的资源利用 [3]–[5]。与此同时，无小区大规模多输入多输出（蜂窝式无蜂窝大规模多输入多输出，CF-MaMIMO）网络架构通过大量地理分布式接入点（AP）联合服务可能数量庞大的用户设备（UE），实现泛在覆盖和高能效通信 [6]–[8]。免授权 CF-MaMIMO（GF-CF-MaMIMO）系统结合了免授权随机接入与 CF-MaMIMO 的优势，是下一代物联网网络的有力候选方案 [9], [10]。与此同时，CF-MaMIMO 架构采用集中式处理实现的方案面临根本性的可扩展性限制 [11], 而在 GF-CF-MaMIMO 系统中，这一问题会进一步加剧，因为必须联合处理大量偶发活跃的用户设备，因此有必要设计分布式算法。

除了信道估计和数据检测等经典通信任务外，免授权随机接入还要求识别传输数据的活跃用户设备集合。为此，用户设备会发送导频序列，用于联合估计设备活动状态和信道，这一过程称为联合活动检测与信道估计（JAC），例如，[12], [13]。然而，大规模机器类通信中数量庞大的连接设备使得正交导频序列无法使用，导致导频污染（*PC*），进而降低整体系统性能，并使活动检测和数据检测更加复杂。在用户设备发送非正交导频序列的任何通信系统中，都会发生导频污染。在集中式大规模MIMO系统中，[14]–[18]采用信道硬化和有利传播 来缓解授权多址接入中的导频污染问题。相较之下，这些特性通常不适用于蜂窝式无蜂窝大规模多输入多输出 [19]–[22]，因此此类去污染方法无效。研究表明，在实际信道统计特性下，对于授权多址接入的集中式大规模 MIMO，采用集中式最小均方误差（MMSE）处理，可在天线数量趋于无穷的渐近区域缓解导频污染 [23], [24]。蜂窝式无蜂窝大规模多输入多输出中的分布式处理也得到了类似结果 [25]。然而，导频污染仍然是一个重大的实际挑战 [11]，尤其是在可扩展的蜂窝式无蜂窝大规模多输入多输出系统中；这类系统本质上依赖分布式信号处理，且每个接入点的数量及其天线数量都有限。在免授权蜂窝式无蜂窝大规模多输入多输出中，这一问题更加严重，因为还需要进行用户设备活动检测，并且要同时处理数量多得多的用户设备，从而加剧导频污染。这些挑战促使人们开发分布式导频去污染方案，以在支持免授权蜂窝式无蜂窝大规模多输入多输出架构可扩展性并降低前传流量的同时，有效缓解导频污染。

一种有前景的缓解导频污染（PC）的方法，是不仅利用导频符号进行信道估计和 UE 活动检测，还利用接收数据符号。在基于授权的多址接入中，UE 活动预先已知，只需估计信道和数据信号，这种方法称为联合信道估计与数据检测（JCD）。已有多项研究探索了蜂窝式无蜂窝大规模多输入多输出（CF-MaMIMO）系统中的 JCD。 [26]中的作者研究了 CF-MaMIMO 中用于 JCD 的半盲方法，并推导了半盲可辨识性的条件。 [27],提出了一种基于前向-后向分裂的 JCD 方案，该方案利用了 CF-MaMIMO 信道的稀疏性，并采用非正交导频序列。 [28] 提出了一种用于 CF-MaMIMO 系统的分布式、基于期望传播（EP）的半盲 JCD 算法，随后又在 [29]中对其进行了改进，并分析了其在导频污染（PC）下的性能。作者

本研究由德国研究联合会（DFG）资助，项目 CO 1311/1-1，项目编号 491320625。本文的早期版本曾在 IEEE 无线通信信号处理进展国际研讨会（SPAWC）上部分宣读， 2024 [1]。

Christian Forsch 和 Laura Cottatellucci 任职于德国埃尔朗根的弗里德里希-亚历山大大学数字通信研究所（电子邮箱：christian.forsch@fau.de；laura.cottatellucci@fau.de）。

在 [30] 中，作者结合变分贝叶斯与期望传播（EP），通过优化 Bethe 自由能开发了一种半盲 JCD 算法。

在免授权随机接入中，接收数据符号也可用于进一步增强用户设备活动检测，这项任务称为联合活动检测、信道估计与数据检测（*JACD*）。文献中已提出多种 JACD 方案。一类算法基于序列扩频数据，即将每个用户设备的数据符号乘以唯一的扩频签名，例如 [31]–[33]。这些通常非正交的唯一签名会在时频域扩展传输符号，使多个用户设备能够共享相同资源。然而，扩频数据会降低频谱效率，并限制每个用户设备可达到的数据速率。因此，以下我们将重点讨论不依赖扩频数据序列的 JACD 方案。针对集中式大规模 MIMO 系统，已有多种基于双线性广义近似消息传递（BiG-AMP）的非扩频 JACD 方案。这些方案包括将 BiG-AMP 与环形置信传播（BP）相结合的方法 [34], 、引入相关信道的向量节点的方法 [35], , 以及与信道译码器迭代交换信息的方法 [36]。在 [37], 中，研究人员采用低相干导频序列，将双线性高斯置信传播（BiGaBP）应用于 GF-CF-MaMIMO 网络中的 JACD 问题。在该方法中，伯努利-高斯（BG）分布信道的置信度和服从类别分布的数据符号均以高斯分布近似，并据此推导出相应的消息传递算法。 [38] 中的作者开发了两种 JACD 算法，分别基于前向-后向分裂和深度展开进行超参数优化。所提出的集中式算法采用拉普拉斯分布对信道和数据的稀疏性建模。

本文针对 GF-CF-MaMIMO 网络提出了两种新颖的分布式联合活动检测、信道估计与数据检测算法。我们将 JACD 任务表述为最大后验概率（MAP）估计与检测问题，并采用期望传播（EP）这一贝叶斯学习技术进行近似求解。该技术利用指数族分布，迭代计算因子分解概率分布的易处理近似 [39], [40]。为此，我们对用户活动、信道和数据信号的后验概率（APP）分布进行因子分解，以便基于 EP 在因子图上进行易处理的联合推断。这种因子图方法使所提算法能够自然地实现分布式部署，适用于具备基带处理能力的接入点所构成的去中心化且可扩展蜂窝式无蜂窝大规模多输入多输出系统。本研究的部分内容已发表于 [1]。与 [1] 相比，本文的主要创新在于在 EP 框架中采用伯努利-高斯分布，以更准确地刻画有效用户设备信道的稀疏性，从而显著提升 JACD 性能。相比之下， [1] 中的方法对有效用户设备信道采用高斯近似。为实现对伯努利-高斯随机变量的 EP 推断，我们首先推导伯努利-高斯分布的指数族表示，随后应用 EP 消息传递来构建所提算法。最后，我们通过蒙特卡罗仿真进行全面的性能分析，并将所提算法与最优线性算法和最先进的基于 EP 的算法进行比较。本文的贡献总结如下：

- 我们将JACD问题表述为最大后验估计与检测问题，并提出一种因子图，以支持基于EP的推断，求得近似的APP分布，包括UE活动、信道和数据符号的分布。所提出的表述自然地将任务划分给接入点和中央处理单元（CPU），由此得到一种分布式算法，使CPU的计算负载随数据信号数量线性增长，同时支持可扩展性，并便于对前传交换的信息进行结构化、高效的设计。
- 我们给出了BG分布的指数族表示，从而能够以简单的闭式形式对BG分布进行乘除运算，并将其无缝集成到EP框架中。与高斯近似相比，BG模型能够更有效地表示稀疏随机变量，例如活动状态未知的用户设备与接入点之间的信道。
- 我们在采用高斯和BG信道模型的因子图上应用EP，开发了两种分布式联合活动检测、信道估计与数据检测算法，分别得到所提出的JACD-EP和JACD-EP-BG算法。这两种算法均具有多项式计算复杂度，可在GF-CF-MaMIMO系统中实现可扩展的信号处理。
- 我们对所提出算法在不同导频序列长度下的性能进行了扩展数值分析，以建模不同程度的导频污染。作为基准，我们采用集中式线性最小均方误差处理，包括理想先验辅助变体，并展示了所提出的分布式算法具有更优的性能，尤其是在导频污染严重时。由于集中式最小均方误差处理为分布式线性MMSE方案的性能提供了上界，因此未纳入分布式线性MMSE基准。结果表明，线性最小均方误差处理不足以有效抑制导频污染，凸显了采用非线性估计与检测方案的必要性。

本文其余部分的组织结构如下。在第II节和第III节中，我们分别介绍GF-CF-MaMIMO系统模型并构建推断问题。在第IV节中，我们推导BG分布的指数族表示。随后，在第五节中，我们提出JACD-EP和JACD-EP-BG算法。在第VI节中，通过蒙特卡罗仿真评估所提算法的性能。最后，在第VII节中给出结论。

符号说明：小写字母、粗体小写字母和粗体大写字母（例如 x、$\mathbf{x}$、$\mathbf{X}$）分别表示标量、向量和矩阵。$\mathbf{I}_N$ 表示 N维单位矩阵。diag{·}表示对角矩阵，其主对角线元素由方括号内的元素给出。 $\delta(\cdot)$表示狄拉克δ函数。若下标中的条件成立，指示函数 $\mathbf{1}(\cdot)$ 的值为 1，否则为 0。$(\cdot)^{\mathsf{T}}$ 和$(\cdot)^{\mathsf{H}}$ 分别表示转置和共轭转置（厄米）运算。矩阵 $\mathbf{X}$ 的迹记作 $\mathrm{tr}\{\mathbf{X}\}$。 $|\mathcal{S}|$ 表示集合$\mathcal{S}$的基数。 $E\{\cdot\}$ 表示期望算子。 $\mathcal{CN}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$ $=$ $|\pi \quad|^{-1}\ ^{-(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathsf{H}}\ \ ^{-1}\ \ -\boldsymbol{\mu}}$ $\mathbf{C}$

e $\mathbf{C}$ ($\mathbf{x}$) 表示均值为 $\boldsymbol{\mu}$、协方差矩阵为 $\mathbf{C}$ 的正规复高斯随机向量 $\mathbf{x}$ 的概率密度函数（PDF）。 $\pi(x)$表示类别随机变量 x的概率质量函数（PMF）。记号 $x \sim p$表示随机变量 x 服从分布 p。在因子图中，从因子节点 Ψ_α 发送到变量节点 $\mathbf{x}_\beta$ 的消息记作$m_{\Psi_\alpha;\mathbf{x}_\beta}$ ，由指数族分布$p_{\Psi_\alpha;\mathbf{x}_\beta}(\mathbf{x}_\beta)$的参数构成。注意，我们对参数也采用相同的下标，例如，

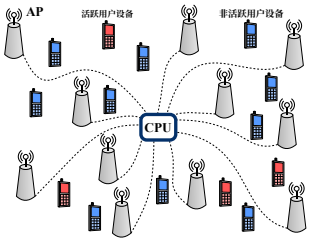


图 1. 具有地理分布式接入点且呈现不同活跃状态的用户设备的 GF-CF-MaMIMO 网络。

$p_{\Psi_\alpha;\mathbf{x}_\beta}(\mathbf{x}_\beta) = \mathcal{CN}\big(\mathbf{x}_\beta|\boldsymbol{\mu}_{\Psi_\alpha;\mathbf{x}_\beta}, \mathbf{C}_{\Psi_\alpha;\mathbf{x}_\beta}\big)$ 表示均值为$\boldsymbol{\mu}_{\Psi_\alpha;\mathbf{x}_\beta}$、协方差矩阵为 $\mathbf{C}_{\Psi_\alpha;\mathbf{x}_\beta}$的分布；而对于高斯或类别随机变量 $\mathbf{x}_\beta$，分别有 $p_{\Psi_\alpha;\mathbf{x}_\beta}(\mathbf{x}_\beta) = \pi_{\Psi_\alpha;\mathbf{x}_\beta}(\mathbf{x}_\beta)$，其概率值为 $\pi_{\Psi_\alpha;\mathbf{x}_\beta}(\mathbf{x}_\beta)$。变量到因子的消息$m_{\mathbf{x}_\beta;\Psi_\alpha}$也采用类似记号。

II. 系统模型

我们考虑 GF-CF-MaMIMO 网络的上行链路，该网络由 L个地理分布式接入点组成，每个接入点配备 N 根天线，为 K 个同步单天线用户设备提供服务，如图 1 所示。所有接入点均通过前传链路连接至中央处理器。由于网络具有突发流量特性，K 个用户设备中只有一部分处于活跃状态并同时传输数据。令$\mathbf{Y}_l = [\mathbf{y}_{l,1} \cdots \mathbf{y}_{l,T}] \in \mathbb{C}^{N\times T}$表示接入点 l 在包含 T次信道使用的相干块中接收到的信号。该信号可表示为

$$\mathbf{Y}_l = \mathbf{H}_l\mathbf{U}\mathbf{X} + \mathbf{N}_l = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{h}_{l,k}u_k\mathbf{x}_k^{\mathsf{T}} + \mathbf{N}_l, \tag{1}$$

其中，$\mathbf{H}_l = [\mathbf{h}_{l,1} \cdots \mathbf{h}_{l,K}] \in \mathbb{C}^{N\times K}$表示接入点 l的信道矩阵，$\mathbf{h}_{l,k} \in \mathbb{C}^{N\times 1}$表示接入点 l与用户设备 k之间的信道。对角活动矩阵 $\mathbf{U} = \mathrm{diag}\{u_1, \ldots, u_K\} \in \{0,1\}^{K\times K}$包含二元活动指示变量：若用户设备 k 处于活动状态，则为 $u_k = 1$；否则为 $u_k = 0$。$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_K]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{C}^{K\times T}$为发射符号矩阵，其中 $\mathbf{x}_k \in \mathbb{C}^{T\times 1}$表示用户设备 k的发射序列，$\mathbf{N}_l \in \mathbb{C}^{N\times T}$为由独立同分布（i.i.d.）加性白高斯噪声（AWGN）元素构成的矩阵 $n \sim \mathcal{CN}(n|0,\sigma_n^2)$。在信道相干区间内，信道和用户活动指示变量保持不变。我们假设信道经历块瑞利衰落，即 $\mathbf{h}_{l,k} \sim p_{\mathbf{h}_{l,k}}(\mathbf{h}_{l,k}) = \mathcal{CN}(\mathbf{h}_{l,k}|\mathbf{0}_N, \boldsymbol{\Xi}_{l,k})$，其中 $\boldsymbol{\Xi}_{l,k} \in \mathbb{C}^{N\times N}$为其空间相关矩阵，$\xi_{l,k} = \frac{1}{N}\mathrm{tr}\{\boldsymbol{\Xi}_{l,k}\}$为相应的大尺度衰落系数。活动指示变量 u_k 服从伯努利分布，$u_k \sim p_u(u_k) = (1-\lambda)\mathbb{1}_{u_k=0} + \lambda\mathbb{1}_{u_k=1}$，其中 λ 表示用户活动概率。发射符号矩阵由导频部分 $\mathbf{X}^p \in \mathbb{C}^{K\times T_p}$和数据部分 $\mathbf{X}^d \in \mathcal{X}^{K\times T_d}$构成，分别包含已知导频符号 x_{kt}^p和数据信号 x_{kt}^d，使得 $\mathbf{X} = [\mathbf{X}^p\,\mathbf{X}^d]$且 $T_p + T_d = T$。发射符号属于基数为 $M = |\mathcal{X}|$ 的星座图 $\mathcal{X}$，该星座图不包含零符号，即 $0 \notin \mathcal{X}$。所有用户设备均以相同的平均发射功率 $\sigma_x^2 = E\{|x_{kt}|^2\}$进行传输。接收矩阵也可类似地分解，即 $\mathbf{Y}_l = [\mathbf{Y}_l^p\ \mathbf{Y}_l^d]$，其中接收导频为 $\mathbf{Y}_l^p \in \mathbb{C}^{N\times T_p}$，接收数据为 $\mathbf{Y}_l^d \in \mathbb{C}^{N\times T_d}$。最后，我们假设 $T_p < K$，因为用户设备数量可能非常庞大，通常难以为用户设备分配正交导频序列。这不可避免地会导致所谓的导频污染效应。

III. 问题表述

导频序列的非正交性会降低用户活动检测和信道估计的性能。利用检测到的数据信号来改进活动检测和信道估计，可以减轻导频污染的不利影响；反过来，这又能进一步优化检测到的数据信号，从而形成迭代式 JACD 方法。首先，我们在全局模型中汇总来自所有接入点的接收信号

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{U}\mathbf{X} + \mathbf{N}, \tag{2}$$

其中，对于$\mathbf{A} \equiv \{\mathbf{Y}, \mathbf{H}, \mathbf{N}\}$，我们定义$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1^{\mathsf{T}} \cdots \mathbf{A}_L^{\mathsf{T}}]^{\mathsf{T}}$。对于 JACD，接收机联合估计用户活动、信道和数据矩阵 $\mathbf{U}$、$\mathbf{H}$和$\mathbf{X}^d$。最大后验估计器表示为

$$(\hat{\mathbf{U}}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{X}}^d) = \underset{\mathbf{U},\mathbf{H},\mathbf{X}^d}{\arg\max}\ p(\mathbf{U}, \mathbf{H}, \mathbf{X}^d|\mathbf{Y}, \mathbf{X}^p), \tag{3}$$

其中，APP分布 $p(\mathbf{U}, \mathbf{H}, \mathbf{X}^d|\mathbf{Y}, \mathbf{X}^p)$ 可根据贝叶斯法则分解为

$$p(\mathbf{U}, \mathbf{H}, \mathbf{X}^d|\mathbf{Y}, \mathbf{X}^p) \propto p(\mathbf{Y}|\mathbf{U}, \mathbf{H}, \mathbf{X}) \cdot p(\mathbf{U}) \cdot p(\mathbf{H}) \cdot p(\mathbf{X}). \tag{4}$$

由于涉及变量的维度很高，直接进行式 (3) 中的最大后验推断在计算上难以实现。因此，在第五节中，我们提出两种低复杂度的 JACD 近似贝叶斯学习方法。由于这些方法依赖于期望传播和伯努利-高斯分布，下一节将回顾指数族的关键性质，并给出伯努利-高斯分布的指数族表示。

IV. 指数族形式的伯努利–高斯分布

本节推导伯努利-高斯分布的指数族表示。为此，我们首先回顾指数族分布的一般形式，然后说明伯努利-高斯分布可以表示为指数族形式。

A. 指数族

若概率分布可表示为 [41]，则称其属于指数族

$$p(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{\eta}^{\mathsf{H}}\mathbf{u}(\mathbf{x}) - A(\boldsymbol{\eta})}, \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{\eta}$ 是自然参数向量，$\mathbf{u}(\mathbf{x})$是充分统计量向量，$A(\boldsymbol{\eta})$是对数配分函数。指数族分布具有一些便利的性质，例如，它们可以方便地对概率分布进行乘除运算，因此在 EP框架中颇具吸引力。伯努利分布和高斯分布是指数族中两个重要的成员，下面将对它们进行介绍。

设 $x \in \{0,1\}$ 为伯努利分布随机变量，其以概率 λ 取值为1，以概率$1-\lambda$取值为0。相应的概率质量函数为

$$p_{\mathrm{B}}(x) = (1-\lambda)^{\mathbb{1}_{x=0}} \cdot \lambda^{1-\mathbb{1}_{x=0}} = \mathrm{e}^{\eta_{\mathrm{B}}u_{\mathrm{B}}(x) - A_{\mathrm{B}}(\eta_{\mathrm{B}})}, \tag{6}$$

其自然参数为 $\eta_{\mathrm{B}} = \log\frac{1-\lambda}{\lambda}$，充分统计量为 $u_{\mathrm{B}}(x) = \mathbb{1}_{x=0}$，对数配分函数为 $A_{\mathrm{B}}(\eta_{\mathrm{B}}) = -\log\lambda = \log(1+\mathrm{e}^{\eta_{\mathrm{B}}})$。

均值为 $\boldsymbol{\mu}$、协方差矩阵为 $\mathbf{C}$ 的适当多元复高斯分布的指数族表示，其概率密度函数为

$$p_{\mathrm{G}}(\mathbf{x}) = \mathcal{CN}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}}^{\mathsf{H}}\mathbf{u}_{\mathrm{G}}(\mathbf{x}) - A_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}})}, \tag{7}$$

其自然参数为 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}$、$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}$，相应的自然参数向量为 $\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}} = \left[\boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{T}}, \gamma^{\mathsf{H}}, -\mathrm{vec}\{\boldsymbol{\Lambda}\}^{\mathsf{T}}\right]^{\mathsf{T}}$，充分统计量为 $\mathbf{u}_{\mathrm{G}}(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{x}^{\mathsf{T}}, \mathbf{x}^{\mathsf{H}}, \mathrm{vec}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\}^{\mathsf{T}}\right]^{\mathsf{T}}$，对数配分函数为 $A_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}}) = \boldsymbol{\gamma}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\gamma} - \log\left|\pi^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\right|$。

B. 伯努利-高斯分布

伯努利-高斯随机变量描述了两个互斥事件。第一个事件以概率 λ发生，并产生一个均值为 $\boldsymbol{\mu}$、协方差矩阵为$\mathbf{C}$的高斯随机向量。在互补事件中，随机向量为零，该事件发生的概率为$1-\lambda$。我们将概率 λ称为活动概率，将零点处的概率质量 $1-\lambda$ 称为非活动概率。按照式(6)中伯努利分布的处理方式引入伯努利指示变量后，BG模型可表示为指数族形式，如下述命题所示。

命题1. 活动概率为 λ、由均值 $\boldsymbol{\mu}$ 和协方差矩阵$\mathbf{C}$ 表征的适当复高斯事件所对应的*BG*分布的指数族表示为

$$p_{\mathrm{BG}}(\mathbf{x}) = \mathcal{BG}(\mathbf{x}|\lambda, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG}}^{\mathsf{H}}\mathbf{u}_{\mathrm{BG}}(\mathbf{x}) - A_{\mathrm{BG}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG}})}, \quad (8)$$

其自然参数向量为 $\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG}} = \left[\kappa, \boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}}^{\mathsf{T}}\right]^{\mathsf{T}}$，充分统计量为$\mathbf{u}_{\mathrm{BG}}(\mathbf{x}) = \left[\mathbb{1}_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}, \mathbf{u}_{\mathrm{G}}(\mathbf{x})^{\mathsf{T}}\right]^{\mathsf{T}}$，对数配分函数为 $A_{\mathrm{BG}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG}}) = \left(A_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}}) + \kappa\right)$ $\kappa = \frac{1-\lambda}{\lambda} + \log\mathrm{e}$，其中$A_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}})$中$\log(\cdot)$。

证明。 BG混合模型可以用伯努利指示变量表示为

$$p_{\mathrm{BG}}(\mathbf{x}) = (1-\lambda)^{\mathbb{1}_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}} \cdot \left(\lambda \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}}^{\mathsf{H}}\mathbf{u}_{\mathrm{G}}(\mathbf{x}) - A_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}})}\right)^{1-\mathbb{1}_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}}.$$

将所有项整理为自然参数和充分统计量向量，可得

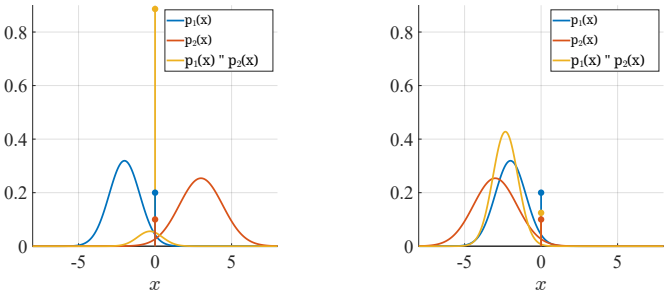
$$\begin{aligned} p_{\mathrm{BG}}(\mathbf{x}) &= \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^{\mathbb{1}_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}} \cdot \mathrm{e}^{A_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}})\mathbb{1}_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}} \cdot \mathrm{e}^{\log\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}}^{\mathsf{H}}\mathbf{u}_{\mathrm{G}}(\mathbf{x}) - A_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}})} \\ &= \mathrm{e}^{\kappa\cdot\mathbb{1}_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} + \boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}}^{\mathsf{H}}\mathbf{u}_{\mathrm{G}}(\mathbf{x}) + \log\lambda - A_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}})}, \end{aligned}$$

这就证明了上述结论，其中 $\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG}}$、$\mathbf{u}_{\mathrm{BG}}(\mathbf{x})$ 和 $A_{\mathrm{BG}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG}})$ 已在上文定义。 □

我们注意到，BG模型的指数族表示引入了超出高斯分布相关参数之外的一个额外自然参数和充分统计量，它们与非活动事件相关。概率分布 $\mathcal{BG}(\mathbf{x}|\lambda, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$ 在 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 时返回非活动概率$1-\lambda$，而对于 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$，则返回由活动概率 λ 缩放的高斯事件对应的 PDF 值。

指数族表示的主要优势在于，通过分别对相应分布的自然参数进行简单的加法或减法，可以直接计算其归一化乘积或商。例如，由自然参数 $(\kappa_1, \boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\Lambda}_1)$ 和 $(\kappa_2, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\Lambda}_2)$ 表征的两个 BG模型的乘积，重

分别得到另一个具有自然参数（$\kappa_1 + \kappa_2$，$\boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\Lambda}_1 + \boldsymbol{\Lambda}_2$）的BG模型。为进一步说明，下面我们给出原始参数空间中的结果，即活动概率 λ、均值 $\boldsymbol{\mu}$和协方差矩阵$\mathbf{C}$，并明确写出归一化常数。伯努利-高斯模型的商也可以推导出类似结果，但为简洁起见，此处省略。



(a) $\mu_1 = -2, \mu_2 = 3$。 (b) $\mu_1 = -2, \mu_2 = -3$。

图2. 含有 $\lambda_1 = 0.8$ 和 $\lambda_2 = 0.9$的伯努利-高斯乘积示例。

推论1（伯努利-高斯乘积引理）。 两个伯努利-高斯模型的乘积会得到一个新的未归一化伯努利-高斯模型，

$$\begin{aligned} &\mathcal{BG}(\mathbf{x}|\lambda_1, \boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{C}_1) \cdot \mathcal{BG}(\mathbf{x}|\lambda_2, \boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{C}_2) \\ &\quad = \mathcal{BG}(\mathbf{x}|\lambda, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}) \cdot \left[\lambda_1\lambda_2\mathcal{CN}(\mathbf{0}|\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)\right. \quad (9) \\ &\qquad \left. + (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\right] \end{aligned}$$

with

$$\lambda = \frac{\lambda_1\lambda_2\mathcal{CN}(\mathbf{0}|\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)}{\lambda_1\lambda_2\mathcal{CN}(\mathbf{0}|\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2) + (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}, \quad (10)$$

$$\mathbf{C} = \left(\mathbf{C}_1^{-1} + \mathbf{C}_2^{-1}\right)^{-1}, \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{C}\left(\mathbf{C}_1^{-1}\boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{C}_2^{-1}\boldsymbol{\mu}_2\right). \quad (12)$$

证明。证明见附录A。 □

高斯部分的均值（12）和协方差矩阵（11）与高斯乘积引理[1]中的相同。活动概率（10）揭示了显式考虑伯努利-高斯随机变量所表征的两个事件时的情况。非活动事件发生的概率与两个因子的非活动概率之积成正比，即（$1-\lambda_1$）（$1-\lambda_2$）。活动概率（10）与两个因子的活动概率之积成正比，即 $\lambda_1\lambda_2$，并乘以一个衡量两个高斯密度匹配程度的修正因子，即 $\mathcal{CN}$（$\mathbf{0}|\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2$，$\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2$）。修正因子就是高斯乘积引理中出现的归一化常数。注意，当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$时，伯努利-高斯乘积引理就简化为高斯乘积引理。

为便于说明，图2展示了两个伯努利-高斯乘积的示例。为简化起见，这里将随机变量建模为实值变量。在图2a中可以观察到，所得乘积分布中对应活动概率的高斯分量面积相当小，尽管两个原始伯努利-高斯分布的活动概率分别为 $\lambda_1 = 0.8$和 $\lambda_2 = 0.9$，因为相应的高斯分布几乎没有重叠。图2b则呈现出相反的情况。

此外，值得一提的是，利用所提出的指数族表示，计算伯努利-高斯分布与高斯分布的乘积也很简单，只需将对应高斯分量的自然参数相加即可。假设一个自然参数为（κ_1，$\boldsymbol{\gamma}_1$，$\boldsymbol{\Lambda}_1$）的伯努利-高斯分布与一个参数为（$\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\Lambda}_2$）的高斯分布相乘，所得结果为自然参数为（κ_1，$\boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\Lambda}_1 + \boldsymbol{\Lambda}_2$）的伯努利-高斯分布。对伯努利-高斯分布进行如下建模，也会得到相同的结果：

[1]高斯乘积引理 [42], [43]: $\mathcal{CN}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{C}$ $_1$ $\mathcal{CN}$ $|\boldsymbol{\mu}$ $\cdot\mathcal{CN}$ $\mathbf{0}|\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2$ $_1 +$ $_2$ $= ($ $_1^{-1} +$ $_2^{-1})^{-1}) \cdot \mathcal{CN}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}_2,$ $\mathbf{C})$ $(\mathbf{x},$ $\mathbf{C})$ $(,$ $\mathbf{CC})$, 其中 $\mathbf{C}$ $\mathbf{CC}$且 $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{C}(\mathbf{C}_1^{-1}\boldsymbol{\mu}_1 + \mathbf{C}_2^{-1}\boldsymbol{\mu}_2)$.

零点处加权狄拉克 δ 函数与加权高斯分布之和，即 $(1-\lambda_1)\delta(\mathbf{x}) + \lambda_1\mathcal{CN}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{C}_1)$，然后再将该和与高斯分布$\mathcal{CN}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{C}_2)$相乘，如 [44]中所述。为简洁起见，省略了两种方法等价性的证明。

最后，我们指出，针对 BG 指数族表示所提出的方法可以轻松扩展到更广泛的概率分布类别，即在任意位置具有任意数量离散点质量的概率分布。此外，在我们的工作中由连续高斯分布建模的活跃部分，也可以替换为具有指数族表示的另一种连续分布。我们的方法能够建模的分布与所谓的尖峰与板先验 [45] 有关，其中离散概率质量刻画尖峰，而连续概率分布则对板进行建模。这种通用性使所提出的方法适用于信号处理中的广泛问题。

V. 基于 EP 的 JACD 算法

在本节中，我们将介绍一种通过引入EP(近似来推导JACD算法。我们的算法是基于因式分解 $p(\mathbf{U}, \mathbf{H}, \mathbf{X}^d|\mathbf{Y}, \mathbf{X}^p)$ 的一种便捷因式分解推导而来，该因式分解在第V-A节中构成了一个因子图。随后，如第五节-B所述，我们为各个因子分配参数化的指数族表示，以近似 APP分布。对这些近似指数族模型进行不同选择，即可得到两种所提出的算法。最后，按照第V-D节中的详细说明，将 EP 消息传递规则应用于该因子图。

A. 因子图表示

类似于 [28], , 我们引入辅助变量 $\mathbf{g}_{l,\,k} := \mathbf{h}_{l,\,k} u_k$、以及 $\mathbf{z}_{l,\,kt} := \mathbf{g}_{l,\,k} x_{kt}$ ，以解耦各用户设备之间的用户活动、信道和数据。我们分别将所有辅助变量收集到矩阵 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{Z}$ 中。用户活动、信道、数据信号及辅助变量的联合 MAP 估计器最大化如下所示的APP分布

$$
\begin{aligned}
&p(\mathbf{U}, \mathbf{H}, \mathbf{X}^d, \mathbf{G}, \mathbf{Z}|\mathbf{Y}, \mathbf{X}^p) \\
&\propto \prod_{l=1}^{L}\prod_{k=1}^{K}\prod_{t=1}^{T} \Big[p(\mathbf{y}_{l,t}|\mathbf{z}_{l,1t},\ldots,\mathbf{z}_{l,Kt}) \cdot p(\mathbf{z}_{l,kt}|\mathbf{g}_{l,k}, x_{kt}) \\
&\quad \cdot p(\mathbf{g}_{l,k}|\mathbf{h}_{l,k}, u_k) \cdot \tilde{p}_{u_k}(u_k) \cdot \tilde{p}_{h_{l,k}}(\mathbf{h}_{l,k}) \cdot p_x(x_{kt}) \Big],
\end{aligned} \tag{13}
$$

其中，因式分解源于接入点和用户设备之间信道向量的独立性、用户设备之间用户活动的独立性，以及用户设备和时间索引之间数据信号的独立性。术语 $\tilde{p}_{u_k}(u_k)$ 和 $\tilde{p}_{h_{l,\,k}}(\mathbf{h}_{l,\,k})$ 表示关于用户的精化先验信息
活动 u_k 和信道$\mathbf{h}_{l,k}$，分别可通过基于导频的初始化算法获得。一种可能的初始化算法是文献 [1] 中提出的基于期望传播的联合活动检测与信道估计（JAC-EP）算法。我们将由此得到的关于 u_k和$\mathbf{h}_{l,k}$的先验信息分别表示为两个概率 $\tilde{p}_{u_k}(0)$ 和 $\tilde{p}_{u_k}(1)$，并将信道均值向量 $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{h_{l,k}}$ 和协方差矩阵 $\tilde{\mathbf{C}}_{h_{l,k}}$ 分别表示为。式（13）中的概率分布由图 3 所示因子图中的因子节点（矩形）表示，其形式为

$$
\begin{aligned}
\Psi_{y_{l,t}} &:= p(\mathbf{y}_{l,t}|\mathbf{z}_{l,1t},\ldots,\mathbf{z}_{l,Kt}) = \mathcal{CN}\Big(\mathbf{y}_{l,t}\Big|\sum_{k=1}^{K}\mathbf{z}_{l,kt}, \sigma_n^2\mathbf{I}_N\Big), \\
\Psi_{z_{l,kt}} &:= p(\mathbf{z}_{l,kt}|\mathbf{g}_{l,k}, x_{kt}) = \delta(\mathbf{z}_{l,kt} - \mathbf{g}_{l,k}x_{kt}), \\
\Psi_{g_{l,\,k}} &:= p(\mathbf{g}_{l,\,k}|\mathbf{h}_{l,\,k},\ u_k) = \delta(\mathbf{g}_{l,\,k} - \mathbf{h}_{l,\,k}u_k),
\end{aligned}
$$

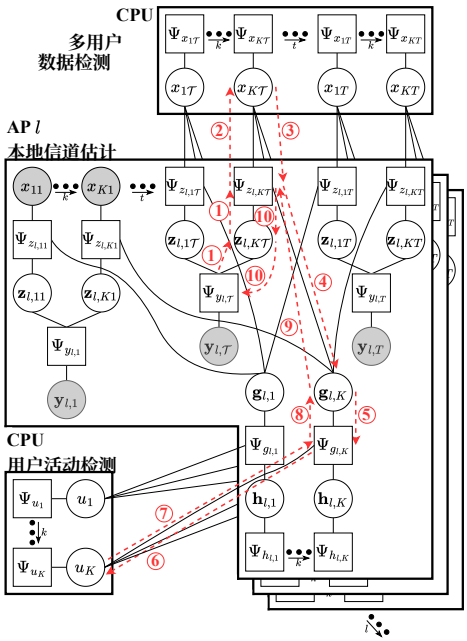


图 3. 带有 $\mathcal{T} := T_p + 1$ 的基于 EP 的 JACD 算法的因子图。带编号的红色虚线箭头表示根据算法 1 所述调度进行的信息流。每个编号对应于算法 1 中的一次消息更新。

$$
\begin{aligned}
\Psi_{u_k} &:= \tilde{p}_{u_k}(u_k) = \tilde{p}_{u_k}(0)\mathbb{1}_{u_k=0} + \tilde{p}_{u_k}(1)\mathbb{1}_{u_k=1}, \\
\Psi_{h_{l,k}} &:= \tilde{p}_{h_{l,k}}(\mathbf{h}_{l,k}) = \mathcal{CN}\big(\mathbf{h}_{l,k}\big|\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{h_{l,k}}, \tilde{\mathbf{C}}_{h_{l,k}}\big), \\
\Psi_{x_{kt}} &:= p_x(x_{kt}) = \begin{cases} \mathbb{1}_{x_{kt}=x_{kt}^p} & \text{for } t \le T_p \\ \frac{1}{M}\mathbb{1}_{x_{kt}\in\mathcal{X}} & \text{for } t > T_p \end{cases}.
\end{aligned}
$$

上述方程中的变量对应于因子图中的变量节点（圆圈）。因子节点和变量节点的组织方式反映了它们在中央处理器和接入点中的实现。如因子图所示，中央处理器汇总来自接入点的信息，以估计用户活动和数据。相比之下，信道在每个接入点本地估计，无需转发至中央处理器。

B. EP近似与前传负载

为将 EP 消息传递规则应用于图 3 中的因子图，我们为每个变量节点指定一个指数族参数化分布表示，以近似相应的 APP分布。变量 x_{kt} 和 u_k 采用类别分布，而变量$\mathbf{z}_{l,\,kt}$ 和 $\mathbf{h}_{l,\,k}$ 则用多元复高斯分布建模。对于所提的两种算法，变量$\mathbf{g}_{l,\,k}$ 的处理方式有所不同。在 JACD-EP算法中，$\mathbf{g}_{l,\,k}$ 服从多元复高斯分布；而在 JACD-EP-BG算法中，$\mathbf{g}_{l,\,k}$ 则采用第IV节介绍的 BG向量建模。这些近似后验分布的表征参数构成沿图传播的消息。

前传负载仅由与 x_{kt} 和 u_k. 相关的消息决定。对于 $t > T_p$，节点 x_{kt} 发出和接收的消息包含 $M-1$ 个概率；由于导频符号是先验已知的，因此不会为 $t \le T_p$ 交换消息。对于 u_k，只需一个实值参数即可描述其分布。因此，每次迭代的总前传负载为 $2LK(T_d(M-1)+1)$ 个实数，其中因子 2 表示中央处理器与接入点之间的双向交换。

C. 初始化与调度

所提算法使用 JAC-EP 算法 [1]得到的活动和信道估计进行初始化。该基于导频的初始化算法提供软用户活动估计 $\tilde{p}_{u_k}(u_k)$ 和信道分布$\tilde{p}_{h_{l,k}}(\mathbf{h}_{l,k})$；这些分布也可等价地由其充分统计量的期望（$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{h_{l,k}}, \mathbf{C}_{h_{l,k}}$）或其自然参数（$\tilde{\gamma}_{h_{l,k}}, \boldsymbol{\Lambda}_{h_{l,k}}$）表征，并作为 JACD-EP 和 JACD-EP-BG 算法的先验。交换消息的初始化方式如下。消息 $m_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{z}_{l,kt}}\ \forall k,l,t$ 的初始均值向量和协方差矩阵根据关于 $\mathbf{z}_{l,kt}$的先验信息确定，该先验信息由 $\tilde{p}_{u_k}(u_k), \tilde{p}_{h_{l,k}}(\mathbf{h}_{l,k})$ 和 $p_x(x_{kt})$,[2]所诱导。

$$\boldsymbol{\mu}_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{z}_{l,kt}}=\begin{cases}\tilde{p}_{u_k}(1)\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{h_{l,k}}\cdot x_{kt}^{p} & \text{for } t\le T_p\\ \mathbf{0} & \text{for } t>T_p\end{cases}, \tag{14}$$

$$\mathbf{C}_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{z}_{l,kt}}=\begin{cases}\tilde{p}_{u_k}(1)\big(\tilde{\mathbf{C}}_{h_{l,k}}+\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{h_{l,k}}\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{h_{l,k}}^{\mathsf{H}}\\ \qquad\cdot\tilde{p}_{u_k}(0)\big)\,|x_{kt}^{p}|^2 & \text{for } t\le T_p\\ \tilde{p}_{u_k}(1)\big(\tilde{\mathbf{C}}_{h_{l,k}}+\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{h_{l,k}}\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{h_{l,k}}^{\mathsf{H}}\big)\sigma_x^2 & \text{for } t>T_p\end{cases}. \tag{15}$$

类似地，消息 $m_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{g}_{l,k}}$ 和 $m_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}\ \forall k$、$l$、$t$的初始化由关于 $\mathbf{g}_{l,k}$的先验信息确定，并取决于针对$\mathbf{g}_{l,k}$采用的不同EP近似。JACD-EP算法中的高斯变量$\mathbf{g}_{l,k}$ 初始化为

$$\boldsymbol{\mu}_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{g}_{l,k}}=\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}=\tilde{p}_{u_k}(1)\cdot\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{h_{l,k}}, \tag{16}$$

$$\mathbf{C}_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{g}_{l,k}}=\mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}=\tilde{p}_{u_k}(1)\big(\tilde{\mathbf{C}}_{h_{l,k}}+\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{h_{l,k}}\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{h_{l,k}}^{\mathsf{H}}\cdot\tilde{p}_{u_k}(0)\big). \tag{17}$$

在JACD-EP-BG算法中，伯努利-高斯变量$\mathbf{g}_{l,k}$ 的初始化由下式给出

$$\lambda_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{g}_{l,k}}=\lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}=\tilde{p}_{u_k}(1), \tag{18}$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{g}_{l,k}}=\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}=\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{h_{l,k}}, \tag{19}$$

$$\mathbf{C}_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{g}_{l,k}}=\mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}=\tilde{\mathbf{C}}_{h_{l,k}}. \tag{20}$$

所有其他消息均使用无信息先验进行初始化，即，涉及类别变量的消息采用均匀分布，涉及高斯变量的消息采用零均值、零精度分布，其中精度矩阵是协方差矩阵的逆。无信息BG分布的活动概率为0.5，且其高斯分量为零均值、零精度。

初始化后，消息按照算法 1中定义的调度方式进行更新，并由图 3中的红色虚线箭头示出。算法 1统一描述了所提出的两种方法：两者采用相同的调度方式，仅消息更新不同。我们用带不同上标的括号标出这两种算法的更新规则，即，$\{\cdot\}^*$ 表示JACD-EP，$\{\cdot\}^\dagger$ 表示JACD-EP-BG。不带括号的消息更新规则适用于两种算法。

D. 消息传递更新规则

本节介绍所提算法中使用的 EP 消息传递规则。JACD-EP 和 JACD-EP-BG 算法的详细推导分别见 [1][3] 的扩展版本和附录B。

[2]通过利用 $E\{u_k\}E\{g_{l,k}\}E\{x_{kt}\}$ 和 $E\{z_{l,kt}\}$、$\mathbf{z}_{l,kt}$、$\mathbf{h}_{l,k}$ 的独立性，我们计算 $\mathbf{z}$ 的充分统计量的期望，例如均值 $\mathbf{z}_{l,kt}$、$\mathbf{h}_{l,k}$。同样的方法也应用于 $g_{l,k}$。[3]https://arxiv.org/abs/2405.09914

算法 1JACD-EP* 和 JACD-EP-BG† 算法

输入： 导频矩阵 $\mathbf{X}^p$、发射功率 σ_x^2、接收信号 $\mathbf{Y}$、噪声方差 σ_n^2、用户活动的先验分布 $\tilde{p}_{u_k}(u_k)$ 和信道 $\tilde{p}_{h_{l,k}}$(**小时**$_{l,k}$)

输出： 估计活动 $\hat{u}_k$、信道 $\mathbf{h}_{l,k}$，以及数据 $\hat{x}_{kt}$。

$\forall k,\ l,\ t$: 初始化 $m_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{z}_{l,kt}}$ (14) (15)。

$\forall k,\ l,\ t$: 初始化 $m_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}$ {(16) (17)}* {(18) - (20)}†.

$\forall k,\ l$: 初始化 $m_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{g}_{l,k}}$ {(16) (17)}* {(18) - (20)}†.

针对 $i=1$ 至 $i_{\max}$ **do**

  $\forall k,\ l,\ t$: 更新 $m_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}}$ (21) (22)。

  $\forall k,\ l,\ t>T_p$: 更新 $m_{\Psi_{z_{l,kt}};x_{kt}}$ (23)。

  $\forall k,\ l,\ t>T_p$: 更新 $m_{x_{kt};\Psi_{z_{l,kt}}}$ (25)。

  $\forall k,\ l,\ t$: 更新 $m_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{g}_{l,k}}$ {(27) (28) 通过 (29) (30)}* {(26) - (28) 通过 (35) - (37)}†。

  $\forall k,\ l$: 更新$m_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}$ {(40) (41)}* {(39) - (41)}†。

  $\forall k,\ l$: 更新 $m_{\Psi_{g_{l,k}};u_k}$ (42)* (44)†。

  $\forall k,\ l$: 更新$m_{u_k;\Psi_{g_{l,k}}}$ (45)。

  $\forall k,\ l,\ t$: 更新 $m_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{g}_{l,k}}$ {(46) (47)}* {(53) - (55)}†。

  $\forall k,\ l,\ t$: 更新 $m_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}$ {(57) (58)}* {(56) - (58)}†.

$\forall k,\ l,\ t$: 更新 $m_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{z}_{l,kt}}$(59) (60)。**返回** $\hat{u}_k$(63) $\forall k$。

返回 $\hat{\mathbf{h}}_{l,k}$ (66) $\forall k,\ l$。

返回 $\hat{x}_{kt}$ (65) $\forall k,\ t>T_p$。

对于伯努利-高斯随机变量，活动概率 λ、均值向量 $\boldsymbol{\mu}$ 和协方差矩阵 $\mathbf{C}$ 可由自然参数 $\kappa=\log\frac{1-\lambda}{\lambda}+\boldsymbol{\mu}^{\mathsf{H}}\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}+\log|\pi\mathbf{C}|$、$\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathbf{C}^{-1}$直接表示。高斯随机变量的参数 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\mathbf{C}$ 与自然参数 $\boldsymbol{\gamma}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 之间也存在相同的关系。下文中，我们将在这两种表示之间自由切换，而不显式说明转换过程；每当计算出（$\lambda_{\Psi_\alpha;\mathbf{X}_\beta}, \boldsymbol{\mu}_{\Psi_\alpha;\mathbf{X}_\beta}, \mathbf{C}_{\Psi_\alpha;\mathbf{X}_\beta}$）时，相应的（$\kappa_{\Psi_\alpha;\mathbf{X}_\beta}, \boldsymbol{\gamma}_{\Psi_\alpha;\mathbf{X}_\beta}, \boldsymbol{\Lambda}_{\Psi_\alpha;\mathbf{X}_\beta}$）也会自动得到，反之亦然。

在第一步中，消息 $m_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}}\ \forall k,\ l,\ t$ 会被更新。这些更新基于观测$\mathbf{y}_{l,t}$计算辅助变量 $\mathbf{z}_{l,kt}$ 的高斯信念。在实际操作中，更新规则使用所有其他用户的当前估计干扰 $\boldsymbol{\mu}_{\Psi_{z_{l,k't};\mathbf{z}_{l,k't}}}$ 执行软干扰消除 $k'\neq k$，并相应地修改协方差矩阵。消息均值和协方差为

$$\boldsymbol{\mu}_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}}=\mathbf{y}_{l,t}-\sum_{k'\neq k}\boldsymbol{\mu}_{\Psi_{z_{l,k't}};\mathbf{z}_{l,k't}}, \tag{21}$$

$$\mathbf{C}_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}}=\sigma_n^2\mathbf{I}_N+\sum_{k'\neq k}\mathbf{C}_{\Psi_{z_{l,k't}};\mathbf{z}_{l,k't}}. \tag{22}$$

这些更新后的信念用于在每个接入点生成局部分类数据符号信念 $m_{\Psi_{z_{l,kt}};x_{kt}}\ \forall k,\ l,\ t>T_p$。消息更新通过评估乘积 $\mathbf{g}_{l,k}x_{kt}$ 与关系式 $\mathbf{z}_{l,kt}=\mathbf{g}_{l,k}x_{kt}$ 的匹配程度推导得到，该关系式通过对高斯似然 $\theta(x_{kt})$ 进行采样获得，[4]

$$\pi_{\Psi_{z_{l,kt}};x_{kt}}(x_{kt})\propto\theta(x_{kt}), \tag{23}$$

[4]注意，$\theta(x_{kt})$提供未归一化概率值，而$\pi_{\Psi_{z_{l,kt}};x_{kt}}(x_{kt})$通过归一化获得。

with

$$\theta(x_{kt}) = \mathcal{CN}\big(\mathbf{0}|\boldsymbol{\mu}_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}} x_{kt}, \\ \mathbf{C}_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}} + \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}|x_{kt}|^2\big). \tag{24}$$

然后，所有本地数据符号置信度在中央处理器处进行合并。消息更新$m_{x_{kt};\,\Psi_{z_{l,\,kt}}}\ \forall k,\ l,\ t > T_p$将来自所有接入点的数据符号$x_{kt}$的分类信念$l' \neq l$进行合并，并将其转发至接入点$l$，

$$\pi_{x_{kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(x_{kt}) \propto \prod_{l' \neq l} \pi_{\Psi_{z_{l',kt}};x_{kt}}(x_{kt}). \tag{25}$$

变量$\mathbf{z}_{l,\,kt}$和x_{kt}的更新后置信度用于更新消息$m_{\Psi_{z_{l,\,kt};\,\mathbf{g}_{l,\,k}}\ \forall k,\ l,\ t}$，从而得到辅助变量$\mathbf{g}_{l,\,k}$的置信度。期望传播方法首先在因子节点$\Psi_{z_{l,\,kt}}$处生成$\mathbf{g}_{l,\,k}$的局部估计，然后移除消息$m_{\mathbf{g}_{l,\,k};\,\Psi_{z_{l,\,kt}}}$所引入的信息，

$$\kappa_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{g}_{l,k}} = \hat{\kappa}_{\mathbf{g}_{l,kt}} - \kappa_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{g}_{l,k}} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{g}_{l,kt}} - \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}, \tag{27}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{g}_{l,k}} = \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathbf{g}_{l,kt}} - \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}. \tag{28}$$

注意，式 (26) 仅针对 JACD-EP-BG算法计算，而式 (27) 和 (28) 则针对两种算法进行计算。由于对$\mathbf{g}_{l,\,k}$的建模不同，JACD-EP算法和 JACD-EP-BG算法中，在$\Psi_{z_{l,\,kt}}$处描述$\mathbf{g}_{l,\,k}$局部估计的参数，即$\hat{}\kappa_{\mathbf{g}_{l,\,kt}}$、$\hat{}\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{g}_{l,\,kt}}$和$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{g}_{l,\,kt}}$，其计算方式也不同。对于 JACD-EP算法，我们计算高斯参数

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{g}_{l,kt}} = \frac{1}{Z_{\Psi_{z_{l,kt}}}} \sum_{x_{kt} \in \tilde{\mathcal{X}}} \frac{\phi(x_{kt})}{x_{kt}} \cdot \check{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt}), \tag{29}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{g}_{l,kt}} = \frac{1}{Z_{\Psi_{z_{l,kt}}}} \sum_{x_{kt} \in \tilde{\mathcal{X}}} \frac{\phi(x_{kt})}{|x_{kt}|^2} \cdot \big(\check{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt}) \\ + \check{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt}) \cdot \check{\boldsymbol{\mu}}^{\mathsf{H}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt})\big) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{g}_{l,kt}} \hat{\boldsymbol{\mu}}^{\mathsf{H}}_{\mathbf{g}_{l,kt}}, \tag{30}$$

˜对于 $t \leq T_p$的 $\mathcal{X} = \{x^p_{kt}\}$、对于 $t > T_p$的 $\mathcal{X} = \mathcal{X}$，以及

$$\phi(x_{kt}) = \pi_{x_{kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(x_{kt}) \cdot \theta(x_{kt}), \tag{31}$$

$$\check{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt}) = \boldsymbol{\gamma}_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}} + \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}} \frac{x_{kt}}{|x_{kt}|^2}, \tag{32}$$

$$\check{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt}) = \boldsymbol{\Lambda}_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}} + \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}} |x_{kt}|^{-2}, \tag{33}$$

$$Z_{\Psi_{z_{l,kt}}} = \sum_{x_{kt} \in \tilde{\mathcal{X}}} \phi(x_{kt}). \tag{34}$$

注意，由于导频符号是先验已知的，$\pi_{x_{kt};\,\Psi_{z_{l,\,kt}}}(x^p_{kt}) = 1$的$t \leq T_p$。因此，导频部分的更新可简化为$\hat{}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}_{l,\,kt}} = \check{}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{z}_{l,\,kt}}(x^p_{kt})/x^p_{kt}$以及$\hat{}\mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l,\,kt}} = \check{}\mathbf{C}_{\mathbf{z}_{l,\,kt}}(x^p_{kt})/|x^p_{kt}|^2$。对于JACD-EP-BG算法，我们计算局部BG估计$\mathbf{g}_{l\,k}$的参数如下

$$\hat{\lambda}_{\mathbf{g}_{l,kt}} = \frac{\lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}} \cdot \phi(x^*)}{\lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}} \cdot \phi(x^*) + (1 - \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}) \cdot \theta(0)}, \tag{35}$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{g}_{l,kt}} = \boldsymbol{\gamma}_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}} \frac{|x^*|^2}{x^*} + \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}, \tag{36}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathbf{g}_{l,kt}} = \boldsymbol{\Lambda}_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}} |x^*|^2 + \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}, \tag{37}$$

其中$x^* = x^p_{kt}$对于$t \leq T_p$和

$$x^* = \arg\max_{x_{kt} \in \mathcal{X}} \phi(x_{kt}), \tag{38}$$

对于$t > T_p$。注意，将 (36) 和 (37) 代入 (27) 和 (28) 后，消息更新可简化为

$$\boldsymbol{\gamma}_{\Psi_{z_{l\,kt}\ \ l\,k}} = \ldots;\mathbf{g}\ldots;\mathbf{z}\ldots \\ \gamma_{\Psi_{y_{l\,t}\ \ l\,kt}}|x^*|^2/x^* \qquad \boldsymbol{\Lambda}_{\Psi_{z_{l\,kt}\ \ l\,k}} = \boldsymbol{\Lambda}_{\Psi_{y_{l\,t}\ \ l\,kt}}|x^*|^2$$

以及$\ldots;\mathbf{g}\ldots;\mathbf{z}\ldots$，分别如此。此外，请注意，此处我们偏离了经典期望传播消息传递规则：计算$\mathbf{g}_{l,\,k}$的局部估计时，使用最可能的符号x^*，而不是对所有$x_{kt} \in \mathcal{X}$求平均。这样做是必要的，以避免所得 BG信念的高斯部分接近于零，否则可能导致大量虚警。

接下来，通过结合所有时隙$t \in \{1, \ldots, T\}$中$\mathbf{g}_{l,\,k}$的置信度，更新消息$m_{\mathbf{g}_{l,\,k};\,\Psi_{g_{l,\,k}}\ \forall k,\ l}$，从而生成更新后的置信度参数

$$\kappa_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}} = \sum_{t=1}^{T} \kappa_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{g}_{l,k}}, \tag{39}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}} = \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{\gamma}_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{g}_{l,k}}, \tag{40}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}} = \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{\Lambda}_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{g}_{l,k}}. \tag{41}$$

与消息$m_{\Psi_{z_{l,\,kt};\,\mathbf{g}_{l,\,k}}}$类似，(39)仅针对JACD-EP-BG算法计算，而(40)和(41)则针对两种算法进行评估。

随后，利用更新后的$\mathbf{g}_{l,\,k}$置信度计算每个接入点的局部活动概率$m_{\Psi_{g_{l,\,k};\,u_k}\ \forall k,\ l}$。在此处，两种所提算法的更新方式有所不同。JACD-EP算法的分类信念通过评估$\mathbf{g}_{l,\,k}$的高斯置信度与信道$\mathbf{h}_{l,\,k}$的先验之间的匹配程度来计算，

$$\pi_{\Psi_{g_{l,k}};u_k}(u_k) \propto \vartheta(u_k), \tag{42}$$

with

$$\vartheta(u_k) = \mathcal{CN}\big(\mathbf{0}|\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}} - \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{h_{l,k}} u_k, \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}} + \tilde{\mathbf{C}}_{h_{l,k}} u_k\big). \tag{43}$$

对于JACD-EP-BG算法，活动置信度同时纳入伯努利-高斯变量$\mathbf{g}_{l\,k}$的伯努利分量和高斯分量，

$$\pi_{\Psi_{g_{l,k}};u_k}(u_k) \propto \begin{cases} 1 - \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}} & \text{for } u_k = 0 \\ \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}} \cdot \vartheta(1) & \text{for } u_k = 1 \end{cases}. \tag{44}$$

随后，对于两种所提算法，中央处理器通过将来自所有接入点$l' \neq l$的u_k的分类信念与先验信息相结合，计算消息更新$m_{u_k;\,\Psi_{g_{l,\,k}}\ \forall k,\ l}$，并将其转发至接入点$l$，

$$\pi_{u_k;\Psi_{g_{l,k}}}(u_k) \propto \tilde{p}_{u_k}(u_k) \cdot \prod_{l' \neq l} \pi_{\Psi_{g_{l',k}};u_k}(u_k). \tag{45}$$

随后，通过结合伯努利变量u_k和高斯变量$\mathbf{h}_{l,k}$提供的信息，更新消息$m_{\Psi_{g_{l,}}}$

$$_{k\ \ l\,k};\mathbf{g}\ldots,$$中$\forall k\ l$的$\mathbf{g}_{l,k}$的信念。对于JACD-EP算法，这是通过在因子节点$\Psi_{g_{l,k}}$处计算$\mathbf{g}_{l,k}$的局部高斯估计，然后移除$m_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}$的贡献来实现的，

$$\boldsymbol{\gamma}_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{g}_{l,k}} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{g}_{l,k}} - \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}, \tag{46}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{g}_{l,k}} = \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathbf{g}_{l,k}} - \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}, \tag{47}$$

with

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{g}_{l,k}} = \frac{1}{Z_{\Psi_{g_{l,k}}}} \cdot \pi_{u_k;\Psi_{g_{l,k}}}(1) \cdot \vartheta(1) \cdot \check{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{g}_{l,k}}, \tag{48}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{g}_{l,k}} = \frac{1}{Z_{\Psi_{g_{l,k}}}} \cdot \pi_{u_k;\Psi_{g_{l,k}}}(1) \cdot \vartheta(1) \cdot (\check{\mathbf{C}}_{\mathbf{g}_{l,k}} + \check{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{g}_{l,k}} \check{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{g}_{l,k}}^{\mathsf{H}}) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{g}_{l,k}} \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{g}_{l,k}}^{\mathsf{H}}, \tag{49}$$

and

$$\check{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{g}_{l,k}} = \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}} + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{h_{l,k}}, \tag{50}$$

$$\check{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathbf{g}_{l,k}} = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}} + \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{h_{l,k}}, \tag{51}$$

$$Z_{\Psi_{g_{l,k}}} = \pi_{u_k;\Psi_{g_{l,k}}}(0) \cdot \vartheta(0) + \pi_{u_k;\Psi_{g_{l,k}}}(1) \cdot \vartheta(1). \tag{52}$$

对于JACD-EP-BG算法，$\mathbf{g}_{l,k}$ 的BG信念为

$$\lambda_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{g}_{l,k}} = \pi_{u_k;\Psi_{g_{l,k}}}(1), \tag{53}$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{g}_{l,k}} = \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{h_{l,k}}, \tag{54}$$

$$\mathbf{C}_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{g}_{l,k}} = \tilde{\mathbf{C}}_{h_{l,k}}. \tag{55}$$

接下来，通过将$\mathbf{g}_{l,k}$的先前更新置信度与所有时隙 $t' \neq t$的贡献相结合，更新消息$m_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}$ $\forall k, l, t$，

$$\kappa_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}} = \kappa_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{g}_{l,k}} + \sum_{t' \neq t} \kappa_{\Psi_{z_{l,kt'}};\mathbf{g}_{l,k}}, \tag{56}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}} = \boldsymbol{\gamma}_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{g}_{l,k}} + \sum_{t' \neq t} \boldsymbol{\gamma}_{\Psi_{z_{l,kt'}};\mathbf{g}_{l,k}}, \tag{57}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}} = \boldsymbol{\Lambda}_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{g}_{l,k}} + \sum_{t' \neq t} \boldsymbol{\Lambda}_{\Psi_{z_{l,kt'}};\mathbf{g}_{l,k}}. \tag{58}$$

式（56）中的参数仅针对JACD-EP-BG算法计算，而式（57）和（58）则适用于这两种算法。

最后，更新消息$m_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{z}_{l,kt}}$ $\forall k, l, t$，以形成$\mathbf{z}_{l,kt}$的高斯置信度，该置信度将在下一次迭代中用于干扰消除。因子节点$\Psi_{z_{l,kt}}$ 首先根据$\mathbf{g}_{l,k}$ 和 x_{kt} 的置信度，计算$\mathbf{z}_{l,kt}$ 的局部估计，然后去除$m_{\mathbf{z}_{l,kt};\Psi_{z_{l,kt}}}$的贡献，

$$\boldsymbol{\gamma}_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{z}_{l,kt}} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{z}_{l,kt}} - \boldsymbol{\gamma}_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}}, \tag{59}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{z}_{l,kt}} = \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathbf{z}_{l,kt}} - \boldsymbol{\Lambda}_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}}, \tag{60}$$

以及描述$\mathbf{z}_{l,kt}$局部估计的参数，

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{z}_{l,kt}} = \frac{1}{Z_{l,kt}} \sum_{x_{kt} \in \tilde{\mathcal{X}}} \phi(x_{kt}) \cdot \check{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt}), \tag{61}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_{l,kt}} = \frac{1}{Z_{l,kt}} \sum_{x_{kt} \in \tilde{\mathcal{X}}} \phi(x_{kt}) \cdot \big(\check{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt}) + \check{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt}) \cdot \check{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}^{\mathsf{H}}(x_{kt})\big) - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{z}_{l,kt}} \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}^{\mathsf{H}}, \tag{62}$$

其中 $\tilde{\mathcal{X}} = \{x_{kt}^p\}$ 取 $t \leq T_p$，$\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X}$ 取 $t > T_p$，其他参数如式（31）至（34）所定义。因此，$t \leq T_p$ 的更新可简化为$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{z}_{l,kt}} = \check{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt}^p)$以及$\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_{l,kt}} = \check{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt}^p)$。

此外，为了提高数值稳定性和收敛性，在更新所有因子到变量的消息时，按照 [28], [43] 中的方法使用参数 $\eta \in [0,1]$ 进行阻尼：更新后的参数是其上一轮迭代的取值与因子节点新计算出的取值的凸组合。最后，仅当涉及高斯分量的消息所产生的矩阵参数为正定时，才更新这些消息；否则保留上一轮迭代中的相应参数。

E. 最终估计

根据最终的 EP 消息，用户活动、信道和数据的近似 APP 分布可通过对应变量节点处所有传入消息的乘积得到。随后，最终估计值由这些 APP 的 MAP 解给出，

$$\hat{u}_k = \underset{u_k \in \{0,1\}}{\arg\max}\ \tilde{p}_{u_k}(u_k) \cdot \prod_{l=1}^{L} \pi_{\Psi_{g_{l,k}};u_k}(u_k), \tag{63}$$

$$\hat{\mathbf{h}}_{l,k} = \underset{\mathbf{h}_{l,k} \in \mathbb{C}^N}{\arg\max}\ \tilde{p}_{h_{l,k}}(\mathbf{h}_{l,k}) \cdot p_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{h}_{l,k}}(\mathbf{h}_{l,k}), \tag{64}$$

$$\hat{x}_{kt} = \underset{x_{kt} \in \mathcal{X}}{\arg\max} \prod_{l=1}^{L} \pi_{\Psi_{z_{l,kt}};x_{kt}}(x_{kt}) \qquad \text{对于 } t > T_p. \tag{65}$$

假设用户设备 k 处于激活状态，则 (64) 的解服从高斯分布，从而得到以下闭式估计：

$$\hat{\mathbf{h}}_{l,k} = \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathbf{h}_{l,k}}^{-1} \hat{\gamma}_{\mathbf{h}_{l,k}}, \tag{66}$$

with

$$\hat{\gamma}_{\mathbf{h}_{l,k}} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{h_{l,k}} + \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}, \tag{67}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{\mathbf{h}_{l,k}} = \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_{h_{l,k}} + \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}. \tag{68}$$

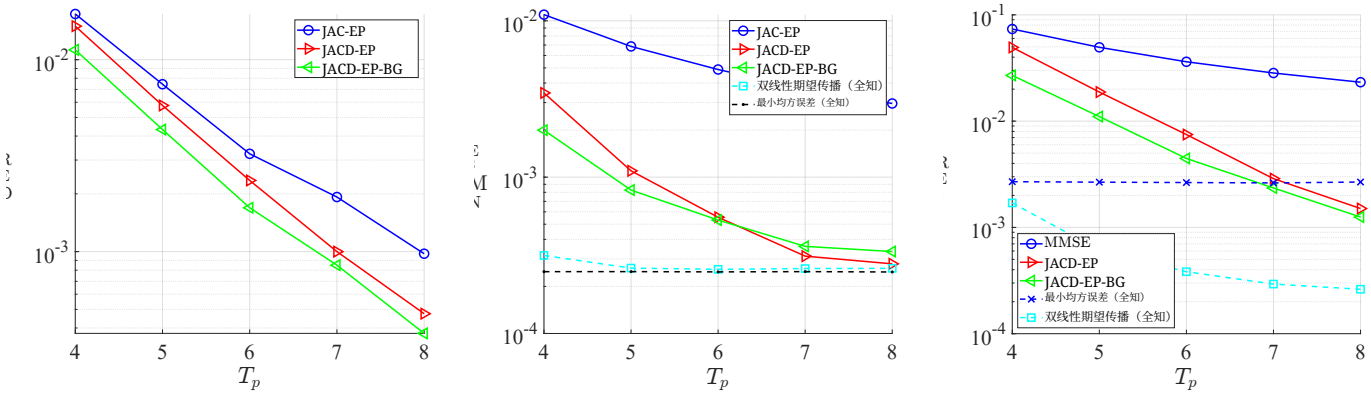
F. 计算复杂度与可扩展性

下面，我们在忽略加法和减法运算开销的情况下，分析所提算法的计算复杂度阶数。在接入点处，两种算法的主要计算负担都来自于计算 (24) 中的高斯似然，这需要求取 $N-$维协方差矩阵的逆和行列式。对于每个星座符号 $x_{kt} \in \mathcal{X}$，该计算都要执行 KT_d 次，其复杂度为 $\mathcal{O}(N^3)$。因此，每个接入点的单次迭代计算复杂度为 $\mathcal{O}(MN^3KT_d)$。从网络可扩展性的角度来看，关键在于接入点处的计算负载随用户设备数量 K 线性增长。通过剪除大尺度衰落系数可忽略不计的用户设备，即不太可能对接收信号产生实质性影响的用户设备，可以大幅减轻这种依赖。此类修改可减少每个接入点所处理的有效用户设备数量，同时不改变算法的核心结构。

两种算法在中央处理器处的复杂度主要由式 (25) 中符号置信度的组合决定，其复杂度阶为 $\mathcal{O}(LMKT_d)$。因此，中央处理器的复杂度随用户设备和接入点的数量线性增长，这可能会限制超大型网络的可扩展性。尽管如此，中央处理器对不同符号的处理完全解耦，因此可以轻松采用并行和/或分布式实现，有效消除这一可扩展性瓶颈。

VI. 数值结果

本节通过大量蒙特卡洛仿真评估所提出的基于 EP 的 JACD 算法的性能。我们考虑一个面积为 $500 \times 500\text{m}^2$ 的正方形网络区域，其中包含 $L = 25$ 个单天线接入点，即 $N = 1$，这些接入点以均匀网格的形式部署在位置 $\{(50+i100,\ 50+j100)\ \text{m} \mid i, j \in \{0,1,2,3,4\}\}$，高度为 10 m。每个接入点的接收机噪声功率设为 $\sigma_n^2 = -96$ dBm。总计 $K = 40$ 个用户设备均匀且独立地随机分布在地面位置，每个设备的活动概率为 $\lambda = 0.3$。一个



(a) 检测错误率。 (b) 归一化均方误差。 (c) 符号错误率。

图4. $L=25$、 $N=1$、 $K=40$、 $\lambda=0.3$和 $T=60$的性能指标随导频序列长度的变化。

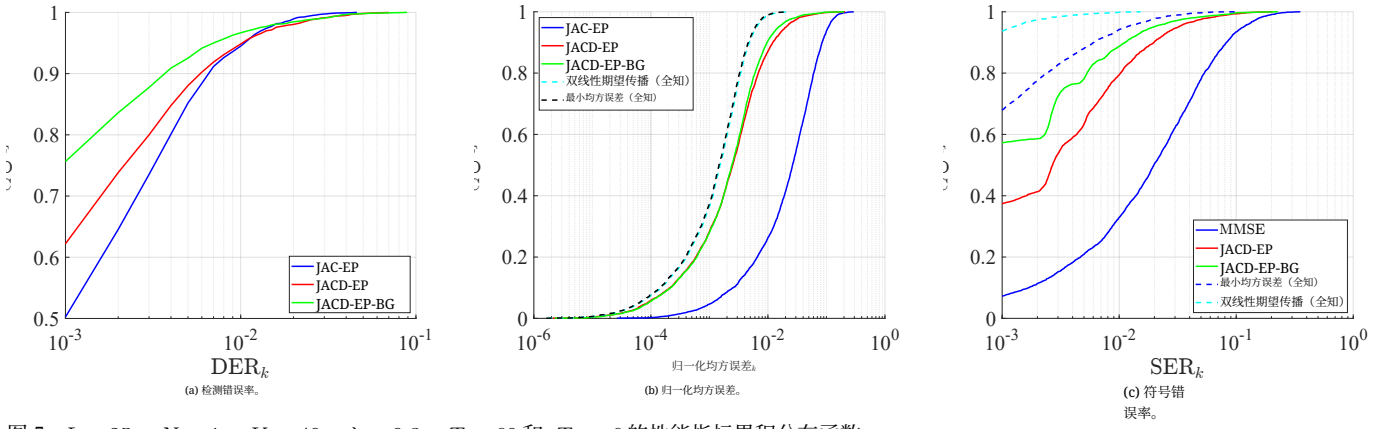
活跃用户设备发送 T_p 个导频符号和 $T_d=T-T_p$ 4-个正交幅度调制（QAM）数据信号，发射功率恒定为 $\sigma_x^2=16\,\mathrm{dBm}$。导频矩阵 $\mathbf{X}^p$ 的 T_p 列选自 $K\times K$ 离散傅里叶变换（DFT）矩阵，使任意两条不同导频序列之间的最大内积最小，从而降低互相干性 [46]。由于仿真中的导频序列长度和用户设备数量有限，可以通过穷举搜索找到最优导频序列。对于更大规模的系统，则需要采用基于优化的导频设计，例如 [37], [46] 中提出的方法。大尺度衰落系数遵循 3GPP 城市微蜂窝模型，该模型包含相关阴影衰落 [47, 第 2.5 节2]。此外，我们假设信道相干时间为 $T=60$，对应于在 5G 窄带物联网中定义的 3.75 kHz 子载波间隔下的 16 ms [48]。这一选择符合实际信道的信道相干时间，尤其适用于低移动性场景；同时，它限制了联合处理的符号数量，从而降低总体计算复杂度和时延。在实践中，只要所有处理的符号都处于同一信道相干区间内，便可根据复杂度和时延要求任意选择联合处理的符号数量。请注意，在仿真中，我们以顺序方式实现了一个本应在分布式环境中并行实现的算法。此外，中央处理器和各接入点内的计算也可以并行化。因此，即使对于更大规模的系统，该算法仍具有可扩展性；不过，为限制仿真复杂度，本文未考虑这类系统。

JACD-EP和JACD-EP-BG算法均使用 [1] 中的JAC-EP算法进行基于导频的初始化。作为基准，我们考虑集中式线性MMSE MIMO检测器 [24]，其采用：(1) 从JAC-EP算法获得的不完美活动状态和信道信息；以及(2) 理想先验辅助的完美活动状态和信道知识。此外，我们还考虑将数据信号视为已知时的理想先验辅助MMSE信道估计器，以及具有完美UE活动状态知识并采用基于导频的MMSE信道估计初始化的双线性EP算法 [29]，将它们作为性能上界。所有迭代式EP算法均采用 $\eta=0.5$ 的阻尼参数，并进行20次迭代。

性能通过用户设备活动检测的检测错误率（DER）、信道估计的归一化均方误差（NMSE）以及数据检测的符号错误率（SER）进行评估。性能指标取所有用户设备的平均值。DER 综合了漏检和虚警，计算方式为 DER := $E\{\sum_k \mathbb{1}_{u_k\neq\hat{u}_k}/K\}$；信道估计值 $\hat{\mathbf{G}}=\hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{U}}$ 的 NMSE 定义为 NMSE := $\frac{E\{||\mathbf{G}-\hat{\mathbf{G}}||_F^2\}}{E\{||\mathbf{G}||_F^2\}}$，其中 $\mathbf{G}=E\left\{\sum_k\sum_t \mathbb{1}_{x_{kt}^d\neq x_{kt}^d}/\,KT_d\,\middle|\,u_k=1\right\}$

$\mathbf{HU}$；SER 的定义为 SER :^( )。请注意，由于活跃用户设备可能被错误地判定为非活跃，相应的数据符号估计值会从星座图 $\mathcal{X}$中随机选取，因此发生漏检时 SER 会更高。上述定义中的期望算子是针对用户设备活动、信道和噪声实现取期望。图4中的结果通过对 10^3 次数据块传输取平均得到，每次传输的用户设备位置和活动状态均相互独立。图4展示了三个性能指标随导频序列长度 T_p变化的情况，该长度反映了导频污染的强度。所提算法在 DER 和 NMSE 方面均优于 JAC-EP 初始化算法。随着 T_p 增大，DER 性能持续提升；而由于相干块长度 $T=60$ 固定，NMSE 性能趋于饱和，并接近 $T_p>6$ 对应的 MMSE 下界。此外，所提基于 EP 的算法在 SER 方面显著优于线性MMSE MIMO检测器。当 $T_p>6$ 时，所提算法达到与具有完美活动和信道知识的理想先知辅助线性MMSE MIMO检测器相同的性能，甚至优于它。与理想先知辅助双线性EP算法相比，仍存在明显的性能差距，这是由于导频污染条件下的用户设备活动检测颇具挑战。因此，我们可以得出结论：系统整体性能受活动检测能力的限制。此外，当 T_p 较小时（对应较强的导频污染），JACD-EP-BG算法优于JACD-EP算法。

接下来，我们通过评估图 5 中检测错误率、归一化均方误差和符号错误率的经验累积分布函数，来考察网络内的服务质量分布。对每个用户设备分别计算这三项指标，即 DER$_k$:= $E\{\mathbb{1}_{u_k\neq\hat{u}_k}\}$、NMSE$_k$:= $\frac{E\{||\mathbf{g}_k-\hat{\mathbf{g}}E\{||\ ||^2\}}{\ _k||^2\}}$ $\mathbf{g}$，其中 $\hat{\mathbf{g}}_k$ 和 $\mathbf{g}_k$ 分别是 $\hat{\mathbf{G}}$ 和 $\mathbf{G}$ 的第 k^{th} 列；以及 SER$_k$: $=E\left\{\sum_t \mathbb{1}_{x_{kt}^d\neq\hat{x}_{kt}^d}/T_d\,|\,u_k=1\right\}$。计算累积分布函数时，考虑了 100 组不同的用户设备位置实现，共得到 $100\cdot K=4000$ 个数据点。对于每组实现，各项指标均在 10^3 次独立的数据块传输中取平均，并计入用户设备活动、小尺度衰落，



(a) 检测错误率。 (b) 归一化均方误差。 (c) 符号错误率。

图 5. $L = 25$、 $N = 1$、 $K = 40$、 $\lambda = 0.3$、 $T = 60$ 和 $T_p = 6$ 的性能指标累积分布函数。

以及噪声实现。使用长度为 $T_p = 6$ 的导频序列。图 5 再次展现了所提算法的优越性能。此外，可以观察到，JACD-EP-BG算法优于 JACD-EP算法，尤其是对于传播条件较好的用户设备。

VII. 结论

本文研究了GF-CF-MaMIMO系统的上行链路，并针对存在PC的大规模机器类通信，解决了JACD问题。我们通过适当分解APP分布，并在相关因子图上应用EP消息传递，构建了一个用于分布式、可扩展JACD的基于EP的框架。在该框架中，我们采用精确的分类概率分布来描述用户活动和数据，并采用高斯或伯努利-高斯概率分布来描述信道，分别得到了JACD-EP和JACD-EP-BG算法。为支持后者，我们构建了伯努利-高斯分布的指数族表示。所提框架在接入点和用户设备数量方面均具有固有的可扩展性。其消息传递结构便于扩展为完全分布式实现，同时每个接入点的计算复杂度随其覆盖区域内的用户设备数量线性增长。数值结果表明，所提算法对PC具有很强的鲁棒性，并且在检测错误率、归一化均方误差和符号错误率方面优于最先进的算法。

附录A
伯努利-高斯乘积引理的证明

利用伯努利-高斯分布的指数族表示，$\mathcal{BG}(\mathbf{x}|\lambda_i,\boldsymbol{\mu}_i,\mathbf{C}_i) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG},i}^{\mathrm{H}}\mathbf{u}_{\mathrm{BG}}(\mathbf{x})-A_{\mathrm{BG}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG},i})}$，$i = \{1,2\}$，两个伯努利-高斯分布的乘积为

$$\begin{aligned}&\mathcal{BG}(\mathbf{x}|\lambda_1,\boldsymbol{\mu}_1,\mathbf{C}_1)\cdot\mathcal{BG}(\mathbf{x}|\lambda_2,\boldsymbol{\mu}_2,\mathbf{C}_2)\\&=\mathrm{e}^{(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG},1}+\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG},2})^{\mathrm{H}}\mathbf{u}_{\mathrm{BG}}(\mathbf{x})-A_{\mathrm{BG}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG},1}+\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG},2})}\\&\quad\cdot\mathrm{e}^{A_{\mathrm{BG}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG},1}+\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG},2})-A_{\mathrm{BG}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG},1})-A_{\mathrm{BG}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG},2})}\\&=\mathcal{BG}(\mathbf{x}|\lambda,\boldsymbol{\mu},\mathbf{C})\cdot\mathrm{e}^{A_{\mathrm{BG}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG},1}+\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG},2})-A_{\mathrm{BG}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG},1})-A_{\mathrm{BG}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG},2})}.\end{aligned}\tag{69}$$

式 (69) 中的第一个因子是一个归一化的 BG分布，其自然参数向量为 $\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG}} = \boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG},1} + \boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG},2}$，或者等价地写作 $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$、 $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ 和 $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}_1 + \boldsymbol{\Lambda}_2$。由$\gamma$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$可立即得出式 (11) 和 (12) 中高斯分量的协方差矩阵和均值。回想一下， $A_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}}) = \log\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-A_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}})}} = \log\mathcal{CN}^{-1}(\mathbf{0}|\boldsymbol{\mu},\mathbf{C})$。现在，利用高斯乘积引理，并记 $\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}} = \boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G},1} + \boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G},2}$，第一个自然参数可改写为

$$\begin{aligned}\kappa&=\kappa_1+\kappa_2\\&=\log\Big(\frac{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2}\cdot\frac{1}{\mathcal{CN}(\mathbf{0}|\boldsymbol{\mu}_1,\mathbf{C}_1)\,\mathcal{CN}(\mathbf{0}|\boldsymbol{\mu}_2,\mathbf{C}_2)}\Big)\\&=\log\Big(\frac{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2}\\&\qquad\cdot\frac{1}{\mathcal{CN}(\mathbf{0}|\boldsymbol{\mu},\mathbf{C})\,\mathcal{CN}(\mathbf{0}|\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_2,\mathbf{C}_1+\mathbf{C}_2)}\Big)\\&=\log\Big(\frac{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2}\cdot\frac{1}{\mathcal{CN}(\mathbf{0}|\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\mu}_2,\mathbf{C}_1+\mathbf{C}_2)}\Big)\\&\quad+A_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}}),\end{aligned}\tag{70}$$

其中，$\mathbf{C}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 分别由 (11) 和 (12) 给出。利用关系 $\lambda = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\kappa-A_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}})}}$ 并结合 (70)，可得 (10)。注意到 $\mathrm{e}^{A_{\mathrm{BG}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{BG}})} = \mathrm{e}^{A_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}})-\log\lambda} = \mathrm{e}^{A_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{G}})}\cdot\frac{1}{\lambda} = \lambda\cdot\mathcal{CN}^{-1}(\mathbf{0}|\boldsymbol{\mu},\mathbf{C})$ 并应用高斯乘积引理和 (10)，可以证明 (69) 中给出的伯努利-高斯乘积的归一化常数等于 (9) 中所述的归一化常数。

附录B
消息传递更新规则的推导

下面简要介绍图上的EP的一般消息传递更新规则。接下来，我们推导第五节D部分所述JACD-EP-BG算法的消息传递规则。为简洁起见，我们重点讨论因子到变量的消息。变量到因子的消息可利用式（71）中的相应一般EP消息传递更新规则轻松推导得出；由于式（71）应用于指数族分布，乘积的计算也很简单。 [1]扩展版本中给出了JACD-EP算法所用消息传递规则的详细推导。

A. 图上的EP

考虑一个包含因子节点 Ψ_α 和变量节点 $\mathbf{x}_\beta$ 的因子图。令 $\mathbf{x}_\alpha$ 表示与 Ψ_α 相连的所有变量组成的向量。令 N_β 表示 $\mathbf{x}_\beta$ 的相邻因子节点索引集合，即 $N_\beta = \{\alpha\,|\mathbf{x}_\beta \subseteq \mathbf{x}_\alpha\}$。变量到因子的消息 $m_{\mathbf{x}_\beta;\Psi_\alpha}$ 通过计算以下分布的参数得到，

$$p_{\mathbf{x}_\beta;\Psi_\alpha}(\mathbf{x}_\beta) \propto \prod_{\alpha'\in N_\beta\setminus\alpha} p_{\Psi_{\alpha'};\mathbf{x}_\beta}(\mathbf{x}_\beta).\tag{71}$$

因子到变量消息 $m_{\Psi_\alpha;\mathbf{x}^\beta}$ 通过确定以下内容的参数来计算

$$p_{\Psi_\alpha;\mathbf{x}_\beta}(\mathbf{x}_\beta) \propto \frac{\text{proj}\left\{q_{\Psi_\alpha;\mathbf{x}_\beta}(\mathbf{x}_\beta)\right\}}{p_{\mathbf{x}_\beta;\Psi_\alpha}(\mathbf{x}_\beta)}, \tag{72}$$

其中，分布 $q_{\Psi_\alpha;\,\mathbf{x}^\beta}(\mathbf{x}^\beta)$ 定义为

$$q_{\Psi_\alpha;\mathbf{x}_\beta}(\mathbf{x}_\beta) = \frac{1}{Z_{\Psi_\alpha}} \int \Psi_\alpha(\mathbf{x}_\alpha) \prod_{\beta' \in N_\alpha} p_{\mathbf{x}_{\beta'};\Psi_\alpha}(\mathbf{x}_{\beta'})\, \mathrm{d}\mathbf{x}_\alpha \backslash \mathbf{x}_\beta. \tag{73}$$

分布 $q_{\Psi_\alpha;\,\mathbf{x}^\beta}(\mathbf{x}^\beta)$ 也称为 变量 $\mathbf{x}^\beta$ 在因子节点 Ψ_α 处的局部信念。其中，Z_{Ψ_α} 是归一化常数，N_α 表示 Ψ_α 的相邻变量节点索引集合，即 $N_\alpha = \{\beta \,|\mathbf{x}_\beta \subseteq \mathbf{x}_\alpha\}$。此外，$\text{proj}\{\cdot\}$ 表示投影到所选指数族上的投影，其定义为

$$\text{proj}\{f(\mathbf{x})\} = \underset{g(\mathbf{x})\in\mathcal{F}}{\arg\min}\, D_{KL}(f(\mathbf{x})||g(\mathbf{x})), \tag{74}$$

其中，$D_{KL}(f(\mathbf{x})||g(\mathbf{x}))$ 是 f 与 g 之间的 Kullback-Leibler（KL）散度，$\mathcal{F}$ 是具有充分统计量 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 的指数族。该最小化通过矩匹配实现，

$$E_{g(\mathbf{x})}\{\mathbf{u}(\mathbf{x})\} = E_{f(\mathbf{x})}\{\mathbf{u}(\mathbf{x})\}. \tag{75}$$

消息传递收敛后，变量 $\mathbf{x}^\beta$ 的近似后验分布 $\hat{p}_{\mathbf{x}_\beta}(\mathbf{x}_\beta)$ 可通过以下方式计算：

$$\hat{p}_{\mathbf{x}_\beta}(\mathbf{x}_\beta) \propto \prod_{\alpha\in N_\beta} p_{\Psi_\alpha;\mathbf{x}_\beta}(\mathbf{x}_\beta). \tag{76}$$

B. $m_{\Psi_{y_{l,\,t}};\,\mathbf{z}_{l,\,kt}}$ 的消息更新

这一消息更新对于 JACD-EP-BG 和 JACD-EP算法是相同的，因此，其推导可见 [1] 的扩展版本。

C. $m_{\Psi_{z_{l,\,kt}};\,x_{kt}}$ 的消息更新

x_{kt} 在因子节点 Ψ_z 处的局部信念 $_{l,kt}$ 给定为

$$\begin{aligned}
&q_{\Psi_{z_{l,kt}};x_{kt}}(x_{kt}) \\
&\propto \iint \delta(\mathbf{z}_{l,kt} - \mathbf{g}_{l,k}x_{kt}) \cdot p_{x_{kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(x_{kt}) \\
&\quad \cdot p_{\mathbf{z}_{l,kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(\mathbf{z}_{l,kt}) \cdot p_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}(\mathbf{g}_{l,k})\, d\mathbf{z}_{l,kt}\, d\mathbf{g}_{l,k} \\
&\overset{(a)}{=} p_{x_{kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(x_{kt}) \cdot \int p_{\mathbf{z}_{l,kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(\mathbf{g}_{l,k}x_{kt}) \\
&\quad \cdot p_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}(\mathbf{g}_{l,k})\, d\mathbf{g}_{l,k} \\
&\overset{(b)}{\approx} p_{x_{kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(x_{kt}) \cdot \int \mathcal{CN}\big(\mathbf{g}_{l,k}x_{kt}|\boldsymbol{\mu}_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}}, \mathbf{C}_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}}\big) \\
&\quad \cdot \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}} \cdot \mathcal{CN}\big(\mathbf{g}_{l,k}|\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}, \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}\big)\, d\mathbf{g}_{l,k} \\
&\overset{(c)}{=} p_{x_{kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(x_{kt}) \cdot \int |x_{kt}|^{-2N} \cdot \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}} \\
&\quad \cdot \mathcal{CN}\big(\mathbf{g}_{l,k}|\boldsymbol{\mu}_{\text{tmp}}, \mathbf{C}_{\text{tmp}}\big) \cdot \mathcal{CN}\big(\mathbf{0}|\boldsymbol{\mu}_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}} x_{kt}^{-1} \\
&\quad - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}, \mathbf{C}_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}}|x_{kt}|^{-2} + \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}\big)\, d\mathbf{g}_{l,k} \\
&= p_{x_{kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(x_{kt}) \cdot |x_{kt}|^{-2N} \cdot \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}} \\
&\quad \cdot \mathcal{CN}\big(\mathbf{0}|\boldsymbol{\mu}_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}} x_{kt}^{-1} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}, \\
&\qquad \mathbf{C}_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}}|x_{kt}|^{-2} + \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}\big) \\
&= p_{x_{kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(x_{kt}) \cdot \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}} \cdot \theta(x_{kt}),
\end{aligned} \tag{77}$$

其中，(*a*) 根据狄拉克δ函数的筛选性质得到；[49], (*b*) 通过使用 $p_{\mathbf{z}_{l\,kt}\,\Psi_{z_{l\,kt}}\quad l\,kt} =_{\cdot;\cdot}$ $p_{\Psi_{y_{l\,t}}\quad l\,kt\quad l\,kt}(\mathbf{z}_{\cdot})_{\cdot;\,\mathbf{z}_{\cdot}}(\mathbf{z}_{\cdot})$ 并仅考虑 BG分布的高斯部分 $p_{\mathbf{g}_{l,\,k};\,\Psi_{z_{l,\,kt}}}$ 得到，该部分对活动分量建模，而该分量对于检测传输符号 x_{kt} 是必要的；(*c*) 则利用高斯缩放[5]和乘积引理得到，从而相应地得到 $\boldsymbol{\mu}_{\text{tmp}}$ 和 $\mathbf{C}_{\text{tmp}}$。在 (24) 中给定 $\theta(x_{kt})$ 后，再次应用高斯缩放引理即可得到 (77) 中的最终结果。对于 $t > T_p$ 和 $x_{kt} \in \mathcal{X}$，(77) 是一个分类分布。因此，(72) 中的投影操作是多余的，因为它将 $q_{\Psi_{z_{l,\,kt};\,x_{kt}}}(x_{kt})$ 投影到分类分布上，且 (72) 的分母与 (77) 中的第一项相消。因此，最终的消息更新规则简化为 (23)。

D. 关于 $m_{\Psi_{z_{l,\,kt}};\,\mathbf{g}_{l,\,k}}$ 的消息更新

$\mathbf{g}_{l,\,k}$ 在因子节点 $\Psi_{z_{l,\,kt}}$ 处的局部信念由 $q_{\Psi_{z_{l,\,kt}};\,\mathbf{g}_{l,\,k}}(\mathbf{g}_{l,\,k})$ 给出

$$\begin{aligned}
&\propto \sum_{x_{kt}} \int \delta(\mathbf{z}_{l,kt} - \mathbf{g}_{l,k}x_{kt}) \cdot p_{x_{kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(x_{kt}) \\
&\quad \cdot p_{\mathbf{z}_{l,kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(\mathbf{z}_{l,kt}) \cdot p_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}(\mathbf{g}_{l,k})\, d\mathbf{z}_{l,kt} \\
&= \sum_{x_{kt}} p_{x_{kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(x_{kt}) \cdot p_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}}(\mathbf{g}_{l,k}x_{kt}) \cdot p_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}(\mathbf{g}_{l,k}),
\end{aligned} \tag{78}$$

其中，式（78）由狄拉克δ函数的筛选性质获得，并使用了 $p_{\mathbf{z}_{l,\,kt};\,\Psi_{z_{l,\,kt}}}(\mathbf{z}_{l,\,kt}) = p_{\Psi_{y_{l,\,t}};\,\mathbf{z}_{l,\,kt}}(\mathbf{z}_{l,\,kt})$。通过分别考虑刻画BG分布活跃与非活动状态的两个部分，进一步计算局部BG信念。对于BG非活动分量，仅位于 $\mathbf{g}_{\quad l} \quad p_{\mathbf{g}_{l\,k}\,\Psi_{z_{l\,kt}}\quad l} =_{\cdot}$ $1-\lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}$ $_{k} = \mathbf{0}$ 处的狄拉克质有贡献，即 $_{\cdot;\,\cdot}(\mathbf{g}_{\cdot\,k} = \mathbf{0})_{\cdot;\,\cdot}$。因此，

$$\begin{aligned}
&q_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{g}_{l,k}}(\mathbf{g}_{l,k} = \mathbf{0}) \\
&\quad \propto \sum_{x_{kt}} p_{x_{kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(x_{kt}) \cdot \theta(0) \cdot (1 - \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}) \\
&\quad = \theta(0) \cdot (1 - \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}),
\end{aligned} \tag{79}$$

其中 $p_{\Psi_{y_{l,\,t}};\,\mathbf{z}_{l,\,kt}}(\mathbf{0}) = \theta(0)$ 以及 $\theta(x)$ 定义于式（24）中。对于BG活跃分量，仅考虑高斯部分，即 $p_{\mathbf{g}_{l,\,k};\,\Psi_{z_{l\,kt}}}(\mathbf{g}_{l,\,k}) = \lambda_{\mathbf{g}_{l,\,k};\,\Psi_{z_{l,\,kt}}} \cdot \mathcal{CN}\big(\mathbf{g}_{l,k}|\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}, \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}\big)$，

$$\begin{aligned}
&q_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{g}_{l,k}}(\mathbf{g}_{l,k} \neq \mathbf{0}) \\
&\quad \propto \sum_{x_{kt}} p_{x_{kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(x_{kt}) \cdot \mathcal{CN}\big(\mathbf{g}_{l,k}x_{kt}|\boldsymbol{\mu}_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}}, \mathbf{C}_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}}\big) \\
&\quad \cdot \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}} \cdot \mathcal{CN}\big(\mathbf{g}_{l,k}|\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}, \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}\big) \\
&\quad = \sum_{x_{kt}} \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}} \cdot \phi(x_{kt}) \\
&\quad \cdot \mathcal{CN}\big(\mathbf{g}_{l,k}|\check{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt})x_{kt}^{-1}, \check{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt})|x_{kt}|^{-2}\big),
\end{aligned} \tag{80}$$

这是通过将高斯缩放与乘积引理应用于式 (31)、(32) 和 (33) 中分别定义的 $\phi(x_{kt})$、$\check{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt})$ 和 $\check{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt})$ 得到的。因此，式 (80) 中 $q_{\Psi_{z_{l,kt};\mathbf{g}_{l,k}}}(\mathbf{g}_{l,k})$ 的活跃分量是一个高斯混合，其混合分量对应于传输符号 x_{kt}。

[5]Gaussian scaling lemma [50]: $\mathcal{CN}(\mathbf{y}\,|\,c\,\boldsymbol{\mu}, |c|^2\,\mathbf{C}) = |c|^{-2N} \cdot \mathcal{CN}(c^{-1}\,\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$

计算该混合分布的充分统计量的期望以进行矩匹配时，可能会得到接近于零的均值，这将表明存在信道较弱的活跃用户。为避免这一会导致大量虚警的问题，我们选择权重最大的混合分量，记为式 (38) 中的 x^*。注意，在 $t < T_p$ 的导频阶段，传输符号 $x_{kt} = x_{kt}^p$ 已知为先验信息，因此有 $x^* = x_{kt}^p$。采用这一实用近似，我们得到

$$q_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{g}_{l,k}}(\mathbf{g}_{l,k}) \approx \mathcal{BG}\big(\mathbf{g}_{l,k}|\hat{\lambda}_{\mathbf{g}_{l,kt}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{g}_{l,kt}}, \hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{g}_{l,kt}}\big) \tag{81}$$

$\hat{\lambda}_{\mathbf{g}_{l,kt}}$、$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{g}_{l,kt}}$ 和 $\hat{\mathbf{C}}_{\mathbf{g}_{l,kt}}$，它们分别由式 (35)、(36) 和 (37) 给出。应用期望传播更新规则 (72) 后，最终消息由式 (26)、(27) 和 (28) 中的参数定义。

E. $m_{\Psi_{g_{l,k}};u_k}$

u_k 在因子节点 $\Psi_{g_{l,k}}$ 处的局部信念为

$$\begin{aligned}
&q_{\Psi_{g_{l,k}};u_k}(u_k) \\
&\propto \iint \delta(\mathbf{g}_{l,k} - \mathbf{h}_{l,k}u_k) \cdot p_{u_k;\Psi_{g_{l,k}}}(u_k) \cdot p_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}(\mathbf{g}_{l,k}) \\
&\quad \cdot p_{\mathbf{h}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}(\mathbf{h}_{l,k})\, d\mathbf{g}_{l,k}\, d\mathbf{h}_{l,k} \\
&= \int p_{u_k;\Psi_{g_{l,k}}}(u_k) \cdot p_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}(\mathbf{h}_{l,k}u_k) \\
&\quad \cdot p_{\Psi_{h_{l,k}};\mathbf{h}_{l,k}}(\mathbf{h}_{l,k})\, d\mathbf{h}_{l,k}
\end{aligned} \tag{82}$$

利用狄拉克δ函数的筛选性质，并使用 $p_{\mathbf{h}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}(\mathbf{h}_{l,k}) = p_{\Psi_{h_{l,k}};\mathbf{h}_{l,k}}(\mathbf{h}_{l,k})$，可得该结果。通过分别处理伯努利分布的两个组成部分，进一步计算局部分类信念。对于非激活情形，即 $u_k = 0$，仅 BG分布 $p_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}(\mathbf{g}_{l,k})$ 的狄拉克分量起作用，即

$$\begin{aligned}
&p_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}(\mathbf{h}_{l,k}u_k = \mathbf{0}) = 1 - \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}} \\
&q_{\Psi_{g_{l,k}};u_k}(u_k = 0) \\
&\quad \propto \int p_{u_k;\Psi_{g_{l,k}}}(0) \cdot (1 - \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}) \cdot p_{\Psi_{h_{l,k}};\mathbf{h}_{l,k}}(\mathbf{h}_{l,k})\, d\mathbf{h}_{l,k} \\
&\quad = p_{u_k;\Psi_{g_{l,k}}}(0) \cdot (1 - \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}).
\end{aligned} \tag{83}$$

对于激活情形，即 $u_k = 1$，仅 BG分布 $p_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}(\mathbf{g}_{l,k})$ 的高斯分量相关，即 $p_{\mathbf{g}_{l,k}\Psi_{g_{l,k}}} = p_{\mathbf{g}_{l,k}\Psi_{g_{l,k}}}$，$\mathcal{CN}(\mathbf{g}_{l,k}|\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}_{l,k}\Psi_{g_{l,k}}}, \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l,k}\Psi_{g_{l,k}}})$ 与 $\mathcal{BG}(\mathbf{g}_{l,k}|\lambda_{\mathbf{g}_{l,k}}, \mathbf{h}_{l,k}, \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}_{l,k}}, \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l,k}})$，

$$\begin{aligned}
&q_{\Psi_{g_{l,k}};u_k}(u_k = 1) \\
&\quad \propto \int p_{u_k;\Psi_{g_{l,k}}}(1) \cdot \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}} \\
&\quad \cdot \mathcal{CN}\big(\mathbf{h}_{l,k}|\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}, \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}\big) \cdot p_{\Psi_{h_{l,k}};\mathbf{h}_{l,k}}(\mathbf{h}_{l,k})\, d\mathbf{h}_{l,k} \\
&\quad = p_{u_k;\Psi_{g_{l,k}}}(1) \cdot \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}} \cdot \vartheta(1),
\end{aligned} \tag{84, 85}$$

这是通过对 (43) 中定义的 $\vartheta(u_k)$ 应用高斯乘积引理得到的。然后，结合活跃分量和非活跃分量，可得

$$q_{\Psi_{g_{l,k}};u_k}(u_k) \propto p_{u_k;\Psi_{g_{l,k}}}(u_k) \cdot \begin{cases} 1 - \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}} & \text{for } u_k = 0 \\ \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}} \cdot \vartheta(1) & \text{for } u_k = 1 \end{cases}. \tag{86}$$

（72）中的投影是多余的，因为 $q_{\Psi_{g_{l,k}};u_k}(u_k)$ 已经是分类分布。因此，（72）的分母与（86）中的第一项相消。由此，最终的消息更新规则由（44）给出。

F. $m_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{g}_{l,k}}$ 的消息更新

因子节点 $\Psi_{g_{l,k}}$ 处的 $\mathbf{g}_{l,k}$ 局部信念为

$$\begin{aligned}
&q_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{g}_{l,k}}(\mathbf{g}_{l,k}) \\
&\propto \sum_{u_k} \int \delta(\mathbf{g}_{l,k} - \mathbf{h}_{l,k}u_k) \cdot p_{u_k;\Psi_{g_{l,k}}}(u_k) \cdot p_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}(\mathbf{g}_{l,k}) \\
&\quad \cdot p_{\mathbf{h}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}(\mathbf{h}_{l,k})\, d\mathbf{h}_{l,k} \\
&\overset{(a)}{=} p_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}(\mathbf{g}_{l,k}) \cdot \big(p_{u_k;\Psi_{g_{l,k}}}(0) \cdot \delta(\mathbf{g}_{l,k}) \\
&\quad + p_{u_k;\Psi_{g_{l,k}}}(1) \cdot p_{\Psi_{h_{l,k}};\mathbf{h}_{l,k}}(\mathbf{g}_{l,k})\big) \\
&= p_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}(\mathbf{g}_{l,k}) \cdot \mathcal{BG}\big(\mathbf{g}_{l,k}|p_{u_k;\Psi_{g_{l,k}}}(1), \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{h_{l,k}}, \tilde{\mathbf{C}}_{h_{l,k}}\big)
\end{aligned} \tag{87}$$

其中，(a) 是通过显式计算对 u_k 的求和，并利用狄拉克δ函数的筛选性质以及恒等式 $p_{\mathbf{h}_{l,k};\Psi_{g_{l,k}}}(\mathbf{h}_{l,k}) = p_{\Psi_{h_{l,k}};\mathbf{h}_{l,k}}(\mathbf{h}_{l,k})$ 得到的。最终的公式 (87) 是利用 $p_{\Psi_{h_{l,k}};\mathbf{h}_{l,k}} = \mathcal{CN}(\mathbf{h}_{l,k}|\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{h_{l,k}}, \tilde{\mathbf{C}}_{h_{l,k}})$ 得到的，并注意到 (a) 中括号内写出的第二个因子是一个 BG分布。(72) 中的投影是多余的，因为 $q_{\Psi_{g_{l,k}};\mathbf{g}_{l,k}}(\mathbf{g}_{l,k})$ 是两个 BG分布的乘积，而其乘积仍是一个 BG分布。因此，(72) 的分母与 (87) 中的第一项相消。最终的消息参数由 (53)、(54) 和 (55) 给出。

G. $m_{\Psi_{z_{l的kt}};\mathbf{z}_{l,kt}}$消息更新

在因子节点 $\Psi_{z_{l,kt}}$ 处，$\mathbf{z}_{l,kt}$ 的局部信念为

$$\begin{aligned}
&q_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{z}_{l,kt}}(\mathbf{z}_{l,kt}) \\
&\quad \propto \sum_{x_{kt}} \int \delta(\mathbf{z}_{l,kt} - \mathbf{g}_{l,k}x_{kt}) \cdot p_{x_{kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(x_{kt}) \\
&\quad \cdot p_{\mathbf{z}_{l,kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(\mathbf{z}_{l,kt}) \cdot p_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}(\mathbf{g}_{l,k})\, d\mathbf{g}_{l,k} \\
&\quad \overset{(a)}{=} \sum_{x_{kt}} |x_{kt}|^{-2N} \cdot p_{x_{kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(x_{kt}) \cdot p_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}}(\mathbf{z}_{l,kt}) \\
&\quad \cdot p_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}\left(\frac{\mathbf{z}_{l,kt}}{x_{kt}}\right) \\
&\quad \overset{(b)}{\approx} \sum_{x_{kt}} |x_{kt}|^{-2N} \cdot p_{x_{kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(x_{kt}) \cdot p_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}}(\mathbf{z}_{l,kt}) \\
&\quad \cdot \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}} \cdot \mathcal{CN}\Big(\frac{\mathbf{z}_{l,kt}}{x_{kt}}\Big|\mu_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}, \mathbf{C}_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}\Big) \\
&\quad = \sum_{x_{kt}} \pi_{x_{kt};\Psi_{z_{l,kt}}}(x_{kt}) \cdot \theta(x_{kt}) \cdot \lambda_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}} \\
&\quad \cdot \mathcal{CN}\big(\mathbf{z}_{l,kt}|\check{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt}), \check{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt})\big),
\end{aligned} \tag{88}$$

其中，(a)通过应用狄拉克δ函数 [49] 的缩放与筛选性质，并使用$p_{\mathbf{z}_{l,kt}}$而得到；$\Psi_{z_{l,kt}}(\mathbf{z}_{l,kt}) = p_{\Psi_{y_{l,t}};\mathbf{z}_{l,kt}}(\mathbf{z}_{l,kt})$，而$(b)$则是通过用其高斯部分近似BG分布$p_{\mathbf{g}_{l,k};\Psi_{z_{l,kt}}}$而得到的。式（88）的最终结果是通过应用高斯缩放与乘积引理得到的，其中$\theta(x_{kt})$、$\check{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt})$以及$\check{\mathbf{C}}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt})$分别由式（24）、（32）和（33）给出。$q_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{z}_{l,kt}}(\mathbf{z}_{l,kt})$的归一化常数由$\tilde{Z}_{\Psi_{z_{l,kt}}} = \lambda_{\mathbf{g}_{l,k}}$给出；$Z_{\Psi_{z_{l,kt}}}$，其中$Z_{\Psi_{z_{l,kt}}}$在式（34）中定义。根据式（88），$q_{\Psi_{z_{l,kt}};\mathbf{z}_{l,kt}}(\mathbf{z}_{l,kt})$是高斯混合，其均值向量和协方差矩阵由式（61）给出

和式（62）分别给出。注意，在 $t < T_p$的导频阶段，传输符号 $x_{kt} = x_{kt}^p$ 是先验已知的。因此，$q_{\Psi_{z_{l,kt};\mathbf{z}_{l,kt}}(\mathbf{z}l,kt)}$对于 $t < T_p$ 而言可化简为高斯分布，其均值向量为$\hat{}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{z}_{l,kt}} = \check{}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt}^p)$，协方差矩阵为$\hat{}\mathbf{C}_{\mathbf{z}_{l,kt}} = \check{}\mathbf{C}_{\mathbf{z}_{l,kt}}(x_{kt}^p)$。最终消息参数由式（59）和（60）给出，并根据式（72）计算得到。

参考文献

[1] C. Forsch、A. Karataev 和 L. Cottatellucci，“通过无小区大规模MIMO中的期望传播进行分布式联合用户活动检测、信道估计和数据检测”，载于 IEEE 第 25 届无线通信信号处理进展国际研讨会（SPAWC）论文集，2024年，第 531–535 页。扩展版本见：https://arxiv.org/abs/2405.09914。[2] N. H. Mahmood 等，“机器类型通信：迈向 6G时代的关键驱动因素和赋能技术”，EURASIP无线通信与网络杂志，第 2021 卷，第 1 期，第 134 页，2021年。[3] L. Liu、E. G. Larsson、W. Yu、P. Popovski、C. Stefanovic 和 E. de Carvalho，“面向物联网随机接入协议的未来范式：用于免授权大规模连接的稀疏信号处理”，IEEE信号处理杂志，第 35 卷，第 5 期，第 88–99 页，2018年。[4] M. B. Shahab、R. Abbas、M. Shirvanimoghaddam 和 S. J. Johnson，“面向物联网的免授权非正交多址接入：综述”，IEEE Commun. Surveys Tuts.，第 22 卷，第 3 期，第 1805–1838 页，2020 年。[5] Z. Gao 等，“ 面向 6G 大规模通信的基于压缩感知的免授权大规模接入”，IEEE物联网期刊，第 11 卷，第 5 期，第 7411–7435 页，2024年。[6] H. Q. Ngo、A. Ashikhmin、H. Yang、E. G. Larsson 和 T. L. Marzetta，“无小区大规模MIMO与小小区的比较”，IEEE无线通信汇刊，第 16 卷，第 3 期，第 1834–1850 页，2017年。[7] H. Q. Ngo、L.-N. Tran、T. Q. Duong、M. Matthaiou 和 E. G. Larsson，“无小区大规模MIMO的总能效”，IEEE Trans. Green Commun. Netw.，第 2 卷，第 1 期，第 25–39 页，2018年。[8] M. Mohammadi、Z. Mobini、H. Quoc Ngo 和 M. Matthaiou，“采用无小区大规模MIMO的下一代多址接入”，Proc. IEEE，第 112 卷，第 9 期，第 1372–1420 页，2024年。[9] H. Wang、J. Wang 和 J. Fang，“大规模MIMO系统中的免授权大规模连接：共址与无小区”，IEEE Wireless Commun. Lett.，第 10 卷，第 3 期，第 634–638 页，2021年。[10] U. K. Ganesan、E. Bj¨ornson 和 E. G. Larsson，“无小区大规模MIMO中面向免授权随机接入的基于聚类的活动检测算法”，IEEE Trans. Commun.，第 69 卷，第 11 期，第 7520–7530 页，2021年。[11] Y. Xu、E. G. Larsson、E. A. Jorswieck、X. Li、S. Jin 和 T.-H. Chang，“面向超大规模天线阵列系统的分布式信号处理：最新进展与未来方向”，IEEE J. Sel. Topics Signal Process.，第 19 卷，第 2 期，第 304–330 页，2025年。[12] L. Liu 和 W. Yu，“大规模MIMO中的大规模连接——第一部分：设备活动检测与信道估计”，IEEE信号处理汇刊，第 66 卷，第 11 期，第 2933–2946 页，2018年。[13] M. Ke、Z. Gao、Y. Wu、X. Gao 和 R. Schober，“基于压缩感知的自适应活跃用户检测与信道估计：大规模接入与大规模MIMO的结合”，IEEE信号处理汇刊，第 68 卷，第 764–779 页，2020年。[14] H. Q. Ngo 和 E. G. Larsson，“大型天线阵列多小区多用户MIMO系统中的基于特征值分解的信道估计”，载于 IEEE 国际声学、语音与信号处理会议（ICASSP）论文集，2012年。[15] H. Yin、D. Gesbert、M. Filippou 和 Y. Liu，“大规模多天线系统中信道估计的协同方法”，IEEE通信领域精选期刊，第 31 卷，第 2 期，第 264–273 页，2013年。[16] L. Cottatellucci、R. R. M¨uller 和 M. Vehkapera，“基于功率控制的导频去污染分析”，载于 IEEE 第 77 届车辆技术会议（VTC-Spring）论文集，2013年。[17] R. R. M¨uller、L. Cottatellucci 和 M. Vehkapera，“盲导频去污染”，IEEE J. Sel. Topics Signal Process.，第 8 卷，第 5 期，第 773–786 页，2014年。[18] H. Yin、L. Cottatellucci、D. Gesbert、R. R. M¨uller 和 G. He，“基于角度域与功率域联合判别的鲁棒导频去污染”，IEEE信号处理汇刊，第 64 卷，第 11 期，第 2990–3003 页，2016年。[19] H. Yin、D. Gesbert 和 L. Cottatellucci，“应对分布式大规模MIMO系统中的干扰：一种统计方法”，IEEE J. Sel. Topics Signal Process.，第 8 卷，第 5 期，第 942–953 页，2014年。[20] Z. Chen 和 E. Bj¨ornson，“随机几何下无小区大规模MIMO中的信道硬化与有利传播”，IEEE Trans. Commun.，第 66 卷，第 11 期，第 5205–5219 页，2018年。[21] R. Gholami、L. Cottatellucci 和 D. Slock，“分布式天线系统中的有利传播与线性多用户检测”，载于 IEEE 国际声学、语音与信号处理会议（ICASSP）论文集，2020年。[22] ——，“无小区大规模MIMO中的信道模型、有利传播与多阶段线性检测”，载于 IEEE国际信息论研讨会（ISIT）论文集，2020年。[23] E. Bj¨ornson、J. Hoydis 和 L. Sanguinetti，“大规模MIMO具有无限容量”，IEEE无线通信汇刊，第 17 卷，第 1 期，第 574–590，2018年。

[24] E. Bj¨ornson 和 L. Sanguinetti，“通过最小均方误差处理和集中式实现使无小区大规模MIMO具有竞争力”，IEEE无线通信汇刊，第19卷，第1期，第77–90页，2020年。[25] A. ´A. Polegre、L. Sanguinetti 和 A. G. Armada，“无小区大规模MIMO中的导频去污染处理”，IEEE通信快报，第25卷，第12期，第3990–3994页，2021年。[26] R. Gholami、L. Cottatellucci 和 D. Slock，“通过联合信道估计与线性多用户检测解决无小区大规模MIMO中的导频污染”，载于IEEE 国际信息论研讨会（ISIT）论文集，2021年。[27] H. Song、T. Goldstein、X. You、C. Zhang、O. Tirkkonen 和 C. Studer，“无小区大规模多用户MIMO系统中的联合信道估计与数据检测”，IEEE无线通信汇刊，第21卷，第6期，第4068–4084页，2022年。[28] A. Karataev、C. Forsch 和 L. Cottatellucci，“无小区大规模MIMO中用于分布式半盲联合信道估计与数据检测的双线性期望传播”，IEEE开放获取信号处理期刊，第5卷，第284–293页，2024年。[29] C. Forsch、Z. Zhao、D. Slock 和 L. Cottatellucci，“无小区大规模MIMO中用于导频去污染的贝叶斯学习”，载于第28届国际智能无线研讨会（WSA）论文集，2025年。[30] Z. Zhao 和 D. Slock，“基于Bethe自由能优化的无小区系统半盲信道估计去中心化消息传递”，载于第58届阿西洛马会议：信号、系统与计算论文集，2024年，第1443–1447页。[31] S. Jiang、X. Yuan、X. Wang、C. Xu 和 W. Yu，“免授权非正交多址接入中的联合用户识别、信道估计与信号检测”，IEEE无线通信汇刊，第19卷，第10期，第6960–6976页，2020年。[32] Y. Zhang、Z. Yuan、Q. Guo、Z. Wang、J. Xi 和 Y. Li，“基于消息传递结构化信号估计的免授权非正交多址接入贝叶斯接收机设计”，IEEE车辆技术汇刊，第69卷，第8期，第8643–8656页，2020年。[33] C. Zhang、Y. Liu、J. Hu 和 K. Yang，“低地球轨道卫星通信中免授权非正交多址接入的联合用户识别、信道估计与数据检测”，IEEE通信领域精选期刊，第43卷，第1期，第107–121页，2025年。[34] Q. Zou、H. Zhang、D. Cai 和 H. Yang，“免授权大规模MIMO系统中低复杂度的联合用户活动、信道与数据估计”，IEEE信号处理快报，第27卷，第1290–1294页，2020年。[35] S. Zhang、Y. Cui 和 W. Chen，“通过双线性广义近似消息传递实现大规模免授权接入的联合设备活动检测、信道估计与信号检测”，IEEE信号处理汇刊，第71卷，1215，2023 1200页。– 。[36] X. Bian、Y. Mao 和 J. Zhang，“免授权大规模随机接入中的联合活动检测、信道估计与数据解码”，IEEE物联网期刊，第10卷，第16期，第14 042–14 057页，2023年。[37] H. Iimori、T. Takahashi、K. Ishibashi、G. T. F. de Abreu 和 W. Yu，“利用双线性推断和低相干导频实现无小区MIMO免授权接入”，IEEE无线通信汇刊，第20卷，第11期，第7694–7710页，2021年。[38] G. Sun、M. Cao、W. Wang、W. Xu 和 C. Studer，“无小区无线通信系统中的深度展开式大规模免授权传输”，IEEE信号处理汇刊，第73卷，第1094–1109页，2025年。[39] T. P. Minka，“近似贝叶斯推断算法族”，博士学位论文，麻省理工学院，剑桥，2001年。[40] ——，“用于近似贝叶斯推断的期望传播”，载于第17届不确定性与人工智能会议（UAI）论文集，2001年，第362–369页。[41] M. J. Wainwright 和 M. I. Jordan，“图模型、指数族与变分推断”，机器学习基础与趋势，第1卷，第1–2期，第1–305页，2007年。[42] P. A. Bromiley，“高斯分布的乘积与卷积”，技术报告 Tina备忘录第2003-003号，2003年。[43] K.-H. Ngo、M. Guillaud、A. Decurninge、S. Yang 和 P. Schniter，“基于期望传播的非相干SIMO多址信道多用户检测”，IEEE无线通信汇刊，第19卷，第9期，第6145–6161页，2020年。[44] J. Vila 和 P. Schniter，“期望最大化伯努利-高斯近似消息传递”，载于第45届阿西洛马会议：信号、系统与计算论文集，2011年，第799–803页。[45] D. Hern´andez-Lobato、J. M. Hern´andez-Lobato 和 P. Dupont，“利用期望传播进行贝叶斯组特征选择的广义尖峰与板先验”，《机器学习研究杂志》，第14卷，第1期，第1891–1945页，2013年。[46] C. Rusu、N. Gonz´alez-Prelcic 和 R. W. Heath，“各种设计约束下非相干框架的构造算法”，《信号处理》，第152卷，第363–372页，2018年。[47] ¨O. T. Demir、E. Bj¨ornson 和 L. Sanguinetti，“以用户为中心的无小区大规模MIMO基础”，信号处理基础与趋势，第14卷，第3–4期，第162–472页，2021年。[48] M. Chen、Y. Miao、Y. Hao 和 K. Hwang，“窄带物联网”，IEEE Access，第5卷，第20 557–20 577页，2017年。[49] C. Candan，“狄拉克δ函数的正确界定与处理[讲义],”，IEEE信号处理杂志，第38卷，第3期，第186–203页，2021年。[50] A. Papoulis 和 S. U. Pillai，《概率、随机变量与随机过程》，第4版，麦格劳-希尔，2002年。