arXiv:2601.04167v1 [math.NA] 7 Jan 2026

从彭罗斯到 Melrose：计算无界介质无穷远处的散射振幅

Anıl Zengino˘glu

马里兰大学物理科学与技术研究所，美国马里兰州大学城 Stadium Drive 4254 号，邮编 20742。

贡献作者：anil@umd.edu；

摘要

我们提出一种方法，用于计算具有可能长程渐近行为的非均匀无界介质中的亥姆霍兹方程散射振幅。结合彭罗斯共形紧化与 Melrose 的几何散射理论，我们在带边界的紧化流形上表述时谐散射问题，并构造一个用于求解无穷远处散射振幅的两步求解器。该构造是渐近的：它处理无穷远处的一个邻域，并旨在通过区域分解与内部求解器耦合。此方法无需依赖显式解或格林函数表示，即可提供远场数据。变介质中的散射问题在统一框架下处理，其中入射场和散射场均满足同一个背景亥姆霍兹算子。针对常数介质、短程介质和长程介质，以及单模入射和高斯波束入射所进行的数值实验表明，在所有情况下，计算所得散射振幅均呈现谱收敛。

关键词： 亥姆霍兹方程；辐射条件；散射理论；零无穷远；紧化；无界区域；双曲几何；长程介质。

MSC 分类： 35J05 , 35P25 , 58J50 , 65N35 , 78A45

1 引言

我们研究变系数介质中障碍物产生的时谐散射。设 $d \geq 2$。亥姆霍兹散射问题由一个有界利普希茨区域$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ 及其边界 $\Gamma = \partial\mathcal{D}$ 和外部区域 $\mathcal{D}^c = \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{D}$、一个实值折射率 n: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，以及施加在 Γ 上的边界条件（狄利克雷、诺伊曼或阻抗边界条件）构成。频率为 $k > 0$ 时的散射解是一个函数 $U : \mathcal{D}^c \to \mathbb{C}$，满足

$$(\Delta + k^2 n(x)^2)\, U = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}^c, \tag{1}$$

满足 Γ上的边界条件，以及适当的无穷远辐射条件。解的渐近行为取决于折射率。本文考虑折射率满足下述条件的渐近均匀介质:

$$n(x)^2 = 1 + b(x), \qquad b(x) \to 0 \quad \text{as } r = |x| \to \infty, \tag{2}$$

在角变量 $\omega = x/|x| \in \mathbb{S}^{d-1}$ 上一致成立。

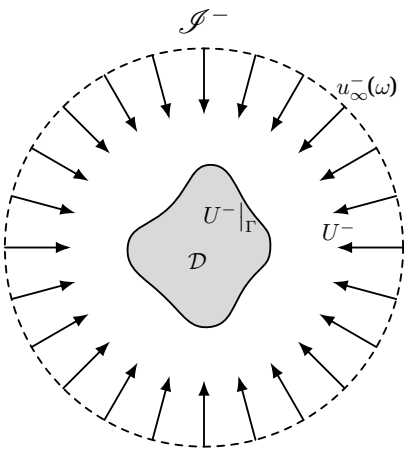
Sommerfeld 于 1912 年指出，与典型的椭圆型问题不同，即使场在无穷远处消失，亥姆霍兹问题的解也不唯一 [1, 2]。为确保唯一性，必须在方程中补充辐射条件，以排除从无穷远到来的波。Sommerfeld 认为，物理上可接受的解在无穷远处应当纯粹向外传播。这一原理指导了散射理论与数值计算领域一个世纪以来的分析与计算。然而，在现代散射理论中，从无穷远入射的波并不被视为不符合物理规律。恰恰相反，数学上自然的数据是在无穷远处给定的：指定入射输入，并通过无穷远天球上的散射映射读出射输出 [3, 4]。

尽管这一结构在现代散射理论中居于核心地位，但其计算应用却十分有限。传统的频域方法通过指定一个全局自由空间解来描述入射，该解在障碍物表面诱导出边界数据。然而，对于存在长程修正的无界介质，入射解并非先验已知。本文数值构造入射场，使其由入射辐射数据确定，作为计算长程介质散射振幅的第一步。

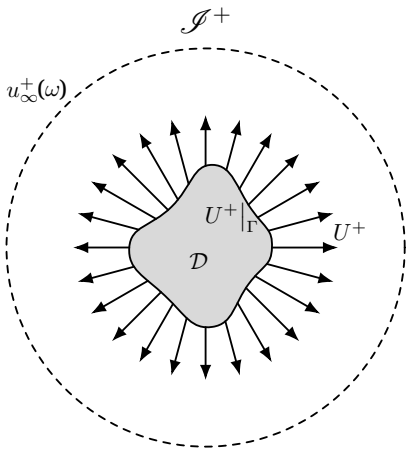
几何散射理论的一项重要发现是，辐射条件在无穷远处是局部的，也就是说，只有在无穷远处，入射辐射与出射辐射才能清晰分离 [3–5]。为使这一观点具体化，假设 U 在散射体的外部区域满足常折射率亥姆霍兹方程，即式（1），其中n（x） $= 1$。在较大的半径 $r = |x|$处，一般解可作入射／出射分解，

$$U(r,\omega) \sim r^{-\frac{d-1}{2}} \left(e^{-ikr}\, u_\infty^-(\omega) + e^{+ikr}\, u_\infty^+(\omega) \right), \qquad \text{as } \ r \to \infty. \tag{3}$$

散射映射 $S(k)$ 是一个将入射数据 $u_\infty^-(\omega)$ 映射到出射散射解 $u_\infty^+(\omega) = S(k)u_\infty^-(\omega)$ 的算子。通常无法将正则场局部分解为逐点的入射/出射部分 [6,7]。在微局部框架中，数学上自然的数据是在



(a) 来自过去零无穷远的入射辐射 $u_\infty^-(\theta)$ 在障碍物边界处诱发入射场 $U^-\big|_\Gamma$。



(b) 从障碍物 $U^+\big|_\Gamma$ 出射的辐射，在未来零无穷远处诱发散射远场 $u_\infty^+(\theta)$。

图1：我们求解时谐散射问题 (1)：来自无穷远的入射辐射 $u_\infty^-(\omega)$ 经障碍物 $\mathcal{D}$ 散射后，在无穷远处测得远场 $u_\infty^+(\omega)$。基于将总场 U分解为入射场 (–) 和散射场 (+)，计算分为两个步骤： $U = U^- + U^+$。第一步，通过在过去零无穷远处指定入射边界条件 $\mathscr{I}^-$，计算入射场 U^-，并提取障碍物边界上的数据 $\Gamma = \partial\mathcal{D}$。第二步，利用障碍物边界数据求解散射场$U^+$，并读取未来零无穷远处的远场 $\mathscr{I}^+$。 $U^\pm$ 与 $u_\infty^\pm$ 之间映射的奇异性由一个合适的权函数 (5) 吸收；该权函数对应于附录 A.1 中所述的零无穷远处的正则紧化 $\mathscr{I}^\pm$ 。

无穷远处作为入射剖面给定 $u_\infty^-(\omega$的。散射问题的数学分析所隐含的计算框架，在图 1 中以两步求解器的形式示意。我们假设将总场分解为入射场和散射场：
$U = U^- + U^+$。在数值计算中，我们在 $u_\infty^-(\omega)$ 处给定 $\mathbb{S}_\infty^{d-1}$，求解背景介质中相应的入射场 U^-，施加散射体上的物理边界条件以求解 U^+，并读取 $u_\infty^+(\omega)$ 处的 $\mathbb{S}_\infty^{d-1}$。这一图示使计算方法与连续散射映射 $u_\infty^- \mapsto u_\infty^+$相一致。

这一过程面临的一个直接难题是如何处理无穷远处的入射数据。尤其对于长程介质，入射场不能被指定为自由空间方程的未受扰动波；我们需要在无界区域上求解变系数算子。在几何散射中， [3], 通过径向紧化引入散射度量，其形式为 $r = 1/\rho$。这一变换会在边界处产生奇异算子。为作说明，考虑亥姆霍兹

方程用球坐标（r，ω）表示为

$$\partial_r^2 U + \frac{d-1}{r}\partial_r U + \frac{1}{r^2}\,\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} U + k^2 U = 0.$$

应用径向紧化并将方程除以 ρ^2后，我们得到一个奇异算子，

$$(\rho\,\partial_\rho)^2 U + (2-d)(\rho\,\partial_\rho)U + \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} U + \frac{k^2}{\rho^2} U = 0. \tag{4}$$

有效波数 k/ρ 是奇异的，因为时谐解在无界区域上会无限次振荡。径向紧化将无界区域问题转化为无界分辨率问题，因此不适合直接进行数值实现。从数学上说，上述方程的奇异结构通过散射演算处理（见附录 A）。我们将展示，利用散射演算的形式体系与时空全局因果结构之间的联系，可以在数值上实现散射演算的基本思想。

正如彭罗斯所揭示的那样，无穷远在时空中的结构比在空间中更丰富[8, 9]。我们区分空间无穷远、时间无穷远和特征方向上的无穷远。沿特征方向（或零方向）的无穷远称为**零无穷远**，记作 $\mathscr{I}$（读作“scri”，即“script i”的简称）。零无穷远有两个组成部分：过去零无穷远 $\mathscr{I}^-$，入射特征线从此处进入；以及未来零无穷远 $\mathscr{I}^+$，出射特征线向此处延伸。过去零无穷远是指定入射辐射数据的自然位置，而未来零无穷远则是读取出射辐射数据的自然位置。

最近，相对论中利用类空方式趋近零无穷远的技术（见 [10–16]）已应用于亥姆霍兹方程，使得能够通过零无穷远紧化 (NIC)[17]计算未来零无穷远处的散射解。该过程通过以下方式消去沿径向的振荡衰减[1]

$$U^{\pm}(r,\omega) = \frac{e^{ik\,h(r)}}{r^{\frac{d-1}{2}}} u^{\pm}(r,\omega), \qquad h'(r) \to \pm 1, \tag{5}$$

其中 h 称为高度函数（见第 A.1节）。重标度后，$u^{\pm}$ 的径向紧化亥姆霍兹方程可平滑延拓至边界。例如，取 $h(r) = \pm r$，可得

$$\rho^2 \partial_\rho^2 u^{\pm} + 2\,(\rho \mp ik)\,\partial_\rho u^{\pm} + \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} u^{\pm} + \frac{(d-1)(3-d)}{4} u^{\pm} = 0$$

辐射条件由此成为局部边界条件，使我们能够将无穷远纳入计算形式体系。具体而言，通过适当选择自由函数，使得 $\lim_{r\to\pm\infty} u^{\pm}(r,\omega) = u^{\pm}_{\infty}(\omega)$，NIC 即可直接计算渐近量。本文采用此方法，计算非均匀无界介质中障碍物的散射振幅，入射数据则规定在无穷远处。数值实验聚焦于二维空间，但该方法适用于任意维数。

[1]一般而言，h 可能依赖于角度 ω。本文考虑较简单的径向情形。

主要贡献。

1. 我们利用彭罗斯共形紧化与梅尔罗斯散射演算之间的联系，构造了一个用于无界区域上亥姆霍兹散射的两步求解器（见图 1）。该求解器结合径向紧化，利用（5）消去渐近解的振荡衰减。

2. 我们计算由预设于无穷远处、具有有限能量的光滑剖面入射辐射所产生的散射振幅，$u_\infty^-(\theta) \in L^2(\mathbb{S}^1)$。远场 $u_\infty^+(\theta)$作为输出给出，从而提供散射映射 $u_\infty^- \mapsto u_\infty^+ = S(k)u_\infty^-$。

3. 我们求解非均匀无界介质中障碍物的散射问题，涵盖短程和库仑型长程情形。对于单模入射和高斯波束入射，数值求解器在所有情形下均能以谱精度恢复无穷远处的散射振幅。

数值计　　算在无界区域上的数值计算依赖于　　以下

定理 *Let $d \geq 2$ and let $U : \mathcal{D}^c \to \mathbb{C}$ be a sufficiently regular solution of the variable-coefficient Helmholtz equation (1) with real-valued refractive index $n = n(x)$ given at (2) and augmented with appropriate boundary conditions on Γ and a radiation condition at infinity.*

We let $r = r(\rho) : (0, 1) \to (0, \infty)$ be a C^2 strictly increasing radial coordinate such that

$$r(0) = 0, \qquad \lim_{\rho \to 1^-} r(\rho) = \infty, \qquad \lim_{\rho \to 1^-} \frac{r^2(\rho)}{r'(\rho)} = \eta \tag{6}$$

for some fixed $\eta > 0$. Further, let $h = h(r) : (0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ be a C^2 radial height function. Denote $H(\rho) := h'(r(\rho))$. Express $n(x)$ in terms of the radial variables $n(\rho, \omega) := n(r(\rho)\omega), (r, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^{d-1}$ and denote $G(\rho) := \frac{1}{r'(\rho)}$. Assume the following regularity condition holds

$$n^2(\rho, \omega) - H^2(\rho) = \mathcal{O}\big(G(\rho)\big) \quad \text{as } \rho \to 1, \tag{7}$$

uniformly in $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ (note that $G(\rho) \overset{\rho \to 1^-}{\longrightarrow} 0$). Finally, define the rescaled field

$$u(\rho, \omega) = \frac{U(r(\rho)\omega)}{w(r(\rho))} \quad \text{with} \quad w(r(\rho)) := \exp\left(ikh(r(\rho))\right) r^{-\frac{d-1}{2}}(\rho). \tag{8}$$

Then the Helmholtz equation (1) with (2) is expressed in terms of the rescaled field $u(\rho, \omega)$ as

$$\begin{aligned} &\partial_\rho\big(G(\rho)\,\partial_\rho u\big) + 2ik\,H(\rho)\,\partial_\rho u + \frac{1}{G(\rho)\,r^2(\rho)}\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} u \\ &\quad + \left[k^2\,\frac{n^2(\rho, \omega) - H^2(\rho)}{G(\rho)} + ik\,H'(\rho) + \frac{(d-1)(3-d)}{4\,G(\rho)\,r^2(\rho)}\right] u = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

备注： 定理中各项条件背后的理由将在第A节中解释。满足（6）的径向紧化示例为（14）和（61）。满足（7）的高度函数示例为 $h(r) = r$ 以及（62）。假设（6）规定了 $G(\rho)$ 趋于零的速率，从而确保 $1/r(\rho)$ 是渐近边界定义函数。假设（7）规定了 $n^2(\rho, \omega) - H^2(\rho)$ 趋于零的速率，从而确保时间曲面趋近于零锥。在这些假设下，所有系数都连续延拓至 $\rho = 1$。ρ 方向上形式上的二阶项因 $G(1) = 0$ 而降为一阶项。

2 零无穷远紧化

本节将讨论零无穷远紧化（NIC）的计算框架，该框架导出了 NIC-亥姆霍兹方程（9）。我们首先求解入射场，其入射数据在无穷远处给定；随后在障碍物处给定边界数据，并据此求解散射场，从而解决散射问题。对于常介质和变介质情形，我们将 NIC 与标准方法进行对比，因为二者解决的是不同但相关的问题。

2.1 变换后的亥姆霍兹方程

考虑折射率（可能随位置变化）的亥姆霍兹方程，

$$\Delta U(x) + k^2 n^2(x)\, U(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{10}$$

我们假设折射率为实值，且在每个方向上都趋于一个常数（2）。令 $x = r\omega$ 其中 $r = |x| > 0$ 且 $\omega \in S^{d-1}$，我们将 n 视为函数 $n(r\omega)$，并假设当 $r \to \infty$ 时，它对所有$\omega \in S^{d-1}$都一致地趋于一个常数。不失一般性地取该常数为 1，记为

$$n^2(x) = 1 + b(x), \qquad b(x) \to 0 \text{ as } r \to \infty. \tag{11}$$

在球坐标（r，ω）中，亥姆霍兹方程可写为，

$$\partial_r^2 U + \frac{d-1}{r}\partial_r U + \frac{1}{r^2}\,\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} U + k^2 n^2 U = 0. \tag{12}$$

根据（11），无穷远处不存在优先方向，主导振荡由径向相位控制。为了通过算子捕捉解的渐近行为，我们利用径向权函数 [11, 17],消去振荡衰减

$$U(r,\omega) = w(r)\, u(r,\omega), \qquad w(r) := \frac{e^{\,ik\,h(r)}}{r^{\frac{d-1}{2}}}, \qquad H(r) := h'(r). \tag{13}$$

在非均匀介质中，选择 $h(r) = r$ 对应于无限元法的基函数。不过，这里我们对亥姆霍兹算子进行变换。直接计算可得（比较（A14））

$$\partial_r^2 u + 2ikH\,\partial_r u + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} u + \left(k^2\left(n^2 - H^2\right) + ikH_r + \frac{(d-1)(3-d)}{4r^2}\right) u = 0.$$

使用（6）对空间域进行紧化可得（9）。对于本文中的数值计算，我们将维数限制为二维，$d = 2$，并采用径向折射率 n（x）$=n$（r）。除第3.2.2节中的示例外，我们选择径向紧化为

$$r = \frac{\rho}{1-\rho}, \qquad G(\rho) := \frac{d\rho}{dr} = (1-\rho)^2, \tag{14}$$

为满足正则性条件（7），我们将提升函数选为 $H = \pm n$。这样， k^2 项消失，从而得到

$$\partial_\rho \left((1-\rho)^2 \partial_\rho u\right) \pm 2ikn\, \partial_\rho u + \frac{1}{\rho^2}\partial_\theta^2 u + \left(\pm ikn_\rho + \frac{1}{4\rho^2}\right) u = 0. \tag{15}$$

正号对应传播至未来零无穷远的出射波；负号则对应来自过去零无穷远的入射波。对于入射情形， $\rho = 1$ 处的边界数据描述来自无穷远的入射波；对于出射情形，数据仅施加于障碍物边界。下文将分别讨论常数折射率和变折射率情形，因为二者在散射行为和标准处理方式上存在显著差异。

2.2 常介质

我们首先考虑具有 $n \equiv 1$ 的常介质问题。假设障碍物具有软声边界。总场 U 在外部区域 $\mathcal{D}^c$ 内满足齐次亥姆霍兹方程，并在障碍物表面 Γ上满足狄利克雷边界条件：

$$(\Delta + k^2)U = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}^c, \qquad U = 0 \quad \text{on } \Gamma.$$

解在无穷远附近满足以下渐近展开：

$$U(r,\theta) = r^{-1/2}\left(e^{-ikr}u_\infty^-(\theta) + e^{+ikr}u_\infty^+(\theta)\right) + \mathcal{O}\left(r^{-3/2}\right), \qquad r \to \infty. \tag{16}$$

振幅 $u_\infty^\pm \in L^2(\mathbb{S}^1)$ 是出射／入射辐射数据。根据亥姆霍兹方程的线性性，我们将总场 U 分解为入射场和散射场， $U = U^- + U^+$。在此，我们分别介绍标准设置和两步求解器。

2.2.1 常介质的标准设置

在标准设置中， U^- 预先指定为自由空间亥姆霍兹解，

$$(\Delta + k^2)U^- = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \qquad (\text{e.g. a plane wave } U^-(r,\theta) = e^{ikr\cos(\theta-\theta_0)}). \tag{17}$$

散射场 U^+ 随后满足一个齐次外部边值问题，其狄利克雷数据由 U^- 在障碍物表面上诱导，并满足无穷远处的 Sommerfeld 辐射条件：

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)U^+ = 0 & \text{in } \mathcal{D}^c, \\ U^+ = -\,U^- & \text{on } \Gamma, \\ \sqrt{r}\,(\partial_r - ik)\,U^+ = 0 & \text{as } r \to \infty. \end{cases}$$

在辐射条件和标准光滑性假设下， U^+ 具有远场展开

$$U^+(x) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}\, u_\infty^+(\theta) + \mathcal{O}\left(r^{-3/2}\right), \qquad r \to \infty,$$

定义远场模式 u_∞^+： $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$。总场可恢复为 $U = U^- + U^+$。注意， U^+和 U^-都满足相同的自由空间亥姆霍兹算子。

2.2.2 常介质的 NIC 设置

为了直接在无界区域上计算入射场和散射场，我们通过 $u^\pm$ 式（13）定义重标度变量 $h = \pm r$ 和 $d = 2$,

$$U^- = w^- u^- = \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}}\, u^-, \qquad U^+ = w^+ u^+ = \frac{e^{+ikr}}{\sqrt{r}}\, u^+. \tag{18}$$

我们将重标度变量视为紧化坐标 ρ的函数。然后，通过在无穷远处直接求值，得到渐近展开（16）中的辐射数据 $u_\infty^\pm(\theta)$： $u^\pm(1,\ \theta) = u_\infty^\pm(\theta)$。将 $n = 1$ 代入（15），得到方程：

$$\partial_\rho\left((1-\rho)^2 \partial_\rho u^\pm\right) \pm 2ik\,\partial_\rho u^\pm + \frac{1}{\rho^2}\partial_\theta^2 u^\pm + \frac{1}{4\rho^2} u^\pm = 0. \tag{19}$$

在 $\rho = 1$处，该算子关于 ρ 变为一阶，并满足边界相容条件

$$\pm 2ik\,\partial_\rho u^\pm(1,\theta) + \partial_\theta^2 u^\pm(1,\theta) + \frac{1}{4} u^\pm(1,\theta) = 0. \tag{20}$$

对于方程中取负号的入射情形，我们将振幅规定为

$$u^-(1,\theta) = u_\infty^-(\theta) \in L^2(\mathbb{S}^1), \tag{21}$$

并且不再施加任何其他条件于 $\rho = 1$；方程通过 $u_\rho^-(1,\theta)$ 和 (20) 给出。我们在去心域上求解 (19)，得到 u^- 。我们读取代表障碍物边界的表面上的入射场， Γ，其表达式为 $U^-|_\Gamma = w^- u^-|_\Gamma$ 其中 $w^\pm = e^{\pm ikr}/\sqrt{r}$。随后利用该入射场求解散射问题，得到散射场$U^+$。在软声场情形下，我们在障碍物表面 U 上对总场施加物理边界条件 Γ，即 $U|_\Gamma = 0$，由此得到入射场与散射场之间的关系： $U^+|_\Gamma = -U^-|_\Gamma$。重缩放后的散射 NIC 场的边界数据由下式给出：

$$u^+|_\Gamma = (w^+)^{-1} U^+|_\Gamma = -(w^+)^{-1} U^-|_\Gamma = -(w^+)^{-1} w^- u^-|_\Gamma = -e^{-2ikr} u^-|_\Gamma. \tag{22}$$

只需在零无穷远处计算 u^+ ，即可读出出射辐射数据，进而得到散射振幅，

$$u^+(1,\theta) = u_\infty^+(\theta) \in L^2(\mathbb{S}^1), \tag{23}$$

这一步完成了散射问题的求解 $u_\infty^- \mapsto u_\infty^+$ 如图 1 所示，将 (21) 映射到 (23)。这一两步过程体现了第 A.2 节所述连续理论的基础结构。然而，在常介质中，无需通过数值计算求解入射场，因为它总能以解析方式构造。第 3.1.1 节进行这项计算，主要是为了测试两步求解器。

2.3 变介质

变介质的几何设置与第 2.2 节和图 1 中的相同，但包含一个非零扰动 b，见（11）。与常介质情形一样，总场U 在外部区域中满足变系数亥姆霍兹方程 $\mathcal{D}^c$，并在 Γ上满足狄利克雷边界条件：

$$(\Delta + k^2 n^2(x))U = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}^c, \qquad U = 0 \quad \text{on } \Gamma. \tag{24}$$

渐近展开（16）适用于短程折射率。对于长程情形，当扰动随 r缓慢衰减时，（16）中的相位会出现库仑型对数修正。接下来，我们像之前一样将总场分解为入射部分和散射部分， $U = U^- + U^+$并分别介绍标准设置和 NIC 设置。

2.3.1 变介质的标准设置

在标准设置中， U^- 被假定满足自由空间亥姆霍兹方程（17），尽管背景介质具有变折射率。这一假设意味着散射场 U^+ 在外部区域中存在一个源项：

$$(\Delta + k^2(1+b))\, U^+ = -k^2\, b\, U^- \quad \text{in } \mathcal{D}^c. \tag{25}$$

这个方程称为 Lippmann–Schwinger 方程 [18]。与之前一样，障碍物表面上的边界条件由软声条件导出：$U^+|_\Gamma = -U^-|_\Gamma$。辐射条件取决于 b 的渐近行为。对于满足 $b(x) = \mathcal{O}(r^{-1-\varepsilon})$ 的短程背景介质，我们施加通常的 Sommerfeld 条件：

$$\sqrt{r}\,(\partial_r - ik)\, U^+ \longrightarrow 0 \quad \text{as } r \to \infty.$$

对于具有 $1/r$ 尾部的长程背景介质，例如 $n^2(r) = 1 + \frac{\kappa}{r} + \mathcal{O}(r^{-2})$，这意味着 $b(r) = \frac{\kappa}{r}$，其出射条件需要进行库仑修正：

$$\sqrt{r}\left[\partial_r - ik\left(1 + \frac{\kappa}{2r}\right)\right] U^+ \longrightarrow 0 \quad \text{as } r \to \infty. \tag{26}$$

尽管上述公式所得的总场满足(24)，但这种分解并不能描述波在真实介质中的传播：U^- 求解(17)并不能得到变折射率亥姆霍兹方程的解，因此边界数据 $U^-|_\Gamma$并非经过真实背景传播的场的迹。

Lippmann–施温格公式将所有散射（包括介质产生的后向散射）都归入散射场 U^+。与此不同，几何散射理论将入射场和散射场置于同等地位，把它们视为同一亥姆霍兹算子的解。因此，我们要求这两个分量在外部区域都满足同一个方程，

$$(\Delta + k^2 n^2(x))\, U^- = 0, \qquad (\Delta + k^2 n^2(x))\, U^+ = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}^c.$$

对于短程介质中的散射问题，通常没有必要通过数值方法同时求解两个场。然而，对于物理入射波带有对数相位修正的长程介质，不应在全局范围内采用临时构造的自由空间亥姆霍兹方程解。施加修正的出射条件（26）对 U^+ 只约束了出射部分；自由空间入射解的相位并不正确。对于长程介质，一致的表述要求使用同一算子计算入射场和散射场，或者构造满足修正后的长程渐近行为的全局入射场。

2.3.2 变介质的 NIC 设置

设 $\mathcal{N}$是一个满足 $\mathcal{N}'(r) = n(r$的函数。选取高度函数为 $h(r) = \pm\mathcal{N}(r)$。这一选取确保沿特征线进行紧化。正则性条件（7）显然成立。重标度场定义如下：

$$U^- = \frac{e^{-ik\mathcal{N}(r)}}{\sqrt{r}}\, u^-, \qquad U^+ = \frac{e^{+ik\mathcal{N}(r)}}{\sqrt{r}}\, u^+, \quad \text{where} \quad \mathcal{N}(r) := \int n(r)dr. \tag{27}$$

紧化方程为

$$\partial_\rho \left((1-\rho)^2 \partial_\rho u^\pm\right) \pm 2ikn\, \partial_\rho u^\pm + \frac{1}{\rho^2}\partial_\theta^2 u^\pm + \left(\pm ikn_\rho + \frac{1}{4\rho^2}\right) u^\pm = 0. \tag{28}$$

辐射条件自然包含在紧化方程中，并以边界相容条件的形式出现：

$$\pm 2ikn(1,\theta)\, \partial_\rho u^\pm(1,\theta) + \partial_\theta^2 u^\pm(1,\theta) + \left(\pm ikn_\rho(1,\theta) + \frac{1}{4}\right) u^\pm(1,\theta) = 0. \tag{29}$$

散射场的边界数据由入射场通过以下方式获得

$$u^+|_\Gamma = -e^{-2ik\mathcal{N}(r)} u^-|_\Gamma. \tag{30}$$

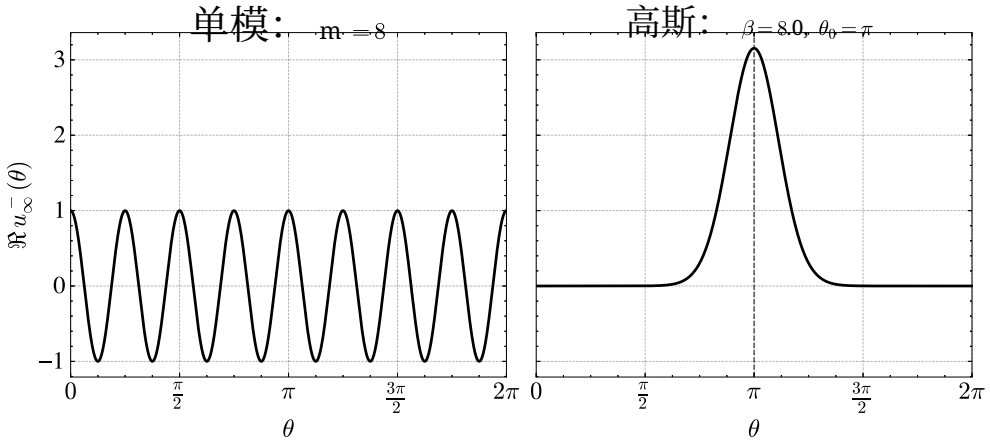


图 2：两类入射数据在同一坐标轴上的实部，$\Re u_\infty^-(\theta)$，规定于过去零无穷远 $\mathscr{I}^-$：单模 (31)，其中 $m = 8$；以及采用冯·米塞斯分布 (57) 的圆形高斯波束，其中 $\beta = 8$，$\theta_0 = \pi$。

3 数值实验

我们展示了对两类入射数据——单一傅里叶模态和圆形高斯波束（图 2）——求解带有来自无穷远处入射辐射的 NIC 变换的亥姆霍兹方程的数值解。我们在零无穷远处的天球圆[2] 上指定入射辐射。为了将数值解与解析解进行比较，我们将计算范围限制在单位圆盘和径向介质上的散射。单一模态的计算有助于我们分离离心势垒，并展示变介质对散射映射的影响。对于无穷远处更接近实际的数据，我们还在第 3.2 节计算了圆形高斯波束入射下的散射振幅。

3.1 单模

来自无穷远的入射数据最简单的光滑形式是单个傅里叶模态，

$$u_\infty^-(\theta) = e^{im\theta}, \qquad m \in \mathbb{Z}. \tag{31}$$

我们研究单位圆盘上的散射。由于问题具有旋转不变性，这一简化设定存在显式解。因此，鉴于入射场的振幅为单位值，散射振幅就是散射场的远场振幅。单模数据还有一个优点，即当 $|m|$ 趋近于 k 时，可以分离出离心势垒。我们讨论常数介质（第 3.1.1节）、短程介质（第3.1.2节）和长程介质（第3.1.3节）的数值解与解析解。

[2]我们的实验是在二维空间中进行的，但将其应用于在天球上给定数据的三维空间也很直接。

3.1.1 常介质

显式解

寻求模态解 $U(r,\ \theta)\ =\ U_m(r)\ e^{im\theta}$，其中 $m\ \in\ \mathbb{Z}$，我们得到径向方程

$$U_m'' + \frac{1}{r}U_m' + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) U_m = 0. \tag{32}$$

该解可写为 m 阶汉克尔函数的线性组合：

$$U_m(r) = U_m^-(r) + U_m^+(r) = A_m\, H_m^{(2)}(kr) + B_m\, H_m^{(1)}(kr).$$

系数（A_m，B_m）由边界条件确定。我们考虑来自无穷远的单模入射，这确定了 A_m，以及声软单位圆盘，这确定了 B_m。为表示模态散射振幅，我们写出自变量 [19, 20] 较大时汉克尔函数的渐近行为：

$$H_m^{(2)}(kr) \sim \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}}\sqrt{\frac{2}{\pi k}}e^{i\frac{\pi}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)}, \qquad H_m^{(1)}(kr) \sim \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}\sqrt{\frac{2}{\pi k}}e^{-i\frac{\pi}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)}. \tag{33}$$

条件（31）与远场振幅的定义（16）共同推出

$$A_m = \sqrt{\frac{\pi k}{2}}\, e^{-i\frac{\pi}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)}, \tag{34}$$

因此，当 $r \to \infty$ 时，$U_m^-(r,\ \theta) \sim r^{-1/2}e^{-ikr}u_\infty^-(\theta)$。在半径为单位长度的圆盘 $r = 1$ 上施加软声条件，得到 $U_m(1) = U_m^-(1) + U_m^+(1) = 0$，因此

$$A_m\, H_m^{(2)}(k) + B_m\, H_m^{(1)}(k) = 0 \quad \Longrightarrow \quad B_m = -A_m\, \frac{H_m^{(2)}(k)}{H_m^{(1)}(k)}.$$

单位半径声软圆盘的散射解为

$$U_m^+(r) = -A_m \frac{H_m^{(2)}(k)}{H_m^{(1)}(k)}\, H_m^{(1)}(kr), \qquad r > 1. \tag{35}$$

波数 k 处的散射映射是算子 $S(k)\ :\ \ u_\infty^-(\theta)\ \ \mapsto\ u_\infty^+(\theta)$，将入射辐射映射为出射辐射。由于我们的问题具有旋转不变性，散射映射是对角的。在单模态情形下，模态系数由散射解的远场模式给出，这可由式（33）中汉克尔函数的渐近行为推得：

$$S_m(k) = i(-1)^m\, \frac{H_m^{(2)}(k)}{H_m^{(1)}(k)}. \tag{36}$$

散射映射是幺正的，$|S_m| = 1$。

模态数值解与离心势垒

我们通过将 NIC 解展开为傅里叶模态，求解模态常折射率亥姆霍兹方程 $u^{\pm}(\rho,\ \theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m^{\pm}(\rho)e^{im\theta}$。将径向导数记作撇号，由式（19）可得径向常微分方程（ODE），

$$\left((1-\rho)^2(u_m^{\pm})'\right)' \pm 2ik\,(u_m^{\pm})' - \frac{m^2-\frac{1}{4}}{\rho^2}\,u_m^{\pm} = 0, \qquad \rho\in(\rho_\Gamma,\rho_{\mathscr{I}}) = \left(\frac{1}{2},1\right). \tag{37}$$

负号对应入射分支 u_m^-，正号对应出射分支 u_m^+。纯入射物理解在原点处是奇异的。我们使用标准的一维切比雪夫配置法和高斯–洛巴托点，在去心域 $\rho\in(\rho_\Gamma,\ 1)$ 上求解上述方程，该区域对应于物理外部区域 $r\in(1,\ \infty)$。

为验证代码并分别研究离心势垒对入射解和散射解的影响，我们直接根据解析解[3]（见式35）为散射场指定解析内边界数据。入射场和散射场的边界数据为

$$u_m^-|_{\mathscr{I}^-} = 1, \qquad u_m^+|_\Gamma = -e^{-ik}A_m H_m^{(2)}(k),$$

其中 A_m 见式34）。

图3 展示了入射场和散射场的相对误差随波数 $k\in[10^{-3},10^3]$ 变化的情况，其中方位角指标为 $m=\{0,4,8,16\}$。数值解 u^{num} 与显式解 u 之间的相对误差通过高斯–洛巴托网格上的离散 ℓ^2 范数计算：

$$\mathcal{E}_{\mathrm{rel}} = \frac{\|u^{\mathrm{num}}-u\|_{\ell^2}}{\|u\|_{\ell^2}}, \quad \text{where} \quad \|u\|_{\ell^2}^2 := \sum_{j=0}^{N}|u(\rho_j)|^2. \tag{38}$$

模态解精度中最显著的特征是离心势垒。对于 m 模式，物理径向波数为 k^2-m^2/r^2。当 m 较大时，有效势 m^2/r^2 将波限制在较小的 r 范围内，从而在 m/k 附近形成离心势垒，图3中的竖直虚线标示了该位置。数值解在离心势垒之外展现出谱精度，但在势垒以下则不具备这种精度。在势垒以下（$r<m/k$），入射单模态具有病态性，因为纯入射分支 $H_m^{(2)}(z)$在 $z=kr\to 0$ 时会按 z^{-m} 增长。相比之下，散射问题在 k 较小时具有良好的条件性，因为散射映射（36）表现为$S_m \sim i(-1)^{m+1}\left(1+\mathcal{O}\left(k^{2m}\right)\right)$，因此散射模态振幅在较小的 k 下会随 m 快速衰减。因此，对于 $m\neq 0$，散射场始终比入射场更加精确。

[3]这种解耦（ u^+的解析内边界）仅用于一维情形，以独立测试入射和散射求解器的精度。在二维实验中，我们通过软声条件，使用（22）或（30）在障碍物边界处对两个解进行数值耦合。

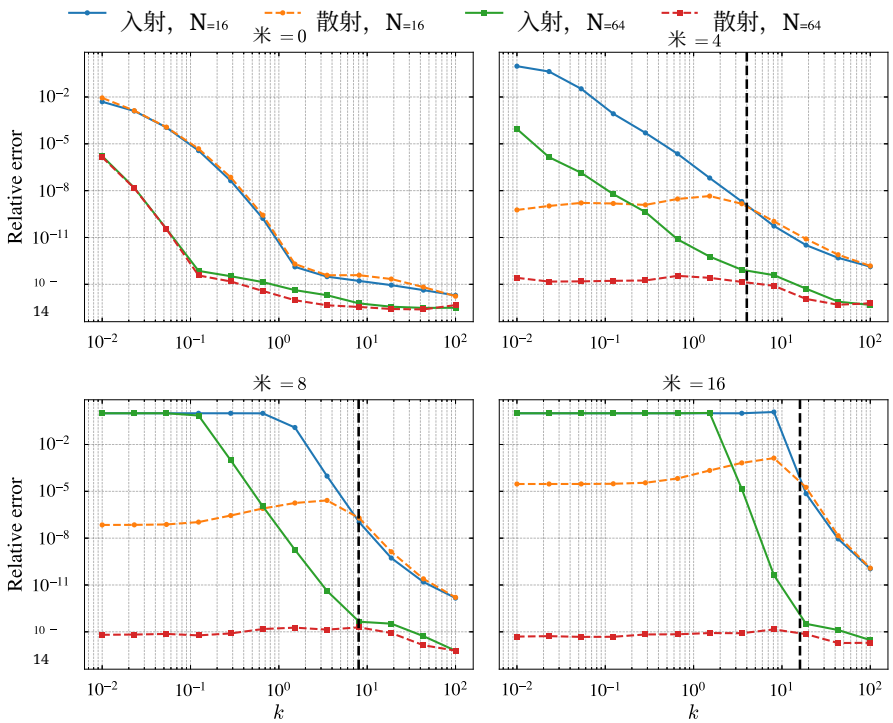


图3：使用一维切比雪夫谱方法，在两种分辨率$N = \{16, 64\}$ 下，对四个方位角指标 $m \in \{0, 4, 8, 16\}$，入射（实线）和散射（虚线）场相对于波数 k 的离散 ℓ^2 范数中的相对误差。垂直虚线标示离心势垒。散射场的精度始终更高；入射误差在势垒以下较大，但越过势垒后会迅速下降。

完整的数值实现与收敛性

我们使用谱方法求解 NIC-亥姆霍兹方程（19），该方程采用单模入射边界数据（31），谱方法通过 Dedalus 框架实现 [21]。该解表示在傅里叶–切比雪夫基中，

$$u^{\pm}(\rho, \theta) \approx \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-M}^{M} \hat{u}^{\pm}_{n,m} T_n(\rho) e^{im\theta},$$

其中， $T_n(\rho)$ 为切比雪夫多项式， $e^{im\theta}$ 为傅里叶模式。在 Dedalus 中，径向方向上的狄利克雷边界通过 tau 公式施加，解则在包含区间端点的切比雪夫网格上求值。

图 4 显示了入射场和散射场的重标度解实部 $u^{\pm}(\rho, \theta)$，其中 $m = 40$ 和 $k = 120$。内圆表示障碍物表面 $\rho_\Gamma = \frac{1}{2}$，外圆表示零无穷远 $\rho_{\mathscr{I}^\pm} = 1$。我们从入射亥姆霍兹问题中提取障碍物上的入射场的迹，并通过（22）为散射场提供数值狄利克雷边界数据。

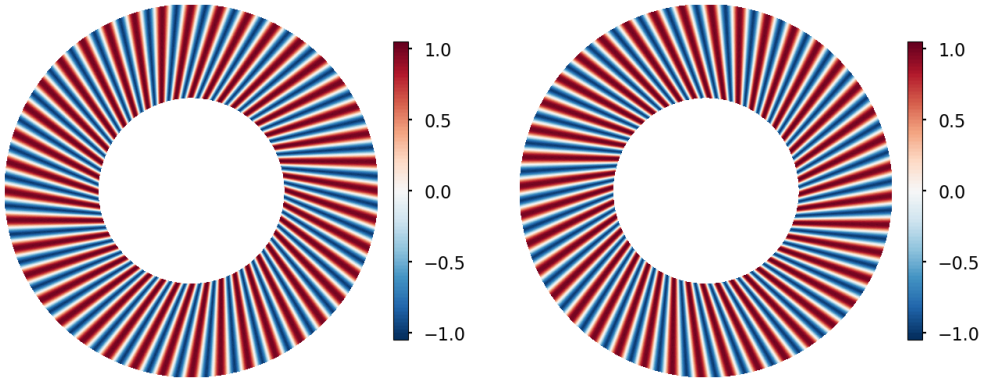


图4：单模入射辐射下的重标度入射场和散射场，$u^{\pm}$，其中 $m = 40$ 且 $k = 120$。内圆为障碍物表面；外圆为零无穷远（参见图1）。解主要由角向振荡主导，并有相对笔直的射线连接障碍物与无穷远。散射映射是幺正的（纯相位）。

解主要由角向振荡 $e^{im\theta}$（沿圆周振荡四十次）主导。紧化径向方向上的变化较为平缓。带状结构形成几乎笔直的射线，从 $\mathscr{I}^{\pm}$ 延伸至障碍物，这表明 NIC 基本上沿直特征线穿过外部区域传递信息。唯一可见的偏离直射线之处，是相位线略微弯曲，这是由 $m = 40$的离心势垒造成的。尽管波数 $k = 120$相对较高，入射场和散射场的重标度场从障碍物到零无穷远始终保持光滑，且量级为一。

现在，我们计算零无穷远处单模的模态散射映射，以检验耦合求解器的数值收敛。图5 将数值结果与式（36）给出的显式表达式进行比较。散射映射的误差定义为

$$\mathcal{E}_m(k) = \big|\, S_m(k) - S_m^{\mathrm{num}}(k) \,\big|.$$

绝对差值衡量相位误差，因为精确散射系数满足 $|S_m(k)| = 1$。由于入射求解器和散射求解器都采用谱分辨率，我们预期误差会随分辨率提高而指数衰减，图 5证实了这一点。实验中，角向分辨率固定为 $N_\theta = 2m + 5$。两个面板使用相同的一组比值 m/k（左：$k = 120$，右：$k = 12$），因此每条曲线代表相同的离心势垒。在两个面板中，误差均随 N_ρ 呈指数衰减，直至达到一个随 m/k增大的饱和水平。随着 m/k 增大且转向点到达障碍物，收敛开始的时刻会延后。固定 m/k时，$k = 120$ 对应的误差大于 $k = 12$，这与转向点附近过渡层变得更陡的情况相符 [20]。总之，我们观察到了预期的径向分辨率谱收敛。与标准 WKB分析一致，在固定 m 时，误差随 k增大；在固定 k 时，误差随 m/k增大。

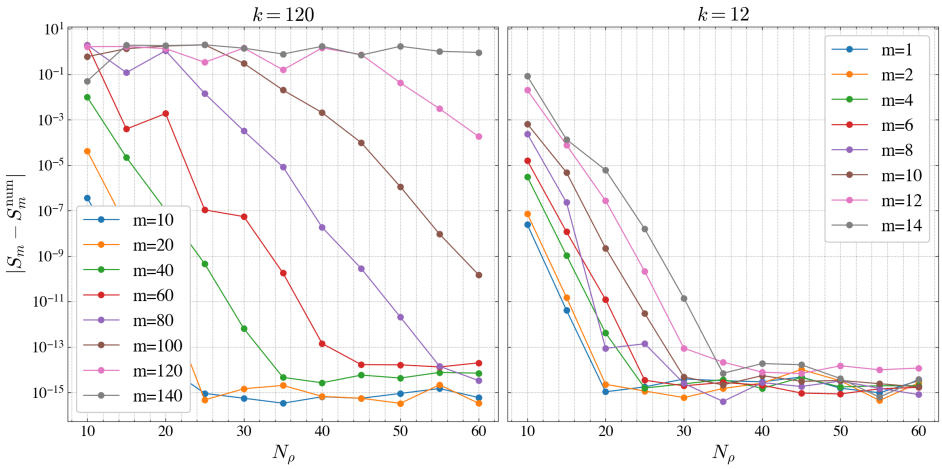


图 5：零无穷远处模态散射映射的径向谱收敛。我们在半对数尺度上绘制绝对误差 $|S_m(k) - S_m^{\mathrm{num}}(k)|$ 随径向多项式次数 N_ρ 的变化，展示两个波数的结果（左：$k = 120$；右：$k = 12$），采用相同的一组比值 m/k，并固定角向分辨率 $N_\theta = 2m + 5$。对于所有情况，误差均随 N_ρ 呈指数衰减，直至达到饱和。饱和水平和总误差随 m/k 和 k增大。

3.1.2 短程介质

我们计算短程介质中声软单位圆盘的散射映射。折射率扰动具有径向对称性、无界支撑和二次衰减：

$$n^2(r) = 1 + \frac{\kappa^2}{r^2}. \tag{39}$$

我们在无穷远处施加单个入射 m 模态来驱动该问题。我们可以显式求解模态方程

$$U_m'' + \frac{1}{r}U_m' + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) U_m = 0, \qquad \nu^2 := m^2 - \kappa^2 k^2.$$

解可以写成 ν 阶汉克尔函数的线性组合：

$$U_m(r) = A_\nu \, H_\nu^{(2)}(kr) + B_\nu \, H_\nu^{(1)}(kr).$$

施加单模入射辐射条件（31），并按照第3.1.1节的方法进行，我们得到模态散射映射：

$$S_m(k;\kappa) = i(-1)^\nu \frac{H_\nu^{(2)}(k)}{H_\nu^{(1)}(k)}, \qquad \nu = \sqrt{m^2 - \kappa^2 k^2}\,. \tag{40}$$

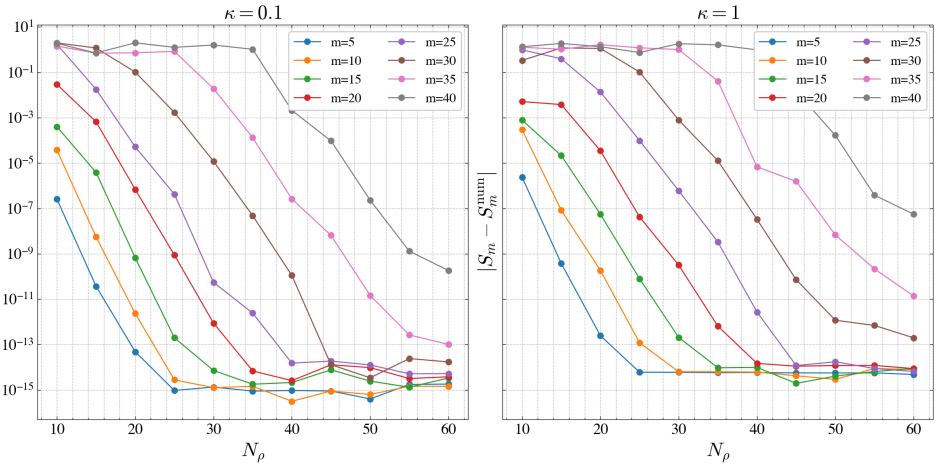


图 6：对于具有无界支撑和二次衰减的径向对称折射率的变介质，模态散射映射在零无穷远处的径向谱收敛（39）。我们在半对数尺度上绘制绝对误差 $|S_m(k) - S_m^{\mathrm{num}}(k)|$ 随径向多项式次数 N_ρ 的变化，其中强度参数取两个值（左：$\kappa = 0.01$；右：$\kappa = 0.99$），并采用相同的一组 m-模式、相同的波数 $k = 20$和角向分辨率 $N_\theta = 2m + 5$。误差随 N_ρ 呈指数衰减，直至达到饱和。

对于数值求解器，我们使用特征坐标和重标度（27）。由此得到的紧化方程（28）在零无穷远处具有正则系数，并采用与上一节相同的谱伽辽金方法进行数值求解。重标度场通过边界条件（30）耦合，其中

$$\mathcal{N}(r) = \int \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{r^2}}\, dr = \sqrt{r^2 + \kappa^2} - \kappa \operatorname{arcsinh} \frac{\kappa}{r}. \tag{41}$$

图40所示的显式解对应的数值散射映射的谱收敛情况见图 6，其中强度参数 κ取两个不同的值。随着径向分辨率 N_ρ 增加，误差呈指数衰减，直至达到饱和。强度参数较大时，数值误差略高。

值得注意的是，NIC 不依赖于基本解是否存在，因此只需对形式体系稍作修改，便可将其应用于变介质。使用特征坐标时，主要环节是求解程函方程，如式（41）所示。不过，NIC 只要求在无穷远处进行正则紧化，因此并不依赖于对外部区域中每一点的程函解都有明确了解。在第 3.2.2 节中，我们给出了一个采用双曲坐标的变介质解的计算示例，该设置无需使用特征坐标。

3.1.3 长程介质

对于长程介质，需要对该方法作更大幅度的修改，因为其折射率具有库仑型尾部。我们考虑一种带有线性衰减扰动的径向折射率

$$n^2(r) = 1 + \frac{\kappa}{r}. \tag{42}$$

为解析地构造显式解，我们求解径向常微分方程

$$U_m''(r) + \frac{1}{r}U_m'(r) + \left(k^2 + \frac{k^2\kappa}{r} - \frac{m^2}{r^2}\right)U_m(r) = 0. \tag{43}$$

关于径向变化声学介质的相关解可见 [22]。引入缩放后的径向变量 $z = kr$ ，并通过 $U_m(r) = z^{-1/2}w(z$应用刘维尔变换，可得库仑径向方程

$$w''(z) + \left(1 - \frac{2\eta}{z} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{z^2}\right)w(z) = 0,$$

参数为

$$\lambda = m - \frac{1}{2}, \qquad \lambda(\lambda+1) = m^2 - \frac{1}{4}, \qquad \eta = -\frac{k\kappa}{2}. \tag{44}$$

解可以用库仑-汉克尔函数 [19] 表示为

$$U_m(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}}\left(A_\lambda\, H_\lambda^{(-)}(\eta, kr) + B_\lambda\, H_\lambda^{(+)}(\eta, kr)\right). \tag{45}$$

为确定系数，我们考察库仑-汉克尔函数在 $z \to \infty$ 时的渐近行为。定义库仑相移 $\sigma_\lambda(\eta) = \arg\Gamma(\lambda+1+i\eta)$，对于大宗量 [19]，有以下渐近式：

$$\begin{aligned} H_\lambda^{(\pm)}(\eta, z) &\sim \exp\left(\pm i\left[z - \eta\log(2z) - \frac{\pi}{2}\lambda + \sigma_\lambda(\eta)\right]\right), \\ &\sim \exp\left(\pm ik\left[r + \frac{\kappa}{2}\log r\right]\right)\exp\left(\mp i\left[\frac{k\kappa}{2}\log(2k) + \frac{\pi}{2}\lambda - \sigma_\lambda(\eta)\right]\right). \end{aligned} \tag{46}$$

我们定义长程相位

$$\Phi(r;\kappa) := r + \frac{\kappa}{2}\log r,$$

使得 $e^{\pm ik\Phi}$ 捕获了库仑相位中依赖于 r 的部分。模态系数具有长程渐近展开

$$U_m(r) \sim \frac{1}{\sqrt{r}}\left(e^{-ik\Phi(r;\kappa)}\, u_{m,\infty}^- + e^{+ik\Phi(r;\kappa)}\, u_{m,\infty}^+\right). \tag{47}$$

如式（31）所示，我们规定无穷远处的单模入射具有单位振幅。该条件意味着，散射场的远场振幅即为散射振幅：

$$u^{-}_{m,\infty} = 1 \quad \Longrightarrow \quad u^{+}_{m,\infty} = S_m(k;\kappa) \tag{48}$$

为了将入射解归一化，使其入射辐射数据在无穷远处具有单位振幅，我们令

$$A_\lambda := \sqrt{k}\, \exp\Big(-i\left[\eta \log(2k) + \frac{\pi}{2}\lambda - \sigma_\lambda(\eta)\right]\Big). \tag{49}$$

采用这一选择后，入射场

$$U^{-}_m(r) := A_\lambda \, \frac{H^{(-)}_\lambda(\eta, kr)}{\sqrt{kr}} \tag{50}$$

满足

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\, e^{+ik\Phi(r;\kappa)}\, U^{\mathrm{inc}}_m(r,\theta) = u^{-}_{m,\infty} = 1. \tag{51}$$

对于软声散射，我们在单位圆上对总场施加齐次狄利克雷边界条件：$U^{-}_m(1) = U^{-}_m(1) + U^{+}_m(1)$。该条件确定了散射模态

$$U^{+}_m(r) := -\, A_\lambda \, \frac{H^{(-)}_\lambda(\eta, k)}{H^{(+)}_\lambda(\eta, k)} \, \frac{H^{(+)}_\lambda(\eta, kr)}{\sqrt{kr}}. \tag{52}$$

随后通过取出射远场极限得到库仑修正散射振幅：

$$S_m(k;\kappa) = \lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\, e^{-ik\Phi(r;\kappa)}\, U^{+}_m(r), \tag{53}$$

$$= -\,\frac{A_\lambda}{\sqrt{k}} \, \frac{H^{(-)}_\lambda(\eta, k)}{H^{(+)}_\lambda(\eta, k)} \, \exp\left(i\Big[\frac{k\kappa}{2}\log(2k) - \frac{\pi}{2}\lambda + \sigma_\lambda(\eta)\Big]\right), \tag{54}$$

利用（46）和（49），可得显式表达式

$$S_m(k;\kappa) = -i(-1)^m \, \frac{H^{(-)}_\lambda(\eta, k)}{H^{(+)}_\lambda(\eta, k)} \, e^{ik\kappa\log(2k) + 2i\sigma_\lambda(\eta)}. \tag{55}$$

将该表达式与常指标（36）和短程（40）振幅进行比较，我们看到，长程散射振幅会被一个取决于强度参数 κ 的库仑相位因子所修正。这个相对简单的公式表明，对于长程介质，准确的散射计算必然同时涉及库仑型背景相位和障碍物响应。在平面波入射下，这一计算在解析上较为繁琐。第 2.3.1 节所述的标准处理通常假设平面波入射，并得到

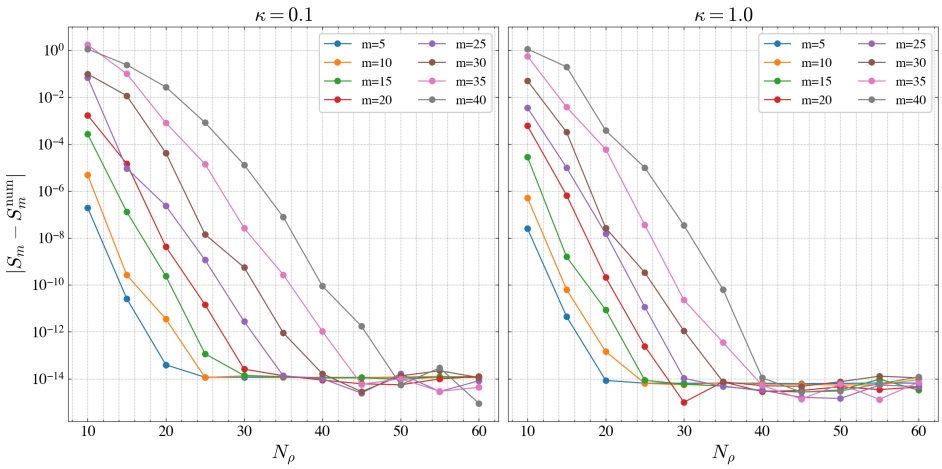


图 7：对于径向对称折射率的无界支撑变介质（其偏离 1 的部分按二次幂衰减），零无穷远处模态散射映射的径向谱收敛（39）。我们在半对数尺度上绘制绝对误差 $|S_m(k) - S_m^{\mathrm{num}}(k)|$ 与径向多项式次数 N_ρ 的关系，分别取强度参数的两个值（左：$\kappa = 0.1$；右：$\kappa = 0.9$），使用相同的 m- 模式、相同的波数 $k = 40$ 以及角向分辨率 $N_\theta = 2m + 5$。对于所有情况，误差均随 N_ρ 呈指数衰减，直至达到饱和。强度参数较大时，饱和水平和总误差略高。

变系数亥姆霍兹方程（25）。模态解由涉及库仑-汉克尔函数和贝塞尔函数的非平凡积分表示给出，散射映射没有简单的闭式表达。相比之下，在无穷远处规定单模入射数据会导出齐次库仑方程（43），并且散射映射可化简为单一的显式相位因子。

对于 NIC 实现，我们求解程函方程，

$$\mathcal{N}(r) = \int \sqrt{1 + \frac{\kappa}{r}}\, dr = \sqrt{r(r+\kappa)} - \kappa \log\!\left(\sqrt{r+\kappa} - \sqrt{r}\right) - C(\kappa), \tag{56}$$

其中，积分常数 $C(\kappa) := \frac{1}{2}\left(\kappa + \ln \frac{2}{\kappa}\right)$ 的选取满足：当 $r \to \infty$ 时，有 $\mathcal{N}(r) \sim r + \frac{\kappa}{2}\log r = \Phi(r;\kappa)$。解的相位和归一化确保入射 NIC 场 $u^-(\rho,\theta) := \sqrt{r(\rho)}\exp(ik\mathcal{N}(r(\rho)))\, U_m^-(r(\rho))\ \theta)$ 在零无穷远处满足 $u^-(1,\theta) = e^{im\theta}$，而散射 NIC 场具有与散射振幅（55）相对应的远场。

数值散射映射向显式解的谱收敛（55）如图所示。图 7 展示了强度参数 κ取两个不同值时的结果。与图 6一样，我们观察到误差随径向分辨率 N_ρ 提高而指数衰减，直至饱和。强度参数较大时，数值误差略高。

3.2 高斯波束

上一节讨论的单模入射辐射在数学上颇具吸引力，但并不代表局域源辐射出的场。为使无穷远处的入射辐射在角方向上局域化，我们将数据 $u_\infty^-(\theta)$ 设为窄高斯分布。此类数据会生成波束状入射场。

图 2 右图所示的圆形高斯波束提供了平滑的角数据和指数模态衰减，2，

$$u_\infty^-(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi I_0(2\beta)}} \exp\left(\beta \cos(\theta - \theta_0)\right), \tag{57}$$

其中， θ_0 是波束方向， I_0 是第一类修正贝塞尔函数，用于确保入射场归一化为 $\|u_\infty^-\|_{L^2(0,\ 2\pi)} = 1$ ，从而使入射场的总能流为 1。参数 $\beta > 0$ 是集中参数，用于控制波束的角扩展：较小的 β 会产生近似各向同性入射，而较大的 β 则会在 θ_0周围产生聚焦狭窄的波束。平方模 $|u_\infty^-(\theta)|^2$本质上是冯·米塞斯分布，即正态分布 [23]的圆形类比。该波束的模态系数呈指数衰减，从而减少吉布斯振荡并提高数值稳定性。利用雅可比–安格展开$e^{\beta\cos^\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} I_n(\beta)\ e^{in\theta}$，我们将模态谱计算为

$$u_{m,\infty}^- = \frac{1}{\sqrt{2\pi I_0(2\beta)}}\, I_m(\beta)\, e^{-im\theta_0}. \tag{58}$$

模态序号较大时，模式按指数衰减，其估计为 $|m| \to \infty$ with the estimate$|u_{m,}$ $_\infty| \sim e^{-m^2/(2\beta)}$ [20]。高斯波束在 β取值较大时更加集中，从而激发更高的 m-模态。

3.2.1 常介质

根据模态表示（58）以及第 3.1.1节讨论的软声单位圆盘单模态解，我们可以构造散射场的显式解。每个模式都乘以相应的散射振幅：$u_{m,\ \infty}^+ = S_m(k) u_{m,\ \infty}^-$，其中常折射率情形下的振幅由（36）给出。精确的散射远场模态振幅为

$$u_{m,\infty}^+ = S_m(k)\, u_{m,\infty}^- = i(-1)^m\, \frac{H_m^{(2)}(k)}{H_m^{(1)}(k)}\, \frac{I_m(\beta)}{\sqrt{2\pi I_0(2\beta)}}\, e^{-im\theta_0}. \tag{59}$$

通过对傅里叶级数求和，我们得到相应的散射远场方向图， $u_\infty^+(\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_{m,}^+$ $_\infty\, e^{im\theta}$。这一显式表示为数值格式提供了严格的基准。在实现中，我们针对角向离散化在傅里叶空间中进行计算，模态指标为整数 $m\ \in\{-N_\theta/2, \ldots, N_\theta/2 - 1\}$。对于给定的 ($\beta$, k)，我们首先利用$u_{m,\ \infty}^-$ 根据 (58) 构造精确的入射模态振幅，然后乘以 S_m (k)，得到散射模式

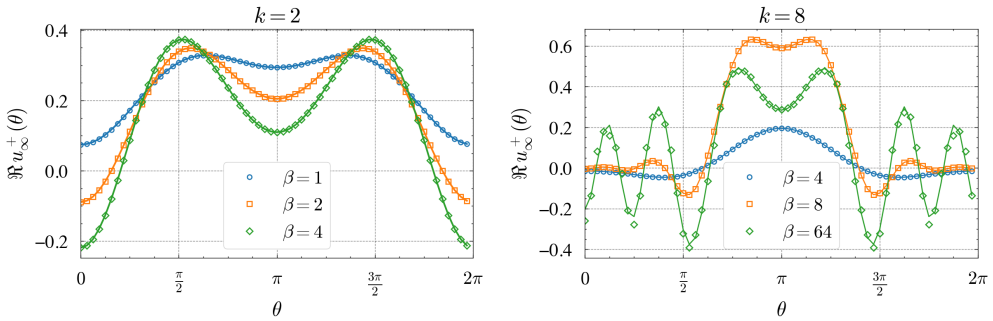


图 8：不同集中参数下高斯波束入射（57）时，精确散射远场（实线）与数值解（空心标记）的对比β 和 $\theta_0 = \pi$。波数分别为 $k = 2$ （左）和 $k = 8$ （右）。为展示差异，分辨率特意设得较低（$N_\rho = 16$, $N_\theta = 64$）。对于较小和中等的波束集中参数（$\beta = 1$，2，4，在 $k = 2$ 时；以及 $\beta = 1$，8，在 $k = 8$ 时），数值解与解析曲线十分吻合。在最具挑战性的情形（（k，β）=（8，64），右图中的绿色曲线）下，分辨率不足，展示了大 β 和更高频率下数值计算困难的显现。

$u^+_{m,\,\infty}$ 在 (59) 中。将这些系数赋给一个谱向量并进行逆变换，即可在与数值解相同的离散角网格上得到精确的散射远场 $u^+_\infty(\theta)$。数值求解器根据 (19) 生成离散的入射解和散射解 u^- 以及 u^+ 。我们在零无穷远处评估这些场，该处对应于计算域的外边界 $\rho = 1$，并在离散网格上进行采样$\{\theta_j\}_{j=0}^{N_\theta-1}$ 。

在图 8中，我们展示了数值计算得到的散射远场实部u^+_∞（θ），并与由模态谱（59）得到的显式参考解进行比较。比较涵盖集中参数 β 的三个取值，以及两个波数 $k = 2$ 和 $k = 8$，其中 $\theta_0 = \pi$。实线表示解析远场，空心标记表示在计算域外边界上求得的数值解。分辨率特意设得较低（$N_\theta = 64$， $N_\rho = 16$），以便肉眼观察到最具挑战性情形下两种解之间的差异。

对于较小和中等的波束集中参数，吻合度极佳。即使在这种相对较低的分辨率下，当 $k = 2$ 时，$\beta = 1,2,4$ 的数值曲线，以及当 $k = 8$ 时，$\beta = 1,8$ 的数值曲线，都与其解析结果无法区分。本实验中要求最高的情形（k, β）$=(8,64)$ 明显未得到充分分辨。这个例子展示了该方法面临挑战的情形：频率 k 和集中参数 β 都较大，以至于解的有效角带宽超出可用的傅里叶分辨率，并且由于激发了高 m- 模式，我们进入离心势垒开始发挥作用的区域。尽管如此，如下一节所示，适度提高谱分辨率即可准确捕捉该解。

3.2.2 庞加莱–贝尔特拉米圆盘上的各向异性介质

我们目前讨论过的数值示例包括变介质的径向剖面，以及方程的特征坐标；后者需要用到程函解。采用这种设置进行说明的优点在于，径向介质存在显式解，且特征坐标下的方程形式简单。不过，主定理中给出的 NIC-亥姆霍兹方程（9）足够一般，可以处理非径向情形和非特征坐标。本节将讨论使用双曲坐标求解更一般的各向异性介质散射问题，相关坐标见（A8）。

该各向异性介质示例源自折射率（39），通过移动其中心得到。我们将扰动中心置于负 x 轴上，$\mathbf{x}_0 = (-d,\ 0)$。使用以障碍物为中心的极坐标（r，θ），可得 $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2 = r^2+d^2+2dr\cos\theta$。因此，偏心折射率可写为

$$n^2(r,\theta) = 1 + \frac{\kappa^2}{r^2 + d^2 + 2dr\cos\theta + r_0^2}, \tag{60}$$

其中，$r_0 > 0$ 起核半径的作用：它使扰动中心 $\{r = d, \theta = \pi\}$ 处的奇异性得到正则化，并设定折射率的最大值。该介质是各向异性介质，因为折射率同时依赖于 r 和 θ。

求解该各向异性介质的程函方程是可行的，但并不简单。一种更简便的方法是在（A8）中使用标准双曲面，并进行径向紧化（A9），从而在穿孔的庞加莱´–贝尔特拉米圆盘上求解 NIC-亥姆霍兹方程。具体而言，我们选择空间紧化

$$r = \frac{2\rho}{1-\rho^2}, \qquad G = \frac{1}{r'} = \frac{(1-\rho^2)^2}{2(1+\rho^2)}, \tag{61}$$

以及高度函数

$$h = \pm\sqrt{1+r^2} = \pm\frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}, \qquad H = \pm\frac{r}{\sqrt{1+r^2}} = \pm\frac{2\rho}{1+\rho^2}. \tag{62}$$

这些选择满足（6）和（7）。因此，通过（8）进行重标度，得到变换后的方程（9），该方程在双曲圆盘的理想边界处定义良好。特别是，紧化亥姆霍兹方程中形式上奇异的项在整个 ρ 区域内（包括 $\rho = 1$处）都是正则的。NIC-Helmholtz 方程写作：

$$\begin{aligned} 0 = {} & \partial_\rho\left[\frac{(1-\rho^2)^2}{2(1+\rho^2)}\,\partial_\rho u^\pm\right] \pm \frac{4ik\rho}{1+\rho^2}\,\partial_\rho u^\pm + \frac{1+\rho^2}{2\rho^2}\,\partial_\theta^2 u^\pm \\ & + \left[k^2\left(\frac{2}{1+\rho^2} + \frac{1+\rho^2}{2}\,\frac{\kappa^2}{\rho^2 + (d^2+r_0^2)\Omega^2 + 2d\rho\Omega\cos\theta}\right) \pm \frac{2ik(1-\rho^2)}{(1+\rho^2)^2} + \frac{1+\rho^2}{8\rho^2}\right]u^\pm. \end{aligned}$$

与特征紧化相比，这种紧化的另一个优势在于，障碍物边界条件与折射率无关。在特征

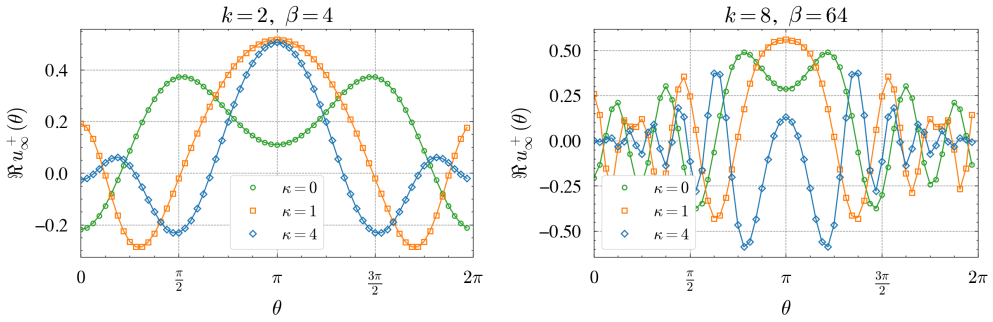


图 9：高斯波束入射时（57），不同强度参数下精确散射远场（实线）与数值解（空心标记）的比较 κ。我们设 $k=2$（左）和 $k=8$（右），其中 $\beta=k^2$。分辨率在 $\{N_\rho=64,\, N_\theta=64\}$ 时相对较高。

坐标中，障碍物处入射场与散射场之间的联系是通过软声条件建立的，该条件可转换为（30），这要求使用程函解。然而，在双曲坐标中，时间变换与折射率无关。障碍物处入射场与散射场之间的关系由高度函数给出，该函数满足渐近条件（A5），但在内部区域中不受其他约束。在我们的情形下，重标度散射场的障碍物边界条件如下：

$$U^+|_\Gamma + U^-|_\Gamma = \frac{e^{ik|h|}}{\sqrt{r}} u^+|_\Gamma + \frac{e^{-ik|h|}}{\sqrt{r}} u^-|_\Gamma = 0 \quad \Longrightarrow \quad u^+|_\Gamma = e^{-2ik|h|} u^-|_\Gamma.$$

对于单位圆盘上的散射问题，当 $r=1$ 时，条件为 $u^+(|_\Gamma) = e^{-2\sqrt{2}ik} u^-|_\Gamma$。请注意，$\bar{}$采用紧化（A9）后的内边界位于 $\rho=\sqrt{2}-1$。

取 $d=0$ 和 $r_0=0$时，各向异性折射率（60）化为径向折射率（39），对此我们有显式解（40）。图 9 中，我们将数值计算得到的散射远场 $u_\infty^+(\theta)$ 与显式参考解进行比较。高斯波束入射时的参考解构造方式与（59）类似，但将散射振幅替换为由（40）得到的短程解。将 m 的所有取值求和至 $N_\theta/2$时，包括满足 $|m|<\kappa k$的取值，修正模态数 ν 会变为复数。我们绘制了强度参数 $\kappa=\{0,1,4\}$ 取三个值时散射远场的实部，波数 $k=2$（左）和 $k=8$（右），集中参数为 $\beta=k^2$ 和 $\theta_0=\pi$。分辨率设为$\{N_\theta=64,\, N_\rho=64\}$，因此所有情况下数值解与显式解均吻合极佳。

我们纳入 $\kappa=0$ 这一情形，是为了说明双曲实现与无穷远处的特征实现（绿色曲线）相匹配，尽管内部解看起来非常不同。通过 κ 增强介质强度的影响，是改变角向模式的相对相位，从而通过干涉改变远场模式。图9 左侧面板中的低频情形显示出相对简单的模式，因为只有少数模式被

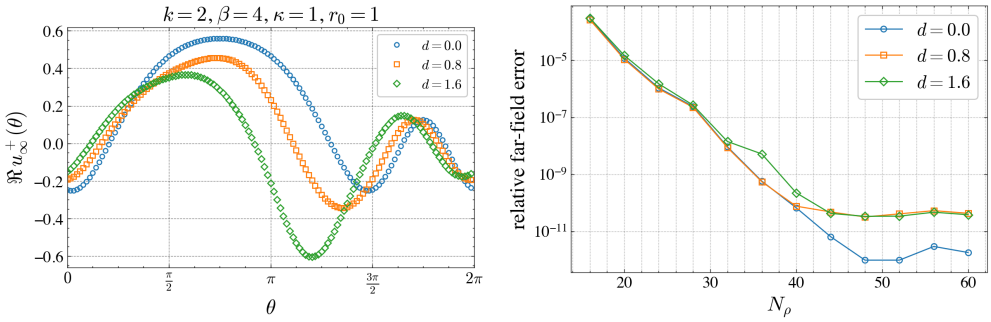


图10：各向异性介质散射。左：散射远场的实部$u_\infty^+(\theta)$，对应高斯波束入射（57）且 $k=2$、 $\beta=4$和 $\theta_0=3\pi/4$。折射率由（60）给出，其中 $\kappa=r_0=1$ 取不同的偏移参数 d。右：随着分辨率（N_ρ， N_θ）提高，远场的自收敛性。参考解在最高分辨率（N_ρ， N_θ）$=$（64，128）下计算。

激发。在右侧面板所示的高频强聚焦情形中，许多模式（最多达到 $|m|\sim k$ ）被激发，其中更大比例的模式满足 $|m|<\kappa k$，从而在无穷远处产生更强的干涉模式。双曲圆盘上的 NIC-Helmholtz 实现无需求解程函方程，便能准确捕捉这些效应。

接下来，我们求解折射率为偏心形式（60）的各向异性情形。固定 $\kappa=1$ 和 $r_0=1$后，偏移参数 d 控制 n（ρ， θ）中的角向变化程度： $d=0$ 对应径向介质；$d>0$ 则会在（ρ， θ）中产生完全不可分离、变系数的各向异性算子。图10绘出了圆形高斯波束在 $k=2$、 $\beta=4$和 $\theta_0=3\pi/4$条件下入射时，数值计算得到的散射远场 u_∞^+（θ）的实部。入射波束未与介质中心对齐，因此远场不对称。随着 d 从 $d=0$ 增至 $d=0.8$ 再增至 $d=1.6$，侧向分量变得更加明显。这种现象源于各向异性引起的模式混合：与径向情形不同，介质会在 θ中耦合傅里叶谐波，远场是多个角向模式相互作用的结果，而非彼此独立的 m通道所产生。

由于在这种非径向情形下不存在显式的散射映射，我们通过远场的自收敛性研究来确认精度。在图 10 右侧面板中，我们以最高分辨率作为参考，并测量 L^2 误差 u_∞^+(θ) 在 $[0,2\pi$上的相对误差。在所有三种情形下，随着 N_ρ 增大，误差在多个数量级范围内呈谱收敛，达到约 10^{-11}–10^{-12}。各向同性基准 $d=0$ 收敛得略充分一些（降至 $\sim10^{-12}$），而各向异性情形则在约 $\sim10^{-11}$处趋于平稳。这些图表明，即使对于可分离性不再成立、且既没有程函解也没有显式解的复杂各向异性介质，在双曲圆盘上采用二维谱离散的 NIC–Helmholtz 公式仍能实现非常精确的远场计算。

4 讨论

本文的核心论点是：在计算散射振幅和远场时，应将无穷远纳入计算域。尽管频域中没有显式的时间概念，洛伦兹几何和时间变换仍提供了一种实用机制，可将无穷远纳入计算。WKB 型重标度（5）消除了亥姆霍兹解的渐近振荡衰减，从而得到重整化场 $u^{\pm}$，使其在共形边界上光滑延拓，$\mathscr{I}^{\pm}$。在由此得到的 NIC 公式（9）中，我们可以在过去天球 u^{-}_{∞} 上指定入射辐射数据，$\mathscr{I}^{-}$并通过在未来天球 u^{+}_{∞} 上进行局部求值来提取出射数据，$\mathscr{I}^{+}$。远场模式和散射振幅等渐近观测量，可在其自然定义所在的边界上获得。这一技术以数值方式实现了几何散射的算子理论图景（泊松算子和散射矩阵）。

为将这一几何框架数值化应用于变介质，我们采用了针对入射场和散射场的修正问题设置。在标准分解中，入射场通常是自由空间平面波，而介质的所有影响都由散射解体现，该解满足一个带有源项的方程（25）（利普曼–施温格观点）。本文提出的两步求解器通过在 $\mathscr{I}^{-}$ 处指定数学上适定且具有有限能量的入射边界数据来定义入射，从而提供一个在介质背景中传播的入射场。散射场则表示障碍物修正。尽管这种方法的计算量比利普曼–施温格方法更大，但它有若干优点：(i) 清晰地区分入射的物理过程与障碍物相互作用；(ii) 避免对区域进行人工截断，以及由此产生的吸收边界条件或吸收层；(iii) 适用于长程介质。

第3 节所展示的数值实验主要限于几何形状简单的构型（单位圆盘）以及二维空间中的径向介质，以便直接与显式解进行验证。然而，该方法具有很强的普适性，可用于广泛的散射问题。特别是，我们在第3.2.2节证明，无需程函解也能准确求解各向异性无界介质中的 NIC–亥姆霍兹方程。

未来的研究仍面临若干挑战，也存在一些尚待解决的问题。紧化后的 NIC–亥姆霍兹算子在共形边界处是退化的。应研究这种退化会如何影响离散化的条件数。目前的设置仅适用于渐近均匀介质（2）；对于更一般的各向异性介质，则需要采用能够保持 $u^{\pm}$ 直至 $\mathscr{I}^{\pm}$正则性的紧化与离散化。还应针对三维情形、一般障碍物以及麦克斯韦方程组等系统，研究其数值性质。这类应用或可将此方法与采用半经典和微局部视角研究散射的相关工作联系起来[24–26]，或与使用利普曼–施温格方法进行计算的工作联系起来 [27, 28]。

总体而言，NIC 应被视为一项更广泛研究计划的开端：将无穷远纳入几何边界，可使计算与散射理论相契合。我认为，这一视角将有助于无界区域中波传播的分析与算法设计。

致谢

感谢 Paul Martin、Mike O'Neil 和 EitanTadmor 提供的宝贵讨论。我使用软件包 Dedalus [21] 完成了所有二维计算，并使用 ChatGPT 5.2 进行编码（重构、绘图、翻译）。本材料由美国国家科学基金会通过 2309084号资助。

附录 A 时空与几何散射

散射理论的核心在于研究场在无穷远处的行为。时空的底层几何结构往往隐藏在符号、幂次和权重之中。为了明确呈现这一结构，我们首先通过彭罗斯共形紧化 [8, 9]回顾闵可夫斯基时空的整体因果图景。随后，我们讨论这一图景如何隐含在 Melrose 散射框架中：在紧化图景中对入射场和散射场的识别选定了边界 $\mathscr{I}^{\pm}$；变量的复重标度对应于时间变换；而自然的半密度权重则与拉普拉斯算子的共形性质相关。

A.1 时空的整体因果结构（源自彭罗斯）

本节的一个关键思想是，时间变换会改变空间切片的几何结构。标准时间的水平集是欧几里得空间。通过变换时间坐标，我们可以得到渐近双曲空间或退化空间。我们利用渐近几何的这一变化，获得平直时空的共形紧化空间切片，从而构造出适用于计算的正则径向紧化。

为展示与数值散射相关的时空全局因果结构，我们考虑（$d+1$）维闵可夫斯基时空（$\mathcal{M},\ \eta$），其中$\mathcal{M}=\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^d_x$ 且 η 是洛伦兹平直度量[4]。在标准球坐标$\{t,r,\omega\}$下，令 $r\geq 0$ 且 $\omega\in\mathbb{S}^{d-1}$，度量可写为

$$\eta=-dt^2+dr^2+r^2\gamma,$$

其中 γ 表示单位球面 $\mathbb{S}^{d-1}$上的标准度量。进行径向紧化（ $r=1/\rho$ ）后，在无穷远处得到奇异度量，

$$\eta=-dt^2+\frac{d\rho^2}{\rho^4}+\frac{\gamma}{\rho^2}. \tag{A1}$$

该奇异性无法通过共形缩放消除，这表明欧几里得空间并非共形紧化的。

与欧几里得情形不同，时间方向的存在使度量在每一点都具有一个零锥。我们引入零坐标（或特征坐标），

$$q^+=t-r,\qquad q^-=t+r. \tag{A2}$$

[4]对于散射，我们主要关注 $d=2,\ 3$

超曲面 $q^{\pm}$ =const 是向外传播的（+）和向内传播的（–）零锥。某一点处的零方向集合构成一个球面 $\mathbb{S}^{d-1}$。闵可夫斯基度规写作

$$\eta = -(dq^{\pm})^2 \mp 2\, dq^{\pm}\, dr + r^2\gamma. \tag{A3}$$

辐射场沿特征线传播。为研究其整体行为，彭罗斯将共形紧化引入相对论 [8, 9]，，将沿零射线的无穷远映射到共形边界上的有限端点，记为 $\mathscr{I}^{\pm}$ （见附录 B和图 A1）。与（A1）中的欧几里得切片不同，沿特征线进行径向紧化会得到共形正则度量，

$$\rho^2\eta = -\rho^2(dq^{\pm})^2 \pm 2\, dq^{\pm}\, d\rho + \gamma. \tag{A4}$$

生成元 $\partial_{q^{\pm}}$ 是沿着 $\mathscr{I}^{\pm}$的自然时间平移。 $\mathscr{I}^{\pm}$ 的每个截面都是一个天球面 $\mathbb{S}^{d-1}$，而零生成元（零法向量的积分曲线；零法向量会变得与 $\mathscr{I}^{\pm}$相切）通过这些截面将 $\mathscr{I}^{\pm}$ 叶分。辐射场存在于 $\mathscr{I}^{\pm}$上。

彭罗斯的共形观点与几何散射框架相契合：入射数据在过去零无穷远 $\mathscr{I}^{-}$处给定，而出射数据则从未来零无穷远 $\mathscr{I}^{+}$处读出。共形紧化将极限 $r \to \infty$ 和 $q^{\pm} \to \pm\infty$ 转化为在边界处 $\rho = 0$进行的分析，从而为无界区域波动问题实现稳定的局部离散化。

我们通过引入高度函数A2进行推广， $h(r)$，其导数为 $H(r)$: $= \frac{dh}{dr}$ 称为 boost，并满足渐近条件，使得新坐标 τ 的等值面渐近地趋近于零坐标 [10, 29, 30]，

$$\tau = t - h(r), \qquad H(r) := \frac{dh}{dr}, \quad |H(r)| \le 1 \text{ for all } r, \text{ and } \lim_{r\to\pm\infty} H(r) = \pm 1. \tag{A5}$$

符号对应两个零无穷远， $\mathscr{I}^{\pm}$。变换后的度量为

$$\eta = -d\tau^2 - 2H d\tau dr + \left(1 - H^2\right) dr^2 + r^2\gamma.$$

应用径向紧化 $r = 1/\rho$ 并进行共形缩放，其中 ρ^2，得到

$$\rho^2\eta = -\rho^2 d\tau^2 + 2H d\tau d\rho + \frac{1 - H^2}{\rho^2} d\rho^2 + \gamma. \tag{A6}$$

为了在无穷远处获得光滑的共形极限，假设 boost 满足以下渐近形式会比较方便

$$1 - H(r)^2 = \frac{a^2}{r^2} + o(r^{-2}) \quad \Longleftrightarrow \quad H(r) = \pm\left(1 - \frac{a^2}{2r^2} + o(r^{-2})\right), \tag{A7}$$

使得 $\rho^2\eta_\tau \to a^2\, d\rho^2 + \gamma$ 当 $\rho \to 0$。在渐近零坐标（其中 $a = 0$）[31], 下，极限度规会退化。在零坐标（$H = \pm 1$）下，我们得到（A4）。主定理中的条件（6）和（7）确保变换后的时空

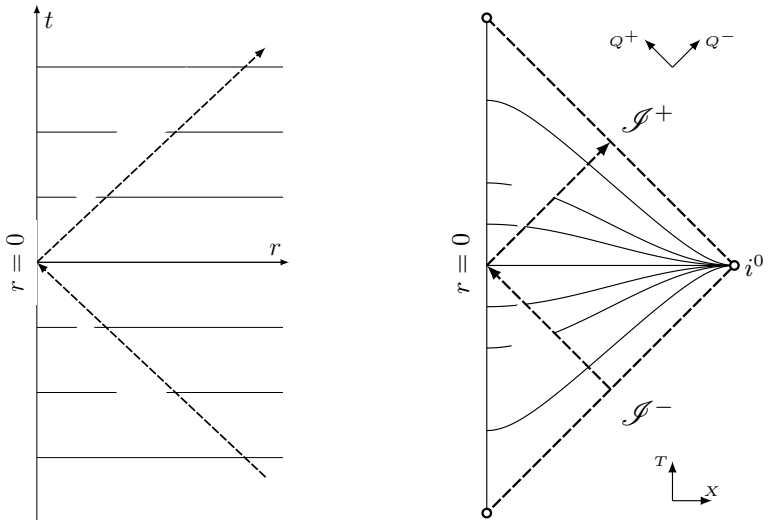


图 A1：左：时空图，展示标准时间坐标的等值面t 以及原点处的入射/出射零锥，$q^{\mp}=0$（图中的每个点代表一个球面，$\mathbb{S}^{d-1}$ 其角度为 ω，但直线 $r=0$除外）。右：彭罗斯图（见附录 B），同样展示标准时间坐标的等值面 t 和零射线$q^{\pm}=0$。在彭罗斯图中，常数-t 切片交于空间无穷远 i^0，因此无法对辐射场的渐近行为作出正则描述。入射和出射辐射场分别位于 $\mathscr{I}^-$ 和 $\mathscr{I}^+$上。

度量在共形边界处具有光滑延拓，因此是共形紧致的。下面给出一个满足上述条件的非特征性示例。

Example（标准双曲面）$\tau=t-\sqrt{1+r^2}$ 的等值面是双曲面，其

$$h(r)=\sqrt{1+r^2}=r+\frac{1}{2r}+\mathcal{O}(r^{-3}),\qquad H(r)=\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}=1-\frac{1}{2r^2}+\mathcal{O}(r^{-4}),\tag{A8}$$

高度函数满足（A5）和（A7）。诱导几何是具有恒定负截面曲率的双曲球。为说明这一点，我们采用一种略有不同的紧化方式

$$r=\frac{2\rho}{1-\rho^2}.\tag{A9}$$

因此，诱导度量恰好就是双曲空间的庞加莱–贝尔特拉米模型上的度量，

$$\eta_\tau=g_{\mathbb{H}^2}=\frac{4}{(1-\rho^2)^2}\left(d\rho^2+\rho^2\gamma\right).$$

上述讨论表明，我们可以通过为时间变换（A5）选择适当的渐近条件，来控制空间切片的几何。标准 $t=\text{const}$ 曲面上的空间度量是欧几里得的。通过适当选择高度函数，我们可以得到渐近双曲或退化空间，二者

均为共形紧致的，并且允许进行适用于计算的径向紧化。高度函数的符号决定了切片趋近于过去零无穷远还是未来零无穷远。

总而言之，在零无穷远处构造正则紧化包含三个步骤：(i) 径向紧化；(ii) 时间变换；(iii) 共形缩放。在下一小节中，我们将讨论如何将这些步骤分别纳入几何散射理论。由此得到的偏微分方程在边界处是正则的，从而能够数值计算零无穷远天球上的散射振幅。

A.2 几何散射理论（致Melrose）

为了将无穷远纳入计算形式体系，我们通过彭罗斯 [8, 9]）将时空中对零无穷远的共形处理与Melrose [3, 4, 32]在非紧空间上的散射共振的算子理论框架联系起来。在此，我将在不提供技术证明的情况下，以启发式方式总结要点。连接这两个主题的桥梁由上述三个步骤构成：第 A.2.1 节中的径向紧化、第 A.2.2 节中的时间变换，以及第 A.2.3 节中的共形缩放。

A.2.1 径向紧化与 Melrose 散射演算

在处理共形无穷远时，彭罗斯沿零方向进行紧化，从而以共形边界处的局部分析取代渐近极限。类似地，Melrose 将无穷远视为一个可进行分析的微局部边界。对于 $\mathbb{R}^d$，径向紧化得到一个带边界的紧流形 X $\partial X \simeq \mathbb{S}^{d-1}$ 以及一个渐近边界定义函数 $\rho = r^{-1}$，因此 hat$\rho \to 0$ 对应于 $r \to \infty$ [3, 32, 33]。欧氏度量具有如下散射度量形式（参见（A1））,

$$g \sim \frac{d\rho^2}{\rho^4} + \frac{\gamma}{\rho^2} \quad \text{near } \partial X,$$

与共形紧化情形（A4）不同，法向分量强烈退化， $\rho^{-4}d\rho^2$，因此 g 不能作为 ∂X 上的光滑度量延拓到 TX ，而是定义在 b切丛 $_{\mathrm{b}}$ TX上。相应的亥姆霍兹算子在普通切丛/余切丛上考察时，在 处是奇异的 $\rho = 0$ （参见（4））。Melrose 的分辨率方案是在 ∂X处以散射几何取代普通几何。相对于散射度量长度一致有界的向量场所构成的李代数为

$$\mathcal{V}_{\mathrm{sc}}(X) = x\,\mathcal{V}_{\mathrm{b}}(X), \quad \text{locally spanned by} \quad \{x^2\partial_x,\ x\partial_{y_1},\dots,x\partial_{y_{d-1}}\},$$

它是散射切丛$_{\mathrm{sc}}TX$ 及其对偶丛$_{\mathrm{sc}}T^*X$ [3]的光滑截面空间。在这种几何中， $\Delta_g \in \mathrm{Diff}^2_{\mathrm{sc}}(X)$ 是一个一致退化的二阶算子，其关于散射主符号是椭圆的。散射Sobolev尺度 $H^{s,}{}_{\mathrm{sc}}{}^{\alpha}$能够一致地编码衰减（权重）和正则性，直至

∂X。辐射条件通过权重和传播方向（出射与入射预解算子）的选择，在无穷远处（径向集）以微局部方式编码，而不是将其视为 $\rho = 0$处朴素的局部边界条件。该框架还允许度量和势的长程扰动，并在 ∂X [33]处具有受控的多齐次行为。

虽然 Melrose 散射框架在无穷远处对问题进行了严格的局部化，但如何将其直接转化为数值离散并不明显。相比之下，对特征线采用时间变换会得到共形紧化空间切片（第 A.1节）。难点在于将这种时空正则化纳入时谐散射中，因为时谐散射没有时间这一概念。

A.2.2 时间变换

时间变换与频域变量之间的联系可通过时谐假设得到。时谐场具有如下形式$V(t,\ x) = e^{-ikt}\,U(x)$。应用时间变换（A5），得到

$$V(\tau + h(x), x) = e^{-ik(\tau+h(x))}\,U(x) = e^{-ik\tau}\,\left(e^{-ikh(x)}U(x)\right).$$

因此，时间平移标量场在频率 k 下是时谐的。将括号中的重标度场定义为 $u(x)$ 并应用逆变换后，我们发现，时间平移对应于通过 $U(x) = e^{ikh}u(x)$ 乘以 e^{ikh} 。重标度会在振幅 [11] 上引入依赖于空间的相移。为考察时间变换对亥姆霍兹算子的影响，令 $L(k) := \Delta + k^2$。使用恒等式 $e^{-ikh}\,\nabla\,e^{ikh} = \nabla + ik\,\nabla h$，通过相位 e^{ikh} 对 $L(k)$ 进行共轭，得到

$$L_h(k) = e^{-ikh}\,L(k)\,e^{ikh} = \Delta + 2ik\,\nabla h\cdot\nabla + ik\,\Delta h + k^2\left(1 - |\nabla h|^2\right). \tag{A10}$$

假设径向高度函数 $h(x) = h(r)$，渐近条件（A5）意味着$|\nabla h| \to 1$ 当 $r \to \infty$ 时成立。随后，由于我们对折射率作出的假设（2），k^2项在 $\mathscr{I}^{\pm}$处趋于零。时间变换通过从 U 中去除 leading WKB 振荡，使亥姆霍兹振幅在渐近意义下变平，并得到变化更缓慢的振幅 u [17]。

等价地，映射 $U \mapsto u = e^{-ikh}U$ 是一个半经典规范变换（半经典参数为 $1/k$），它将余向量平移 $-\nabla h$。取 h 使其满足$|\nabla h| \approx 1$ 在渐近意义下成立，则变换后的算子（A10）与出射特征线对齐；紧化后，无穷远边界变为特征边界：主导渐近行为由输运项 $2ik\,\nabla h\cdot\nabla$控制，而不是由非零的 k^2 势控制。

然而，仅靠时间变换还不足以在无穷远处获得正则紧化。继续采用径向高度函数 $h = h(r)$，并令$H := h'(r)$，共轭后的自由空间算子 $L_h(k) = e^{-ikh}(\Delta + k^2)e^{ikh}$ 变为

$$L_h(k) = \partial_r^2 + \frac{d-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} + 2ik\,H\partial_r + ik\left(\partial_r H + \frac{d-1}{r}H\right) + k^2\left(1 - H^2\right). \tag{A11}$$

经过径向紧化 $\rho = 1/r$ （并提取自然因子 ρ^2）后，我们得到

$$\begin{aligned}\rho^{-2} L_h(k) =& (\rho\,\partial_\rho)^2 + (2-d)(\rho\,\partial_\rho) + \Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} - 2ik\,H\partial_\rho \\ &+ ik\left(-\partial_\rho H + \frac{d-1}{\rho} H\right) + k^2 \frac{1-H^2}{\rho^2},\end{aligned}$$

由（A7）可知 $H = 1 - a^2\rho^2$，项 $k^2\left(1-H^2\right)/\rho^2$ 可光滑延拓至$\rho = 0$。然而，低阶项 $\frac{d-1}{\rho} H$ 按（$d-1$）$/\rho$ 的规律发散（当 $d \geq 2$时）。因此，通过 e^{ikh} 解调可以消除振荡相位，但仅凭这一操作无法得到光滑的紧化算子；还需要额外的重标度。

A.2.3 共形缩放

要在无穷远处对亥姆霍兹算子进行正则紧化，最后一个要素是共形缩放。这种缩放可以从许多等价的角度来理解：物理上、共形上、代数上以及微局部上。

从物理角度看，重标度与通量守恒以及球面朝无穷远延伸时的几何发散有关。 d 维空间中的球面面积随半径增大而按 r^{d-1} 增长。由于出射波的能量分布在球面上，其振幅按 $r^{(d-1)/2}$ 衰减。重标度消除了这种衰减。

从共形角度看，重标度源于微分算子的变换性质。我们通过共形协变亚马贝算子的共轭作用 [9, 34] 回顾标准推导 [35]。对于一个 n维流形（$\mathcal{M}$, g），亚马贝算子定义为

$$\mathcal{Y}_g := \nabla_g^2 - \frac{n-2}{4(n-1)} R[g]$$

对于由 $g = \Omega^{-2}\tilde{g}$给出的共形度量，作用于标量函数的亚马贝算子满足

$$\Omega^{\frac{n-2}{2}}\,\mathcal{Y}_g\,\Omega^{-\frac{n-2}{2}} = \Omega^{-2}\mathcal{Y}_{\tilde{g}} \tag{A12}$$

现在设该流形为时空维数 $n = d+1$的洛伦兹流形。给定标量波动方程 $\nabla_g^2 V = 0$的一个解，由亚马贝算子的变换可得，

$$\left(\nabla_{\tilde{g}}^2 - \frac{d-1}{4d}\,\tilde{R}\right)\tilde{V} = 0, \qquad \tilde{V} = \Omega^{-\frac{d-1}{2}} V. \tag{A13}$$

对于共形正则度规，这个共形方程的系数是光滑的，包括在零无穷远处。在方程（A4）和（A6）中，我们使用了共形因子 $\Omega = \rho = 1/r$，并在零无穷远处得到了正则度规。共形因子也可以采用不同的坐标表达式（例如（A9）），但其按 $\Omega \sim 1/r$衰减。对变量 V 在（A13）中进行重标度，可抵消场的衰减，使得 $\tilde{}$重标度场具有有限且通常非零的极限。因此， V 可延拓至 $\mathscr{I}$，并在共形完备化上满足正则方程（A13）。

从代数角度看，这种重标度称为刘维尔变换，在波动方程的分析中得到了广泛应用。拉普拉斯算子满足，

$$r^{\frac{d-1}{2}}\left(\partial_r^2+\frac{d-1}{r}\partial_r+\frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}\right)r^{-\frac{d-1}{2}}=\partial_r^2+\frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}+\frac{(d-1)(3-d)}{4r^2}.$$

于是，共轭算子 $\widetilde{L}_h(k):=r^{\frac{d-1}{2}}\,L_h(k)\,r^{-\frac{d-1}{2}}$ 为

$$\widetilde{L}_h(k)=\partial_r^2+\frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}+\frac{(d-1)(3-d)}{4r^2}+2ik\,H\partial_r+ik\,\partial_r H+k^2\left(1-H^2\right). \quad \text{(A14)}$$

与 (A11) 比较可知，$1/r$ 项消去了。特别是，不再有奇异的 $\frac{H}{r}$ 项。经过径向紧化后，得到

$$\rho^{-2}\widetilde{L}_h(k)=\rho^2\partial_\rho^2+2\left(\rho-ik\,H\right)\partial_\rho+\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}+\frac{(d-1)(3-d)}{4}-ik\,\partial_\rho H+k^2\,\frac{1-H^2}{\rho^2}. \quad \text{(A15)}$$

如果 boost H 满足渐近条件 (A7)，方程中就不会出现发散项。

在微局部层面，重标度实现了半密度归一化，使远场振幅属于 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$。Melrose 在半密度上构建了散射演算，从而得到坐标不变主符号和伴随运算 [3]。在局部坐标变换 $x\mapsto\tilde{x}$ 下，半密度按雅可比行列式的平方根变换，即 $|\det(D\tilde{x}/Dx)|^{1/2}$，因此两个半密度的张量积定义了不变密度。在 $\mathbb{R}^d$ 上的球坐标中，欧几里得密度为 $|dx|=r^{d-1}\,dr\,|d\omega|$，因此半密度带有因子 $|dx|^{1/2}=r^{\frac{d-1}{2}}\,(dr\,|d\omega|)^{1/2}$。这一因子产生了熟悉的 $r^{(d-1)/2}$ Liouville 或共形缩放，自然地使远场振幅属于 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$。

这些不同的视角——物理、共形、代数和微局部——是 Yamabe 恒等式（A12）的不同面向。共形图景尤为强大，因为它允许我们选择更一般的缩放或紧化，使其与渐近行为相容，同时仍能在零无穷远处得到正则方程。这种自由度例如用于 [17], 中零无穷远层的构造，以及第 3.2.2 节中双曲平面上的计算。

附录 B 彭罗斯图

表示时空全局因果结构的一种直观方式是使用彭罗斯图，它通过共形紧化 [8, 9] 得到。沿袭彭罗斯的做法，我们沿零方向进行紧化，即对零坐标应用正切映射：

$$Q^+=\tan^{-1}q^+,\qquad Q^-=\tan^{-1}q^-,\qquad Q^\pm\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

在 $(q^{\pm},\ \theta)$ 和 $(Q^{\pm},\ \theta)$ 坐标中，闵可夫斯基度规为

$$\begin{aligned}\eta &= -\,dq^{+}\,dq^{-} + \frac{(q^{-}-q^{+})^{2}}{4}\,d\theta^{2} \\ &= \frac{1}{\cos^{2}Q^{+}\,\cos^{2}Q^{-}}\left(-\,dQ^{+}\,dQ^{-} + \frac{1}{4}\sin^{2}(Q^{-}-Q^{+})\,d\theta^{2}\right).\end{aligned}$$

整体因子 $\Omega = \cos Q^{+}\cos Q^{-}$ 是共形因子，它刻画了当$Q^{\pm}\to\pm\pi/2$时的爆破。使用重标度度规 $\bar{\eta}=\Omega^{2}\eta$，可使边界处的几何保持正则。引入彭罗斯时间 $T=Q^{+}+Q^{-}$ 和半径 $X=Q^{-}-Q^{+}$，并令$X\in[0,\pi)$（限制条件 $r\geq 0$ 意味着 $Q^{-}\geq Q^{+}$，因此 $X\geq 0$），闵可夫斯基时空的物理图像便成为开区域 $-\pi+X<T<\pi-X$，其中 $X\in[0,\pi)$。共形边界是超曲面 $\Omega = 0$，等价地也可表示为 $|T|+X=\pi$。共形因子 Ω 充当平直时空共形完备化的边界定义函数。

对于频域散射而言，沿零测地线的共形边界尤为重要。未来零无穷远为 $\mathscr{I}^{+}=\{Q^{-}=\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}<Q^{+}<\frac{\pi}{2}\}$，而过去零无穷远为 $\mathscr{I}^{-}=\{Q^{+}=-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}<Q^{-}<\frac{\pi}{2}\}$。二者各自都是拓扑为 $\mathbb{R}\times S^{1}$的连通零圆柱：$\mathbb{R}$ 因子是相关的零时间（Q^{+}在 $\mathscr{I}^{+}$上，或 Q^{-}在$\mathscr{I}^{-}$上），而 S^{1} 是渐近角 θ构成的空间。在二维彭罗斯图中，若省略 S^{1}，$\mathscr{I}^{\pm}$ 便呈现为两条对角边（见图A1）。

参考文献

[1]Sommerfeld, A.：振动方程的格林函数。《德国数学家协会年报》**21**，309–352（1912）[2] Schot, S.H.：Sommerfeld辐射条件的八十年。《数学史》**19(4)**，385–401（1992）[3] Melrose, R.B.：《几何散射理论》第1卷，第116页。剑桥大学出版社，剑桥（1995）[4] Dyatlov, S., Zworski, M.：《散射共振的数学理论》第200卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯（2019）[5] Epstein, C.L., Mazzeo, R.：开放波导散射问题的求解，III：辐射条件与唯一性。arXiv预印本 arXiv:2401.04674（2024）[6] Felbacq, D., Rousseau, E.：入射波与出射波的局部分解及正则标量波的积分表示。《数学》**13(17)**，2875（2025）[7] Martin, P.：关于入射场的入射-出射分解及赫尔格洛茨波函数的远场行为。《应用科学中的数学方法》**41(8)**，2961–2970（2018）[8] Penrose, R.：场与时空的渐近性质。《物理评论快报》**10(2)**，66–68（1963）

[9] Penrose,R.：再版：无穷远的共形处理。《广义相对论与引力》43，901–922（2011）[10] Zenginoˇglu, A.：双曲面叶状分解与零无穷远固定。《经典与量子引力》25(14)，145002（2008）[11] Zenginoˇglu, A.：黑洞微扰的几何框架。《物理评论D辑：粒子、场、引力与宇宙学》83(12)，127502（2011）[12]Zenginoˇglu, A.：无界区域上双曲型方程的双曲面层。《计算物理学杂志》230(6)，2286–2302（2011）[13]Jaramillo, J.L., Macedo, R.P., Sheikh, L.A.：伪谱与黑洞准正规模不稳定性。《物理评论X》11(3)，031003（2021）[14] Assaad, J., Panosso Macedo, R.：克尔时空中的准正规模：一个二维特征值问题。《经典与量子引力》（2025）[15]Panosso Macedo, R.：静态球对称时空的双曲面方法：教学性介绍及其在黑洞物理中的应用。《英国皇家学会哲学汇刊A辑》382(2267)，20230046（2024）[16]Panosso Macedo, R., Zenginoˇglu, A.：准正规模的双曲面方法。《物理学前沿》12，1497601（2025）[17]Zenginoˇglu, A.：用于波散射的零无穷远层。arXiv预印本 arXiv:2111.14217（2021）[18] Colton, D., Kress, R.：《声学与电磁散射反问题理论》第3版。应用数学科学，第93卷。施普林格，纽约，美国（2013）。http://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4614-4942-3[19] 美国国家标准与技术研究院：NIST数学函数数字图书馆。https://dlmf.nist.gov/。2025年3月15日发布的1.2.4版（2025）[20] Olver, F.：《渐近学与特殊函数》。CRC出版社，博卡拉顿，美国（1997）[21] Burns, K.J., Vasil, G.M., Oishi, J.S., Lecoanet, D., Brown, B.P.：Dedalus：用于谱方法数值模拟的灵活框架。《物理评论：研究》2(2)，023068（2020）[22] Martin, P.：非均匀球体的声散射。《美国声学学会会刊》111(5)，2013–2018（2002）[23]Watson, G.S.：圆与球面上的分布。《应用概率期刊》19(A)，265–280（1982）[24] Galkowski, J., Marchand, P., Spence, E.A.：亥姆霍兹外部纽曼问题边界积分算子的高频估计。《积分方程与算子理论》94(4)，36（2022）[25] Galkowski, J., Marchand, P., Wang, J., Zworski, M.：散射相位：终于得以观测。《美国工业与应用数学学会应用数学杂志》84(1)，246–261（2024）[26] Galkowski, J., Spence, E.A.：运用半经典分析对高频亥姆霍兹方程进行数值分析。arXiv预印本 arXiv:2511.15287（2025）

[27] Gillman, A., Barnett, A.H., Martinsson, P.-G.：一种针对变介质频域散射问题的谱精度直接求解技术。BIT 数值数学 **55**(1), 141–170（2015）[28] Ying, L.：Lippmann–Schwinger 方程的稀疏化预条件子。多尺度建模与仿真 **13**(2), 644–660（2015）[29]Gowdy, R.H.：渐近迟滞时间坐标中的波动方程：波是紧流形上的简单正则函数。数学物理学杂志 **22**(4), 675–678（1981）https://doi.org/10.1063/1.524975[30]Friedrich, H.：广义相对论中共形真空场方程的柯西问题。数学物理通讯 **91**, 445–472（1983）[31]Zenginoˇglu, A.：闵可夫斯基时空中的双曲时间。美国物理学杂志 **92**(12), 965–974（2024）[32] Melrose, R.B.：渐近欧几里得空间上拉普拉斯算子的谱与散射理论。载于：Ikawa, M.（编），《谱与散射理论》，第85–130页。CRC出版社、泰勒-弗朗西斯集团，博卡拉顿，佛罗里达州，美国（2020）[33]Vasy, A.：长程势和度量的几何散射理论。国际数学研究通知 **1998**(6), 285–315（1998）[34] Wald, R.M.：《广义相对论》。芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州，美国（1984）[35] Yamabe, H.：关于紧流形上黎曼结构的一种变形。大阪数学杂志 **12**, 12–37（1960）