非嵌入平面图面覆盖问题的多项式核

Thekla Hamm 埃因霍温理工大学
Sukanya Pandey 亚琛工业大学
Krisztina Szilágyi 布拉格捷克理工大学

arXiv:2601.04169v1 [cs.DS] 7 Jan 2026

摘要

给定一个平面图、其顶点的一个子集（称为终端）以及 $k \in \mathbb{N}$，面覆盖数问题询问：是否存在输入图的一种嵌入，使得这些终端位于至多 k 个面的边界上。当输入给定的是平面嵌入图时，已知该问题具有多项式核 [16]。本文提出了首个适用于输入为平面图（没有固定嵌入）的面覆盖数问题的多项式核。我们通过在 SPR树上自底向上构建核，同时保留面覆盖的关键性质，克服了缺少预先定义的面边界这一挑战。

2012年 ACM 学科分类 计算理论 → 参数化复杂性与精确算法；计算数学 → 图算法

关键词和短语 核化、平面图、SPQR树

数字对象唯一标识符 10.4230/LIPIcs...

资助 *Thekla Hamm*：本研究部分工作得到奥地利科学基金（J4651-N）的资助。*Krisztina Szilágyi*：项目“机器人与先进工业生产”（注册号 CZ.02.01.01/00/22_008/0004590）资助。

© Thekla Hamm、Sukanya Pandey、Krisztina Szilágyi；依据知识共享署名 4.0 国际许可协议授权。
莱布尼茨信息学国际会议论文集，达格斯图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，德国达格斯图尔出版
LIPICS

XX:2 非嵌入平面图面覆盖的多项式核

1 引言

网络设计问题在平面图这一类图上得到了广泛研究。许多此类问题以一个图及其一组被指定为终端的顶点作为输入，目标是寻找一个连接或分隔这些终端并满足特定约束的最优子图。即使将输入限制为平面图，当终端数量不是常数时，仍有大量此类问题难以求解 [14, 28, 27, 25, 8, 15, 22]。这促使人们寻求对输入施加进一步限制，使问题变得可解。除了限制终端的实际数量之外，还可以考虑较弱的限制，即对终端在输入平面图中的位置施加条件。例如，可以要求终端位于输入平面图中同一个面的边界上。对于这种情况，一些著名的 NP 困难问题，如斯坦纳树、多路割和最短不相交路径，都可以在多项式时间内求解 [11, 2, 6, 4] 。因此，一个自然的问题是：如果终端位于多个 $k > 1$ 面的边界上呢？。

平面图的终端面覆盖数 是指在所有嵌入中，能够共同覆盖所有终端的面的最小数量。Erickson 等人在其开创性论文 [11] 中首次考虑了以终端面覆盖数为参数的问题，并设计了一个求解斯坦纳树问题的 XP 算法。近年来，这一问题受到广泛关注，研究方向包括流与割问题 [24, 23, 6, 26], 、最短路径问题 [7, 13], 、最小非交叉游走 [10],以及最小斯坦纳树 [19]。本文聚焦于计算终端面覆盖数的问题。形式化地，该问题定义如下：

面覆盖数实例： 平面图 $G, T \subseteq V(G)$，整数 k问题： 是否存在一个大小至多为 k 的面集合，使得在 G 的某个嵌入中，该集合覆盖 T 的所有顶点?

Bienstock 和 Monma [3] 开创了对面覆盖数的研究，并证明该问题可在以 k 为参数的固定参数时间内求解。他们的算法运行时间为 $c^k \cdot n$ ，其中 $c > 1$ 为某个常数。他们还研究了一个相关问题，其输入为一个平面嵌入图，即具有固定嵌入的平面图。我们称此问题为嵌入面覆盖数问题。对于此问题，他们考虑以终端数 t 为参数，并给出了首个亚指数固定参数算法，运行时间为$2^{\mathcal{O}(\sqrt{t})}$。

Kloks 等人 [20] 研究了嵌入面覆盖数的一个特殊情形，其中 $T = V(G)$，参数为面覆盖数。他们证明该问题可在 $\mathcal{O}^*(c^{\sqrt{k}})$ 时间内求解。随后，Fernau 和 Juedes [12],改进了这一结果，其算法运行时间为 $\mathcal{O}^*(2^{24.551\sqrt{k}})$；Koutsonas 和 Thilikos [21] 进一步给出了运行时间为 $\mathcal{O}^*(2^{10.1\sqrt{k}})$ 的算法。该问题可以轻易归约为红蓝支配集问题，这是定义在双色图上的支配集问题的一个变体。上述所有算法都是通过求解红蓝支配集问题，间接地找出输入平面嵌入图的最小面覆盖。Abu-Khzam 等人 [1] 给出了该问题的直接 FPT算法。然而，其算法运行时间为 $\mathcal{O}^*(4.6056^k)$，并非关于该参数的亚指数时间算法。

鉴于上述两个问题都具有固定参数可处理性，一个自然的研究方向是探究该问题是否存在多项式核。对于嵌入面覆盖数，Garnero 等人 [16]通过归约到红蓝支配集证明了其存在线性核。在他们的工作之前，已知根据 Kloks 等人 [16]的结果，存在一个二次核

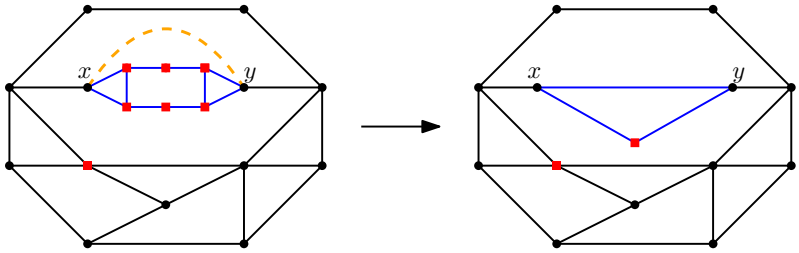

图 1 （左）黑色和橙色的骨架，其中橙色虚线边 xy 是通往某个子节点的虚边。替换这条虚边的图为蓝色。终端以红色方块表示。蓝色图的面覆盖数为 1（其所有终端都位于矩形绘制的那个面上）。因此，原则上，蓝色图的核可以是由 x、 y 和一个终端构成的三角形（其面覆盖数也为 1）。这样仍然会保留蓝色图与黑色图之间的接口（x， y）。 （右）然而，如果用可能的三角形核替换蓝色图，整个图的面覆盖数就会从 2 降至 1。

。迄今为止，尚不清楚面覆盖数问题是否存在多项式核。我们肯定地回答了这一问题，并给出了一个以面覆盖数为参数的三次核。

▶ **定理 1**。 给定面覆盖数问题的一个实例 (G, T, k) ， 我们可以在多项式时间内构造一个核 (G', T', k') ， 使得 $|G'| + k' \in O(k^3)$。

算法概述。 我们的方法是在给定平面图的 SPR树上执行动态规划。SPR树是经典的数据结构，常用于平面图算法设计。从较高层次来看，SPR树可以视为将平面图分解为其 3-连通子图的一种树结构分解。树结构中的每个节点都关联着一个称为该节点骨架 的图。任意节点处诱导出的图，都可以通过将所谓的虚拟边（骨架中并非平面图实际边的边）替换为该节点各子节点处诱导出的图而得到。从这个意义上说，虚拟边的端点可以视为节点处诱导出的图与其子节点处诱导出的图之间的“接口”。SPR树的每个节点都有一种类型——S、P 或 R，具体取决于其骨架的结构。

有鉴于此，我们旨在沿输入图的 SPR树，以从叶到根的方式构造面覆盖数的核。为此，动态规划步骤的一种自然尝试是：将对应于该 SPR树某个子节点为根的 SPR树的图部分，替换为归纳假设的核。然而，这种朴素方法会遇到一些技术障碍：我们如何将一个子图替换为一个核，同时确保该子图的接口得以保留？从更根本的层面来说，这个简单的想法注定会失败，因为核的面覆盖数虽然可能相同，但它与图其余部分的相互作用可能不同于被替换的子图（见图 1）。因此，我们需要加强对迄今构造的核所作的归纳假设，并且还要在每个动态规划步骤中证明，执行归约步骤后这些假设仍然成立。关键的是，我们加强后的假设使我们能够在核化过程中保留子节点处诱导出的图的面覆盖与父节点处诱导出的图之间的相互作用方式。我们将满足这些加强后假设的核称为良好核，目标是通过动态规划计算出这样的核。

虽然我们的动态规划过程有许多部分需要我们设计归约

规则，这些规则针对骨架，因而也针对我们正在考虑的节点类型（S、P 或 R），但节点的子节点处诱导出的一些子图具有足够简单的面覆盖。因此，我们可以用大小为常数的子图替换它们，从而得到一个良好核；在这个核中，我们只需处理那些在父节点骨架上具有复杂得多的相互作用的子节点处诱导出的子图。

我们根据简单子图是否包含终端，以及若包含终端，能否仅使用与图其余部分有交互的面来实现最优覆盖，将其称为无终端、无问题或半问题性分量。我们给出多项式时间算法来识别这几类分量。由子节点诱导出的其余复杂子图称为有问题的分量。对于每种节点类型，整体策略都是将需要考虑的虚边数量限制在关于潜在面覆盖数 k 的多项式范围内。做到这一点后，我们便可缩减骨架，将其非虚边数量限制在 k 以内。这两步最能体现不同节点类型的特性。最后，我们通过归纳将有问题的虚拟分量替换为其核，并将任何可能剩余的无问题分量替换为常数大小的结构；这最后一步与具体节点类型无关。

关于针对节点类型的论证，可以在 S 节点和 P 节点处使用边删除和边收缩等简单归约规则。然而，在 R 节点处，这类简单归约规则难以控制；在所有节点类型中，R 节点的骨架在结构上最为复杂，即 3-连通平面图。从 3-连通平面图中删除或收缩边，通常无法保持 3-连通性。这对于面覆盖数意义重大，因为在进行任何归约之前，骨架都有唯一嵌入这一性质，而我们很难在归约过程中保持这一性质。因此，在针对 R 节点进行核化时，我们转而采用嵌入设置，并制定考虑初始固定嵌入的归约规则。为了回到考虑非嵌入图的设置，我们通过对嵌入的良好核进行“刚性化”来重新建立 3-连通性。在此过程中，我们谨慎确保不改变良好核中同时出现在同一个面上的终端集合，从而得到 R 节点处的非嵌入良好核。

结构安排。 第2节介绍必要的定义和记号。第3节正式定义无终端、非问题性 或半问题性 以及问题性分量，并给出区分它们的算法。随后，第4节定义良好核 的概念，并描述第3节中各分量的替换方式，这些替换不依赖于节点类型。第5节将讨论动态规划的具体构造。最后，第6节总结全文。

2 预备知识

图论术语。 我们采用标准的图论术语 [9]。一个图 是一个二元组$G=(V,E)$，满足 $E\subseteq\binom{V}{2}$。 V中的元素称为图的顶点， E 中的元素称为边。图的顶点数称为其阶，记作 n。 G的一个子图 $G'=(V',E')$，记作 $G'\subseteq G$，是满足 $V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$的图。如果对于所有 $x,y\in V'$，当 $xy\in E$ 时都有 $xy\in E'$，则 G' 是 G的一个导出子图 。

一条路径 是一个非空图 $P=(V',E')$，其形式为 $V'=\{x_0,x_1,\dots,x_k\}$ 和$E'=\{x_0x_1,\dots,x_{k-1}x_k\}$，其中所有 x_i 都互不相同。顶点 x_0 和 x_k 称为 P 的端点 。导出路径 是指除端点外所有顶点的度均为二的路径。路径中的边数称为其长度。

如果图中任意两个顶点之间都存在一条路径，则该图是连通的；否则该图是不连通的

。如果从图中移除任何一个顶点都不会导致图变成非连通图，则该图是双连通的。类似地，如果不存在一个包含两个顶点的子集，使得移除该子集中的顶点后图变成不连通，则称该图是*3*-连通的。

SPR树。 *SPR*树 是一种有根树，其中每个节点 t 都关联一个称为该节点骨架 的多重图。节点及其骨架分为以下三种类型：

1. **S节点：** 这类节点的骨架构成一个包含三个或更多顶点的环。2. **P节点：** 这类节点的骨架是一个恰好有两个顶点且两者之间至少有三条边的图。这种图称为偶极图。3. **R节点：** 这类节点的骨架构成一个既不是环也不是偶极图的3-连通图。

SPR树中连接两个节点 t 和 t' 的每条边，都关联着一条边及其端点在节点 t 骨架中的一个排列，以及另一条边及其端点在节点 t'骨架中的一个排列。总的来说，每个节点骨架中的边至多可以按这种方式关联到 SPR树中的一条边。与 SPR树边关联的这些骨架边称为虚拟边。任一节点骨架中非虚拟的边称为实边。对于 SPR树中以节点 t 为根的子树，由该子树诱导的图按如下方式递归定义。

- 如果 t 是叶子，则以 t 为根的子树所诱导的图就是 t 的骨架。如果 t 有子节点 t_1、
- ……、t_c，则以 t 为根的子树所诱导的图，是通过对每个 $i \in [c]$ 执行以下操作，从 t 的骨架得到的图：插入以 t_i 为根的子树所诱导的图；将 t_i 的骨架中与 tt_i 关联的虚边的第一和第二个端点，分别与 t 的骨架中与 tt_i 关联的虚边的第一和第二个端点合并；最后，删除对应于 tt_i 的虚边。直观来说，以 t_i 为根的子树所诱导的图会被“嵌入”，以替代 t 骨架中相应的虚边。

我们称 SPR树 为其所诱导图的 SPR树。

▶**引理2** (Hopcroft 和 Tarjan [17])。 可以在线性时间内构造一个双连通平面图的 *SPR*树。

对于 G 的任意固定 SPR树中的节点 t ，我们用 G_t 表示由以 t 为根的子树所诱导的子图。我们将以 t 的一个子节点为根的子树所诱导的子图称为 G_t 的虚拟分量 。设 c_1, c_2 是与 tt' 关联的虚拟边的端点，其中 t' 是 t 的一个子节点。我们将 c_1 和 c_2 称为与 t' 关联的 G_t 的虚拟分量的角 。我们将边 c_1c_2 称为 $G_{t'}$ 的角边 。我们将与 t' 关联的 G_t 的虚拟分量及其角边称为该虚拟分量的增强图 。在增强图的嵌入中，我们将包含角边的两个面称为外部面 ，其余面称为内部面。如果 G_t 本身没有角，即 t 是 SPR树的根，那么 G_t 就等于它的增强图（我们任意选取 G_t 的一条边，将其视为角边，并将其端点视为角）。

核化。参数化问题 $\Pi \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$ 的核化是这样一种算法：输入实例 (I, k)（属于 Π），运行时间为 $poly(|I| + k)$，并输出实例 (I', k')（属于 Π），使得：(1) (I, k) 是是实例，当且仅当 (I', k') 是是实例；(2) $|I'| \leq f(k)$，其中 f 是某个可计算函数；(3) $k' \leq g(k)$，其中 g 是某个可计算函数。核化的输出 (I', k') 称为一个核。如果 $|I'| + k' \leq poly(k)$，我们就称 (I', k') 是一个多项式核。

XX:6 非嵌入平面图面覆盖的多项式核

嵌入图。连通平面图 $G = (V, E)$ 的绘图定义为一个映射：将 V 中的顶点映射到 $\mathbb{R}^2$ 中的点，并将边映射为端点所对应的点之间的简单曲线，使得：(1) 不同的边具有不同的端点对；(2) 边的内部不包含任何顶点或其他边上的任何点。给定一个平面绘图后，每个顶点上关联边的（顺时针）循环次序便固定下来。每个顶点周围边的循环次序集合称为旋转系统。（组合）嵌入是由其旋转系统定义的平面绘图等价类。我们经常将顶点和边与其绘图等同，并将嵌入与其所表示等价类中的任意绘图等同。

图的嵌入和绘图在其子图上的限制分别称为子嵌入 和子绘图。设 G 是一个平面嵌入图， t 是其 SPR 分解中的一个节点。翻转 G_t 定义为反转限制在G_t 上的旋转系统（即对于角顶点，我们只反转 G_t中的边）。

对于平面图的任意绘图 G， $\mathbb{R}^2 \setminus G$ 的包含极大区域称为面。唯一的无界面称为外面，其余的面称为内面。设 f 是一个面。若顶点 v 的绘图位于面 f 的边界上，则称面 f 覆盖该顶点。对于增强图 G_t的两个外部面，我们将其在 G 中对应的面定义为边界限制在 G_t 上相等的面。给定 G的一个面覆盖 F，我们将 G_t 的增强图所诱导的面覆盖 F_t 定义为：G_t 中属于 F 的内部面，以及与 F中的面相对应的外部面。具有终端 $T \subseteq V$（G）的嵌入图 G 的嵌入面覆盖数是覆盖 T所需的最少面数。具有终端 $T \subseteq V$（G）的图 G 的面覆盖数（$\mathrm{fcn}(G) = \mathrm{fcn}(G, T)$）是对 G 的所有嵌入取最小值，即覆盖 G的终端所需的最少面数。

单连通情形

根据面覆盖文献中的标准论证（为使本文自包含，我们在下文重述），我们可以将问题归约为考虑双连通输入图。另外，注意我们可以如下将问题归约到连通图。如果 G 不连通，我们就分别对每个连通分量进行核化，然后检查需要至少 2 个面才能完成面覆盖的连通分量是否多于 k 个（使用已有的 FPT算法 [3] 来处理 $k = 1$）。如果多于 k 个，则这是一个否实例。

下面的定义有助于说明我们可以将问题归约为双连通输入图的情形。若 G 中的一个顶点 v 满足 $G - v$ 有两个或更多连通分量，则称其为割点。图 G 的块是极大的双连通导出子图。若一个块恰好包含一条边，则称其为平凡块；否则称其为非平凡块。图 G 的块割树为 G 中每个块和割点各对应一个顶点的树。我们将块割树记为$\mathcal{B}$。当且仅当割点属于块时，$\mathcal{B}$ 中才存在一条边连接 G 中对应于该块和割点的一对节点。

▶**引理 3** (Hopcroft 和 Tarjan [18])。 图的块割树可以在线性 r

时间内计算。

现在给出到双连通情形的归约。

▶ **引理 4**。 如果我们能够对每个 2-连通平面图 G 以及每个$T \subseteq V(G)$计算 $\mathrm{fcn}(G, T)$，那么我们就能够对每个平面图 G 以及 $T \subseteq V(G)$计算 $\mathrm{fcn}(G, T)$。

证明。 如果 G 不是 2-连通的，考虑$\mathcal{B}$ 的 G。我们将从叶面覆盖数 开始进行归纳计算。设 v 是一个割点，并且具有

子节点 B_1、.....、B_t，并设 G^v 是 G 的子图，对应于以 $\mathcal{B}$ 的 v为根的子树。我们区分两种情况：

- 如果 v 是终端：我们将 fcn$(G^v, T \cap G^v) = \sum$fcn$(B_i, T \cap B_i) - (t-1)$，因为我们知道，在每个 B_i 中，顶点 v 都将被覆盖，并且可以确保用于覆盖它的面是 B_i 的外面。如果
- v 不是终端：对于每个 $i \in [t]$，我们计算 fcn(k_i =)fcn$(B_i, T \cap B_i)$ 和 k'_i =fcn$(B_i,$ $(T \cap B_i) \cup \{v\})$。如果存在 $i > 1$ 使得 $k_i = k'_i$，我们可以确保 B_i 的外面覆盖 v。因此，将 v 添加到 T 不会增加面覆盖数。我们将 v 添加到 T，并使用上述论证计算 fcn$(G^v, T \cap G^v)$。否则，我们将 fcn$(G^v, T \cap G^v) = \sum$fcn$(B_i, T \cap B_i)$。◀

3 类虚拟分量

为便于构造核，我们将虚拟分量分为 4 组。无终端、无问题和半问题的虚拟分量将由常数规模小工具替代，而有问题的虚拟分量最终将由归纳构造的核替代。

▶ **定义 5**（虚拟分量的类型）。 我们区分不同类型的虚拟分量。

1.除角之外可能没有其他终端的虚拟分量——我们称这类虚拟分量为 无终端。**2.**面覆盖恰好由一个外部面组成的虚拟分量——我们称这类虚拟分量为 无问题。**3.**不是无问题、面覆盖由两个外部面组成但面覆盖数为一的虚拟分量——我们称这类虚拟分量为半问题。**4.** 所有其他虚拟分量，我们称之为 有问题。

对于无问题虚拟分量，如果某个嵌入中的一个外部面覆盖了所有终端，我们就称该嵌入证明了它们的无问题性。对于半问题分量，如果某个嵌入的面覆盖数为一，但两个外部面可以共同覆盖所有终端，我们就称该嵌入证明了它们的半问题性。

我们首先说明，可以在多项式时间内识别虚拟分量的类型，然后在第4节介绍针对这类虚拟分量的核化步骤。显然，可以在线性时间内识别无终端虚拟分量；要识别问题分量，只需识别无问题分量和半问题分量。为此，我们可以沿 SPR 子树进行动态规划。

▶**引理6**。 判断一个虚拟分量是否无问题属于P 类。

证明。 可以沿该虚拟分量的子 SPR 树进行动态规划。

在基本情形中，该子树仅包含一个节点（该节点不是 P 节点）。如果该节点是 S 节点，那么当且仅当所有终端都位于其角之间的同一条路径上时，该虚拟实例才是无问题的。如果该节点是 R 节点，那么该虚拟分量的嵌入和面环是唯一确定的。可以用多项式时间检查所有终端是否都位于同一个面环上，且该面环包含连接两个角的边；这恰好是此类虚拟实例无问题的条件。

现在转向动态规划步骤，并根据虚拟分量的子 SPR 树的根 r 类型区分不同情况。

XX:8 非嵌入平面图面覆盖的多项式核

S 节点。 当且仅当虚拟实例的两个角之间，骨架的两条路径中至少有一条路径上与边相关联的子虚拟分量不包含角以外的终端，且所有子虚拟分量都无问题时，该虚拟分量才是无问题的。该命题的正向结论可通过以下方式看出：以能够证明其无问题的方式嵌入每个子虚拟分量，并翻转这些嵌入，使所有终端都位于同一个面上。对于反向结论，请注意，如果虚拟实例两个角之间骨架的两条路径上都包含角以外的终端，那么无论我们作出何种嵌入选择，都不存在一个面能将所有这些终端以及连接两个角的边包含在其边界上。此外，根据定义，如果某个子虚拟分量不是无问题的，那么它就不可能是一个无问题虚拟分量的子图。

P 节点。 当且仅当至多有一个子虚拟分量包含虚拟分量的角以外的终端，且所有子虚拟分量都是无问题虚拟分量时，该虚拟分量才是无问题虚拟分量。该命题的正向蕴含可以通过以下方式看出：以能够证明各子虚拟分量无问题的方式嵌入每个子虚拟分量，并对这些嵌入进行排序；对于（可能存在的）包含终端的一个子虚拟分量，则以使所有终端与连接虚拟分量的角的边位于同一面的方式翻转其嵌入。对于逆向，注意到如果有两个子虚拟分量包含角以外的终端，那么无论我们作出何种嵌入选择，都不存在一个面能将所有这些终端以及连接角的边包含在其边界上。此外，如果一个子虚拟分量不是无问题虚拟分量，那么根据无问题虚拟分量的定义，它不可能是无问题虚拟分量的子图。

R 节点。当且仅当所有包含终端的子虚拟分量通过虚边连接在同一个面循环上，且该面循环也包含连接两个角的边，并且所有子虚拟分量均无问题时，该虚拟分量才是无问题的。该命题的正向推论可通过以下方式看出：将每个子虚拟分量嵌入，使其无问题性得到见证，再翻转这些嵌入，使所有终端都位于与连接两个角的边相同的面上。对于反向推论，请注意，如果并非所有连接包含终端的子虚拟分量的虚边都位于一个包含连接两个角之边的面循环上，那么无论我们如何选择嵌入方式，都不存在一个面能将所有这些终端和连接两个角的边都置于其边界上。此外，根据无问题的定义，如果某个子虚拟分量并非无问题，那么它就不可能是一个无问题虚拟分量的子图。

可以在多项式时间内检查每种节点类型是否满足该条件。◀

▶**引理 7.** 判断一个虚拟分量是否具有半问题性属于P 类。

证明。 我们可以在多项式时间内检查一个图的面覆盖数是否为 1。接下来只需检查：在虚拟实例的增强图中，能否使用虚拟实例角之间那条边所关联的两个面覆盖所有终端。我们称这一性质为外面可覆盖（*EFC*）。检查方法与通过沿虚拟分量的子 SPR 树进行动态规划来判断是否无问题的方法类似。

在基本情形中，这棵子树仅由一个节点组成（该节点不是 P 节点）。如果该节点是 S 节点，则该虚拟实例具有半问题性。如果该节点是 R 节点，那么虚拟分量的嵌入和面环是唯一确定的，因此可以

在多项式时间内检查所有终端是否都位于包含连接两个角的边的两个面圈的并集上。

现在我们转向动态规划步骤，并根据虚拟分量的子 SPR 树的根 r 类型区分情况。

S 节点。 当且仅当所有子虚拟分量都是 EFC 时，该虚拟分量才是 EFC。该命题的正向推论可通过以下方式看出：以能够证明各子虚拟分量均为 EFC 的方式嵌入每个子虚拟分量，再翻转这些嵌入，使所有终端都位于同一个面上，且连接两个角的边处于该面的边界上。对于反向推论，注意，如果某个子虚拟分量不是 EFC，那么无论我们如何选择嵌入方式，它的一些终端都无法位于一个包含连接两个角且处于其边界上的边的面上。

P 节点。 当且仅当至多两个子虚拟分量包含虚拟分量的角以外的终端，且所有子虚拟分量都不存在问题时，该虚拟分量才是 EFC。该命题的正向推论可通过以下方式看出：以能够证明各子虚拟分量均不存在问题的方式嵌入每个子虚拟分量，并对其排序；再翻转至多两个包含终端的子虚拟分量的嵌入，使所有终端都位于同一个面上，且连接虚拟分量的两个角的边处于该面的边界上。对于反向推论，注意，如果三个子虚拟分量都包含角以外的终端，那么无论我们如何选择嵌入方式，总有某个终端不会与连接两个角的边位于同一个面上。此外，如果某个子虚拟分量不存在问题，那么无论我们如何选择嵌入方式，它的一些终端都无法位于一个包含连接两个角且处于其边界上的边的面上。

R 节点。 当且仅当所有包含终端的子虚拟分量在面环的并集中通过虚边相连（这些面环也包含角之间的边），并且所有子虚拟分量都没有问题时，该虚拟分量才是 EFC。该结论的正向蕴含可通过如下方式看出：以能够证明各子虚拟分量没有问题的方式嵌入每个子虚拟分量，并翻转这些嵌入，使所有终端都位于一个包含角之间的边的面上。对于反向，注意，如果并非所有连接包含终端的子虚拟分量的虚边都位于一个包含角之间的边的面环上，那么无论我们如何选择嵌入方式，都不会有任何一个面能将所有这些终端和角之间的边都置于其边界上。此外，如果某个子虚拟分量有问题，那么它至少有一个终端不能与该虚拟分量角之间的边位于同一个面上，因为根据命题 12，在非平凡的 3-连通图中，两条边至多共享一个面。

检查每种节点类型是否满足该条件可以在多项式时间内完成。 ◀

4 良好核与基本虚拟组件替换

本节将介绍一种核化过程，该过程归纳地假设我们拥有特殊核，我们将其称为每个虚拟分量的小型良好核；这些虚拟分量来自所考虑的 SPR树节点处所诱导图的增强图。

▶ **定义 8.** 设(G,T) 是面覆盖数的一个实例。给定 G 的 *SPR*树上的一个节点 t，考虑其增强图 G_t，其角顶点为 c_1, c_2。我们将$\mathrm{fcn}_0(G_t,T)$、$\mathrm{fcn}_1(G_t,T)$和$\mathrm{fcn}_2(G_t,T)$ 定义为该增强图的最小面覆盖的大小

XX：10 非嵌入平面图面覆盖的多项式核

使得它们分别恰好包含 *0*、*1*、*2* 个外部面。设 K 是一个终端集为 $T' \subseteq V(K)$的图。若满足以下条件，我们称 K 为 G_t 的良好核：

K1 K 包含顶点 c_1、c_2 和边 c_1c_2。*K2* 对于 $i \in \{0, 1, 2\}$，我们有 $fcn_i(G_t, T \cap V(G_t)) = fcn_i(K, T') \leq k$，或者 $fcn_i(G_t, T \cap V(G_t)) > k$ 且 $fcn_i(K, T') > k$。*K3* 对于每个 $C \subseteq \{c_1, c_2\}$，我们有 $fcn_0(G_t, (T \cap V(G_t)) \setminus C) = fcn_0(K, T' \setminus C) \leq k$，或者 $fcn_0(G_t, (T \cap V(G_t)) \setminus C) > k$ 且 $fcn_0(K, T' \setminus C) > k$。如果满足：*K4* 存在某个常数 c（该常数与 K 无关），使得 $c \cdot |V(K)|^{\frac{1}{3}}$ 是任意 G_t 的最小面覆盖中所使用的内部面数量的最小值，则称良好核是小的。

条件 (K1) 确保我们可以归纳地构造核，也就是说，在 G_t 中，我们可以用对应于其子节点的虚拟分量的良好核来替换该虚拟分量。直观地说，我们希望 G_t 和 K 的行为相同，尤其是它们与图的其余部分以相同的方式交互。条件 (K2) 和 (K3) 表明，如果 G_t 和 K 的面覆盖大小不同，那么两个面覆盖都太大，无法导出全局解。需要注意的一点是，角顶点 c_1, c_2 可能从 G_t 的“外部”得到覆盖。因此，我们需要比较 G_t 和 K 的面覆盖，这些面覆盖覆盖除角之外的所有终端。在 (K3) 中，我们只比较 fcn_0 的值，因为根据 (K2)，fcn_1 和 fcn_2 的值相等（因为角由相应的外部面覆盖）。

最终，我们将沿着 SPR树设计一个从叶到根的动态规划，为每个 G_t（其中 t 是 G 的一棵 SPR树中的节点）求得小型良好核。我们可以验证，SPR树根节点处的小型良好核实际上是一个多项式核。

▶**引理 9.** 设 r 是所考虑的 G 的 *SPR*树的根。K 的小型良好核 G_r 是 G 的一个多项式规模的核，其中 G 是面覆盖数问题的一个实例。

证明。 根据以下事实：r，G_r 没有角，且 $G = G_r$ 与其增强图重合，(K1)–(K3) 要么已无必要，要么等价于表达 G 和 K 作为以下问题实例时的实例等价性：面覆盖数。

此外，根据 (K4)，存在一个常数 c，使得 $|V(K)| \leq \frac{1}{c}(k-2)^3$，其中 k 是 G 的面覆盖数（因此也是 K 的面覆盖数）。这表明 K 是 G 的一个三次核，其中 G 是面覆盖数问题的一个实例。◀

接下来的归约规则会将“简单”的虚拟分量替换为规模恒定的图。

▶**归约规则1。** 将每个不含终端的虚拟分量替换为一条连接其两个角的边。

▶**归约规则2。** 将每个无问题分量替换为一个 P_3，其端点与两个角重合，且度为二的顶点是一个终端。

我们将上述图称为终端细分边。

▶**归约规则3。** 将每个半问题分量替换为图 *2* 所示的构件：用一条边将一个角连接到构件的顶点 a，并将另一个角连接到顶点 b。

如上所定义，设 t 是 G 的 SPR树中的一个节点，其增强图为 G_t。

▶ **引理10。** 令 K 和 T' 分别为对 G_t 应用所述替换（归约规则*1*、归约规则*2*和归约规则*3*）后得到的图及其中的终端集合。那么 K 是 G_t的良好核。

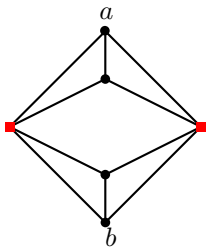

图 2 半问题虚拟分量的构件。红色方块表示终端。注意，如果将 a 和 b 固定在外部面上，则面边界是唯一的。

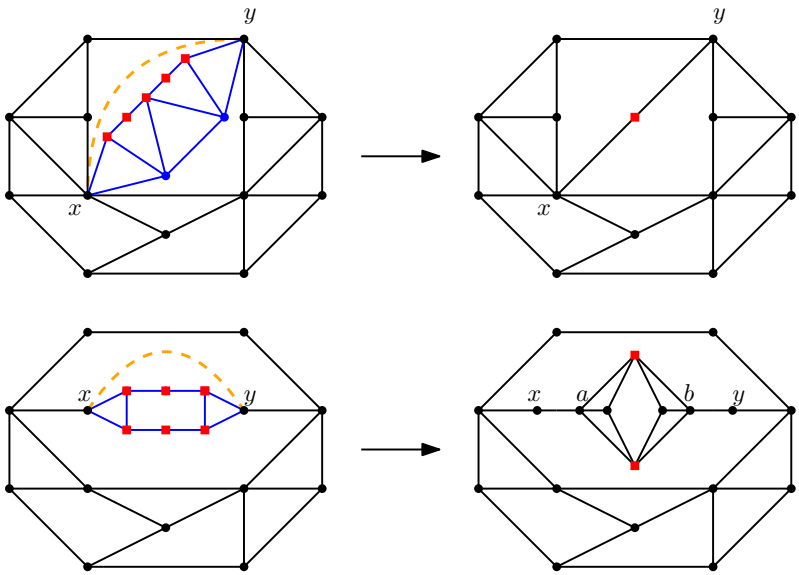

图3 归约规则2（上）和归约规则3（下）中所作的示例性替换。虚拟边以橙色虚线曲线表示，其对应的虚拟分量在左侧图中以蓝色表示，而相应的替换显示在右侧。

证明。 显然，(K1) 得到满足，因为 G_t 的角并不属于被替换的顶点。

对于 (K2)，考虑任意 $i \in [3]$，并固定 G_t 的一个嵌入，使得能够实现 $\mathrm{fcn}_i(G_t)$，并令 F 为实现这一点的面覆盖。不失一般性地， F 不包含无终端虚拟分量的子嵌入中的任何内部面（这些面可以直接从 F 中省略）。类似地，不失一般性地， F 不包含无问题虚拟分量的子嵌入中的任何内部面；否则，可以重新绘制所有无问题虚拟分量，使其只需一个外部面即可覆盖其所有终端。如果其中一个外部面同时也是 G_t 的外部面，则另一个外部面不是，我们可以根据 i 自由地将任意一个纳入 F 。事实上，根据同样的论证，我们可以假设无问题虚拟分量的子嵌入能够证明其无问题性。最后，沿用类似的论证，不失一般性地， F 要么包含任意半问题分量的一个内部面，要么包含其两个外部面；并且我们可以假设半问题虚拟分量的子嵌入能够证明其半问题性。

现在，让 F' 由 F 得到：将其中面边界上包含以下内容的任意部分替换为

XX:12 非嵌入平面图面覆盖的多项式核

一条边：(i) 将无终端虚拟分量替换为连接其角的边；(ii) 将无问题虚拟分量替换为代替该无问题分量的路径；(iii) 将半问题虚拟分量的子嵌入中的每个外面，替换为图 2 所示、代替该虚拟分量的图中的每条终端细分边。最后，对于 F 中属于半问题虚拟分量内部面的面，我们改为在 F' 中加入一个面，该面由根据 2 所示嵌入中的唯一内部面构成，且该内部面包含构件的两个新终端。我们根据 G 的嵌入来嵌入 G'，具体如下：将 G' 中代替无终端虚拟分量的每条边，沿该分量中连接两角的某条路径的嵌入进行嵌入；将 G' 中代替无问题虚拟分量的每条终端细分边，沿该分量中连接两角且包含终端的某条路径的嵌入进行嵌入；并将代替半问题虚拟分量的每个小图，沿 G 中该分量的嵌入进行嵌入，其中该小图本身按照 2 所示方式嵌入。

在该 G' 嵌入中，很容易验证 F' 是一个面覆盖，其大小与 F 相同，并且包含 G_t 的外部面数量也相同。

反过来，固定 K 的一个嵌入，使得可以实现 $\mathrm{fcn}_i(K)$，并令 F' 为实现这一点的面覆盖。不失一般性， F' 只包含替换半问题虚拟分量的构件中的内面，且这些内面包含该构件的两个新终端；否则，我们只需将 F' 中某个不包含该构件两个终端的构件内面替换为包含这两个终端的构件内面。我们可以将无终端、无问题及半问题虚拟分量的替换子嵌入替换为其原图的 ϵ-薄嵌入。对于无问题虚拟分量，我们选取能够证明其无问题性的嵌入，并将其翻转，使覆盖所有终端的唯一面朝向 F' 中的一个面（这样的面必定存在，因为无问题分量会被替换为终端细分边，且相应终端必须由 F' 覆盖）。对于半问题虚拟分量，我们选取能够证明其半问题性的嵌入。我们通过以下方式从 F' 得到 F：首先，将 F' 中任何属于半问题分量构件内面的面，替换为覆盖该半问题分量所有终端的内部面。对于每个其构件内面均未包含在 F' 中的半问题分量，不失一般性，固定绘图中 K 的两个包含该虚拟分量角的面都必须属于 F'。为得到 F，我们将它们替换为 G_t 固定绘图中满足相同条件的面，即包含所讨论的半问题分量两个角的那两个面。

很容易验证， F 是 G所述嵌入中的一个面覆盖，其大小与 F' 相同，并且包含 K中数量相同的外部面。

对于 (K3)，无论将 G_t 的哪些角视为终端，都可以使用与 (K2) 相同的论证。◀

接下来，我们证明，对有问题的虚拟分量逐步替换为良好核，会得到一个良好核。

▶**引理 11.** 设 C 是 G_t 的一个问题分量， C 是 C的一个良好核。令 G_t 为将 C 替换为 C后从 G_t 得到的图。那么， G_t 是 G_t的一个良好核。

证明。 首先，注意到该替换不会影响 t的骨架，因此 G_t 的角顶点和角边得以保留，即满足 (K1)。设 c_1、 c_2 为 C 的角顶点，并设 C' 为 C 的增强图。

现在证明 (K2)。令 $i \in \{0、1、2\}$。固定 G_t 的一个嵌入 $\mathcal{F}$，该嵌入见证了 $\mathrm{fcn}_i(G_t、T)$，并令 F 为相应的面覆盖。我们的目标是从 F构造 G_t 的一个面覆盖 F。

非正式地说，我们将 F 划分为两个集合，即 F_C 和 F_U：其中， F_U 是在用 C替换 C 后不受影响的面集合，而 F_C 包含 F中剩余的面。利用 C 是 C的良好核这一事实，我们构造 C的一个面覆盖 $F_{C'}$ 。面覆盖 F 将˜包含 F_U 中的面以及与 $F_{C'}$相对应的面。

形式化地，我们定义 $F_U = \{f \in F\colon f \cap V(C) \subseteq \{c_1, c_2\}\}$。换言之， F_U包含 F中与 C 不相交的面，但可能与其角顶点相交。令 $F_C = F \setminus F_U$。 F_C 中的面对应于 C'的面：完全包含在 C 中的面对应于 C 的内部面（具有相同的顶点集），而包含 C 之外顶点的面对应于 C'的外部面。令 $F_{C'}$ 为 C' 中对应于 F_C的面的集合。注意， $F_{C'}$ 是 C' 的一个面覆盖，覆盖了 $T \cap V$（C）中的所有终端，但可能除外 c_1、 c_2（因为这些顶点可能由 F_U中的面覆盖）。令 $j \in \{0, 1, 2\}$为 $F_{C'}$ 中对应于 C'外部面的面数。根据 j的值，我们区分两种情况：

若 $j \in \{1, 2\}$：在这种情况下， C' 的所有终端都被 $F_{C'}$中的某个面覆盖。通过交换论证，很容易看出 $F_{C'}$ 是最优的，即它见证了 fcn$_j(C, T \cap V(C))$，因此我们有˜ ˜ ˜ fcn$_j(C, T \cap V(C)) = |F_{C'}| = |F_C|$。固定 C的一个嵌入以见证 fcn$_j(C, T' \cap V(C))$˜，并令$F_{C'}$为相应的面覆盖。我们设定 $T_1 = T$、 $T_{'1} = T'$。

若 $j = 0$：在这种情况下， c_1和 c_2可能不会被 $F_{C'}$中的某个面覆盖。令 T_1， T'_1为通过分别从 T 和 $T_{'}$中移除未被 F_C 中的某个面覆盖的角顶点而得到的终端集合。类似地，我们有 fcn$_0(C, T'_1 \cap V(C)) = |F_C|$。固定 C的一个嵌入˜ ˜ ˜ ˜以见证 fcn$_0(C, T'_1 \cap V(C))$，并令 $F_{C'}$为相应的面覆盖。

˜ ˜ ˜我们通过使用上述对 C 的嵌入来嵌入 G_t ，并使 G_t˜ ˜ ˜的其余部分与 $\mathcal{F}$ 中的相同。如果 $j = 1$， 我们将 C 嵌入 G_t 内部，使得属于 $F_{C'}$ 的 C 的外部面（˜）对应于 F_C 中包含 c_1, c_2 的面。如果 $j \in \{0,2\}$，我们可以通过任意选择外部面来嵌入 C˜（也就是说，在 G_t 内部如何“翻转”它并不重要）。˜现在我们得到了 G_t 的一个嵌入。

˜ ˜ ˜我们将 F_C 定义为与 $F_{C'}$对应的 G_t 的面。注意， F_U 中的面是 G_t 的˜面（因为它们不包含来自 $V(C) \setminus \{c_1, c_2\}$ 的顶点），并且 $F_U \cap F_C = \emptyset$。˜

˜我们声称 $F = F_U \cup F_C$ 是 G_t的面覆盖。显然，除 c_1, c_2 外的所有终端都被覆盖： $V(C)$ 中的终端由 F_C 中的一个面覆盖，其余终端由 F_U 中的一个面覆盖。如果顶点 c_1 和 c_2 是终端，那么当它们由 F_C 中的一个面覆盖时，它们由 F_C 中的一个面覆盖；否则，它们由 F_U 中的一个面覆盖。因此， F 是 G_t 的面˜覆盖。还需证明大小界。

˜ ˜ ˜若 $|F| \leq k$，则有 fcn$_j(C, T_1 \cap V(C)) = |F_C| \leq k$，因此 $|F_C| =$fcn$_j(C, T_{'1} \cap V(C)) =$˜ ˜fcn$_j(C, T_1 \cap V(C))$，由 (K2) 和 (K3) 可得。因此 $|F_C| = |F_C|$，所以 $|F| = |F|$。若 $|F| > k$，我们˜ ˜ ˜分两种情况讨论。若 $|F_C| > k$，则 $|F_C| > k$，所以 $|F| > k$。若 $|F_C| \leq k$，则 $|F_C| = |F_C|$˜所以 $|F| = |F| > k$。

为证明 (K3)，我们从 T 和 T' 中移除一个或两个角顶点，并按照情形 $j = 0$ 的相同方法进行。◀

5 个特定于节点类型的核化步骤

在以下各小节中，我们将介绍特定节点的归约规则，这些规则将使我们能够为每种节点类型得到小型良好核。根据引理 9，这意味着整个图存在一个多项式核。在以下各节中，考虑 G 的 SPR树中的一个节点 t 。

XX：14 非嵌入平面图面覆盖的多项式核

5.1 R 节点

众所周知，任何 3-连通平面图，尤其是 R 节点的骨架，在同胚意义下都具有唯一嵌入 [5]。我们的策略是固定 R 节点骨架的这一嵌入，基于此固定嵌入对其进行核化（过程中可能会失去 3-连通性），然后将所得的核刚性化，从而重新控制包含终端的面。

我们首先对 3-连通嵌入图作如下总体观察。

▶**命题 12**。 在任何至少有四个顶点的 *3*-连通平面图中，任意三个顶点共同属于的面至多有一个。

证明。 设 H 是一个至少有四个顶点的 3-连通平面图。我们将 H 视为其唯一嵌入。反设有三个不同的顶点 u、v、w同时位于两个面 f和 f'的边界上。我们固定这样一组 u、v、w，使得沿着 f逆时针遍历时，它们依次出现为 u、v、w。根据平面性，沿着 f' 逆时针遍历时，它们出现的顺序必为 u、w、v。

由于 f 和 f' 是面，且沿 f出现的顺序如假设所述，我们可以画出一条闭曲线，它仅在 u 和 v 处与 H 相交，其余部分完全位于 f 和 f' 的内部；该曲线将 w 与 f 上从 u 到 v 的遍历部分 t 分隔开来。若 t 上存在除 u 和 v 以外的顶点 x，则这意味着在 $H-u-v$ 中不存在 x-w路径，这与 3-连通性矛盾。因此， uv 是 f上的一条边。根据对称性可知， vw 和 wu 是 f边界上的边，而 uv、vw和 wu 是 f'边界上的边。总之，这意味着 u、v、w 构成一个与某个已有的第四个顶点不连通的三角形，这与 3-连通性矛盾。◀

命题 12 很容易推广到某些边被终端细分的情形，尤其是第 4 节中替换不成问题的虚拟组件时的情形。为简化记号，我们将可能由 3-连通平面图通过把某些边替换为终端细分边而得到的图称为近似*3*-连通平面图，并将以这种方式从 G 的骨架得到的图称为扩展骨架。

▶**命题13**。 在任意一个至少有七个顶点的近似*3*-连通平面图的嵌入中，任意四个顶点至多共处于一个面上。

证明。 设 H 是一个至少有七个顶点的近似3-连通平面图。我们将H 视为其唯一嵌入。反设有四个互不相同的顶点同时位于两个面的公共边界上。

根据构造，只要两个面共享一个度为2的顶点，它们也必定共享该顶点的两个邻点。因此，如果两个面共享的顶点超过三个，那么其中必有三个顶点的度不为2；或者有两个度为2的顶点，这意味着存在三个度不为2的共享顶点。

这意味着，我们可以撤销使 H 从 3-连通平面图 H' 演变而来的细分边替换，从而得到一个 3-连通平面图，其中两个面至少共享三个顶点。反设 H' 的顶点少于四个。那么 H' 至多有三条边，因此 H 至多有六个顶点，这与假设矛盾。因此，我们可以将命题 12 应用于 H'，从而得到矛盾。◀

现在让我们实际关注 G_t，其中 t 是 G 的 SPR树中的一个 R 节点。对于有问题的虚拟组件，我们作如下简单观察。

▶**观察14.** 如果 G_t 有超过 k 个有问题的虚拟分量，那么它不存在大小至多为 k的面覆盖。

证明. 要覆盖有问题的虚拟分量中的终端，至少需要该虚拟分量的某个子嵌入中的一个内部面。不同虚拟分量之间不能共享这样的面。◀

我们还可以界定需要考虑的半问题虚拟边的数量。

▶**命题 15**。 如果 G_t 的骨架上有一个面，其边界上有超过 k 条半问题虚拟边，那么此嵌入不存在大小至多为 k 的面覆盖。

证明。 要覆盖半问题虚拟分量中的终端，至少需要一个属于该虚拟分量子嵌入的私有面，或者需要该虚拟分量的两个外部面（同时与该虚拟分量的两个角相邻的面）。根据命题12，对应于同一骨架面上虚边的任意一对虚拟分量，在骨架中都不能共享其他面。这意味着，要覆盖对应虚边位于骨架同一面上的超过 k 个半问题虚拟分量中的终端，至少需要 $k+1$ 个两两不同的面。◀

▶**推论 16**。 如果骨架中有超过 k^2 条半问题性虚拟边，那么不存在大小至多为 k 的面覆盖。

证明。 反设存在一个 G_t 大小至多为 k 的面覆盖。根据鸽巢原理，其中至少有一个面必须覆盖来自超过 k 个半问题性虚拟分量的终端。该面必然对应于骨架中的一个面，且其边界上有超过 k 条半问题性虚拟边，这与命题 15 矛盾。◀

最后，我们减少非问题虚拟边的数量，实际上也减少骨架中终端的总数。为此，我们首先对几乎 3-连通平面图作出一个一般性论断。

▶**命题 17**。 在几乎 *3*-连通平面图的嵌入中，边界上有超过 $3k$ 个终端的面必须属于任何大小至多为 k 的面覆盖。

证明。 反设存在一个面覆盖，不包含这样一个面。那么，根据命题13，任何其他面一次至多只能覆盖该面边界上的三个终端。这意味着仅覆盖所考虑面上的终端就至少需要 $k+1$ 个面，矛盾。◀

结合无问题虚拟分量基本替换步骤的安全性（参见引理10的证明），可以立即据此证明以下归约规则，我们称之为终端密集面归约。

▶ **引理 18** （终端密集面归约的安全性）。将所有无问题虚拟分量替换为终端细分边，然后对于扩展骨架中终端数超过 $3k+1$ 的每个面，将这些终端中任意选取的 $3k+1$ 个保留为终端，其余全部变为非终端，即可得到一个良好核。

证明。根据引理10，替换无问题虚拟分量后得到的是良好核。

此外，(K1) 显然成立。剩下需要证明的是 (K2) 和 (K3)。

显然，无论必须包含哪些外部面，或允许留下哪些角未被覆盖， G_t 增强图的任何面覆盖都覆盖其终端的任意子集

未覆盖。这表明，按照引理所述修改 G_t 时，我们在(K2)和(K3)中考虑的所有数值都不会增加。

现在我们证明，任何覆盖了保留下来的终端子集的面覆盖，也会覆盖那些被我们转换为非终端的终端，从而推出 (K2) 和 (K3) 中其余的不等式。

考虑一个终端 v，它在修改前由 G_t 中的一个面覆盖所覆盖，而我们将其转换为了非终端。根据构造，它位于扩展骨架的某个面上，该面还剩下 $3k+1$ 个终端；根据命题 17，在将一些终端转换为非终端后得到的实例中，该面必须包含在面覆盖内。因此，这样的面覆盖也会覆盖 v。◀

▶**命题 19.** 如果对 G 穷尽地应用终端密集面归约后 t，终端数量超过 $3k^2+k$，那么不存在大小至多为 k 的面覆盖。

证明。 反设存在一个大小至多为 G_t 的面覆盖 k。根据鸽巢原理，这些面中至少有一个必须覆盖超过 $3k+1$ 个终端。这与已穷尽地应用终端密集面归约这一事实矛盾。◀

从现在起，假设已对 G_t 穷尽地应用终端密集面归约；特别是，在以下定理陈述中，我们不再明确将其列为前提。现在，我们已经限制了扩展骨架中终端和边的数量，并希望用归纳假设的核替换它们。接下来需要归约骨架中既不包含终端、也不包含边的部分。在修改扩展骨架的过程中，我们可能会首次失去其嵌入的唯一性。我们将固定其嵌入，并在后续修改中将其纳入考虑。为此，我们明确讨论嵌入面覆盖数的良好核，而非面覆盖数的良好核；也就是说，在 (K1)–(K3) 中，fcn 将由其固定嵌入的对应版本取代。

我们可以限制至少包含以下对象中两个对象的面的数量：终端、角或虚边的端点。我们将任何这样的顶点称为 有趣顶点。

▶**命题 20。** G_t 的骨架中，至少包含两个有趣顶点的面的数量上界为 $O(k^2)$。

证明。为计算此类面的数量，考虑辅助图 $F=(V_F,E_F)$。令 V_F 为 G_t 的有趣顶点集合。对于 f 的扩展骨架中包含两个或更多有趣顶点的每个面，我们任意选取位于 f 边界上的两个有趣顶点 u、$v\in V_F$，并将边 uv 添加到 E_F 中。此外，将 uv 嵌入 f 内部。由于 G_t 的每个面中恰好包含 E_F 的一条边，因此 F 是一个平面嵌入图。因此，根据欧拉公式，$|E_F|=\mathrm{O}(|V_F|)=\mathrm{O}(k^2)$。由于 G_t 中至少包含两个有趣顶点的面的数量为 $|E_F|$，我们得到此类面的数量为 $\mathrm{O}(k^2)$。◀

▶ **规约规则 4** (无趣边删除)。 删除扩展骨架中仅位于不包含有趣顶点的面的边 e 边界上的边（见图 *4*）。

注意，由于扩展骨架的嵌入是固定的，上述规约规则中的这些边是唯一确定的。

接下来，我们考虑 G 的骨架中的每个面 f，其边界上有任意一个固定的终端、角或虚边 x 的端点。

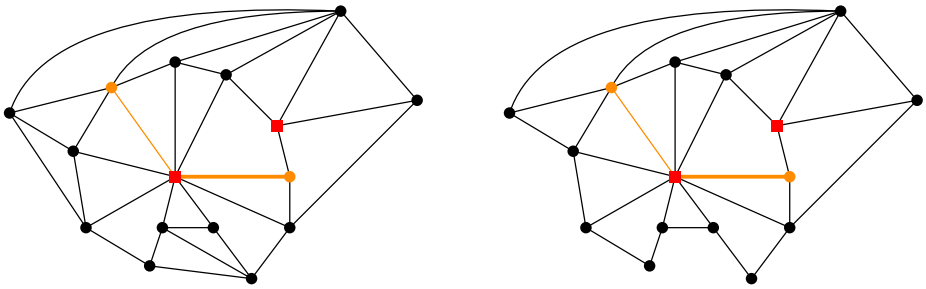

图 4 无趣边删除应用于一个图的结果示例：左图为原图，右图为处理后的图。其中，终端以红色方块表示，虚边及其端点以橙色表示（较粗的边为角边）。

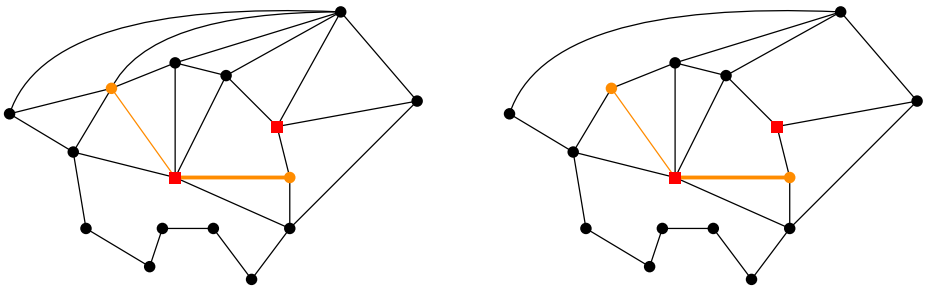

图 5 对左侧终端周围进行私有面合并的结果示例（左图），以及对来自图 4 的图进行穷尽式私有面合并后的结果（右图）。

▶**归约规则 5** (私有面合并)。 如果扩展骨架中存在一个面 f，其边界上至多有一个固定有趣顶点（记作 x），且与另一个包含 x 、但不包含其他有趣顶点的面 f' 相邻，则删除与 x 连通的 f和 f' 的公共边界（见图 *5*）。

▶ **命题 21** （私有面合并的安全性）。 设 G 是通过穷尽式应用归约规则 *4* 和归约规则 *5* 得到的图。对于 G_t 的任意嵌入， G 按照 G_t 在 G 上的嵌入所施加的限制进行嵌入，是 G_t 关于嵌入面覆盖数的良好核。

证明。 无趣边删除和私有面合并不会改变共同出现在任一面上的终端集合，因此保证了 (K2) 和 (K3)。此外，没有角被删除，从而保证了 (K1)。◀

无趣边删除和私有面合并使我们能够将问题归约到骨架的面数有界的情形。

▶**引理 22**。 设 S 是从 G_t 的骨架出发，穷尽应用归约规则 *4* 和归约规则 *5* 后得到的图，并按照 G_t 的骨架的唯一嵌入在 $\tilde{S}$上的限制进行嵌入。 $\tilde{S}$ 至多有 $O(k^3)$ 个面。

证明。 根据命题 20， G_t 中至少包含两个有趣顶点的面的数量为 $\mathcal{O}(k^2)$。无趣边删除或私有面合并都不会增加这个数量。

首先，我们论证任意有趣顶点 x 至多属于 $\mathcal{O}(k^2)$ 个不包含其他有趣顶点的面边界：通过穷尽地应用

XX:18 非嵌入平面图面覆盖的多项式核

归约规则 5，任何两个包含 x 但不包含其他有趣顶点的面，其边界上与 x 相连的边都不可能共享。因此，在围绕 x 的旋转系统中，任意两个这样的面之间都必须隔着一个也包含其他有趣顶点的面，而这样的面只有 $\mathcal{O}(k^2)$ 个。因此，我们可以构造一个映射，将所有恰好包含一个有趣顶点的面映射到包含至少两个有趣顶点的面，且每个后者仅由其边界上的顶点映射到。由于每个面的边界上至多有 $\mathcal{O}(k)$ 个有趣顶点，因此该映射中大小为 $\mathcal{O}(k^2)$ 的陪域中的每个元素至多被映射 $\mathcal{O}(k)$ 次。这意味着，边界上恰好包含一个有趣顶点的面至多有 $\mathcal{O}(k^3)$ 个。

现在，我们来界定边界上没有有趣顶点的 S 的面数。边界 f 上的每条边也必须位于某个边界上包含有趣顶点的面上；否则，它早已在无趣边删除过程中被删除。与命题 20 的证明类似，考虑辅助图 $F = (V_F, E_F)$。V_F 中，每个包含至少一个有趣顶点的 S 面对应一个顶点。对于 S 中每个不包含有趣顶点的面 f，我们任意选取两个与 f 相邻且包含有趣顶点的面，并在 E_F 中它们对应的顶点之间添加一条边。注意，对于每个这样的面 f，E_F 中恰有一条边，且不含有趣顶点的面彼此不相交。因此，F 是平面图，由欧拉公式 $|E_F| = \mathcal{O}(k^3)$。因此，与至少两个包含有趣顶点的面相邻的 $\tilde{S}$ 面数为 $\mathcal{O}(k^3)$。

剩下的问题是界定这样的面 $f_1, \ldots f_j$ 的数量：它们的边界上没有有趣顶点，且其边界也全部与同一个面 f' 共用，而该面边界上包含一个有趣顶点。只有当每个 f_i 都嵌套在 f' 内部时，这种情况才会发生。由于 G_t 的骨架几乎是 3-连通的，因此至少存在三条点不相交路径，将 f_i 的边界连接到 f' 边界中其嵌套所在的部分。这些路径将 f' 划分为三个子面。如果其中任何一个子面不包含有趣顶点，那么 f_i 的部分边界就会在无趣边删除过程中被删除；这就产生了矛盾。因此，所有这些子面都包含一个有趣顶点，并且由于这些路径两两顶点不相交，这些有趣顶点必然各不相同。于是，这些路径仍会包含在 S 中；这与 f' 是 S 的一个面相矛盾。◀

到目前为止，我们只给出了面数的上界。为了获得较少的顶点数而非面数，我们应用以下归约规则。

▶ **归约规则 6** (无趣边收缩)。 将骨架中长度至少为 *2* 且内部不含有趣顶点的每条导出路径替换为一条边。此外，删除不是有趣顶点的度为 *1* 的顶点。

设 G 为对 G_t 以任意方式嵌入后应用归约规则 4 和归约规则 5 所得到的图。然后，设 G' 为对其穷尽应用归约规则 6 后得到的嵌入图。任意面上共同出现的终端集合在 G' 中不会发生变化。因此，根据与命题 21 相同的论证，这对于嵌入面覆盖数是安全的。

▶**命题 23**。 设 G 为从 G_t 依次穷尽应用无趣边删除、私有面合并以及无趣边收缩后得到的图。对于的任意嵌入，设 G 按照 G_t 在 G 上的嵌入限制进行嵌入，其中，用于替代路径的边以 ε-距离沿着这些路径绘制。则，对于嵌入面覆盖数，G 是 G_t 的良好核。

最后，我们终于可以开始界定顶点数了。

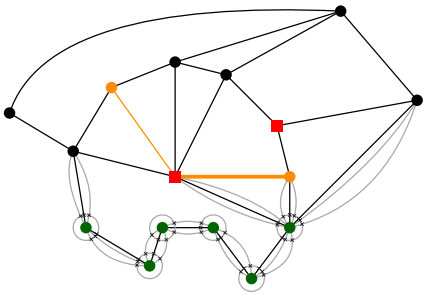

图 6 $G^{\otimes U}$，其中 G 来自图 5（右），U 为绿色顶点集合。不是原始边细分的边以灰色表示，细分顶点以叉号标出。请注意，经过无趣边收缩后，U 中只会剩下一个顶点。

▶**引理24**。设 S 是从 G_t 的骨架经过穷尽地应用无趣边删除、私有面合并，再进行无趣边收缩后得到的图。$|V(\tilde{S})| \in O(k^3)$。

证明。请注意，S 中所有度不超过二的顶点都是有趣顶点，否则它们早已在无趣边收缩过程中被移除。我们已经知道，这类顶点的数量可以界定为 $\mathcal{O}(k^2)$。

为了界定度至少为三的顶点数量，我们考虑由 S 得到的嵌入图 $\tilde{S}'$，并将每条含有超过两条边的导出路径替换为一条边。该图的顶点恰好是 S 中度至少为三的顶点，且 S' 的最小顶点度为三。

这意味着 $|E(\tilde{S}')| \geq \frac{3}{2}|V(\tilde{S}')|$。将其代入 $\tilde{S}'$ 的欧拉公式可得，即 $|V(S')| \leq 2f - 4$，其中 f 是 S' 的面数。S' 的面数与 $\tilde{S}$ 的面数相同，而根据引理 22，该数量属于$\mathcal{O}(k^3)$。

总体而言，这意味着该引理成立。◀

现在，我们将通过刚性化（即向嵌入图中添加结构，使其成为 3-连通图）来重新确立核化骨架的嵌入唯一性。

▶ **定义25**。设 H 是一个嵌入平面图，且 $U \subseteq V(H)$。H 关于 U 的刚性化是由 H 按照以下方式得到的嵌入图 $H^{\otimes U}$。对于每条边 $uv \in E(H)$，其中 $\{u, v\} \cap U \neq \emptyset$，引入 uv 的两个新副本，并将它们画在距离 uv 为 ε 的位置。将 uv 及其副本分别细分为 $|\{u, v\} \cap U|$ 个顶点，我们称这些顶点为细分顶点，它们与 $\{u, v\} \cap U$ 的距离为 ε。引入唯一的平面环，使其经过距 U 中每个顶点 ε 的细分顶点。

上述定义的示例见图6。刚性化不会显著增加图的规模：

▶ **观察26**。设 H 是一个嵌入平面图，且 $U \subseteq V(H)$。$|V(H^{\otimes U})| \in O(|V(H)|)$。

证明。对于 H的每条边，我们在 $H^{\otimes U}$ 中至多引入六个新顶点（H中每条边的三个副本各至多引入两个）。由于 $|E(H)| \in \mathcal{O}(|V(H)|)$，而 H 是平面图，因此这就得出了所述结论。◀

对我们而言，刚性化的预期目的是固定一种嵌入，这一点由以下引理在形式上予以支持。

XX:20 非嵌入平面图面覆盖的多项式核

▶**引理 27.** 设 H 是任意一个嵌入的连通平面图， U 是包含在 H 的大小至多为二的分隔集中的顶点集合。 $H^{\otimes U}$ 是 3-连通的。

证明。 反设 $X \subseteq V(H^{\otimes U})$ 是一个大小至多为二的分隔集。 X不可能由同时存在于 H 中、但在该图中并不构成分隔集的顶点组成。因此， X由 H 中的割点或 2-分隔集顶点，或细分顶点组成。

任何一条内部包含顶点 $u \in U$ 的路径（即 H 中的割点或 2-分隔集顶点），都可以在 $H^{\otimes U}$ 中改道[1]：沿着环上从前驱到后继、绕过 u 且距离为 ε 的两条路径中的任意一条改道。阻断这两个重布线路径选项需要两个顶点。因此，若 u 存在于 X 中，就可以从 X 中移除，而不改变 X 是 $H^{\otimes U}$ 中分隔集这一事实。因此，不失一般性， X 仅由细分顶点组成。

任何一条路径 P 若其内部包含位于绕 $u \in U$、距离为 ε 的环上的细分顶点 w，也可以在 $H^{\otimes U}$ 中以两种顶点不相交的方式改道：若在 P 中， w 位于 u 与绕 u、距离为 ε 的环上的另一个顶点 w' 之间，则存在直接边 $w'u$，以及一条由绕 u、距离为 ε 的环去掉 ww' 后构成的路径。若在 P 中， w 位于绕 u、距离为 ε 的环上的另外两个顶点 w' 和 w'' 之间，则可以经由 $w'u$ 和 $w''u$ 改道，或经由绕 u、距离为 ε 的环去掉ww' 和 ww'' 后构成的路径改道。否则， w 在 P 上有一个邻点，该邻点可通过一条边到达；这条边可能由复制并细分边 $uv \in E$（H）得到。若 w 的另一个邻点是 u，我们可以分别经由与 uv 的另外两个副本对应的两条路径改道。否则，我们可以沿着与 uv 的某个其他副本对应的路径，以及沿着与 uv 的最后一个剩余副本对应、并由绕 u、距离为 ε 的环去掉 w 后构成的路径改道。

无论如何，我们都可以通过两种顶点不相交的重布线路径选项避开 w；这些选项所要克服的障碍需要两个顶点。因此，若w 存在于 X中，就可以将其从 X 中移除，而不改变 X 是 $H^{\otimes U}$中一个分隔集这一事实。

这意味着 X 为空；这与 H 连通相矛盾。 ◀

˜显然可以验证，由穷尽地应用无趣边删除、私有面合并，再进行无趣边收缩，从 G_t 的骨架得到的图 S 是连通的。因此， $\tilde{S}^{\otimes U}$ 是平面且3-连通的，其中 U 是 S 中所有割点和属于˜的2-分隔集的顶点所构成的集合。根据引理 27， $\tilde{S}^{\otimes U}$ 具有唯一嵌入，这使我们能够从研究嵌入面覆盖数转而研究抽象图上的面覆盖数。在这一步中能够保持安全性，关键在于我们从不围绕有趣顶点进行刚性化。

▶**引理 28.** 设 S 由穷尽地应用无趣边删除、私有面合并，再进行无趣边收缩，从 G_t 的骨架得到。在 S 中，大小至多为˜的任何顶点分隔集都不包含有趣顶点。

˜证明。我们首先说明， S 的任何割点都不是有趣顶点。反设，
˜ ˜是这样的割点，或者与 $y \in V$（S）\{x}一起属于 S 的一个 2-分隔集。令 C_1˜ ˜和 C_2 为 $S - x$ 或 $S - \{x, y\}$中与 x相连的任意两个不同连通分量。由于 G_t 的骨架是 3-连通的，因此存在一条路径，从 C_1 中 x 的一个邻点通往 C_2 中 x 的一个邻点，且避开 y。我们考虑 C_1、 C_2 以及这样一条路径P，其嵌入与 x 一起围成 $\mathbb{R}^2$ 在 G_t骨架嵌入中的一个包含意义下极小区域。 P 的所有边都必定是在.....中被删除的

[1] 如果重布线路径选项与 P 相交，我们也始终允许采用捷径

˜从 G_t的骨架构造 S 的过程中。边只会在无趣边删除、私有面合并和无趣边收缩过程中被删除。

通过选择 P，使其相对于由 x 围成的区域是极小的， P 的所有边都与 x 同处于一个面上。因此，在无趣边删除过程中，不会删除 P 的任何边。在无趣面合并过程中， P 只能与 xz_1 或 xz_2 一起被删除，这与˜矛盾，因为这些边仍在 S 中。最后，在无趣边收缩过程中，唯一被删除的边位于图的 1-连通分量中；该图是在对 G_t 的骨架应用无趣边删除和私有面合并后得到的。显然， P 中的任何边都不符合这一点，因为 $P + \{xz_1, xz_2\}$ 构成一个环。

˜这意味着 P 仍在 S 中，这与假设 x 是割点或 $\{x, y\}$ 是一个 2-分隔集相矛盾。◀

下面的定理基本上表明，实例等价于即将得到的结果——除去
r拟替换虚拟分量后， G_t 的小型良好核。

˜ ▶**定理 29**。令 G 和 S 分别表示由 G_t 及其骨架经过穷尽地应用无趣边删除、私有面合并，随后进行无趣边收缩所得的图。$\tilde{G}^{\otimes U}$ 其中， U 是所有割点以及在 S 中包含于大小为二的˜分隔集中的顶点集合，是 G_t 关于面覆盖数的良好核。

证明。由于没有删除任何有趣顶点，(K1) 显然满足。下面我们论证 (K2) 和 (K3)。

固定 G_t 的一个嵌入，使得其在使用指定数量的外部面并覆盖指定角的条件下可以实现最小面覆盖数（我们将其称为广义面˜覆盖数）。根据命题 23， G 作为嵌入面覆盖数的一个实例，是 G_t 的良好核。根据引理 27， $\tilde{S}^{\otimes U}$ 具有唯一嵌入，该嵌入在 S 上的限制必然与 G_t 的骨架的唯一嵌入重合：边的副本以距相应原始边 ε 的距离嵌入，而细分顶点则以围绕 U 中相应顶点的 ε 距离绘制在环中。此外，根据构造，在此嵌入中以 G_t 的相应虚拟分量的嵌入替换虚边，所得结果是 $\tilde{G}^{\otimes U}$ 的一个嵌入，其中˜面与 G 的嵌入中的相同，只是 U 中的某些顶点在一些面环中被细分顶点替代，并且出现了仅由 U 中的顶点和细分顶点组成的新面环。根据引理 28，这意味着，在 $\tilde{G}$ 的固定嵌入和所描述的 $\tilde{G}^{\otimes U}$ 嵌入中，来自 G_t 骨架且共同出现在面边界上的终端、角和虚拟边端点集合相同。因此，抽象图 $\tilde{G}^{\otimes U}$ 的面覆盖数至多与˜嵌入图 G 的相同，即作为抽象图的 G_t 的广义面覆盖数。

反过来，我们可以固定 $\tilde{G}^{\otimes U}$ 的一种嵌入，使其最小广义面˜覆盖数得以实现。通过限制并追踪从 ε 距离处的环绕 U 的环到 U 中相应顶点的连接，这自然会导出 G 的一种嵌入。根据构造，在这种嵌入中，面与 $\tilde{G}^{\otimes U}$ 的嵌入中的面相同；不同之处在于，某些面环中的细分顶点被 U 中的顶点取代，而仅由 U 中的顶点和细分顶点组成的面则被移除。由引理 28 可知，这意味着，在 $\tilde{G}^{\otimes U}$ 的固定嵌入和所述 G 嵌入中，来自 G_t 骨架且共同出现在面边界上的终端、角和虚拟边端点集合相同。我们可以适当地将所述 G 的嵌入扩展到 G_t˜：先将 S 所包含的子嵌入扩展为 G_t 骨架的唯一嵌入，再将附着于虚边端点的子图替换为相应的虚拟分量，并以实现相关广义面覆盖数变体的方式绘制这些分量

XX:22 非嵌入平面图面覆盖的多项式核

该变体适用于相应的虚拟分量。请注意，必定有某种广义面覆盖数变体适用；否则，在 G 的构造中，该虚拟分量或其替代物 ˜ 就能在使用相同外部面 ˜ 的情况下获得更小的面覆盖，这与所考虑的整体面覆盖的最小性矛盾。 S 的子嵌入与 G_t 骨架的唯一嵌入˜相容，因为 S 的子嵌入源自 $\tilde{S}^{\otimes U}$ 的唯一嵌入，而后者又源自 G_t 骨架的唯一嵌入的限制：在原边的 ε 距离处添加边副本的嵌入，并在顶点周围的 ε 距离处添加环。根据无趣边删除、私有面合并和无趣边收缩的定义，此扩展˜不会以这样的方式细分 G 的面，使得来自 G_t 骨架的不同终端、角和虚拟边端点集合共同位于同一面中。这意味着，作为抽象图，抽象图 $\tilde{G}^{\otimes U}$ 的广义面覆盖数至少与 G_t 相同。◀

最后一步，我们将所有半问题性的虚拟分量替换为对应的常数规模小工具，并将所有有问题的虚拟分量替换为归纳假设的核。根据引理10，这样得到的就是一个良好核。我们还可以证明，这个最终得到的良好核（记作 K ）也是小型的。

▶**定理30**。 K 由本小节所述过程得到，且是小型的。

证明。我们将既是内部面、又是某个有问题的虚拟分量的内部面的那些面称为深层面；将 G_t 骨架内部的其他内部面称为骨架内部面。根据构造，K 源自一个具有 S 个顶点的 3-连通图，其中$\mathcal{O}(k^3)$ 每个面至多有$\mathcal{O}(k^2)$ 个顶点；其中一些边被替换为常数规模构件，其余边被替换为归纳假设的小型良好核。这里， k 是有问题和半问题虚拟分量的数量与 G_t 的骨架的面覆盖数中的最大值， G_t。

我们首先考虑 k 是 G_t 的问题虚拟分量和半问题虚拟分量的数量的情形。在 G_t 中，每个半问题虚拟分量都要求纳入其至少一个内部面或一个外部面，并且这些面两两不同。这些面都不是问题分量的深面。令 d 满足 $x \leq d \cdot k^{\circ 3}$，其中 x 是将边替换为常数规模分量后 S 中顶点的数量。我们可以假设 $c \geq d$。 K 的大小是 x 与问题虚拟分量的小型良好核的大小 s_i 之和。对于足够多的（数量为某个依赖于 d 的常数） s_i,

$$\left(\sum_i d + s_i\right)^{\frac{1}{3}} \leq \sum_i s_i^{\frac{1}{3}}. \tag{1}$$

由此，我们有

$$c \cdot \left(x + \sum_i s_i\right)^{\frac{1}{3}} \leq p_s + c\left(\sum_i d + s_i\right)^{\frac{1}{3}} \leq p_s + \sum_i c \cdot s_i^{\frac{1}{3}}$$

其中 p_s 是 G_t 的半问题虚拟分量的数量。这是覆盖 G_t 所需内部面的数量下界。如果 s_i 的数量不足以使 (1) 成立，则 $k \in \mathcal{O}(p_s)$，我们可以令 $x \leq c \cdot p_s^3$，从而立即得到所需的界。

接下来考虑以下情况： k 是 G_t的骨架的面覆盖数。我们将其分为两个子情况。

如果 G_t 的骨架的面覆盖数至多为四，那么在替换半问题虚拟分量后， S 的大小仍为常数。这意味着 K 的大小为

问题虚拟分量的小型良好核的大小 s_i 之和再加上一个常数。深面不会与骨架内部面或其他有问题的虚拟分量的深面相互作用。因此，如果它们是某个虚拟分量的任一面覆盖所必需的，那么它们对于 G_t 的任一面覆盖也同样必不可少，因此 $\sum_i c\cdot s_i^{\frac{1}{3}} \geq c\cdot(\sum_i s_i)^{\frac{1}{3}}$给出了 G_t 的面覆盖所需内部面数量的下界。

否则， $k \leq 2k^\circ$ 其中 k° 是 G_t 的面覆盖中所需的骨架内部面数以及有问题的虚拟分量数。因此， $|V(S)| \in \mathcal{O}(k^{\circ 3})$，即使将边替换为常数大小的构件，这一结论仍然成立；我们可以假设 c 的选取满足 $x \leq c\cdot k^{\circ 3}$，其中 x 是将边替换为常数大小的分量后 S 中的顶点数。 K 的大小等于 x 与有问题的虚拟分量的小型良好核的大小之和 s_i 。同样，深面不会与骨架内部面或其他有问题的虚拟分量的深面相互作用。因此，如果任何虚拟分量的面覆盖中需要这些深面，那么 G_t的任何面覆盖中也需要它们。同样，在 G_t的任何面覆盖中，深面也不能替代骨架内部面。因此， $c\cdot x^{\frac{1}{3}} + \sum_i c\cdot s_i^{\frac{1}{3}} \geq c\cdot(x+\sum_i s_i)^{\frac{1}{3}}$是 G_t的面覆盖中所需 G_t 内部面数的下界。◀

5.2 S 节点

在 S 节点 t 中，我们首先按如下方式处理骨架中的实边和无终端虚拟分量。

▶**归约规则 7**。 如果 S 节点骨架中至少有两个非角顶点终端，则将除一个以外的所有终端都变为非终端。如果存在一条由实边组成且长度至少为 2 的路径，则将其替换为一条实边。

▶**归约规则 8**。 将每个无终端虚拟分量收缩为一个顶点。

接下来要做的是减少无问题分量的数量。如果只考虑 fcn_1 和 fcn_2, ，那么只保留一个无问题分量就足够了（因为其余分量都会由面覆盖中的外面覆盖）。然而，对于 fcn_0，我们不会在面覆盖中使用任何外面，因此必须使用无问题分量的内部面。在这种情况下，至少有 $k+1$ 个无问题分量即可保证 fcn_0 大于 k。

如果存在没有内部面的无问题分量（例如终端细分边），我们称 $\text{fcn}_0 = \infty$，并且可以证明，应用归约规则后这一结论仍然成立（即应用归约规则后，不存在没有外部面的面覆盖）。

▶ **归约规则 9**。 如果至少有 $k+1$ 个无问题虚拟分量，则取其中除 $k+1$ 个之外的所有分量，并收缩它们的所有边。对于每个剩余的无问题分量，如果它有一个仅由一个内部面组成的面覆盖，就将其替换为一个三角形，其中两个顶点是该分量的角顶点，第三个顶点是终端。否则，将其替换为一条终端细分边。

出于同样的原因，我们需要保留 $k+1$ 个半问题分量：

▶ **归约规则 10**。 如果至少有 $k+1$ 个半问题虚拟分量，则取其中除 $k+1$ 个之外的所有分量，并收缩它们的所有边。使用图 2 中的构件替换剩余的半问题分量。

最后，我们将每个尚未替换的有问题的虚拟分量替换为其增强图限制在该虚拟分量上的归纳假设的核。

XX:24 非嵌入平面图面覆盖的多项式核

►**引理 31.** 考虑一个 S 节点 t，并令 G_t 为通过穷尽应用归约~规则得到的图。则 G_t 是 G_t的良好核。

证明。容易看出，应用任意归约规则后，条件 (K1) 都成立，因为我们既不删除顶点，也不移除角边。

我们来证明，应用归约规则 7 后，所得图满足 (K2) 和 (K3)。当且仅当使用至少一个 t 的外部面时，t 骨架中非角顶点的终端才会被覆盖；也就是说，覆盖其中一个这样的终端等价于覆盖所有这样的终端。将实边路径替换为单条边不会影响面覆盖的大小或所用外部面的数量，因此条件 (K2) 得以满足。由于角顶点及包含它们的面也不受此归约规则影响，(K3) 同样成立。

接下来，我们证明应用归约规则 8、9 和 10 后，所得图是一个良好核。考虑 G_t 的一个嵌入，它证明 $\mathrm{fcn}_0(G_t, T \cap V(G_t))$；令 F 为相应的面覆盖。如果骨架中存在非角顶点的终端，那么不使用外部面就无法得到面覆盖，而应用归约规则后这一点仍然成立。因此，我们可以假设并非如此。

不失一般性，我们可以假设 F 不包含无终端虚拟分量的任何内部面，并且对于每个~ ~无问题和半问题分量，至多包含一个内部面。我们按如下方式构造 G_t 的面覆盖 F。注意，F 不包含外部面，因此我们可以将其划分为 F_u、F_s 和 F_p，分别表示无问题、半问题和问题分量的内部面集合。~我们将 F_u 定义为通过应用归约~规则 9 构造的三角形中的内部面集合，并将 F_s 定义为通过归约规则 10 构造的构造装置中的内部面集合。我们将 F_p 定义为问题分量的核中的内部面集合；这些核覆盖其所有终端，但角顶点可能除外（即，恰好覆盖由 F_p覆盖的那些角顶点）。令 $F = F_u \cup F_s \cup F_p$。不难看出，$F$ 是 G_t的一个面覆盖，且不包含这两个外部面。

根据构造，如果 $|F_u| \leq k$，则没有无问题分量被收缩，因此$|F_u| = |F_u|$。另一方面，如果 $|F_u| > k$，我们至少有 $k+1$ 个无问题分量，~且每个分量都需要一个内部面，因此 $|F_u| > k$。对于 F_s 和 F_p，情况也相同（根据归纳假设）。(K3) 的证明类似。

现在令 F为见证 $\mathrm{fcn}_1(G_t, T \cap V(G_t))$ 的 G_t 面覆盖。在这种情况下，我们可以假设 F 不包含任何无问题分量的内部面（因为它~ ~包含一个覆盖其所有终端的外部面）。我们像上文一样定义 F_s, F_p, F_s, F_p~ ~ ~，并得到一个由 F_s, F_p 和一个外部面组成的 G_s 面覆盖。

如果 F是见证 $\mathrm{fcn}_2(G_t, T \cap V(G_t))$ 的面覆盖，我们可以假设它不包含无问题分量和半问题分量的任何内部面，并得到一个由两个外部面和 F_p组成的 G_s 面覆盖
~ ~。

~反方向的构造，即根据 G_t 的面覆盖构造 G_t 的面覆盖，过程类似。◄

►**引理 32.** 在对 G_t穷尽地应用归约规则 7、8、9、10 后，我们得到 a 小型良好核。

~**证明**。令 $p_1, \ldots\ldots, p_\ell$ 为 G_t 中问题分量的核的大小，并令 u 和 s分别为无问题分量和半问题分量的数量。注意，根据构造，我们有 $u \leq k+1$ 和 $s \leq k+1$。每个问题分量和半问题分量~都被替换为一个至多包含 6 个顶点的构件，因此 $|V(G_t)| \leq 6(u+s) + \sum p_i$。根据

归纳假设和性质（K4），我们知道第 i 个问题分量至少需要 $c\cdot\ p_i^{1/3}$ 个内部面。现在我们有

$$|V(\tilde{G}_t)|^{\frac{1}{3}} \leq (6(u+s)+\sum p_i)^{\frac{1}{3}} \leq (6u+6s)^{\frac{1}{3}}+\sum p_i^{\frac{1}{3}} \leq (11k)^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{c}(k-2) \leq \frac{k}{c},$$

对于 $k \geq 1$ 和 $c \geq \sqrt[3]{11}$，这直接推出了 G_t 的面覆盖中内部 ˜ 面数量的所需上界。

◀

5.3 P 节点

由于我们假设 G 没有平行边，因此 G 的 SPR树中没有叶节点是 P 节点。尽管图 G 没有平行边，但应用某些规约规则可能会产生平行边。我们按如下方式处理这些边。

设 t 为一个平行节点， G_t 为由以 t 为根的子 SPR 树所诱导的图的增强图。在下面的讨论中，每次穷尽地应用各条规约规则后，由 G_t 得到的图记为 G'_t。

▶**约简规则11**。 从 G_t中删除 G_t 的骨架中除一条实边外的所有实边。

▶**命题33**。 约简规则*11*生成一个良好核。

证明。 令 G'_t 为对 G_t 穷尽应用约简规则11后得到的图。由于我们不修改角或角边， G'_t显然满足性质（K1）。我们断言，性质（K2）也得到满足。令 F 为 G_t 的面覆盖，该面覆盖在所有嵌入中所含的面数最少。为简便起见，我们将实现 F 的嵌入记为 G_t。令 F' 为嵌入 G'_t 中的一个面覆盖，其中 G'_t 由 G_t 删除除任意选定的一条实边外的所有实边得到。注意，删除一条边不会增加 G_t中的面数，也不会增加终端数。这意味着 $|F'| \leq |F|$。为证明逆向结论，令 F' 为嵌入 G'_t的一个最小面覆盖。我们通过逐条加回实边来修改嵌入 G'_t ，从而得到 G_t 的一个嵌入；每一步都将实边添加在距该步最右侧实边 ε的位置。此操作不会增加终端数。我们至多会改变 F' 的一个面边界（即其边界上包含那条任意选定实边的面边界）。然而，当一条实边被另一条实边替代时，我们并未改变该面在覆盖终端方面的作用。因此， F' 中各面的对应面在 G_t 中仍覆盖所有终端。于是 $|F| \leq |F'|$。注意，在上述任何操作中，我们都没有改变 F' 包含零个、一个或两个外部面的性质。这意味着$(K3)$得到满足。◀

显然， G_t中至多有 k 个有问题的虚拟组件。接下来我们将论证，可以将无终端、无问题和有问题的虚拟分量的数量限制为与 k 呈线性关系。

▶**归约规则 12.** 从 G_t 中删除除一个以外的所有无终端虚拟分量。

▶**命题 34.** 应用归约规则 *12* 会产生一个良好核。

证明。令 G'_t 为穷尽应用归约规则 12 后得到的图。注意， G'_t 显然满足性质（K1），因为我们既没有修改角顶点，也没有修改角边。

XX:26 非嵌入平面图面覆盖的多项式核

为了证明性质（K2）仍然成立，我们先证明：若 fcn(G_t) $\leq k$，则 fcn(G'_t) $\leq k$。考虑 G_t 的一个嵌入，其中有一个大小为 k 的面覆盖 F。从该嵌入中删除除任意选定的一个无终端虚拟分量之外的所有无终端虚拟分量，得到 G'_t。设 G'_t 的面覆盖为F'。由于删除虚拟分量不会增加 P 节点中的面数，也不会产生额外的终端，因此 $|F'| \leq |F| \leq k$。还需注意，若某个无终端虚拟分量与 G_t的外部面相邻，那么该面不会覆盖任何终端，因此可以将其从 F 中删除，而不影响其可行性。因此，对于是否包含零个、一个或两个外部面，面覆盖的行为不会改变。接下来，我们证明：若 fcn(G'_t) $\leq k$，则 fcn(G_t) $\leq k$。设 F' 是 G'_t 的一个大小至多为 k 的面覆盖。我们将所有无终端虚拟分量逐一添加到 G'_t 中，并将它们嵌入在 G'_t中最右侧的无终端虚拟分量右方、距离为 ε 的位置。我们滥用记号，也将这个嵌入称为 G_t。此操作会改变 G'_t 中位于该无终端分量右侧的面的边界。不过，它用另一条无终端路径替换了连接两个角的无终端路径。此外，它还会产生新的面，而这些面都不与任何终端相邻（角顶点除外）。更重要的是，不会产生新的终端，因此边界可能发生变化的 F' 中的面仍构成 G_t的面覆盖。因此，fcn(G_t) ≤fcn(G'_t) $\leq k$。

最后，我们声称性质（K3）成立。如果 G_t 的所有角都不是终端，那么该结论显然成立。假设至少有一个角是终端。设 f是 F 中覆盖该角的面，并设 f 属于一个无终端分量。注意，如果 F 包含任何与 P 节点 t骨架的内部面对应的面，那么该面就会覆盖角顶点。在这种情况下，我们可以从 F 中移除 f，而不影响其可行性。否则，我们从 F 中移除 f，并在 f 是内部面时，加入一个与 P 节点骨架的内部面对应的面；否则加入一个外部面。这样不会使任何终端失去覆盖，因为 f 原本就属于一个无终端分量。此外，$|F|$ 中的外部面数量保持不变。◀

我们声称，穷尽地应用规约规则11和12后，P 节点的虚拟子分量数量在线性于 k的范围内。若某个 P 节点骨架的内部面由分别包含在两个子虚拟分量的面覆盖中的外部面合并而成，则称这两个虚拟子分量共享一个内部面。

▶ **命题 35.** 如果 G'_t 中的 $4k+2$ 虚拟分量多于 $4k+2$，那么 G 中不存在大小至多为 k 的面覆盖。

证明. 需要私有内部面来覆盖其任一终端的虚拟分量至多有 k 个。根据归约规则 12，骨架中有一条边替代所有无终端虚拟分量。我们将注意力限制在其终端能够完全由外部面覆盖的虚拟分量上。

包含在其面覆盖中的 P 节点骨架的每个内部面都由两条虚边围成。实际上，与这些边对应的每个子分量都为面覆盖贡献该面的半个部分。

考虑所有无问题子分量。每个无问题子分量恰有一个外部面属于其面覆盖。因此，它只为 P 节点骨架的面覆盖贡献半个内部面。因此，如果这类子分量超过 $2k$ 个，那么面覆盖中至少会有 $k+1$ 个面。

接下来，考虑所有半问题性子分量。这些分量要么将其一个内部面纳入面覆盖，要么将其两个外部面都纳入面覆盖。因此，它们对面覆盖的贡献要么是自身的一个内部面，要么是 P 节点骨架的两个内部面各一半。因此，P 节点中此类分量最多有 k 个，否则

面覆盖至少会有 $k+1$ 个面。综上，包含终端的虚拟分量最多有 $4k+2$ 个。◀

根据上述命题，P 节点骨架中的虚拟边数为$\mathcal{O}(k)$。将对应的虚拟分量替换为 G'_t 中的小图，有助于限制其大小。现在，我们对图 G'_t 穷尽地应用归约规则1至归约规则3。此外，我们将每个有问题的虚拟分量替换为其小型良好核。

▶**命题36**。 在对 G_t穷尽地应用归约规则*11*、*12*以及归约规则*1*至*3*之后，所得图是一个小型良好核

证明。根据命题 35， P节点中至多有O(k)个虚拟子分量。设G'_t 为穷尽地应用上述所有归约规则后得到的图。设 P_1、 $\dots P_\ell$ 为 G_t 中的问题子分量数量，并设 p_i 为 P_i中的顶点数量。每个问题分量为 G_t 的最小面覆盖贡献一个内部面，而其他每个虚拟分量至少贡献剩余内部面的一半。由于每个无问题分量和半问题分量都只有常数个顶点，且这类分量至少有2($k-\ell$)个，因此 G'_t 的大小为$\sum_{i=1}^{\ell} p_i + 2(k-\ell)d$，其中 d为某个常数。根据归纳假设，这些分量均满足性质（K4）。设 G'_t 的最小面覆盖中的内部面数量记为fcn^i。

$$\begin{aligned}\mathrm{fcn}^i &\geq \left(\sum_{1=1}^{\ell} c \cdot {p_i}^{\frac{1}{3}}\right) + \left(\sum_{i=1}^{2(k-\ell)} c \cdot d^{\frac{1}{3}}\right) \\ &\geq c(\sum_{i=1}^{l} p_i + (2k-\ell)d)^{\frac{1}{3}} \\ &= c(|V(G'_t)|^{\frac{1}{3}})\end{aligned}$$

因此， G'_t 是一个小型良好核。 ◀

6 结论

本文为面覆盖数问题给出了首个多项式核，其规模对参数呈三次依赖。对于该问题的一个受限版本——输入中提供了嵌入，且终端集包含图的所有顶点——此前已知一个线性核。未来研究的一个自然方向是缩小该问题的嵌入变体与非嵌入变体之间的核规模差距。

开放问题1。 面覆盖数是否存在一个线性核?

要回答这个问题，可能需要更深入地理解 3-连通平面图的结构性质。

继 Bienstock 和 Monma 提出的固定参数可 tractable（FPT）算法 [3], 之后，非嵌入情形的算法便再无改进。尤其是，目前尚无已知的面覆盖亚指数时间算法，因此引出以下问题:

开放问题 2. 是否存在一种算法，能够在 $2^{\mathcal{O}(\sqrt{k})}$ 时间内求解面覆盖问题，其中 k 是面覆盖数?

值得注意的是，尽管双维性理论适用于带有$T = V(G)$的变体，但问题的一般形式并不属于这一框架。要解决

开放问题 2，因此需要在现有技术之外开发新的算法思想。

参考文献

1 Faisal N. Abu-Khzam、Henning Fernau 和 Michael A. Langston。用于参数化面覆盖的有界搜索树算法。离散算法杂志，6(4):541–552，2008。2 Marshall Bern。平面网络中斯坦纳树的更快精确算法。Networks，20:109–120，2006。3 Daniel Bienstock 和 Clyde L. Monma。平面图中用面覆盖顶点的复杂性。SIAM 计算杂志，17(1):53–76，1988。4 Glencora Borradaile、Amir Nayyeri 和 Farzad Zafarani。探索无向平面图中的单面最短顶点不相交路径。载于：ESA 2015 论文集，计算机科学讲义第 9294 卷，第 227–238 页。施普林格，2015。5 Gunnar Brinkmann。惠特尼唯一嵌入定理的一个简单而初等的证明。Ars Math. Contemp.，20(1):195–197，2021。6 Danny Chen 和 Xiadong Wu。平面图上 k 终端割的高效算法。Algorithmica，38:299–316，2004 年 2 月。7 Danny Z. Chen 和 Jinhui Xu。平面图中的最短路径查询。载于：STOC 2000 论文集，第 469–478 页。ACM，2000。8 Elias Dahlhaus、David S. Johnson、Christos H. Papadimitriou、Paul D. Seymour 和 Mihalis Yannakakis。多终端割的复杂性。SIAM 计算杂志，23(4):864–894，1994。9 Reinhard Diestel。图论。Springer Publishing Company, Incorporated，第 5 版，2017。10 Jeff Erickson 和 Amir Nayyeri。平面上的最短不交叉游走。载于：SODA 2011 论文集，第 297–208 页。SIAM，2011。11 Ranel E. Erickson、Clyde L. Monma 和 Arthur F. Veinott。最小凹成本网络流的发送-分割方法。运筹学数学，12(4):634–664，1987。12 Henning Fernau 和 David W. Juedes。针对平面图支配问题的参数化算法的几何方法。载于：MFCS 2004 论文集，计算机科学讲义第 3153 卷，第 488–499 页。施普林格，2004。13 Greg N. Frederickson。平面图分解与所有顶点对最短路径。ACM 杂志，38(1):162–204，1991。14 M. R. Garey 和 David S. Johnson。直角斯坦纳树问题是 NP 完全的。SIAM 应用数学杂志，32:826–834，1977。15 Naveen Garg、Vijay V. Vazirani 和 Mihalis Yannakakis。树中整数流和多重割的原始-对偶近似算法。Algorithmica，18:3–20，1997。16 Valentin Garnero、Ignasi Sau 和 Dimitrios M. Thilikos。平面红蓝支配集的线性核。离散应用数学，217:536–547，2017。17 J. E. Hopcroft 和 R. E. Tarjan。将图分解为三连通分量。SIAM 计算杂志，2(3):135–158，1973。18 John E. Hopcroft 和 Robert Endre Tarjan。图操作的高效算法 [H]（算法 447）。Commun. ACM，16(6):372–378，1973。19 Sándor Kisfaludi-Bak、Jesper Nederlof 和 Erik Jan van Leeuwen。针对终端位于少数面上的平面斯坦纳树的近乎 ETH 紧致算法。ACM Trans. Algorithms，16(3):28:1–28:30，2020。20 Ton Kloks、Chuan-Min Lee 和 Jiping Liu。平面图和平面图上的 k 面覆盖、k 反馈顶点集及 k 不相交环的新算法。载于 Ludek Kucera（编），WG 2002 论文集，计算机科学讲义第 2573 卷，第 282–295 页。施普林格，2002。

21 Athanassios Koutsonas 和 Dimitrios M. Thilikos。平面反馈顶点集与面覆盖：组合界与次指数算法。*Algorithmica*，60(4):987–1003，2011。22 Mark R. Kramer 和 Jan van Leeuwen。任意超大规模集成电路的布线复杂性及最小面积布局的求解。*Advances in Computing Research*，2:129–146，1984。23 Robert Krauthgamer、James R. Lee 和 Havana Rika。平面图中的流-割间隙与面覆盖。载于*SODA 2019* 论文集，第 525–534 页。SIAM，2019。24 Robert Krauthgamer 和 Havana Inbal Rika。平面图的改进型顶点稀疏化器。*SIAM*离散数学杂志，34(1):101–129，2020。25 James F. Lynch。定理证明与互连问题的等价性。5(3):31–36，1975。26 Sukanya Pandey 和 Erik Jan van Leeuwen。终端位于少数面上的平面多路割。载于*SODA 2022* 论文集，第 2032–2063 页。SIAM，2022。27 Werner Schwärzler。终端位于外边界上的平面边不相交路径问题的复杂性。*Combinatorica*，29(1):121–126，2009。28 Jens Vygen。若干边不相交路径问题的 NP 完全性。*Discrete AppliedMathematics*，61(1):83–90，1995。