arXiv:2601.04172v1 [cond-mat.stat-mech] 7 Jan 2026

循环图上谱张量网络的随机路径压缩

Ryan T. Grimm、Joel D. Eaves（日期：2026年1月8日）

我们提出了一种压缩循环张量网络的新方法，称为随机路径压缩（SPC）。该方法使用迭代重要性抽样过程，针对键维数较大的边。SPC 中的闭合随机游走形成压缩路径，使张量网络中较大的键维数在空间上局部化。与两种不混溶液体的相分离类似，SPC 将键维数图分成空间上彼此分离的高密度区和低密度区。结合我们的积分抽取算法后，SPC 能够准确压缩具有连续自由度的循环张量网络。为对这些方法进行基准测试和演示，我们计算了二维方格晶格上 q 态时钟模型以及 Watts-Strogatz图上的 XY 模型的绝对热力学量；后者是一种小世界网络，其自旋之间具有随机连通性。

引言： 张量网络方法（TNMs）在解决计算多体物理和统计力学中的广泛问题方面展现出卓越的能力 [1–6]。它们通过将高维张量分解为较低维张量的和与积来压缩高维张量，这些较低维张量称为核。编码多体系统状态的张量规模呈指数级增长，无法存入内存，而核心张量则可以。它们位于图的顶点处，并通过边彼此连接。在许多情况下，图的结构映射了物理系统。核包含物理指标，对应于系统在某个位置上的自由度（DOF）；还包含虚拟维数，当它们共享一条边时，虚拟维数会进行缩并。

对于可映射到一维拓扑的系统 [2, 3] ，以及位于每个位置状态数较少的规则晶格上的系统 [7]，张量网络方法十分有效。前一种情况对应于一类称为树张量网络（TTNs）的方法 [8]。已有许多计算效率高且精确的算法，可用于构建、压缩和缩并树张量网络 [1, 9]。当系统难以映射到单一维度时，张量网络中便会包含环。在这些情况下，投影纠缠对态（PEPS）在许多场景中表现良好 [7, 10, 11] ，但当核之间存在长程相互作用或系统处于强关联状态时，其表现会受到限制。

设计一种准确且数值上易于处理的张量网络表示是一项挑战。如何在计算中使用该网络，同时避免键维数（即虚拟指标的大小）急剧增长，则是另一项挑战。关键是，键维数必须保持足够小，以便计算能够处理。大多数操作——乘法、加法和门的应用——都会增大键维数 [12]。在具有多个空间维度的张量网络中，会出现缩并问题：键维数在缩并过程中往往呈指数级增长。为抑制键维数的迅速增长，需要应用压缩算法，使原始网络与其近似网络（即具有截断键维数的张量网络）之间的欧几里得距离平方（2-范数）最小化。张量树网络（TTNs）具有全局最优的压缩算法 [8, 12] ，能够在满足预设数值容差 [13]的同时截断虚拟键。不幸的是，若不采用较大的（$\chi > 100$）键维数来维持精度 [14]，张量树网络就难以推广到准一维系统以外的情形。当网络包含环时，目前尚无类似的压缩过程 [15], 。这限制了张量网络方法在更一般的张量网络中的应用，这类网络包含环，或具有多个或连续的自由度。

在这封信中，我们提出了一种算法，既能解决这两项局限，又能推广到具有任意拓扑的图。键维数编码了核之间涌现的空间关联，或晶格上涨落之间的纠缠；因此，自然可以采用蒙特卡洛（MC）等对这类涨落进行采样的策略，将键维数局部化。我们开发了一种称为随机路径压缩（SPC）的迭代采样过程。SPC 旨在通过沿网络中的随机路径推动张量网络中“缺陷”较大或数值较大的键维数，实现其空间局部化；每条随机路径均由一种受随机介质中聚合物生长启发的过程生成。在这一类比中，环路径是由蒙特卡洛过程生长出的随机聚合物，该过程会偏向沿着核之间键维数最大的边生长。路径形成后，SPC 沿着该聚合物的主链迭代进行压缩，形成一组侵入轨迹，将生长进入晶格的聚合物上的大、小键维数分隔开来。反复应用这一过程，会得到一个压缩后的网络，其中大、小键维数自发地局部化，直至被一个界面分隔，从而抑制张量缩并过程中键维数的增长。因此，SPC 能够在循环张量网络中以迭代且自适应的方式实现张量压缩。

我们计算方形晶格系统和随机晶格系统的绝对平衡态统计力学，这两类系统都包含环。自由度 $\boldsymbol{x} \equiv$

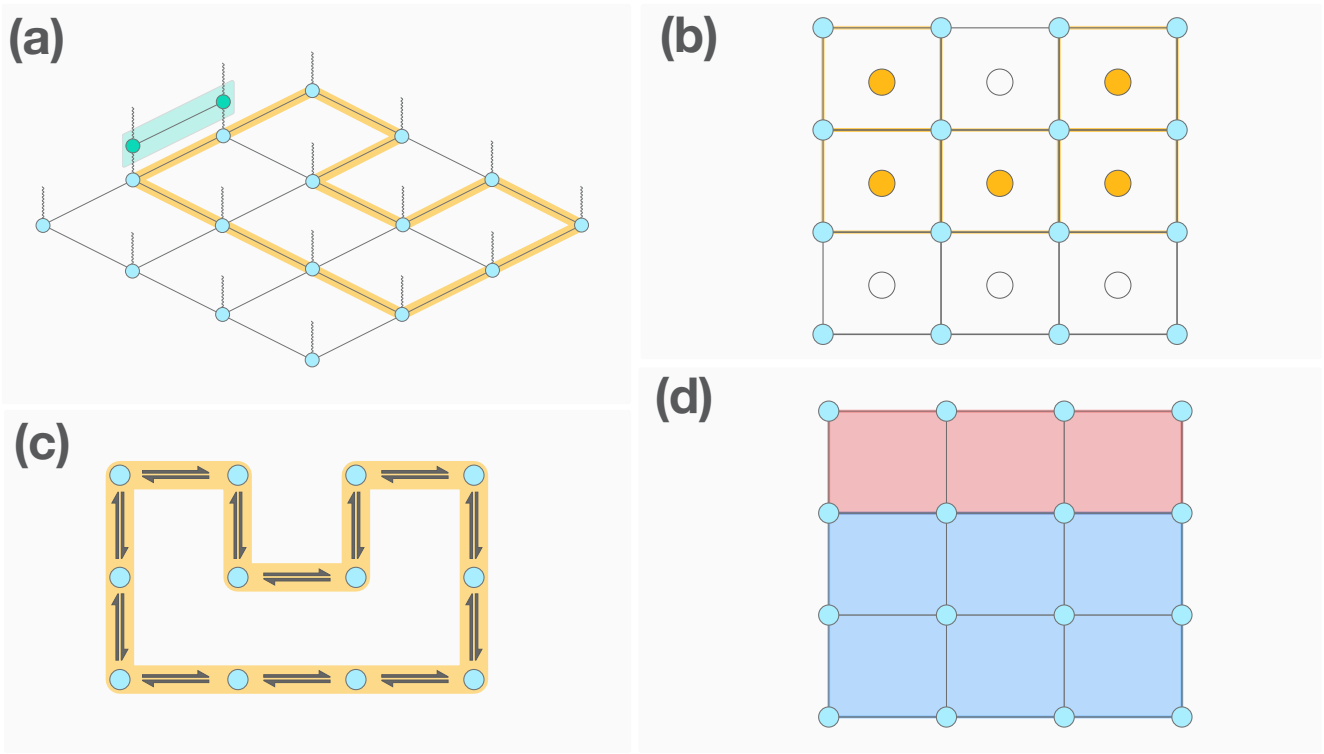


图 1. 使用积分消元构建谱张量网络，并使用随机路径压缩对其进行压缩。**(a)** 正方晶格上的张量网络及其压缩形式表示，其中竖线表示未进行收缩的物理键。晶格上多体问题的玻尔兹曼权重可分解为一组体序门；从简单的乘积态出发，通过迭代过程可构造出计算上可处理的配分函数。二体门（绿色矩形）作用于网络，使两个位点之间的键维数增大。**(b)** 要压缩生成的网络，请执行一个压缩循环。首先，在图上随机选取一组基本循环，以尽可能多地覆盖键维数较大的边。通过对基本循环求对称差（异或）来生成压缩循环（黄色方块中的实心或空心圆点表示是否包含相应的基本循环）。**(c)** 在包含环的张量网络中，每条边可能需要压缩多次。为便于实现这一点，将压缩循环转换为有向循环，使边可以沿两个方向遍历。**(d)** 经过多次迭代，SPC 会形成一种涌现的信息拓扑，使网络分离为键维数高和低的区域——这类似于两种不混溶液体中的相分离。红色和蓝色区域之间的深色线表示界面。

$\{x_v\}_{v\in\mathbb{V}}$（可以是离散的，也可以是连续的）位于顶点 V 上，顶点之间由边 E 相连，共同构成图 G $\equiv$ (V, E)。边 E 指定了哪些自由度之间存在相互作用；由于相互作用是局部的，因此边只连接相邻顶点。在平衡态下，玻尔兹曼因子给出构型 $\boldsymbol{x}$（其能量为 $\mathcal{H}(\boldsymbol{x})$，$\mathcal{W}(\boldsymbol{x}) \equiv e^{-\beta\mathcal{H}(\boldsymbol{x})}$.）的概率。下面专门讨论连续自由度——离散自由度的处理方式类似——绝对热力学由配分函数 $\mathcal{Z} \equiv \int d\boldsymbol{x}\ \mathcal{W}(\boldsymbol{x})$ 给出。对 $\mathcal{Z}$ 求导可得到绝对熵、自由能和比热。由于构型的数量呈指数增长 $\boldsymbol{x}$，维数灾难通常使得无法直接计算配分函数和绝对热力学量。为解决这一问题，人们转而从玻尔兹曼分布中采样构型，并使用例如蒙特卡洛方法来获得相对热力学量。

谱张量网络方法（STNMs）可以用于计算配分函数和绝对热力学量。谱张量网络（STNs）将多元函数表示为张量值单变量函数的和与积。当代谱张量网络方法生成的谱张量网络仅限于树状拓扑 [16, 17]。具有环的张量网络（如投影纠缠对态）在自由度较少且离散的系统中表现出色。本文提出适用于具有环且自由度众多或连续的图的谱张量网络方法。

为了通过直接积分计算配分函数，我们将玻尔兹曼权重编码为一个谱张量网络

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{x}) \approx \mathrm{tTr}\left[\prod_{v\in\mathbb{V}} \mathcal{T}_v(x_v)\right], \tag{1}$$

其中，顶点 v 处的核 $\mathcal{T}_v$ 是一个张量值函数，$\mathrm{tTr}[\cdot]$ 是对指标求和的张量迹算子

作用于由边 e 连接的核对（顶点 (v, v')）上，使得 $e \equiv (v, v')$，其中沿该边的键维数为 χ_e 。将玻尔兹曼因子表示为 STN，可使存储和积分的计算成本与自由度数量 $N \equiv |\mathbb{V}|$ 成线性关系。这种改写的优势在于，式 1 中的 STN 表示是可分离的。对 $\mathcal{W}$ 的 N 维积分可分解为 N 个一维积分，从而将相互作用问题转化为非相互作用问题。结果是，配分函数简化为 $\mathcal{Z} = \mathrm{tTr}\left[\prod_{v\in\mathbb{V}} z_v\right]$，其中单粒子配分函数是一个初等积分 $z_v \equiv \int dx\, \mathcal{T}_v(x)$。

为简便起见并提高效率，我们将核心张量展开为一组正交多项式 $\{\phi_k\}$，

$$\mathcal{T}_v(x) \equiv \sum_{k=1}^{b} \mathcal{C}_v^k \phi_k(x), \tag{2}$$

其中 $\mathcal{C}_v^k$ 是变分张量值系数。哈密顿量包含自由度之间按体序排列的相互作用——单体、二体，依此类推。鉴于我们提出的一种名为积分抽取（插值分解）的表示方法，已成功将多元函数表示为一维 STN [18], ，我们在此将该方法扩展到循环图上的多元函数表示。

插值分解通过将玻尔兹曼因子映射到量子电路来构造 STN。对于形式如下的二体哈密顿量

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{x}) = \sum_{(v,v')\in\mathbb{E}} H_{v,v'}(x_v, x_{v'}), \tag{3}$$

玻尔兹曼因子可分解为一系列低阶相互作用

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{x}) \equiv \prod_{(v,v')\in\mathbb{E}} \mathcal{U}_{v,v'}(x_v, x_{v'}), \tag{4}$$

借用量子模拟的术语，这些门为

$$\mathcal{U}_{v,v'}(x, x') = e^{-\beta H_{v,v'}(x,x')}. \tag{5}$$

依次将这些门作用于取值为单位值的乘积态张量网络，即可得到系数张量。图 1(a) 展示了将二体门作用于张量网络的示例。作用一个门会增大相应边上的键维数。在每一步之后进行压缩，可控制下一节中键维数的增长；这使得底层的插值分解过程即使对于含环的张量网络也能实现。

随机路径压缩：对于一般的权函数，随着键维数增加，式 1 中的近似将变为精确结果。在键维数有限时，目标是最小化 $\mathcal{L} = ||\mathcal{W} - \tilde{\mathcal{W}}||_2^2$，其中 $\mathcal{W}$ 是

˜截断前的 STN， $\mathcal{W}$ 是截断后的网络，而 $||\cdot||_2$ 表示 2-范数。直接同时最小化所有核心张量上的$\mathcal{L}$ 会导致一个全局优化问题，该问题可能是非凸的，并且会受到梯度消失问题的影响，从而使计算变得难以承受。最小化 $\mathcal{L}$需要收缩整个网络；这是收缩问题的一个例子。对于非平凡的循环张量网络，其计算复杂度类别比张量树网络更难。在张量树网络中，有一些方法可以在不收缩整个网络的情况下，找到使 $\mathcal{L}$ 最小化的核心张量。然而，当网络中存在环时，除非收缩整个网络，否则不存在一种可行且能保证精度的算法。随机路径压缩扩展了矩阵乘积态（MPS）的标准压缩算法 [12]。它提供了一种近似但精确的算法，作用于闭合的循环路径 P $\equiv \{v_1, v_2, \ldots, v_1\}$；这些路径嵌入在更大的网络（即环境）中，而环境由不属于 P 的核心张量构成。

一种自然的方法是将图 G 划分为其圈基 $\mathcal{C}$(G)，它与欧拉路径集合有关——欧拉路径是指每条边仅经过一次的路径。反过来，圈基可以紧凑地表示为二元伊辛模型的一个构型，其中构型由状态变量 $c_j \in \{0, 1\}$组成，见图 1 (b)。请注意，环配置可能包含不连通环。在晶格中嵌入闭合路径$\boldsymbol{c}$ 的代价对应于微观状态的巨正则哈密顿量

$$-\mathcal{E}(\boldsymbol{c}) = \mu|\mathbb{C}(\boldsymbol{c})| + \frac{1}{\chi_{\max}} \sum_{e\in\mathbb{C}(\boldsymbol{c})} \chi_e \tag{6}$$

其中，C($\boldsymbol{c}$)表示由 $\boldsymbol{c}$ 表示的环的边集， $e \equiv (v, v')$是边，χ_e 是沿该边的键维数， μ 是用于确定平均路径长度的化学势，而 $\chi_{\max}$ 是最大键维数。第一项设定路径的平均长度，第二项则对每条路径施加偏置，使其覆盖键维数较高的边。SPC 通过使用 Metropolis-Hastings [19] 算法从虚构的玻尔兹曼权重 $e^{-\mathcal{E}(\boldsymbol{c})/\tau}$，中抽取 $\boldsymbol{c}$，自适应地选择路径，其中 τ 是类温度元参数，用于设定所有路径的全局代价。

选定一个环 C 后，SPC 会沿着由 C 指定的子图的有向版本中的欧拉回路进行压缩，见图 1 (c)。我们将每条无向边替换为一对方向相反的有向边，从而构造该图的有向版本。相比沿环移动，遍历有向版本更有效，因为这样可以迭代处理那些尚未立即收敛到其最优压缩形式的键。

依次压缩 $v \to v'$ 上的每条键，可沿路径得到一个局部压缩的核心张量链。每

种压缩操作称为 push-TSVD 移动，与一维矩阵乘积态 MPS[12] 完全对应。经过多次迭代，图会分化为键维度密度高低不同的区域，见图 1(d)。

SPC 的准确度与 PEPS 文献中常见的简单更新（SU）方法相近。与 SU 一样，SPC 在截断过程中忽略关联。如何在保持计算效率的同时，构建能够考虑环境关联的 SPC 版本颇具挑战，也是未来的研究方向。置信传播（BP） [15]提供了另一种理解 SPC 的视角。它与 PEPS 中常用的消息传递矩阵不同，因为该操作会沿着键将信息从 v 推送到 v'，而 v 处的酉核不包含任何信息。信息沿路径流动，从而使高、低键维数自发分离。不过，与最终会达到 Vidal 规范的 BP 不同，SPC 不一定会趋近于唯一的不动点。

算法 1： 随机路径压缩

计算 G 的圈基 $\mathcal{C}$(G)。
将二进制向量 $\boldsymbol{c} \in \{0,1\}^D$ 初始化为均匀随机比特串，其中 $D \equiv |\mathcal{C}(\mathrm{G})|$。
对于 $i := 1$ **至** N **do**
  均匀抽取 $k \in \{1,\dots,D\}$。
  $c'_k := 1 - c_k$
  $P_{\text{accept}} := \min\left(e^{-[\mathcal{E}(\boldsymbol{c}') - \mathcal{E}(\boldsymbol{c})]/T},\ 1\right)$
  $u :=$ 均匀分布(0,1)
  如果 $u < P_{\text{accept}}$ **则**
    $\boldsymbol{c} \leftarrow \boldsymbol{c}'$
在有向图上计算一条欧拉路径 P
  该图由 $\boldsymbol{c}$ 构成。
对每个 $(v,\ v') \in \mathbb{P}$ **执行**
  沿着 $v \to v'$ 执行 push-TSVD 移动。

结果与讨论： 为评估 ID 与 SPC 结合解决具有挑战性的统计力学问题的能力，我们计算了二维时钟模型的绝对热力学。由于构型微观状态的数量关于 q 呈指数增长，该模型可以系统地增加计算复杂度。图 G $\equiv$ (V，E) 上的时钟模型哈密顿量为

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) = -J \sum_{(v,v')\in\mathbb{E}} \cos(\theta_v - \theta_{v'}), \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{\theta} \equiv \{\theta_v\}_{v\in\mathbb{V}}$ 是角度集合。角度取 q 个离散值 $\theta_v = 2\pi k/q$，其中 $k \in \{1,\dots,q\}$，其中 q 是时钟上的小时数。将小时数在 $q = 2$ 和 $q \to \infty$ 之间变化，可在二元伊辛模型与连续 XY 模型之间进行插值。STN 的规模并不随自由度数量变化，而是

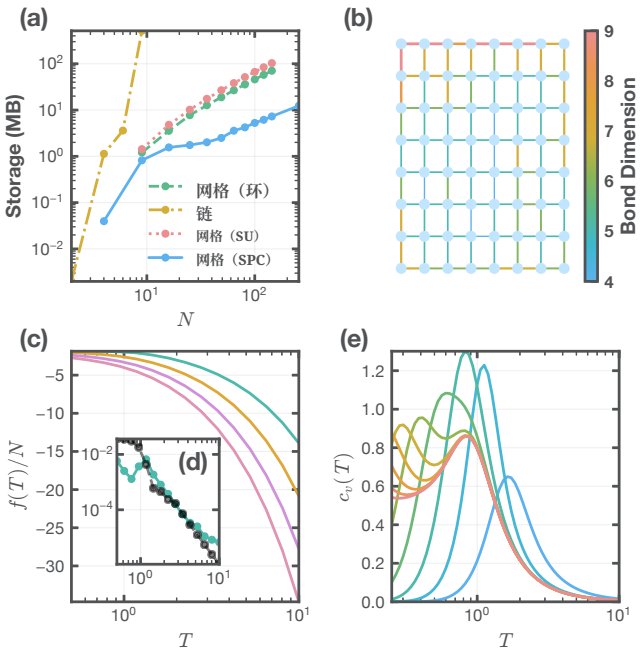


图 2. 使用 SPC 计算正方晶格上 q 态时钟模型的绝对热力学。能量以 J 为单位，温度以 J/k_B. 为单位。我们报告每个格点的自由能。（**a**）链和网格表示图的玻尔兹曼分布的谱张量网络表示所需的存储空间。我们使用标准算法压缩链，使用简单更新（SU）、围绕四点环进行压缩（Loop）以及随机路径压缩（SPC）压缩网格。（**b**） 8×8 晶格的最终键维度分布。（**c**）使用 ID 和 SPC 计算的 16×16 态时钟模型在 $q \in \{4,8,16,32\}$ 下的自由能。（**d**） $q = 4$ 下 11×11 晶格自由能相对于精确转移矩阵解 [20] 的相对误差。绿色线表示 SPC，黑色线表示 SU。（**e**）通过对谱张量网络求导计算的 $q \in 2$、.....、11 个值对应的时钟模型比热。

按 $\mathcal{O}(Nb^5)$，其中 b 是每个位置的基函数数量。因此，随着自由度数量变大，它们能够带来规模上的优势。本文所有示例中，我们都使用第一类切比雪夫多项式作为基函数。

在所有情况下，我们都使用插值分解算法寻找核心张量并构建 STN。随着系统规模增大，一维谱张量网络的存储需求迅速增长，如图 2 (a) 所示；在内存限制低于一太字节（TB）的合理条件下，系统最大规模因此被限制为 3×3。为克服这一限制，我们使用网格 STN，大幅降低存储需求的增长率。仅采用 PEPS 文献中的简单更新（SU）算法——即施加一个门后，将受影响的键截断至 SVD 截断阈值 ϵ_{SVD} 以内——与一维谱张量网络相比，可将内存需求降低 100 倍。

接下来，我们尝试通过截断晶格上的所有虚拟键，进一步降低存储需求。我们将一种朴素的环压缩算法（截断每个四顶点环周围的键）与 SPC 方法进行比较。与 SU 相比，环压缩仅小幅降低了存储需求。相较之下，对于足够大的系统，SPC 可将内存需求降低 90%。SPC 形成界面分离，如图 2 (b) 所示，使键维度分布在两种不混溶流体之间分化。与保留均匀键维度相比，将信息局域化在高密度键区域的效率高得多。只有在 SPC 中允许键维数波动，才能实现这一点。采用 SPC 的网格 STN 使我们能够计算规模最大为 16×16 的网格的自由能，如图 2 (c) 所示。相对于时钟模型的精确转移矩阵解，SU 和 SPC 的精度相近，如图 2 (d) 所示。通过将逆温度 β 作为辅助节点加入，所有热力学量（图 2 (e)）均可通过关于 β 的一阶解析微分求得（为提高效率，高阶导数采用有限差分）。计算自由能所需的基函数（$b = 13$）少于计算导出的热力学量所需的基函数（系统自由度为 $b = 61$，温度为 $b = 11$）。自由能基准测试（图 2 (a-d)）采用 $N_{\text{metro}} = 100$ 个 Metropolis 步骤、化学势 $\mu = -\tau/N$ 和温度元参数 $\tau = 0.01$；热力学计算（图 2 (e)）则采用 $\tau = 0.1$。

我们的插值分解和 SPC 方法有一个关键特点：它们不依赖于底层网络结构。我们通过一个连通性较为复杂、收缩问题也更具挑战性的系统来展示这一点。为展示这些特点，我们计算了随机图（图 3(b)）上 XY 模型（式 7）的自由能，如图 3(a) 所示，其中参数为 $q \to \infty$。我们采用 Watts-Strogatz 模型 [21], ，该模型因能模拟社会物理现象而闻名，它通过随机重连边生成具有小世界性质的随机图。

由于该网络并非规则网络，我们无法使用二维网格网络中采用的标准边界收缩算法。相反，我们使用 Gray 和 Kourtis 开发的贪心算法 [22]。首先，我们使用与前一示例相同的 ID 程序，构造玻尔兹曼权重的 STN 表示。我们比较了一种压缩收缩，其中，

每次缩并后，我们使用SPC（$\tau = 1.0$、$N_{\text{metro}} = 100$和 $\mu = -\tau/N$）进行压缩；作为对照，精确缩并时不进行压缩，见图3（c）。压缩后的结果与使用 $\sim 2^{32}$ 个样本进行的Sobol准蒙特卡罗（QMC）积分在定量上吻合，见图3（d）；该积分已遍历32位精度下的整个Sobol网格。QMC的速度比蒙特卡罗（MC）快一个平方根因子，因此若不进行重要性抽样或其他增强，所需的MC步数将为 2^{64}。SPC几乎消除了网络初始存储规模带来的增长，

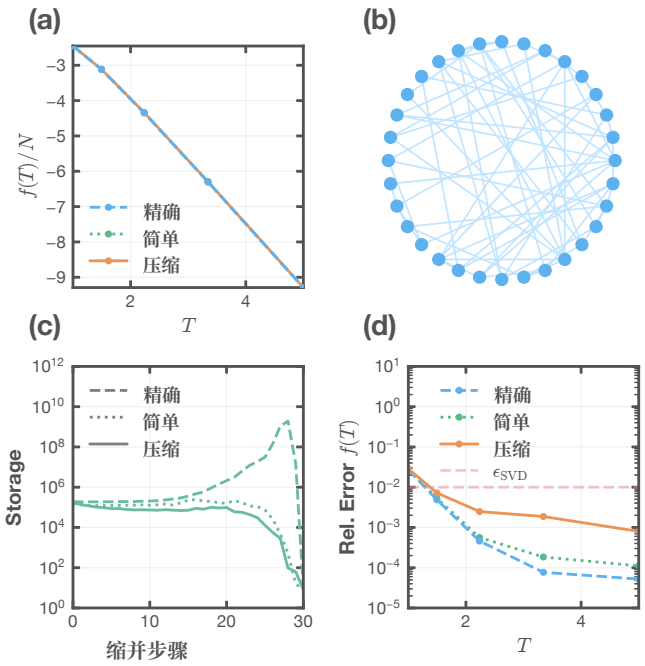


图 3. 使用 ID 计算含有 16 个（**d**）和 32 个（**a-c**）节点的 Watts-Strogatz图上 XY 模型的热力学性质。能量以 J 为单位，温度以 J/k_B. 为单位。我们报告每个格点的自由能。（**a**）采用三种压缩模式计算得到的自由能，其中每缩并一条边后，我们都会运行 SPC。模式分别为：精确（不进行压缩）、简单（SU）和压缩（SPC）。（**b**）随机图的连通性。（**c**）缩并过程中各中间网络的存储需求（针对 $\beta = 1$）：不进行压缩、对每条边进行简单截断，以及采用 SPC。（**d**）与对配分函数进行准蒙特卡洛积分相比的相对误差。红色虚线表示相对 SVD 截断阈值 ϵ_{SVD}。

与不压缩相比，网络规模缩小了多个数量级；与将键朴素截断至该阈值的简单更新相比，规模缩小了 $\sim$ 80%。除最低温度 $T = 1.0$外，相对误差均在所有阶段采用的 $\epsilon_{\text{SVD}} = 10^{-2}$ SVD截断阈值范围内。

结论： 利用随机性的算法已经改变了许多计算领域，例如机器学习中的随机梯度下降 [23] 以及数值计算中的随机化线性代数 [24]。SPC 为张量网络方法带来了类似的可能性，其目标是生成张量网络的高质量压缩近似，即使该近似并非最优。将张量网络的状态视为一个辅助物理系统，有助于为这类系统开发采样算法。通过让键维数发生波动，我们采用一种基于随机介质中聚合物生长的采样方案，针对键维数较大的区域进行采样。沿多条路径采样并压缩后，SPC

倾向于使张量网络发生相分离，形成键维数较大的密度域和键维数较小的密度域。实际上，SPC 可将某些张量网络的存储需求最多降低 90%，并将缩并过程中的峰值内存需求最多降低四个数量级，而精度则由截断参数 ϵ_{SVD} 控制。

SPC 为一类新算法奠定了基础，这类算法沿着自适应选择的随机路径，在嵌入式线性张量网络上执行压缩和优化。提高 SPC 的精度界限是一项重要研究方向。与 PEPS 文献中的简单更新算法类似，目前的算法仅具备局部最优性，在执行奇异值分解截断时并未考虑路径环境的影响。结合近期开发的规范化方案（例如 Tindall 和 Fishman 提出的置信传播方法）[15], ，或许能使 SPC 在保持相近效率的同时显著降低截断误差。变分能量最小化是另一个值得探索的方向。采用与 SPC 类似原理的密度矩阵重整化群（DMRG）变体，或许能改进循环张量网络中的基态估计。

SPC 这类方法能够解决的问题远不止平衡热力学。它们包括随机微分方程、电子结构问题、偏微分方程以及量子弛豫现象。SPC 和 STN 将张量网络方法拓展至具有循环拓扑且拥有连续自由度或大量状态的问题。在我们将 Q-ASPEN 方法用于量子弛豫问题的研究中，我们表明，线性 STN 可以通过将非马尔可夫时间相互作用编码为 STN，大幅扩大开放量子系统求解器所能处理的最大系统规模 [6]。未来版本的 Q-ASPEN 可以使用循环 STN 处理涉及多个热浴和空间相关噪声的问题。此外，与离散对应物类似，STN 也可能为模拟量子计算机中的电路提供更高效的方法。总体而言，将 SPC 与 STN 相结合，可借助统计力学工具，开拓一类新的随机张量网络方法，并拓展其在计算上具有挑战性的连续系统中的应用范围。

致谢

R.T.G. 获得了美国国家科学基金会研究生研究奖学金的资助。本材料基于美国国家科学基金会研究生研究奖学金计划在资助编号（DGE 2040434）下支持的工作。本材料中表达的任何意见、发现、结论或建议均属于作者的观点，不一定反映美国国家科学基金会的观点。本研究获得了美国化学学会石油研究基金捐赠者通过 New Directions Grant 68732-ND6 提供的资助。J.D.E. 担任美国化学学会石油研究基金项目 68732-ND6 的首席研究员，该项目为 R.T.G. 提供了资助。本研究使用了科罗拉多大学博尔德分校的 Alpine 高性能计算资源。Alpine 由科罗拉多大学博尔德分校、科罗拉多大学安舒茨分校和科罗拉多州立大学共同资助，并获得美国国家科学基金会资助项目 OAC-2201538 和 OAC-2322260 的支持。

[1]R. Or´us, 《张量网络实用导论：矩阵乘积态与投影纠缠对态》, 《纽约科学院年鉴》**349**, 117（2014年）。[2] G. K.-L. Chan 和 S. Sharma, 《量子化学中的密度矩阵重整化群》, 《物理化学年度评论》**62**, 465（2011年）。[3] S. R. White, 《量子重整化群的密度矩阵表述》, 《物理评论快报》**69**, 2863（1992年）。[4] A. Strathearn、P. Kirton、D. Kilda、J. Keeling 和 B. W. Lovett, 《利用时间演化矩阵乘积算符高效求解非马尔可夫量子动力学》, 《自然·通讯》**9**, 3322（2018年）。[5] R. T. Grimm 和 J. D. Eaves, 《乘性噪声随机微分方程的直接数值求解》, 《物理评论快报》**132**, 267101（2024年）。[6] R. T. Grimm 和 J. D. Eaves, 《利用谱张量列车对开放量子系统进行精确数值模拟》, 《化学物理杂志》**161**, 234111（2024年）。[7] M. Lubasch、J. Ignacio Cirac 和 M.-C. Ba˜nuls, 《有限投影纠缠对态的算法》, 《物理评论B辑》**90**, 064425（2014年）。[8] P. Seitz、I. Medina、E. Cruz、Q. Huang 和 C. B. Mendl, 《利用树张量网络模拟量子电路》, 《Quantum》**7**, 964（2023年）, 2206.01000v3。[9] G. Vidal, 《高效模拟一维量子多体系统》, 《物理评论快报》**93**, 040502（2004年）。[10] R. Haghshenas、M. J. O' Rourke 和 G. K.-L. Chan, 《将投影纠缠对态转换为规范形式》, 《物理评论B辑》**100**, 10.1103/PhysRevB.100.054404（2019年）。[11] M. Lubasch、J. I. Cirac 和 M.-C. Ba˜nuls, 《统一投影纠缠对态的缩并方法》, 《新物理学杂志》**16**, 033014（2014年）。[12] I. V. Oseledets, 《张量列车分解》, 《SIAM科学计算杂志》**33**, 2295（2011年）。[13] J. Gray 和 G. K.-L. Chan, 《具有任意几何结构的张量网络的超优化近似收缩》, 《物理评论X辑》。**14**, 10.1103/physrevx.14.011009（2024年）。[14] L. Tagliacozzo、G. Evenbly 和 G. Vidal, 《利用熵面积定律的树张量网络模拟二维量子系统》, 《物理评论B辑：凝聚态与材料物理》**80**, 235127（2009年）。[15] J. Tindall 和 M. Fishman, 《利用置信传播规范化张量网络》, 《SciPost物理》**15**, 222（2023年）。[16] D. Bigoni、A. P. Engsig-Karup 和 Y. M. Marzouk, 《谱张量列车分解》, 《SIAM科学计算杂志》

《SIAM科学计算杂志》**38**, A2405（2016年）。[17] X. Tang、L. Collis 和 L. Ying，《利用函数层次张量算子求解高维Kolmogorov后向方程》，《SIAM科学计算杂志》**47**, A613（2025年）。[18] R. T. Grimm、A. J. Staat 和 J. D. Eaves，《用于量子动力学和统计力学的积分抽取法》，arXiv [cond-mat.stat-mech]（2025年），arXiv:2506.11341 [cond-mat.stat-mech]。[19] S. Chib 和 E. Greenberg，《理解Metropolis–Hastings算法》，Am. Stat. **49**, 327（1995年）。[20] M. Levin 和 C. P. Nave，张量重整化群在二维经典格点模型中的方法，《物理评论快报》**99**，120601（2007）。[21] D. J. Watts 和 S. H. Strogatz，“小世界”网络的集体动力学，《自然》**393**，440（1998）。[22] J. Gray 和 S. Kourtis，超优化张量网络收缩，《Quantum》**5**，410（2021），2002.01935v4。[23] L. Bottou，使用随机梯度下降进行大规模机器学习，载于 *Proceedings of COMPSTAT'2010*（Physica-Verlag HD，海德堡，2010年），第177–186页。[24] N. Halko、P. G. Martinsson 和 J. A. Tropp，利用随机性发现结构：用于构造近似矩阵分解的概率算法，《SIAM工业与应用数学评论》**53**，217（2011年）。