arXiv:2601.04189v1 [math.NT] 7 Jan 2026

Rankin–Selberg L函数的朗道–西格尔零点

JESSE THORNER 和 SHIFAN ZHAO

Abstract. 我们为若干尚未证明其模性的新族中的 Rankin–Selberg L函数和三重积 L函数建立了标准零点自由区域，且不存在例外的 Landau–Siegel 零点。

1. Introduction and statement of the main results

设 F 为一个数域，$\mathbb{A}_F$ 为 F上的阿代尔环，$\mathfrak{F}_n$ 为 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ 的尖点自守表示 π 之集。设 $\mathfrak{C}_\pi$ 为 π 的解析导子（见 (2.1)），它刻画了 π的算术与谱复杂度。设 $L(s,\pi)$为标准 L函数，$\widetilde{\pi} \in \mathfrak{F}_n$ 为对偶表示，ω_π 为 π 的中心特征（我们将其归一化为酉的）。广义黎曼猜想（GRH）断言，若 $\pi \in \mathfrak{F}_n$且 $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$，则 $L(s,\pi) \neq 0$。Jacquet 和 Shalika [15] 证明了，若$\mathrm{Re}(s) \geq 1$，则 $L(s,\pi) \neq 0$，推广了关于黎曼ζ函数的经典研究。令 $|\cdot|$ 表示阿代尔范数。将 π 替换为 $\pi \otimes |\cdot|^{it}$ 并改变 $t \in \mathbb{R}$，可知只需证明：若 $\pi \in \mathfrak{F}_n$ 且 $\sigma \geq 1$，则 $L(\sigma,\pi) \neq 0$。

在没有 GRH 的情况下，对于算术应用而言，$L(s,\pi)$ 的无零区域对 $\mathfrak{C}_\pi$ 具有很强的一致依赖性至关重要。经典方法（例如 [35]）表明，存在一个绝对常数 $c_1 > 0$，使得 $L(\sigma,\pi)$ 在区间 $\sigma \geq 1 - c_1/(n \log \mathfrak{C}_\pi)$ 内至多有一个实的例外零点。这个例外零点只有在 $\pi = \widetilde{\pi}$（即 π 是自对偶的）时才可能存在，并且作为 $\mathfrak{C}_\pi$ 的函数，它可能非常接近 $s = 1$。许多重要问题都依赖于消除这一例外零点；它有时也被称为 Landau–Siegel 零点。

设 v 是 F 的一个赋值，并设 F_v 是 F 关于 v 的完备化。给定 $\pi \in \mathfrak{F}_n$，我们将 π 表示为 $\bigotimes_v \pi_v$ 的限制张量积，其中各因子是 $\mathrm{GL}_n(F_v)$ 的光滑容许表示。存在一个有限的 S_π（可能为空）赋值集合 v，在这些赋值处 π_v 分歧。若 $v \notin S_\pi$ 是非阿基米德的，则 Satake 同构将一个 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的半单共轭类赋予 π_v，其代表元为 $A(\pi_v) = \mathrm{diag}(\alpha_{1,\pi}(v), \ldots, \alpha_{n,\pi}(v))$。Langlands 交换性原理预言，若 $r\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 是一个代数表示，则应存在一个映射ρ，将 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ 的自守表示映射到 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ 的自守表示，并带有相容的局部映射，使得当 $v \notin S_\pi$ 是非阿基米德时，$r(A(\pi_v)) = A(\rho(\pi)_v)$。为了对所有表示 r 建立函子性，只需对不可约 r 建立函子性即可。

设 $\pi \in \mathfrak{F}_2$。对于 $m \geq 0$，令 $\mathrm{Sym}^m\colon$ 一般线性群$_2(\mathbb{C}) \to$ 一般线性群$_{m+1}(\mathbb{C})$ 为一般线性群$_2(\mathbb{C})$ 在秩为 m 的对称张量上的（$m+1$）维不可约表示。若 $P(x, y)$ 是关于两个变量的齐次 m 次多项式，且 $g \in$ 一般线性群$_2(\mathbb{C})$，则 $\mathrm{Sym}^m(g) \in$一般线性群$_{m+1}(\mathbb{C})$ 是在变量按 g 变换时，给出 P 的系数变化的矩阵。令 φ_v 为与 π_v 关联的 Deligne–Weil 群的二维表示，并令 $\mathrm{Sym}^m(\pi_v)$ 为与表示 $\mathrm{Sym}^m \circ \varphi_v$ 关联的一般线性群$_{m+1}(F_v)$ 的光滑容许表示。根据局部朗兹对应，对每个赋值 v，$\mathrm{Sym}^m(\pi_v)$ 都有定义，因此我们可以定义与 π 的第 m 个对称幂提升相关的欧拉乘积：若 $\chi \in \mathfrak{F}_1$，则

$$L(s,\pi,\mathrm{Sym}^m \otimes \chi) = \prod_{v \nmid \infty} L(s,\mathrm{Sym}^m(\pi_v) \otimes \chi_v).$$

若 r_0 是一般线性群$_2(\mathbb{C})$ 的标准表示，行列式为 L，则对于一般线性群$_2(\mathbb{C})$ 的每个不可约表示 r，都存在整数 $n \geq 0$ 和 k，使得 $r = \mathrm{Sym}^n(r_0) \otimes L^{\otimes k}$。函子性原理据此预言，$\mathrm{Sym}^m(\pi) = \bigotimes_v \mathrm{Sym}^m(\pi_v)$ 是一般线性群$_{m+1}(\mathbb{A}_F)$ 的一个自守表示。对于 $m \leq 4$ [5, 16, 18]，这一点已得到证明。若已知 $\mathrm{Sym}^m(\pi)$ 是自守的，则我们记作 $L(s, \mathrm{Sym}^m(\pi) \otimes \chi)$，而不记作 $L(s, \pi, \mathrm{Sym}^m \otimes \chi)$。

设 $L(s, \pi \times \pi')$ 为与 $(\pi, \pi') \in \mathfrak{F}_n \times \mathfrak{F}_{n'}$ 相关联的 Rankin–Selberg L-函数（见 Jacquet、Piatetski-Shapiro 和 Shalika [14]）。Shahidi [32] 证明，当 $\mathrm{Re}(s) \geq 1$ 时，$L(s, \pi \times \pi') \neq 0$。等价地，将 π 替换为 $\pi \otimes |\cdot|^{it}$ 并改变 $t \in \mathbb{R}$，我们有：若 $(\pi, \pi') \in \mathfrak{F}_n \times \mathfrak{F}_{n'}$ 且 $\sigma \geq 1$，则 $L(\sigma, \pi \times \pi') \neq 0$。Brumley [3, 19] 证明，存在一个有效可计算常数 $c_2 = c_2(n, n', F) > 0$，使得当 $\sigma \geq 1 - 1/(\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{C}_{\pi'})^{c_2}$ 时，$L(\sigma, \pi \times \pi') \neq 0$。另请参见 Harcos 和 Thorner [7, 8] 最近的相关工作。

函子性原理还断言，$L(s, \pi \times \pi')$可分解为若干标准 L-函数的乘积（即它是模的）。Hoffstein 和 Ramakrishnan [10] 证明，若所有 Rankin–Selberg$L$-函数都是模的且 $\pi \in \cup_{n=2}^{\infty} \mathfrak{F}_n$，则 $L(s, \pi)$没有例外零点（更详细的讨论见第 5.1 节）。只有在特殊情形下才知道 $L(s, \pi \times \pi')$具有模性，其中最著名的是 $\pi \in \mathfrak{F}_2$ 且 $\pi' \in \mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3$ [18, 27]的情形。因此，无条件地排除例外零点仍是一个困难且富有成果的问题。若存在一个绝对且有效可计算的常数 $c_3 > 0$ 使得

$$L(\sigma, \pi \times \pi') \neq 0, \qquad \sigma \geq 1 - c_3/(nn' \log(\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{C}_{\pi'})).$$

若 $(\pi, \pi') \in \mathfrak{F}_2$和 r，r'是代数表示，且 $r(\pi)$ 和 $r'(\pi')$ 是自守的，则称 $L(s, r(\pi) \times r'(\pi'))$没有例外零点，或没有 *Landau–Siegel* 零点，如果存在一个有效可计算常数 $c_4 = c_4(r, r') > 0$ 使得

$$L(\sigma, r(\pi) \times r'(\pi')) \neq 0, \qquad \sigma \geq 1 - c_4/\log(\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{C}_{\pi'}).$$

如果存在 $\psi \in \mathfrak{F}_1$ 使得 $\pi' = \pi \otimes \psi$，我们称 π，$\pi' \in \mathfrak{F}_n$ 扭曲等价，记作 $\pi \sim \pi'$。否则，记作 $\pi \not\sim \pi'$。令 $\mathbb{1} \in \mathfrak{F}_1$ 为平凡表示，其 L-函数是 Dedekind ζ函数 $\zeta_F(s)$。如果 $\chi \in \mathfrak{F}_1$、$\chi = \overline{\chi}$，且 $L(s, \chi)$ 作为另一个 L-函数的因子出现，那么我们称 $L(s, \chi)$ 为自对偶阿贝尔因子。如果 $\pi \in \mathfrak{F}_2$ 且存在一个非平凡二次 $\eta \in \mathfrak{F}_1$ 使得 $\pi = \pi \otimes \eta$，那么 π 是二面体的。

Prop命题 1.1。 *(1)* [0, 35] *I若* $\pi \in \cup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_n$ 和 $\pi \not\simeq \widetilde{\pi}$，则 $L(s, \pi)$ 没有例外零点 . *(2)* [2, 10] 若 $\pi \in \mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3$，则 $L(s, \pi)$ 没有例外零点。*(3)* [20] 若 $\pi \in \mathfrak{F}_n$ 且 $\pi \otimes \psi = \pi$ 对某个 $\psi \in \mathfrak{F}_1 - \{\mathbb{1}\}$ 成立，则 $L(s, \pi)$ 没有例外零点。*(4)* [29] 若 $\pi, \pi' \in \mathfrak{F}_2$，则 $L(s, \pi \times \pi')$ 的任一例外零点都是某个自对偶阿贝尔因子的零点。当 $\pi \not\sim \pi'$ 且 π, π' 中至少一个是非二面体时，这样的因子不存在。*(5)* [29] 若 $\pi \in \mathfrak{F}_2$ 是自对偶的，则 $L(s, Sym^2(\pi) \times Sym^2(\pi))/\zeta_F(s) = L(s, Sym^2(\pi) \otimes \omega_\pi) L(s, Sym^4(\pi))$ 的任一例外零点都是某个自对偶阿贝尔因子的零点。*(6)* [20] 设 $(\pi, \pi') \in \mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{F}_3$。若 $\pi' \not\sim Sym^2(\pi)$ 或 π 是二面体的，则 $L(s, \pi \times \pi')$ 没有例外零点。*(7)* [12, 35] 设 $(\pi, \pi') \in \mathfrak{F}_n \times \mathfrak{F}_{n'}$。假设 $L(s, \pi \times \pi') = L(s, \widetilde{\pi} \times \widetilde{\pi}')$。若 $t \neq 0$，则 $L(s, \pi \times (\pi' \otimes |\cdot|^{it}))$ 没有例外零点。*(8)* [11, 35] 若 $(\pi, \pi') \in \mathfrak{F}_n \times \mathfrak{F}_{n'}$，$\pi \neq \widetilde{\pi}$ 且 $\pi' = \widetilde{\pi}'$，则 $L(s, \pi \times \pi')$ 没有例外零点。

当 F 是全实的且 π，$\pi' \in \mathfrak{F}_2$ 是非二面体的正则代数对象（因此它们对应于全纯本原希尔伯特尖点形式）时，Newton 和 Thorne [24, 25, 26] 证明了：若 $n \geq 1$，则 $\mathrm{Sym}^n(\pi)$，$\mathrm{Sym}^n(\pi') \in \mathfrak{F}_{n+1}$。利用这一点，Thorner 证明了以下结果。

命题 1.2 ([34, 定理 1。1])。 设 F 为全实。设 π、$\pi' \in \mathfrak{F}_2$ 为非二面体且为正则代数。若 m、$n \geq 0$、$m + n \geq 1$和 $\chi \in \mathfrak{F}_1$ 与F上的一个射线类特征相对应，则 $L(s$、对称$^m(\pi) \times$(对称$^n(\pi') \otimes \chi))$ 的任一例外零点都是某个自对偶阿贝尔因子的零点。当 $m \neq n$ 或 $\pi \not\sim \pi'$时，不存在这样的因子。

本文消除了 Rankin–Selberg L函数和三重积 L函数的新族中的例外零点。

定理 1.3。 设 $\chi \in \mathfrak{F}_1$。设 π、π'、$\pi'' \in \mathfrak{F}_2$ 为非二面体且两两扭曲不等价。设 $\pi_0 \in \mathfrak{F}_3$ 满足 $\pi_0 \not\sim$ 对称^2（π）以及 $\pi_0 \not\sim$ 对称^2（π'）。
（*1*）以下 L-函数没有例外零点：（*a*） L（s，Sym^2（π）$\times \pi_0$），（*b*） L（s，Sym^3（π）$\times$（Sym^2（π'）$\otimes \chi$））， （*c*） L（s，Sym^4（π）$\times \pi'$），（*d*） L（s，$\pi \times \pi' \times \pi''$），（*e*） L（s，$\pi \times \pi' \times \pi_0$），以及（*f*） L（s，$\pi \times Sym^2$（π'）$\times Sym^2$（π''））。

(2) 如果 $Sym^3(\pi) \neq Sym^3(\pi') \otimes \omega_{\pi'}^2$，那么 $L(s, Sym^3(\pi) \times \pi')$ 没有例外零点。*(3)* 如果 $Sym^4(\pi) \otimes \omega_\pi^2 \neq Sym^4(\pi') \otimes \omega_{\pi'}^2$ 或 $\chi^2\omega_\pi^4\omega_{\pi'}^2 \neq \mathbb{1}$，那么 $L(s, Sym^4(\pi) \times (Sym^2(\pi') \otimes \chi))$ 没有例外零点。

备注 1.4。(1) 与命题 1.2 不同，Newton 和 Thorne 的工作 [24, 25, 26] 并不适用于我们如此一般的情形。特别是，我们不要求 F 是全实的，也允许 π、$\pi' \in \mathfrak{F}_2$ 对应于 Hecke–Maass 新形式。(2) 与命题 1.1(4,5,6) 不同，这里考察的 L-函数尚未被证明是模的。(3) 与命题 1.1(7,8) 不同，这里没有关于自对偶性的假设。(4) 对于已经熟悉命题 1.1 和 1.2 证明的读者，我们在第 5.1 节和第 5.2 节概述策略，并将其与早期结果进行比较。(5) 我们所考察的 L-函数的欧拉乘积次数介于 8 和 18 之间。(6) 在第 (2) 和第 (3) 部分中，例如，以下情形满足该假设：(i) F 的某个非阿基米德位 v 处，π_v 和 π'_v 中恰有一个分歧；或 (ii) π 和 π' 是正则代数的（无论 F 是否全实）。

我们对定理 1.3的证明考虑了比我们陈述的更多可能性（例如，至少有一个π，π'，π'' 是二面体型的，至少有两个彼此扭曲等价，等等）。在穷尽所有情形的分类中，有若干种情形下，任何例外零点都必定是某个自对偶阿贝尔因子的零点。我们说明了在存在此类因子时如何对其进行分类，不过并不总是把这一分类完全明确地写出。为协助进行分类，我们需要两个关于例外零点不存在性的附加结果。第一个推广了命题 1.1(5)（见 [29]），第二个推广了命题 1.1(3)（见 [20]）。

定理 1.5。 若 $\pi \in \mathfrak{F}_2$ 且 $\chi \in \mathfrak{F}_1$，则 $L(s$,对称幂$^4(\pi) \otimes \chi)$ 的任何例外零点都是某个自对偶阿贝尔因子的零点。当 π 为八面体型或不属于可解多面体型时，不存在这样的因子。

注 1.6。 定义“3.1八面体型”和“可解多面体型”的定义见第 3.1 节。

定理 1.7。 设 $\pi \in \mathfrak{F}_n$ 和 $\pi' \in \mathfrak{F}_{n'}$。如果存在非平凡的 $\psi \in \mathfrak{F}_1$ 使得 $\pi = \pi \otimes \psi$和 $\pi' \neq \pi' \otimes \psi$，则 L（s、$\pi \times \pi'$）没有例外零点。

一项应用。 在我们的每个定理中，都可以将 π 替换为 $\pi \otimes |\cdot|^{it}$，并令 $t \in \mathbb{R}$ 变化。这样一来，我们的定理便给出不含例外零点的标准无零区域。这使得上述结果在素数理论中颇有用处。设 F 是一个全实数域，并设π、π'、$\pi'' \in \mathfrak{F}_2$ 均为非二面体、两两扭曲不等价且正则代数的。Thorner 在 [34] 中证明命题1.2 的动机，是为 π 的 Hecke 特征值的 Sato–Tate 定律，以及 π 和 π'的 Hecke 特征值的联合 Sato–Tate 定律，获得高度一致的收敛速度。定理 1.3 的一个可能应用，是存在一个绝对

常数 $c_5 > 0$，以及非平凡真子区间 I、I'、$I'' \subseteq [-2, 2]$，和一个非阿基米德位v，使得 π_v、π'_v 和 π''_v 在该位不分歧，且 $q_v \leq (\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{C}_{\pi'} \mathfrak{C}_{\pi''})^{c_5}$，并且在 v 处的 Hecke 特征值满足 $(a_\pi(v)\ a_{\pi'}(v)\ a_{\pi''}(v)) \in I \times I' \times I''$。作者计划在另一篇论文中进一步探讨这一点。

组织结构。 在第 2 节和第 3节中，我们引用证明所需的自守表示及L-函数的性质。

在第 4节中，我们证明定理 1.5 和1.7。
在第 5节中，我们概述证明定理 1.3 的策略，并将其与早先的方法进行比较。

在第 6 节中，我们证明定理 6.1，并由此推得定理 1.3(1a)。在第 7 节中，我们证明定理 7.1，并由此推得定理 1.3(1b)。在第 8 节中，我们证明定理 8.1，并由此推得定理 1.3(1c)。在第 9 节中，我们证明定理 9.1，并由此推得定理 1.3(1d)。在第 10 节中，我们证明定理 10.1，并由此推得定理 1.3(1e)。在第 11 节中，我们证明定理 11.1，并由此推得定理 1.3(1f)。在第 12 节中，我们证明定理 12.1，并由此推得定理 1.3(2)。在第 13 节中，我们证明定理 13.1，并由此推得定理 1.3(3)。

致谢。 作者感谢 Jeffrey Hoffstein、Wenzhi Luo 和 Djordje Mili´cevi´c 进行的有益交流。JT 获得了西蒙斯基金会（MP-TSM-00002484）和美国国家科学基金会（DMS-2401311）的部分资助。

2. Analytic properties of L-functions

设 F为一个绝对判别式为 D_F 的数域。对于 F 的一个赋值 v，设 F_v 为相应的完备化。对于 F 的每个赋值 v，如果 v 是阿基米德的（分别为非阿基米德的），我们记作 $v \mid \infty$（分别为 $v \nmid \infty$）。对于 $v \nmid \infty$， q_v 是局部整数环 $\mathcal{O}_v \subseteq F_v$ 的剩余域的基数，而 ϖ_v 是一致化元。这里给出的 L-函数的性质依赖于 [6, 14, 22]。

2.1. 标准 L-函数。 设 $\pi \in \mathfrak{F}_n$，令 $\widetilde{\pi} \in \mathfrak{F}_n$ 为其对偶表示，并令 ω_π 为其中心特征。我们将 π 表示为 $\mathrm{GL}_n(F_v)$ 的光滑容许表示的限制张量积 $\bigotimes_v \pi_v$。当 $\pi = \mathbb{1}$ 时令 $\delta_\pi = 1$，否则令 $\delta_\pi = 1$。定义集合 $S_\pi = \{v \nmid \infty : \pi_v \text{ 分歧}\}$，以及 $S_\pi^\infty = S_\pi \cup \{v \mid \infty\}$。令 N_π 为 π 的导子的范数。若 $v \nmid \infty$，则存在 n 个萨塔克参数 $(\alpha_{j,\pi}(v))_{j=1}^n$，使得

$$L(s, \pi) = \prod_{v \nmid \infty} L(s, \pi_v), \qquad L(s, \pi_v) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - \alpha_{j,\pi}(v) q_v^{-s}}$$

当 $\mathrm{Re}(s) > 1$ 时绝对收敛。若 $v \in S_\pi$，则至少有一个 $\alpha_{j,\pi}(v)$ 等于零。
If $v \mid \infty$，则 $(\mu_{j,\pi}(v))_{j=1}^n$ 是 v 处的朗兰兹参数，由此我们定义

$$\Gamma_v(s) = \begin{cases} \pi^{-s/2}\Gamma(s/2) & \text{if } F_v = \mathbb{R}, \\ 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s) & \text{if } F_v = \mathbb{C}, \end{cases} \qquad L(s, \pi_\infty) = \prod_{v \mid \infty} L(s, \pi_v) = \prod_{v \mid \infty} \prod_{j=1}^{n} \Gamma_v(s + \mu_{j,\pi}(v)).$$

完备的 L-函数

$$\Lambda(s, \pi) = (s(1-s))^{\delta_\pi} (D_F^n N_\pi)^{\frac{s}{2}} L(s, \pi) L(s, \pi_\infty)$$

是整 阶数为 1，并且存在一个模为 1 的复数 $W(\pi)$，使得

$$\Lambda(s, \pi) = W(\pi) \Lambda(1 - s, \widetilde{\pi}).$$

由于 $\{\alpha_{j,\widetilde{\pi}}(v)\}=\{\overline{\alpha_{j,\pi}(v)}\}$, $N_{\widetilde{\pi}}=N_\pi$, 且 $\{\mu_{j,\widetilde{\pi}}(v)\}=\{\overline{\mu_{j,\pi}(v)}\}$, 我们有 $L(s,\ \widetilde{\pi})=\overline{L(s,\ \pi)}$。解析导子为

$$\mathfrak{C}_\pi = D_F^n N_\pi \prod_{v|\infty}\prod_{j=1}^{n}(|\mu_{j,\pi}(v)|+3)^{[F_v:\mathbb{R}]}. \tag{2.1}$$

由 [21, 23] 存在 $\theta_n\in[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n^2+1}]$ 使得

$$|\alpha_{j,\pi}(v)|\le q_v^{\theta_n},\qquad \mathrm{Re}(\mu_{j,\pi}(v))\ge -\theta_n. \tag{2.2}$$

我们通过狄利克雷级数恒等式定义 $a_\pi(v^\ell)$

$$-\frac{L'}{L}(s,\pi)=\sum_{v\nmid\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\sum_{j=1}^n\alpha_{j,\pi}(v)^\ell\log q_v}{q_v^{\ell s}}=\sum_{v\nmid\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{a_\pi(v^\ell)\log q_v}{q_v^{\ell s}}.$$

2.2. **Rankin–Selberg L函数**。设 $\pi\in\mathfrak{F}_n$ 且 $\pi'\in\mathfrak{F}_{n'}$。设

$$\delta_{\pi\times\pi'}=\begin{cases}1 & \text{if } \pi'=\widetilde{\pi},\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

对于每个 $v\notin S_\pi^\infty\cup S_{\pi'}^\infty$, 定义

$$L(s,\pi_v\times\pi_v')=\prod_{j=1}^{n}\prod_{j'=1}^{n'}\frac{1}{1-\alpha_{j,\pi}(v)\alpha_{j',\pi'}(v)q_v^{-s}}.$$

Jacquet、Piatetski-Shapiro 和 Shalika 证明了以下定理。

定理 2.1. [14] 若$(\pi,\pi')\in\mathfrak{F}_n\times\mathfrak{F}_{n'}$, 则存在

(1) 复数$(\alpha_{j,j',\pi\times\pi'}(v))_{j=1\,j'=1}^{n\quad n'}$, 对每个 $v\in S_\pi\cup S_{\pi'}$, 由此定义 e

$$L(s,\pi_v\times\pi_v')=\prod_{j=1}^{n}\prod_{j'=1}^{n'}\frac{1}{1-\alpha_{j,j',\pi\times\pi'}(v)q_v^{-s}},\quad L(s,\widetilde{\pi}_v\times\widetilde{\pi}_v')=\prod_{j=1}^{n}\prod_{j'=1}^{n'}\frac{1}{1-\overline{\alpha_{j,j',\pi\times\pi'}(v)}q_v^{-s}};$$

(2) 复数$(\mu_{j,j',\pi\times\pi'}(v))_{j=1\,j'=1}^{n\quad n'}$, 对每个 $v\mid\infty$, 由此定义

$$L(s,\pi_v\times\pi_v')=\prod_{j=1}^{n}\prod_{j'=1}^{n'}\Gamma_v(s+\mu_{j,j',\pi\times\pi'}(v)),\quad L(s,\widetilde{\pi}_v\times\widetilde{\pi}_v')=\prod_{j=1}^{n}\prod_{j'=1}^{n'}\Gamma_v(s+\overline{\mu_{j,j',\pi\times\pi'}(v)});$$

(3) 一个导子, 一个整理想, 其范数记为 $N_{\pi\times\pi'}=N_{\widetilde{\pi}\times\widetilde{\pi}'}$; 一个 d

(4) 一个模为$(\pi\times\pi')$ *1* 的复数 $W(\pi\times\pi')$

使得 *Rankin–Selberg* L 函数

$$L(s,\pi\times\pi')=\prod_{v\nmid\infty}L(s,\pi_v\times\pi_v'),\qquad L(s,\widetilde{\pi}\times\widetilde{\pi}')=\prod_{v\nmid\infty}L(s,\widetilde{\pi}_v\times\widetilde{\pi}_v')$$

在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时绝对收敛, 完备化的 L 函数

$$\Lambda(s,\pi\times\pi')=(s(1-s))^{\delta_{\pi\times\pi'}}(D_F^{n'n}N_{\pi\times\pi'})^{\frac{s}{2}}L(s,\pi\times\pi')\prod_{v|\infty}L(s,\pi_v\times\pi_v')$$

$$\Lambda(s,\widetilde{\pi}\times\widetilde{\pi}')=(s(1-s))^{\delta_{\pi\times\pi'}}(D_F^{n'n}N_{\pi\times\pi'})^{\frac{s}{2}}L(s,\widetilde{\pi}\times\widetilde{\pi}')\prod_{v|\infty}L(s,\widetilde{\pi}_v\times\widetilde{\pi}_v')$$

是阶数为 1 的整函数, 并且 $\Lambda(s,\pi\times\pi')=W(\pi\times\pi')\Lambda(1-s,\widetilde{\pi}\times\widetilde{\pi}')$。

由定理 2.1 可知

$$L(s, \widetilde{\pi} \times \widetilde{\pi}') = \overline{L(\overline{s}, \pi \times \pi')} \tag{2.3}$$

以下界成立:

$$|\alpha_{j,j',\pi\times\pi'}(v)| \leq q_v^{\theta_n+\theta_{n'}}, \qquad \mathrm{Re}(\mu_{j,j',\pi\times\pi'}(v)) \geq -(\theta_n + \theta_{n'}). \tag{2.4}$$

若 $\ell \geq 1$ 是一个整数且 $v \nmid \infty$，则我们定义

$$\begin{aligned} a_{\pi\times\pi'}(v^\ell) &= \begin{cases} a_\pi(v^\ell)a_{\pi'}(v^\ell) & \text{if } v \notin S_\pi \cup S_{\pi'}, \\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{j'=1}^{n'} \alpha_{j,j',\pi\times\pi'}(v)^\ell & \text{if } v \in S_\pi \cup S_{\pi'}, \end{cases} \\ a_{\widetilde{\pi}\times\widetilde{\pi}'}(v^\ell) &= \overline{a_{\pi\times\pi'}(v^\ell)}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

我们有狄利克雷级数恒等式

$$-\frac{L'}{L}(s, \pi \times \pi') = \sum_{v\nmid\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{a_{\pi\times\pi'}(v^\ell)\log q_v}{q_v^{\ell s}}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1. \tag{2.6}$$

2.3. 等压和。 设 $r \geq 1$ 是一个整数。对于 $1 \leq j \leq r$，令 $\pi_j \in \mathfrak{F}_{d_j}$。朗兰兹将 $(\pi_1, \dots, \pi_r)$ 与一般线性群 $\mathrm{GL}_{d_1+\cdots+d_r}(\mathbb{A}_F)$ 的一个自守表示对应起来，其等压和为 $\Pi = \pi_1 \boxplus \cdots \boxplus \pi_r$。其 L-函数为

$$L(s, \Pi) = \prod_{j=1}^{r} L(s, \pi_j),$$

其对偶表示为 $\widetilde{\pi}_1 \boxplus \cdots \boxplus \widetilde{\pi}_r$。令 $\mathfrak{A}_n$ 为一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ 上等压自守表示的集合。若 $\Pi = \pi_1 \boxplus \cdots \boxplus \pi_r \in \mathfrak{A}_n$ 且 $\Pi' = \pi_1' \boxplus \cdots \boxplus \pi_{r'}' \in \mathfrak{A}_{n'}$，则

$$L(s, \Pi \times \Pi') = \prod_{j=1}^{r}\prod_{k=1}^{r'} L(s, \pi_j \times \pi_k'). \tag{2.7}$$

引理 2.2. [10] 若 $\Pi \in \mathfrak{A}_n$，则 $-\frac{L'}{L}(s, \Pi \times \widetilde{\Pi})$ 具有非负的狄利克雷系数 s.

2.4. 实零点。 我们定义解析导子

$$\mathfrak{C}_{\pi\times\pi'} = D_F^{n'n} N_{\pi\times\pi'} \prod_{v|\infty}\prod_{j=1}^{n}\prod_{j'=1}^{n'} (|\mu_{j,j',\pi\times\pi'}(v)| + 3)^{[F_v:\mathbb{R}]}.$$

利用 [4, 定理 2]和 [35,引理 A.1], 我们推得

$$N_{\pi\times\pi'} \mid N_\pi^{n'} N_{\pi'}^{n}, \qquad \mathfrak{C}_{\pi\times\pi'} \leq \mathfrak{C}_\pi^{n'}\mathfrak{C}_{\pi'}^{n}, \qquad \mathfrak{C}_{\pi\times(\pi'\otimes\chi)} \leq \mathfrak{C}_\pi^{n'}\mathfrak{C}_{\pi'}^{n}\mathfrak{C}_\chi^{n'n}. \tag{2.8}$$

Lem理 2.3. 设 $J \geq 1$。对于 $j \in \{1, \dots, J\}$，令 $(\pi_j, \pi_j', \chi_j) \in \mathfrak{F}_{n_j} \times \mathfrak{F}_{n_j'} \times \mathfrak{F}_1$。定义 e

$$\mathfrak{Q} = \prod_{j=1}^{J} C(\pi_j)C(\pi_j')C(\chi), \quad \mathfrak{S} = \bigcup_{j=1}^{J}(S_{\pi_j} \cup S_{\pi_j'} \cup S_{\chi_j}), \quad D(s) = \prod_{j=1}^{J} L(s, \pi_j \times (\pi_j' \otimes \chi_j)).$$

假设 $D(s)$ 在 $\mathbb{C} - \{1\}$ 上全纯，且在 $s = 1$ 处有 $r \geq 1$ 阶极点。记

$$a_D(v^\ell) = \sum_{j=1}^{J} a_{\pi_j\times(\pi_j'\otimes\chi)}(v^\ell), \qquad -\frac{D'}{D}(s) = \sum_{v\nmid\infty}\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{a_D(v^\ell)\log q_v}{q_v^{\ell s}}. \tag{2.9}$$

设 $Q \geq \mathfrak{Q}$。存在一个有效可计算常数 $c_6 > 0$（仅依赖于数 n_j、n_j' 和 r），使得若对所有 $\ell \geq 1$ 和 $v \notin \mathfrak{S}$ 都有 $\mathrm{Re}(a_D(v^\ell)) \geq 0$，则 $D(\sigma)$ 在区间 $[1, \infty)$ 内没有零点，并且在区间 $[1 - c_6/\log Q, 1)$ 内至多有 r 个零点。

证明。 证明与 [13, 引理 5。9]完全相同，唯一不同之处在于，我们利用 $v \in \mathfrak{S}$ （2.2）和（2.4）来估计 $a_D(v^\ell)$ 所产生的贡献。 □

3. 对称幂提升

3.1. **来自** 一般线性群$_2$。 设 $\pi \in \mathfrak{F}_2$。定义 $\mathrm{Sym}^0(\pi) = \mathbb{1}$ 以及 $\mathrm{Sym}^1(\pi) = \pi$。对于整数 $m \geq 2$ 和 v 的一个赋值 F，回顾第 $^m(\pi_v$ 节中 Sym1 (

$$\mathrm{Sym}^m(\pi) = \bigotimes_v \mathrm{Sym}^m(\pi_v).$$

猜想 $\mathrm{Sym}^m(\pi) \in \mathfrak{A}_{m+1}$ 与对偶表示

$$\mathrm{Sym}^m(\widetilde{\pi}) = \mathrm{Sym}^m(\pi) \otimes \overline{\omega}_\pi^m, \tag{3.1}$$

这一猜想已知对 $m \leq 4$ 成立。对于 $\pi \in \mathfrak{F}_2$，我们引入

$$A^0(\pi) = \mathbb{1},\ A^1(\pi) = \pi,\ A^2(\pi) = \mathrm{Sym}^2(\pi) \otimes \overline{\omega}_\pi,\ A^3(\pi) = \mathrm{Sym}^3(\pi) \otimes \overline{\omega}_\pi,\ A^4(\pi) = \mathrm{Sym}^4(\pi) \otimes \overline{\omega}_\pi^2.$$

利用（3.1），我们记录下以下恒等式

$$\widetilde{A^j(\pi)} = A^j(\widetilde{\pi}),\quad A^1(\widetilde{\pi}) = \pi \otimes \overline{\omega}_\pi,\quad A^2(\widetilde{\pi}) = A^2(\pi),\quad A^3(\widetilde{\pi}) = A^3(\pi) \otimes \overline{\omega}_\pi,\quad A^4(\widetilde{\pi}) = A^4(\pi).$$

定义 3.1。令 $\pi \in \mathfrak{F}_2$。

(1) 如果存在非平凡二次特征 $\eta = \eta_\pi \in \mathfrak{F}_1$ 使得 $\pi = \pi \otimes \eta$，那么 π 是**二面体型**的。如果 K/F 是与 η相关的二次扩张，那么存在定义在 K上的 $\xi = \xi_\pi$，使得 $\pi = I_K^F(\xi)$，即将 ξ从 K自守诱导到 F。令 $\theta \in \mathrm{Gal}(K/F)$为非平凡元素，并设 $\xi' := \xi \circ \theta$。在此情形下， π是**二面体型（根据** (η, ξ, K)**）**的。

(2) 如果 π 不是二面体型的，并且存在非平凡三次特征 $\mu = \mu_\pi \in \mathfrak{F}_1$ 使得$\mathrm{Sym}^2(\pi) = \mathrm{Sym}^2(\pi) \otimes \mu$，那么 π 是**四面体（根据** μ**）**的。

(3) 如果 π 既不是二面体型的，也不是四面体的，并且存在非平凡二次特征 $\eta = \eta_\pi$使得 $\mathrm{Sym}^3(\pi) = \mathrm{Sym}^3(\pi) \otimes \eta$，那么 π 是**八面体型（根据** η**）**的。

(4) 如果 π 不是二面体、四面体或八面体型的，那么 π **不是可解多面体型。**

在整个证明过程中，我们将使用以下分类结果。

引理 3.2。 [5, 16, 17, 18, 27]

(1) 如果 $\pi \in \mathfrak{F}_2$，那么$\mathrm{Sym}^2(\pi) \in \mathfrak{A}_3$、$\mathrm{Sym}^3(\pi) \in \mathfrak{A}_4$以及$\mathrm{Sym}^4(\pi) \in \mathfrak{A}_5$。*(2)* 如果 $\pi \in \mathfrak{F}_2$，那么 π 是二面体型，当且仅当$\mathrm{Sym}^2(\pi) \notin \mathfrak{F}_3$。如果根据$(\eta$、$\xi$、$K)$ π是二面体型的，那么

$$A^2(\pi) = I_K^F(\xi\xi'^{-1}) \boxplus \eta,$$

$$A^3(\pi) = \begin{cases} \pi \otimes \mu \boxplus \pi \otimes \mu\eta & \text{if there exists } \mu \in \mathfrak{F}_1 \text{ such that } \mu^2 = \mathbb{1} \\ & \text{and } \xi\xi'^{-1} = \mu \circ \mathrm{N}_{K/F}, \\ I_K^F(\xi^2\xi'^{-1}) \boxplus \pi & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$A^4(\pi) = \begin{cases} \mathbb{1} \boxplus \mathbb{1} \boxplus \mu \boxplus \eta \boxplus \mu\eta & \text{if there exists } \mu \in \mathfrak{F}_1 \text{ such that } \mu^2 = \mathbb{1} \\ & \text{and } \xi\xi'^{-1} = \mu \circ \mathrm{N}_{K/F}, \\ \mathbb{1} \boxplus I_K^F(\xi^3\xi'^{-1}) \otimes \overline{\omega}_\pi \boxplus I_K^F(\xi^2) \otimes \overline{\omega}_\pi & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(3) 设 $\pi \in \mathfrak{F}_2$ 为非二面体型，此时 $A^2(\pi) \in \mathfrak{F}_3$。

(a) $\mathrm{Sym}^3(\pi) \notin \mathfrak{F}_4$，当且仅当存在一个非平凡三次特征 $\mu \in \mathfrak{F}_1$，使得π 根据 μ为四面体型；在此情形下，$A^2(\pi) = A^2(\pi) \otimes \mu$、$A^3(\pi) = \pi \otimes \mu \boxplus \pi \otimes \mu$以及$A^4(\pi) = A^2(\pi) \boxplus \overline{\mu} \boxplus \mu$。

(b) 若$\mathrm{Sym}^3(\pi) \in \mathfrak{F}_4$，则$\mathrm{Sym}^4(\pi) \notin \mathfrak{F}_5$ 成立，当且仅当存在一个非平凡二次特征 $\eta \in \mathfrak{F}_1$，使得 π 由 η确定为八面体型；在这种情况下，存在一个二面体$\nu = \nu_\pi \in \mathfrak{F}_2$，使得 $A^3(\pi) = A^3(\pi) \otimes \eta$ 且 $A^4(\pi) = \nu \boxplus A^2(\pi) \otimes \eta$。

(4) 若 $\pi \in \mathfrak{F}_2$，则 π 不是可解多面体型，当且仅当 $A^2(\pi) \in \mathfrak{F}_3$、$A^3(\pi) \in \mathfrak{F}_4$以及$A^4(\pi) \in \mathfrak{F}_5$。

由于对称幂$^m(\pi_v)$ 对每个 v 上的 F 赋值以及每个 $m \geq 1$都有定义，如第1节所述，因此以下引理对所有非分歧赋值 v 和所有对称幂均成立。

引理 3.3。 若 $j, k \geq 0$ 是整数，$\pi \in \mathfrak{F}_2$ 的中心特征为 ω, $\chi \in \mathfrak{F}_1$，且 $v \notin S_\pi^\infty \cup S_\chi^\infty$ 是 F 的一个赋值，则

$$\mathrm{Sym}^j(\pi_v) \otimes \mathrm{Sym}^k(\pi_v) \otimes \chi_v = \bigoplus_{r=0}^{\min\{j,k\}} \mathrm{Sym}^{j+k-2r}(\pi_v) \otimes \omega_v^r \chi_v.$$

特别地，若 $j, k \in \{0, 1, 2\}$，则

$$A^j(\pi_v) \otimes A^k(\widetilde{\pi}_v) \otimes \chi_v = \begin{cases} \bigoplus_{r=0}^{\min\{j,k\}} A^{j+k-2r}(\pi_v) \otimes \chi_v & \text{if } (j,k) \notin \{(0,1),(2,1)\}, \\ \bigoplus_{r=0}^{\min\{j,k\}} A^{j+k-2r}(\pi_v) \otimes \overline{\omega}_\pi \chi_v & \text{if } (j,k) \in \{(0,1),(2,1)\}. \end{cases}$$

证明。 这些结论由克莱布施–戈尔丹恒等式得出。 □

引理 3.4。 若 $\pi \in \mathfrak{F}_2$ 且 $j \leq 4$，则$\log C(A^j(\pi)) \ll \log \mathfrak{C}_\pi$ 且$\log \mathfrak{C}_{\omega_\pi} \ll \log \mathfrak{C}_\pi$。

*Pr*哎。 当 $j = 1$ 时无需证明。否则， L-函数恒等式

$$L(s, \pi \times \widetilde{\pi}) = \zeta_F(s) \cdot L(s, A^2(\pi)), \qquad L(s, A^2(\pi) \times \pi) = L(s, A^3(\pi)) L(s, \pi),$$
$$L(s, A^2(\pi) \times A^2(\pi)) = \zeta_F(s) \cdot L(s, A^2(\pi)) \cdot L(s, A^4(\pi)).$$

给出解析导子恒等式

$$\mathfrak{C}_{A^2(\pi)} = \frac{\mathfrak{C}_{\pi \times \widetilde{\pi}}}{\mathfrak{C}_{\mathbb{1}}}, \quad C(A^3(\pi)) = \frac{C(A^2(\pi) \times \pi)}{\mathfrak{C}_\pi}, \quad C(A^4(\pi)) = \frac{C(A^2(\pi) \times A^2(\pi))}{\mathfrak{C}_{\mathbb{1}} \mathfrak{C}_{A^2(\pi)}}.$$

所述界现由（2.8）和 [31,定理 A]推出。 □

3.2. **来自 GL$_n$ 的对称平方提升**。 设 $(\Sigma, \chi) \in \mathfrak{F}_n \times \mathfrak{F}_1$。设 S 为一个赋值集合，包含 $S_\Sigma^\infty \cup S_\chi^\infty$以及所有整除 2 的赋值。对称平方表示 Sym^2: GL$_n(\mathbb{C}) \to$ GL$_{n(n+1)/2}(\mathbb{C})$ 的部分 L-函数的 χ-扭曲为

$$L^S(s, \Sigma; \mathrm{Sym}^2 \otimes \chi) = \prod_{v \notin S} \prod_{1 \leq j \leq k \leq n} \frac{1}{1 - \chi_v(\varpi_v) \alpha_{j,\Sigma}(v) \alpha_{k,\Sigma}(v) q_v^{-s}}. \tag{3.2}$$

定理 3.5 ([33, 定理 7。1])。 设 $\Sigma \in \mathfrak{F}_n$ 和 $\chi \in \mathfrak{F}_1$。若 S 是一个包含$S_\Sigma^\infty \cup S_\chi^\infty \cup \{v \mid 2\}$的赋值集合，则 $L^S(s, \Sigma;$ 对称$^2 \otimes \chi)$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯，但在 $s \in \{0, 1\}$ 处可能有简单极点。若 $\chi^n \omega_\Sigma^2 \neq \mathbb{1}$，则没有极点。

我们的下一个结果 使用定理 3.5 于以下情形： $L^S(s,$ $\Sigma;$ Sym$^2 \otimes \chi)$ 是整函数，且 $\chi^n \omega_\Sigma^2 = \mathbb{1}$.

推论 3.6。 如果 $\pi \in \mathfrak{F}_2$、$\chi \in \mathfrak{F}_1$ 和 π 不是可解多面体型，则

$$\frac{L(s, A^2(\pi) \times (A^4(\pi) \otimes \chi))}{L(s, A^4(\pi) \otimes \chi)} \tag{3.3}$$

在区域 $\mathrm{Re}(s) > 56/65$ 内全纯。

证明。 由于 π 不是可解多面体型， A^2（π） $\in \mathfrak{F}_3$ 且 A^4（π） $\in \mathfrak{F}_5$。因此， （3.3）的分子和分母在半平面 Re(s） ≥ 1中均为整函数且不 vanishing。由此可知， （3.3）在 $s = 1$处没有极点。

在局部进行类似于 [29, 引理 71], 的处理，我们发现，如果 S 是一个包含$S_\pi^\infty \cup S_\chi^\infty \cup \{v \mid 2\}$的赋值集合，那么（3.3）等于

$$L^S(s, \mathrm{Sym}^3(\pi); \mathrm{Sym}^2 \otimes \overline{\omega}_\pi^3\chi) \prod_{v\in S} \frac{L(s, A^2(\pi_v) \times (A^4(\pi_v) \otimes \chi_v))}{L(s, A^4(\pi_v) \otimes \chi_v)}. \tag{3.4}$$

由此可得 式 (2.2) 和 (2.4) 可知，关于 $v \in S$ 的乘积在区域内全纯

$$\mathrm{Re}(s) > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5^2+1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^2+1}\right) = \frac{56}{65}.$$

由于 (3.3) 以及 (3.4) 右端关于 $v \in S$ 的乘积在 $s = 1$ 处都全纯，因此 $L^S(s, \mathrm{Sym}^3(\pi); \mathrm{Sym}^2\otimes\omega_\pi^3\chi)$ 也全纯。因此，由定理 3.5，$L^S(s, \mathrm{Sym}^3(\pi); \mathrm{Sym}^2\otimes\omega_\pi^3\chi)$ 在半平面 $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ 内全纯。由此得出，(3.3) 在半平面 $\mathrm{Re}(s) > 56/65$ 内全纯。□

3.3. **关于模性的结果**。设 $\pi \in \mathfrak{F}_n$ 且 $\pi' \in \mathfrak{F}_{n'}$。若 $L(s, \pi \times \pi')$ 是模的，则存在一个表示 $\pi \boxtimes \pi' \in \mathfrak{A}_{n'n}$，使得 $L(s, \pi \times \pi') = L(s, \pi \boxtimes \pi')$。

定理 3.7 ([18, 27, 30])。若 $\pi \in \mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3$ 且 $\pi' \in \mathfrak{F}_2$，则存在一个等压自守表示 $\pi \boxtimes \pi'$，使得 $L(s, \pi \times \pi') = L(s, \pi \boxtimes \pi')$。

(1) 若 π、$\pi' \in \mathfrak{F}_2$ 为非二面体，则 $\pi \boxtimes \pi'$ 为尖点当且仅当 $\pi \not\sim \pi'$。*(2)* 若 $\pi \in \mathfrak{F}_3$ 且 $\pi' \in \mathfrak{F}_2$，则 $\pi \boxtimes \pi'$ 为非尖点当且仅当 *(a)* π' 为非二面体且 $\pi \sim \mathrm{Sym}^2(\pi')$，或 *(b)* π' 为二面体，存在一个来自三次非正规扩张 K/F的幂等类特征 χ，使得 $L(s, \pi) = L(s, \chi)$，且基变换 π_K 是艾森斯坦的。

(3) 若 π、$\pi' \in \mathfrak{F}_2$ 为非二面体且 $\pi \not\sim \pi'$，则 $A^2(\pi) \not\sim A^2(\pi')$ 和 $\pi \boxtimes A^2(\pi')$ 是尖点的。

3.4. **其他辅助结果**。

引理 *3.8.* 设 π、$\pi' \in \mathfrak{F}_2$ 为非二面体且 $\chi \in \mathfrak{F}_1$。设 $\pi \not\sim \pi'$、m、$n \in \{1, 2, 3, 4\}$，以及 $\mathfrak{o}_{m,n}(\pi, \pi') = -ord_{s=1}L(s, A^m(\pi) \times (A^n(\pi') \otimes \chi))$。那么，$L(s, A^m(\pi) \times (A^n(\pi') \otimes \chi))$ 除以下情况外是整函数：

(1) $m = n = 3$ 和 π、π' 均为非四面体，此时 $\mathfrak{o}_{m,n}(\pi, \pi') \in \{0, 1\}$；*(2)* $m = n = 4$ 和 π、π' 均为四面体，此时 $\mathfrak{o}_{m,n}(\pi, \pi') \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$；*(3)* $m = n = 4$ 和 π、π' 均为八面体型，此时 $\mathfrak{o}_{m,n}(\pi, \pi') \in \{0, 1\}$；以及 *(4)* $m = n = 4$ 和 π、π' 均非可解多面体型，此时 $\mathfrak{o}_{m,n}(\pi, \pi') \in \{0, 1\}$。

证明。证明直接应用引理 3.2和定理3.7(3)。证明过程冗长、繁琐，对我们的目的也没有启发，因此省略细节。□

引理 3.9。若 $\pi_0 \in \mathfrak{F}_3$ 是自对偶的，则存在一个非二面体的 $\pi \in \mathfrak{F}_2$，使得 $\pi_0 = A^2(\pi) \otimes \omega_{\pi_0}$，且 $\omega_{\pi_0}^2 = \mathbb{1}$。若 $\pi' \in \mathfrak{F}_2$ 也满足 $\pi_0 = A^2(\pi') \otimes \omega_{\pi_0}$，则 $\pi \sim \pi'$。

证明。这包含在 [28, 定理 A]中。□

现在我们进一步阐述命题1.1(6)。

引理 3.10。[20, 定理 1 和 2] 令 $\pi \in \mathfrak{F}_2$ 和 $\pi_0 \in \mathfrak{F}_3$。令 $\pi \boxtimes \pi_0$ 如定理 *3.7*中所述。

(1) 如果 $\pi \boxtimes \pi_0$ 是尖点的，那么 $L(s, \pi \times \pi_0)$ 没有例外零点。*(2)* 如果 $\pi \boxtimes \pi_0$ 不是尖点的，那么 $L(s, \pi \times \pi_0)$ 至多有一个例外零点 β（必为简单零点）。如果 β 存在，那么 *(a)* π 是非二面体的，*(b)* 存在 $\chi \in \mathfrak{F}_1$ 使得 $\pi_0 = A^2(\pi) \otimes \chi$，*(c)* β 是 $L(s, A^3(\pi) \otimes \chi)$唯一的（必为简单的）例外零点，*(d)* β 是 $L(s, \pi,$ 对称幂$^5 \otimes \omega_\pi^2\chi)$的简单极点。

—

4. Proofs of Theorems 1.5 and 1.7

定理的证明 1.5。 设 $(\pi,\chi)\in\mathfrak{F}_2\times\mathfrak{F}_1$。我们将研究 $L(s,A^4(\pi)\otimes\chi$的零点。为了证明定理1.5，只需将 χ 替换为 $\chi\omega_\pi^2$。我们需要考虑三种情形。

(1) 若 π 是二面体型或四面体型的，则由引理 3.2(2,3a)， $L(s,\ A^4(\pi)\ \otimes\chi$可分解为 L 个由一般线性群 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_F$上的自守表示所对应的 L 函数的乘积，且 $1\leq m\leq 3$。由命题 1.1(2)，此类因子的任何例外零点都是 自对偶阿贝尔因子的零点。

(2) 若 π 由 η可知是八面体型，则引理 3.2(3b)意味着存在 $\nu\in\mathfrak{F}_2$ ，使得$L(s,A^4(\pi)\ \otimes\chi)$ 分解为 $L(s,\nu\otimes\chi)\cdot L(s,A^2(\pi)\otimes\eta\chi)$，其中 $A^2(\pi)\in\mathfrak{F}_3$。因此，根据命题 1.1(2)，每个因子都没有例外零点。

(3) 若 π 不是可解多面体型，则引理 3.2(4) 表明 $A^2(\pi)\in\mathfrak{F}_3$， $A^4(\pi)\in\mathfrak{F}_5$，且二者均为自对偶。

(a) 若 $A^4(\pi)\otimes\chi\in\mathfrak{F}_5$ 不是自对偶的，则由命题 1.1(1)， $L(s,A^4(\pi)\otimes\chi)$ 没有例外零点。

(b) 若 $A^4(\pi)\otimes\chi\in\mathfrak{F}_5$ 是自对偶的，则考虑 $\Pi=\mathbb{1}\boxplus A^2(\pi)\boxplus(A^4(\pi)\otimes\chi)\in\mathfrak{A}_9$。$\sim L$-函数 $L(s,\Pi\times\Pi)$ 可分解为

$$\zeta_F(s)L(s,A^2(\pi)\times A^2(\pi))L(s,A^4(\pi)\times A^4(\pi))L(s,A^4(\pi)\otimes\chi)^2L(s,A^2(\pi)\times(A^4(\pi)\otimes\chi))^2L(s,A^2(\pi))^2,$$

它除在 $s=1$处有一个三阶极点外，处处全纯。根据推论 3.6， $L(s,A^4(\pi)\ \otimes\chi)$ 的任一非平凡零点 ρ，若 $\mathrm{Re}(\rho)>56/65$，则也是 $L(s,\Pi\times\widetilde{\Pi})$ 的零点，且重数至少为 4。由引理 2.2， $-(L'/L)(s,\Pi\times\Pi)$ 的狄利克雷系数非负，因此，若 $L(s,A^4(\pi)\otimes\chi)$ 存在例外零点，则会与引理2.3应用于 $L(s,\Pi\times\Pi)$ 的结论矛盾。因此，不存在例外零点。□

定理1.7的证明。设 $(\pi,\ \pi')\in\mathfrak{F}_n\times\mathfrak{F}_{n'}$。假设 $\psi\in\mathfrak{F}_1$ 满足 $\pi\otimes\psi=\pi$ 且$\pi'\otimes\psi\neq\pi'$。若 $\Pi=\widetilde{\pi}\boxplus\pi'\boxplus(\pi'\otimes\psi)\in\mathfrak{A}_{n+2n'}$，则我们的假设意味着

$$L(s,\ \Pi\times\widetilde{\Pi})=L(s,\ \pi\times\pi')^2\cdot L(s,\ \widetilde{\pi}\times\widetilde{\pi}')^2\cdot L(s,\ \pi\times\widetilde{\pi})\cdot L(s,\ \pi'\times\widetilde{\pi}')^2\cdot L(s,\ \pi'\times(\widetilde{\pi}'\otimes\psi))\cdot L(s,\ \pi'\times(\widetilde{\pi}'\otimes\psi))^{\sim}.$$

由于 $\pi'\neq\pi'\otimes\psi$，乘积 $L(s,\pi'\times(\widetilde{\pi}'\otimes\psi))\cdot L(s,\pi'\times(\widetilde{\pi}'\otimes\overline{\psi}))^{\sim}$ 是整函数。因此， $L(s,\Pi\times\Pi)$ 在除 $s=1$ 处的三阶极点外全纯。由引理2.2， $-(L'/L)(s,\Pi\times\Pi)$ 的狄利克雷系数非负。由于根据 (2.3)， $L(s,\pi\times\pi')$ 的任何实零点也是 $L(s,\widetilde{\pi}\times\widetilde{\pi}')$ 的实零点，因此， $L(s,\pi\times\pi')$ 存在例外零点将与引理2.3矛盾，该引理应用于 $L(s,\Pi\times\Pi)^{\sim}$。因此， $L(s,\pi\times\pi')$ 没有例外零点。□

5. Proof strategy for Theorem 1.3

以下命题是目前已知的唯一一种排除例外零点的策略。

命题 5.1。 令 $(\pi_1,\pi_2)\in\mathfrak{F}_{n_1}\times\mathfrak{F}_{n_2}$。若存在一个由 *Rankin–Selberg* L-函数、整数 ℓ_1、$\ell_2\geq 0$ 和 $k\geq 1$ 构成的乘积 $D(s)$，满足 $\ell_1+\ell_2>k$，并且存在一个固定的 $t\in(0,1)$，使得

(1) 对每个未分歧的 $v\nmid\infty$ 和 $\ell\geq 1$，都有 $\mathrm{Re}(\alpha_D(v^\ell))\geq 0$ （见 （2.9）） ； *(2)* $D(s)$ 除了在 $s=1$ 处有一个 k 阶极点外处处全纯； *(3)* $D(s)L(s,\pi_1\times\pi_2)^{-\ell_1}L(s,\widetilde{\pi}_1\times\widetilde{\pi}_2)^{-\ell_2}$ 在每个实数 $s\in(t,1)$ 处全纯； *(4)* 对于 $\mathrm{Re}(s)>1$，定义 $D(s)$ 的欧拉乘积的次数为 $d\geq 1$； *(5)* $D(s)$ 的解析导子 $\mathfrak{C}_D$ 的对数为 $O_{n_1,n_2}(\log(\mathfrak{C}_{\pi_1}\mathfrak{C}_{\pi_2}))$，

那么存在一个有效可计算常数 $c_7=c_7(d)>0$，使得 $L(\sigma,\pi_1\times\pi_2)$ 在区间 $\sigma\geq 1-c_7/\log(\mathfrak{C}_{\pi_1}\mathfrak{C}_{\pi_2})$内没有实零点。

证明。 由 （2.3）， L （s， $\pi_1\times\pi_2$）的实零点是 D （s）的一个零点，且重数至少为 $\ell_1+\ell_2>k$，因此 L （s， $\pi_1\times\pi_2$）存在例外零点这一事实与将引理 2.3 应用于 D （s）相矛盾。 □

5.1. 早期工作。首先，我们考虑 $\pi_1 \in \cup_{n=2}^{\infty}\mathfrak{F}_n$ and $\pi_2 = \mathbb{1}$ 的情形。根据命题 1.1(1)，不妨假设 $\pi_1 = \widetilde{\pi}_1$。Hoffstein 和 Ramakrishnan [10, 《定理 B 的证明》] 表明，只要 Rankin–Selberg L函数的模性取得足够进展，就足以证明 $L(s,\pi_1)$ 没有例外零点。假设 $L(s,\pi_1\times\widetilde{\pi}_1)$ 是模的，则存在一个表示 $\pi_1\boxtimes\widetilde{\pi}_1\in\mathfrak{A}_{n^2}$ 满足 $L(s,\pi_1\times\widetilde{\pi}_1) = L(s,\pi_1\boxtimes\widetilde{\pi}_1)$。根据 [10,引理 4.4]，$\pi_1\boxtimes\widetilde{\pi}_1$具有一个尖点成分 $\tau\notin\{\mathbb{1},\pi_1,\widetilde{\pi}_1\}$。如果 $L(s,\pi_1\times\tau)$ 是模的，那么根据 [9,引理 4.4 的证明和断言 4.5]，$L(s,\pi_1\times\tau)/L(s,\pi_1)$ 是整函数。因此，在 $L(s,\pi_1\times\widetilde{\pi}_1)$ 和 $L(s,\pi_1\times\tau)$ 的模性成立的前提下，Hoffstein 和 Ramakrishnan 证明了：如果 $\Pi = \mathbb{1}\boxplus\tau\boxplus\pi_1,\widetilde{\ }$，那么 $D(s) = L(s,\Pi\times\Pi)$ 满足命题 5.1 的假设，并且 $k=3$ and $\ell_1=\ell_2=2$。

命题 1.1(2,4,5,6) 通过验证 $\pi_1\boxtimes\widetilde{\pi}_1$ 的存在性以及 $\pi_1\boxtimes\widetilde{\pi}_1$ 的一个非平凡尖点成分 τ 的存在性来证明；存在一个有效可计算常数 $c_8 = c_8(n,F)\in(0,1)$，满足如下性质：$L(\sigma,\pi_1\times\tau)/L(\sigma,\pi_1)$ 在每个 $\sigma\in(c_8,1]$ 处全纯。命题 1.1(1,3,7,8) 则通过在自对偶性或扭曲等价假设下构造满足命题 5.1 的 $D(s)$ 来证明。

在 [34], 命题1.2 的证明方式与我们现在给出的描述等价。假设 F是全实的，π、$\pi'\in\mathfrak{F}_2$是非二面体且正则代数的（因此 $\mathrm{Sym}^n(\pi)$、$\mathrm{Sym}^n(\pi')\in\mathfrak{F}_{n+1}$ 对所有 $n\geq 1$ [24]都成立），并且 $\pi\not\sim\pi'$。考虑

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(s) &= L(s,\mathrm{Sym}^m(\pi)\times\mathrm{Sym}^m(\widetilde{\pi}))L(s,\mathrm{Sym}^n(\pi')\times\mathrm{Sym}^n(\widetilde{\pi}'))^2L(s,\mathrm{Sym}^4(\pi)\otimes\overline{\omega}_\pi^2)\\ &\cdot L(s,\mathrm{Sym}^m(\pi)\times(\mathrm{Sym}^n(\pi')\otimes\chi))^2L(s,\mathrm{Sym}^m(\widetilde{\pi})\times(\mathrm{Sym}^n(\widetilde{\pi}')\otimes\overline{\chi}))^2L(s,\mathrm{Ad}(\pi))^3\\ &\cdot L(s,\mathrm{Sym}^{m-2}(\pi)\times(\mathrm{Sym}^n(\pi')\otimes\chi\omega_\pi))L(s,\mathrm{Sym}^{m-2}(\widetilde{\pi})\times(\mathrm{Sym}^n(\widetilde{\pi}')\otimes\overline{\chi\omega}_\pi))\\ &\cdot L(s,\mathrm{Sym}^{m+2}(\pi)\times(\mathrm{Sym}^n(\pi')\otimes\chi\overline{\omega}_\pi))L(s,\mathrm{Sym}^{m+2}(\widetilde{\pi})\times(\mathrm{Sym}^n(\widetilde{\pi}')\otimes\overline{\chi}\omega_\pi))\\ &\cdot\prod_{k=1}^{n}[L(s,\mathrm{Ad}(\pi)\times(\mathrm{Sym}^{2k}(\pi')\otimes\overline{\omega}_{\pi'}^k))^3L(s,\mathrm{Sym}^4(\pi)\times(\mathrm{Sym}^{2k}(\pi')\otimes\overline{\omega}_\pi^2\overline{\omega}_{\pi'}^k))].\end{aligned}\tag{5.1}$$

对于 F 的赋值 v，我们定义

$$\Pi_v = \mathrm{Sym}^m(\widetilde{\pi}_v)\oplus A^2(\pi_v)\otimes\mathrm{Sym}^n(\pi'_v)\otimes\chi_v\oplus\mathrm{Sym}^n(\pi'_v)\otimes\chi_v.$$

注意，$\bigotimes_v\Pi_v$ 目前尚不知道属于 $\mathfrak{A}_{m+4n+5}$，因为 $\bigotimes_v A^2(\pi_v)\otimes\mathrm{Sym}^n(\pi'_v)\otimes\chi_v$ 目前尚不知道属于 $\mathfrak{A}_{3(n+1)}$ 除非 $n\in\{0,1\}$。然而，由引理3.3 可知，若$\sim v\notin S_\pi^\infty\cup S_{\pi'}^\infty\cup S_\chi^\infty$，则 v次欧拉因子 $\mathcal{D}(s)$ 为 $L(s,\Pi_v\otimes\Pi_v)$，且满足

$$-\frac{L'}{L}(s,\Pi_v\otimes\widetilde{\Pi}_v) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{|\overline{a_{\mathrm{Sym}^m(\pi)}(v^\ell)}+a_{A^2(\pi)}(v^\ell)a_{\mathrm{Sym}^n(\pi')\otimes\chi}(v^\ell)+a_{\mathrm{Sym}^n(\pi')\otimes\chi}(v^\ell)|^2\log q_v}{q_v^{\ell s}}.$$

由此可知，对于这样的 v，$-(\mathcal{D}'/\mathcal{D})(s)$的第 v^ℓ个狄利克雷系数非负。

若 $m=2$ 和 $n=0$，则 $L(s,\mathrm{Sym}^m(\pi)\times(\mathrm{Sym}^n(\pi')\otimes\chi)) = L(s,\mathrm{Sym}^2(\pi)\otimes\chi)$，由命题 1.1(2) 可知它没有例外零点。否则，$\mathcal{D}(s)$ 的极点应当只来自 $L(s,\mathrm{Sym}^m(\pi)\times\mathrm{Sym}^m(\widetilde{\pi}))L(s,\mathrm{Sym}^n(\pi')\times\mathrm{Sym}^n(\widetilde{\pi}'))^2$。唯一可能引入另一个极点的因子具有如下形式：$L(s,\mathrm{Sym}^j(\pi)\times(\mathrm{Sym}^j(\pi')\otimes\xi))$，其中 $\xi\in\mathfrak{F}_1$；因此，只需证明当 $\pi\not\sim\pi'$时，这类 L-函数是整函数。仅凭 Rankin–Selberg 理论和模性方面的进展，目前尚不足以得出这一预期。然而，由于 π 和 π' 是正则代数的，若存在 $t_\xi\in\mathbb{R}$ 使得 $\xi|\cdot|^{it_\xi}$ 对应于F上的一个射线类特征，则可结合与 π 和 π' 相关联的 ℓ-进表示以及 Chebotarev 密度定理，证明不存在额外极点（引理 4.2]）。将范围限制在满足这一假设的 χ，并注意到

$$L(s,\mathrm{Sym}^m(\pi)\times(\mathrm{Sym}^n(\pi')\otimes\chi))^2L(s,\mathrm{Sym}^m(\widetilde{\pi})\times(\mathrm{Sym}^n(\widetilde{\pi}')\otimes\overline{\chi}))^2$$

是 $\mathcal{D}(s$的一个因子，因此我们看到，任何实零点 β属于 $L(s,\ \mathrm{Sym}^m(\pi)\times(\mathrm{Sym}^n(\pi')\otimes\chi))$ 都是 $\mathcal{D}(s)$ 的零点，且阶数至少为 4，因此根据命题5.1，排除了例外零点的存在。

5.2. **我们的方法**。 与 [34], 相比，我们必须应对两个重要的限制。首先，我们只能利用一般线性群$_1$对一般线性群$_2$ 的前四个对称幂的扭转，以及 Sym^{3}的对称平方提升所提供的信息。其次，关于一般线性群$_1$对 L形式为 $L(s,\ A^j(\pi)\times A^j(\pi'))$ 型函数的扭转可能出现的极点，我们掌握的信息仅限于引理 3.8。因此，我们必须构造辅助狄利克雷级数，比以往的研究更有效地利用现有信息。具体做法如下。为简化记号，本节将重点讨论定理 1.3(1a,1b,1c,2,3)。

引理 5.2。 设 $\chi \in \mathfrak{F}_1$。设 $\pi, \pi' \in \mathfrak{F}_2$ 为非二面体且扭曲不等价的。给定 $j, k \in \{0,1,2\}$ 和 $r \in \{0,1\}$，令 $c_{j,\ k,\ r} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。定义 $D(s)$ 为

$$\prod_{\substack{j,j' \in \{0,1,2\} \\ k,k' \in \{0,1,2\} \\ r,r' \in \{0,1\}}} \prod_{a=0}^{\min\{j,j'\}} \prod_{b=0}^{\min\{k,k'\}} L(s, A^{j+j'-2a}(\pi) \times (A^{k+k'-2b}(\pi') \otimes \overline{\omega}_{\pi}^{\mathbf{1}_{2|j}\mathbf{1}_{j'=1}} \overline{\omega}_{\pi'}^{\mathbf{1}_{2|k}\mathbf{1}_{k'=1}} \chi^{r-r'}))^{c_{j,k,r}c_{j',k',r'}}.$$

$D(s)$ 的解析导子的对数为 $O(\log(\mathfrak{C}_{\pi}\mathfrak{C}_{\pi'}\mathfrak{C}_{\chi}))$。此外，如果

$$\sum_{v \nmid \infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{a_D(v^{\ell}) \log q_v}{q_v^{\ell s}}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1$$

是 $-(D'/D)(s)$ 的狄利克雷级数展开，且 $v \notin S_{\pi}^{\infty} \cup S_{\pi'}^{\infty} \cup S_{\chi}^{\infty}$，那么 $a_D(v^{\ell}) \geq 0$。

证明。 第一个结论由引理 3.4 得出。对于赋值 $v \notin S_{\pi}^{\infty} \cup S_{\pi'}^{\infty} \cup S_{\chi}^{\infty}$，定义

$$\Pi_v = \bigoplus_{j=0}^{2} \bigoplus_{k=0}^{2} \bigoplus_{r=0}^{1} c_{j,k,r} A^j(\pi_v) \otimes A^k(\pi'_v) \otimes \chi_v^r. \tag{5.2}$$

另一方面，根据引理 3.3， $\Pi_v \otimes \Pi_v$ 分解为

$$\bigoplus_{\substack{j,j' \in \{0,1,2\} \\ k,k' \in \{0,1,2\} \\ r,r' \in \{0,1\}}} c_{j,k,r}c_{j',k',r'} (A^j(\pi_v) \otimes A^{j'}(\widetilde{\pi}_v)) \otimes (A^k(\pi'_v) \otimes A^{k'}(\widetilde{\pi}'_v)) \otimes \chi_v^{r-r'}$$

$$= \bigoplus_{\substack{j,j' \in \{0,1,2\} \\ k,k' \in \{0,1,2\} \\ r,r' \in \{0,1\}}} c_{j,k,r}c_{j',k',r'} \bigoplus_{a=0}^{\min\{j,j'\}} \bigoplus_{b=0}^{\min\{k,k'\}} A^{j+j'-2a}(\pi_v) \otimes A^{k+k'-2b}(\pi'_v) \otimes (\overline{\omega}_{\pi}^{\mathbf{1}_{2|j}\mathbf{1}_{j'=1}} \overline{\omega}_{\pi'}^{\mathbf{1}_{2|k}\mathbf{1}_{k'=1}} \chi^{r-r'})_v.$$

这表明 $\widetilde{\Pi}_v$ 的第 v 个欧拉因子是 $L(s,\ \Pi_v \otimes \Pi_v)$。另一方面，可以计算

$$-\frac{L'}{L}(s, \Pi_v \otimes \widetilde{\Pi}_v) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^{2} \sum_{k=0}^{2} \sum_{r=0}^{1} c_{j,k,r} a_{A^j(\pi)}(v^{\ell}) a_{A^k(\pi')}(v^{\ell}) a_{\chi}(v^{\ell})^r \right|^2 \frac{\log q_v}{q_v^{\ell s}}.$$

所需结果由此得出。 □

截至目前，若 Π_v 由 (5.2) 给出，则只有当满足 $j+k=4$ 的每个系数 $c_{j,\ k,\ r}$ 都等于零时，才知道 $\Pi = \bigotimes_v \Pi_v$ 是一个全局等斜自守表示。引理 5.2 是我们证明的核心，它表明 $D(s)$ 是一组 Rankin–Selberg L函数的乘积，即使存在满足 $j+k=4$的系数 $c_{j,\ k,\ r} \geq 1$，它仍满足命题 5.1 中的条件 (1)。因此，我们仍需找到合适的系数 $c_{j,\ k,\ r}$，使得 $D(s)$ 满足命题 5.1 的其余假设，从而排除定理 1.3(1a,1b,1c,2,3)中 L函数的例外零点。

我们还讨论以下情形：π 或 π' 是二面体表示，或 $\pi \sim \pi'$，或将 $\mathrm{Sym}^2(\pi')$ 替换为任意 $\pi_0 \in \mathfrak{F}_3$。这些情形需要大量分类讨论，我们借助命题 1.1、引理 3.2 和3.3以及定理3.7来处理。

消除三重乘积 L函数在定理1.3（1d、1e、1f）中的例外零点的方法，只是对上述策略进行了小幅修改。像我们在定理1.3（1a、1b、1c、2、3）中所做的那样给出统一处理，在记号上较为繁琐。

5.3. 证明组织。 设 m、n、$r \geq 1$ 为整数，$\chi \in \mathfrak{F}_1$、π、$\pi' \in \mathfrak{F}_2$以及 $\pi_0 \in \mathfrak{A}_3$。如果 $L(s, A^m(\pi) \times (A^n(\pi') \otimes \chi))$ 属于

（1）扭曲不等价的一般情形，若 $\pi \not\sim \pi'$，且 $A^m(\pi)$ 和 $A^n(\pi')$ 均为尖点；

(2) 扭曲不等价的约化情形，若 $\pi \not\sim \pi'$，且 $A^m(\pi)$ 或 $A^n(\pi')$ 是非尖点；(3) 扭曲等价情形，若 $\pi \sim \pi'$。

我们称 $L(s, A^m(\pi) \times A^n(\pi') \times (\pi_0 \otimes \chi))$ 处于

(1) 扭曲不等价的一般情形 若 $\pi \not\sim \pi'$, $A^m(\pi) \not\sim \pi_0$, $A^n(\pi') \not\sim \pi_0$，且 $A^m(\pi)$ 和 $A^n(\pi')$ 和 π_0 均为尖点；(2) 扭曲不等价的约化情形 若 $\pi \not\sim \pi'$, $A^m(\pi) \not\sim \pi_0$, $A^n(\pi') \not\sim \pi_0$，且 $A^m(\pi)$ 或 $A^n(\pi')$ 或 π_0 是非尖点；(3) 扭曲等价情形 若 $\pi \sim \pi'$, $A^m(\pi) \sim \pi_0$，或 $A^n(\pi') \sim \pi_0$。

通常，我们首先假设所考虑的每个 L-函数都属于扭曲不等价的一般情形，并据此展开论证。随后处理扭曲不等价的约化情形，最后处理扭曲等价情形。

6. Proof of Theorem 1.3(1a)

设 $\pi \in \mathfrak{F}_2$ 和 $\pi_0 \in \mathfrak{F}_3$。本节将证明以下结果。

定理 6.1。 若 $\pi \in \mathfrak{F}_2$ 和 $\pi_0 \in \mathfrak{F}_3$，则 $L(s, A^2(\pi) \times \pi_0)$ 的任何例外零点都是某个自对偶阿贝尔因子的零点。除非 $\pi_0 \sim A^2(\pi)$，否则不存在这样的因子。

定理 *1.3(1a)* 的证明。 在定理 6.1中，将 π_0 替换为 $\pi_0 \otimes \omega_\pi$。 □

6.1。 **扭曲不等价的一般情形。** 假设 π 是非二面体的，且 $\pi_0 \not\sim A^2(\pi)$。由引理 3.2(2) 可得 $A^2(\pi) \in \mathfrak{F}_3$。

6.1.1. π_0 非自对偶。 由于 $A^2(\pi) \in \mathfrak{F}_3$ 是自对偶的，由命题 1.1(8) 可知，若 π_0不是自对偶的，则 $L(s, A^2(\pi) \times \pi_0)$ 没有例外零点。

6.1.2. π_0 自对偶。 若 π_0 是自对偶的，则由引理 3.9，存在 $\chi \in \mathfrak{F}_1$ 满足 $\chi^2 = \mathbb{1}$，以及一个非二面体 $\pi' \in \mathfrak{F}_2$ 使得 $\pi_0 = A^2(\pi') \otimes \chi$。现在定义

$$
\begin{aligned}
D_1(s) &= \zeta_F(s)^6 \cdot L(s, A^4(\pi) \times A^4(\pi')),\\
D_2(s) &= L(s, A^2(\pi))^7 \cdot L(s, A^4(\pi))^5 \cdot L(s, A^2(\pi'))^2 \cdot L(s, A^4(\pi'))^2 \cdot L(s, A^2(\pi') \otimes \chi)^4\\
&\quad \cdot L(s, A^4(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi))^4 \cdot L(s, A^2(\pi) \times A^4(\pi'))^3 \cdot L(s, A^2(\pi) \times A^2(\pi'))^3 \cdot\\
&\quad \cdot L(s, A^4(\pi) \times A^2(\pi')),\\
D(s) &= L(s, A^2(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi))^8 \cdot D_1(s) \cdot D_2(s).
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

引理 5.2 中的 $D(s)$ 与式 (6.1) 中的 $D(s)$ 相对应，其中 $c_{2,0,0} = 2$, $c_{0,2,1} = c_{2,2,1} = 1$，其余的 $c_{j,k,r}$ 均为零。我们的假设 $\pi_0 \not\sim A^2(\pi)$ 意味着 $\pi \not\sim \pi'$。因此，由引理 3.8 可知，$D_2(s)$ 是整函数，而 $D_1(s)$ 在 $s = 1$ 处有一个阶数至少为 6 的极点。关于该极点的阶数，我们讨论以下两种情形。

情形 *6.1.2a*：以下至少有一个 π 和 π' 是非四面体的。 在此情形下，引理3.8 指出$L(s, A^4(\pi) \times A^4(\pi'))$（分别为 $D_1(s)$）的极点阶数至多为简单极点（分别为至多七阶极点）

在 $s = 1$ 处。因此，根据命题 5.1 将其应用于 (6.1) 中的 $D(s)$、$\ell_1 = 8$、$\ell_2 = 0$ 和 $k \leq 7$，$L(s, A^2(\pi) \times \pi_0) = L(s, A^2(\pi) \times A^2(\pi') \otimes \chi)$ 没有例外零点。

情形 *6.1.2b*：π 和 π' 是四面体的。根据引理 3.8(2)，$L(s, A^4(\pi) \times A^4(\pi'))$ 在$s = 1$ 处有一个阶数至多为 4 的极点。根据引理 3.2(3a)，若 π 相对于 μ是四面体的，则

$$L(s, A^4(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi)) = L(s, A^2(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi)) \cdot L(s, A^2(\pi') \otimes \chi\mu) \cdot L(s, A^2(\pi') \otimes \chi\mu^2).$$

将此分解代入（6.1），我们得出，若 $D_3(s)$ 等于

$$L(s, A^2(\pi))^7 \cdot L(s, A^4(\pi))^5 \cdot L(s, A^2(\pi'))^2 \cdot L(s, A^4(\pi'))^2 \cdot L(s, A^2(\pi') \otimes \chi)^4 \cdot L(s, A^2(\pi') \otimes \chi\mu)^4$$
$$\cdot L(s, A^2(\pi') \otimes \chi\mu^2)^4 \cdot L(s, A^2(\pi) \times A^4(\pi'))^3 \cdot L(s, A^2(\pi) \times A^2(\pi'))^3 \cdot L(s, A^4(\pi) \times A^2(\pi'))$$

那么 $D(s)$ 在（6.1) 中可分解为

$$D(s) = L(s, A^2(\pi) \times A^2(\pi') \otimes \chi)^{12} \cdot D_1(s) \cdot D_3(s). \tag{6.2}$$

根据引理 3.8，$D_3(s)$ 是整函数，而 $D_1(s)$ 在 $s = 1$ 处有一个阶数至多为 10 的极点。在此情形下，由命题 5.1 应用于（6.2）中的$D(s)$，可知 $L(s, A^2(\pi) \times \pi_0) = L(s, A^2(\pi) \times A^2(\pi') \otimes \chi)$ 没有例外零点，其中 $\ell_1 = 12$、$\ell_2 = 0$ 和 $k \leq 10$。

6.2. **扭曲不等价的约化情形**。在本小节中，我们继续假设$\pi_0 \not\sim A^2(\pi)$，但现在假设 π 根据（η，ξ，K）是二面体的。由引理3.2(2)可得

$$L(s, A^2(\pi) \times \pi_0) = L(s, I_K^F(\xi\xi'^{-1}) \times \pi_0) \cdot L(s, \pi_0 \otimes \eta),$$

它根据命题没有例外零点1.1(2,6)。

6.3. **扭曲等价情形**。在本小节中，我们假设存在 $\chi \in \mathfrak{F}_1$ 使得$\pi_0 = A^2(\pi) \otimes \chi$。由引理3.3，可得

$$L(s, A^2(\pi) \times \pi_0) = L(s, A^2(\pi) \times (A^2(\pi) \otimes \chi)) = L(s, A^4(\pi) \otimes \chi) \cdot L(s, A^2(\pi) \otimes \chi) \cdot L(s, \chi).$$

因此，$L(s, A^2(\pi) \times \pi_0)$的任何例外零点都是某个自对偶阿贝尔因子的零点，由命题1.1(1,2)和定理1.5可知。

7. Proof of Theorem 1.3(1b)

设 π，$\pi' \in \mathfrak{F}_2$，其中 π' 是非二面体的，且 $\pi \not\sim \pi'$。设 $\chi \in \mathfrak{F}_1$。本节将证明以下结果。

定理 7.1. 设 $\pi, \pi' \in \mathfrak{F}_2$ 和 $\chi \in \mathfrak{F}_1$。若 π' 是非二面体的且 $\pi \not\sim \pi'$，则 $L(s, A^3(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi))$ 没有例外零点。

注 7.2. 若 $\pi \sim \pi'$，或者 $\pi \not\sim \pi'$ 但 π' 是二面体的，则 $L(s, \mathrm{Sym}^3(\pi) \times (\mathrm{Sym}^2(\pi') \otimes \chi))$ 将含有一个因子，它是 $L(s, A^3(\pi))$ 或 $L(s, \pi, \mathrm{Sym}^5)$ 的一般线性群$_1$-扭曲。引理 3.10 在此适用。除命题 1.2 的情形外，目前尚不清楚 $L(s, \pi, \mathrm{Sym}^5 \otimes \psi)$ 是否在形如 $[1 - c_9/\log(\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{C}_\psi), \infty)$ 的实区间上全纯。

定理 *1.3(1b)* 的证明。在定理7.1中，将 χ替换为 $\chi\omega_\pi\omega_{\pi'}$。 □

7.1. **扭曲不等价的一般情形**。假设 $A^3(\pi)$ 和 $A^2(\pi')$ 是尖点的，因此 $A^3(\pi) \otimes \chi$ 是尖点的。我们分别处理 $A^3(\pi) \otimes \chi$ 是自对偶和非自对偶的情形。

7.1.1. $A^3(\pi) \otimes \chi$ 是非自对偶的。由 $A^2(\pi')$ 的尖点性和自对偶性可知，$L(s, A^3(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi))$ 没有例外零点，根据命题 1.1(8)。

7.1.2. $A^3(\pi)\otimes\chi$ 是自对偶的。 在这种情况下，我们定义

$$
\begin{aligned}
D_6(s) &= \zeta_F(s)^6\cdot L(s,A^4(\pi)\times A^4(\pi')),\\
D_7(s) &= L(s,\pi\otimes\chi)^2\cdot L(s,\widetilde{\pi}\otimes\overline{\chi})^2\cdot L(s,A^2(\pi))^6\cdot L(s,A^3(\pi)\otimes\chi)^4\cdot L(s,A^4(\pi))^2\\
&\quad\cdot L(s,A^2(\pi'))^7\cdot L(s,A^4(\pi'))^5\cdot L(s,\pi\times(A^2(\pi')\otimes\chi))^4\cdot L(s,\widetilde{\pi}\times(A^2(\pi')\otimes\overline{\chi}))^4\\
&\quad\cdot L(s,\pi\times(A^4(\pi')\otimes\chi))^2\cdot L(s,\widetilde{\pi}\times(A^4(\pi')\otimes\overline{\chi}))^2\cdot L(s,A^2(\pi)\times A^2(\pi'))^7\\
&\quad\cdot L(s,A^2(\pi)\times A^4(\pi'))^5\cdot L(s,A^3(\pi)\times(A^4(\pi')\otimes\chi))^4\cdot L(s,A^4(\pi)\times A^2(\pi'))^3,\\
D(s) &= L(s,A^3(\pi)\times(A^2(\pi')\otimes\chi))^8\cdot D_6(s)\cdot D_7(s).
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

(7.1) 中的 $D(s)$ 与引理 5.2 中的 $D(s)$ 相符，其中 $c_{2,0,0}=1$, $c_{1,2,1}=2$, $c_{2,2,0}=1$，其他情况下为 $c_{j,k,r}=0$。由引理 3.8，$D_7(s)$ 是整函数，而 $L(s,A^4(\pi)\times A^4(\pi'))$（分别为 $D_6(s)$）在 $s=1$ 处至多有一个简单极点（分别至多有七阶极点）。因此，将命题 5.1 应用于 (7.1) 中的 $D(s)$，取 $\ell_1=8,\ell_2=0$ 和 $k\le 7$，可知 $L(s,A^3(\pi)\times(A^2(\pi')\otimes\chi))$ 没有例外零点。

7.2. **扭曲不等价的约化情形**。 我们继续假设 $\pi\not\sim\pi'$，但现在还假设 $A^3(\pi)$ 不是尖点的。这引出了另外两种情形。

7.2.1. π 是二面体的。根据引理 3.2(2)，$L(s,A^3(\pi)\times(A^2(\pi')\otimes\chi))$ 分解为形如 $L(s,\nu\times A^2(\pi')\otimes\chi)$ 的 L-函数之积，其中 $\nu\in\mathfrak{F}_2$ 是二面体的。对每个因子应用命题 1.1(6)，我们得出 $L(s,A^3(\pi)\times(A^2(\pi')\otimes\chi))$ 没有例外零点。

7.2.2. π是四面体的，由 μ。 根据引理 3.2(3a)， $L(s,\ A^3(\pi)\times A^2(\pi')\otimes\chi)$ 分解为 as

$$L(s,A^3(\pi)\times(A^2(\pi')\otimes\chi))=L(s,\pi\times(A^2(\pi')\otimes\chi\mu))\cdot L(s,\pi\times(A^2(\pi')\otimes\chi\mu^2)).$$

由于 $\pi\not\sim\pi'$，定理 3.7(3) 蕴含 $A^2(\pi)\not\sim A^2(\pi')$。因此， $L(s,\ A^3(\pi)\times A^2(\pi')\otimes\chi)$没有例外零点，由命题 1.1(6) 得出。

8. Proof of Theorem 1.3(1c)

设 π， $\pi'\in\mathfrak{F}_2$。本节将证明以下结果。

定理 8.1. 设 π， $\pi'\in\mathfrak{F}_2$。

(1) 若 $\pi\not\sim\pi'$，则 $L(s,A^4(\pi)\times\pi')$ 的任何例外零点都是某个自对偶阿贝尔因子的零点。当 π' 为非二面体时，不存在这样的因子。*(2)* 若 $\pi\sim\pi'$ 且 π 为可解多面体型，则 $L(s,A^4(\pi)\times\pi')$ 的任何例外零点都是某个自对偶阿贝尔因子的零点

备注 8.2。 若 π， $\pi'\in\mathfrak{F}_2$, $\psi\in\mathfrak{F}_1$ 满足 $\pi'=\pi\otimes\psi$，且 π 不是可解多面体型，则

$$L(s,A^4(\pi)\times\pi')=L(s,\pi,\mathrm{Sym}^5\otimes\overline{\omega}_\pi^2\psi)L(s,A^3(\pi)\otimes\psi),\qquad \mathrm{Re}(s)>1.$$

这引出了备注7.2中所述的困难。

定理 *1.3(1c)* 的证明。 在定理 8.1中，将 π' 替换为 $\pi'\otimes\omega_\pi^2$。 □

8.1. **扭曲不等价的一般情形**。假设 $\pi\not\sim\pi'$ 和 $A^4(\pi)$ 是尖点的。

8.1.1. π' 是非自对偶的。 由于 $A^4(\pi)\in\mathfrak{F}_5$ 是自对偶的，因此由命题 1.1(8) 可知，若 π'是非自对偶的，则 $L(s,\ A^4(\pi)\times\pi')$ 没有 例外零点。

8.1.2. π' 是自对偶的。 我们分别处理 π' 是二面体和不是二面体的情形 .

情形 8.1.2a： π' 是二面体的。在这种情况下，存在一个非平凡二次 $\eta \in \mathfrak{F}_1$ 使得$\pi' = \pi' \otimes \eta$。注意，由于 $A^4(\pi)$的特征是平凡特征，而 $A^4(\pi) \otimes \eta$ 的中心特征为$\eta^5 = \eta$。由此可得 $A^4(\pi) \neq A^4(\pi) \otimes \eta$。由定理 1.7，我们得出 $L(s, A^4(\pi) \times \pi')$没有例外零点。

情形 *8.1.2b*： π' 是非二面体的。 定义

$$\begin{aligned} D_4(s) &= \zeta_F(s)^6 \cdot L(s, A^4(\pi) \times A^4(\pi')) \\ D_5(s) &= L(s, A^2(\pi))^6 \cdot L(s, A^4(\pi))^6 \cdot L(s, \pi')^8 \cdot L(s, A^2(\pi'))^7 \cdot L(s, A^3(\pi'))^4 \cdot L(s, A^4(\pi')) \\ &\quad \cdot L(s, A^2(\pi) \times \pi')^8 L(s, A^2(\pi) \times A^2(\pi'))^7 L(s, A^2(\pi) \times A^3(\pi'))^4 L(s, A^4(\pi) \times A^2(\pi'))^7 \\ &\quad \cdot L(s, A^2(\pi) \times A^4(\pi')) L(s, A^4(\pi) \times A^3(\pi'))^4, \\ D(s) &= L(s, A^4(\pi) \times \pi')^8 \cdot D_4(s) \cdot D_5(s). \end{aligned} \tag{8.1}$$

由于假设 π' 是自对偶的，(8.1)中的 $D(s)$与引理 5.2 中的 $D(s)$相对应，其中$c_{2,1,0} = 2, c_{2,0,0} = c_{2,2,0} = 1$，其余的$c_j$、$k$、$r$均为零。由引理 3.8， $D_5(s)$是整函数，而$L(s, A^4(\pi) \times A^4(\pi'))$（分别地，$D_4(s)$）至多有一个简单极点（分别地，至多七阶极点）位于$s = 1$。因此，将 $L(s, A^4(\pi) \times \pi')$应用于(8.1)中的 $D(s)$，并取 $\ell_1 = 8$、 $\ell_2 = 0$和 $k \leq 7$，由命题 5.1 可知其没有例外零点。

8.2. **扭曲不等价的约化情形**。 我们继续假设 $\pi \not\sim \pi'$，但现在假设 $A^4(\pi)$ 不是尖点表示。这会引出三种情形。

8.2.1. π 是二面体的。由引理 3.2(2)， $L(s, A^4(\pi) \times \pi')$可分解为 π'的若干一般线性群$_1$或一般线性群$_2$扭转的 L-函数的乘积。因此，由命题 1.1(2,4)， $L(s, A^4(\pi) \times \pi')$的任何例外零点都是某个自对偶阿贝尔 L 因子的零点。此外，由命题 1.1(4)，如果 π' 是非二面体的，那么每个因子都没有例外零点。

8.2.2. π 由 μ可知是四面体的。 由引理 3.2(3a)， $L(s, A^4(\pi) \times \pi')$分解为

$$L(s, A^4(\pi) \times \pi') = L(s, A^2(\pi) \times \pi') \cdot L(s, \pi' \otimes \mu) \cdot L(s, \pi' \otimes \mu^2).$$

由命题 1.1(2)， $L(s, \pi' \otimes \mu)$ 和 $L(s, \pi' \otimes \mu^2)$ 没有例外零点。由定理 3.7(3)，根据我们的假设 $\pi \not\sim \pi'$，可得 $A^2(\pi) \not\sim A^2(\pi')$。因此，由命题 1.1(6)， $L(s, A^2(\pi) \times \pi')$ 没有例外零点。我们得出结论： $L(s, A^4(\pi) \times \pi')$ 没有例外零点。

8.2.3. π是八面体型的，由 η。 由引理 3.2(3b)，存在一个二面体 $\nu \in \mathfrak{F}_2$ 使得 t

$$L(s, A^4(\pi) \times \pi') = L(s, A^2(\pi) \times (\pi' \otimes \eta)) \cdot L(s, \nu \times \pi').$$

由命题 1.1(6)， $L(s, A^2(\pi) \times (\pi' \otimes \eta))$ 没有例外零点。由命题 1.1(4)， $L(s, \nu \times \pi')$ 的任何例外零点都是某个自对偶阿贝尔因子的零点；当 π' 是非二面体时，这类因子不存在。因此， $L(s, A^4(\pi) \times \pi')$ 的任何例外零点都是某个自对偶阿贝尔 L-因子的零点；当 π' 是非二面体时，则没有例外零点。

8.3. **扭曲等价情形**。 假设存在 $\mu \in \mathfrak{F}_1$ 使得 $\pi' = \pi \otimes \mu$，在这种情况下 $L(s, A^4(\pi) \times \pi') = L(s, A^4(\pi) \times (\pi \otimes \mu))$。这引出了三种情形。

8.3.1. π 是二面体的。 根据引理 3.2(2)， $L(s, A^4(\pi) \times (\pi \otimes \mu))$ 可分解为一般线性群$_m \times$ 一般线性群$_2$ Rankin–Selberg L-函数的乘积，其中 $1 \leq m \leq 2$。由命题 1.1(2,4) 分别应用于各因子可知，$(s, A^4(\pi) \times \pi')$ 的任何例外零点都是 自对偶阿贝尔因子的零点。

8.3.2. π 是四面体型。 根据引理 3.2(3a) 和引理 3.3， $L(s, A^4(\pi) \times (\pi \otimes \mu))$ 可分解为若干 GL(2) L-函数的乘积。因此，根据命题 1.1(2)， $L(s, A^4(\pi) \times \pi')$ 不存在例外零点。

8.3.3. π由 η可知其为八面体型。 根据引理 3.2(3b)，存在一个二面体 $\nu \in \mathfrak{F}_2$ 使得 t

$$L(s, A^4(\pi) \times (\pi \otimes \mu)) = L(s, \pi \otimes \eta\mu) \cdot L(s, \nu \times (\pi \otimes \mu)) \cdot L(s, A^3(\pi) \otimes \eta\mu).$$

因子 $L(s,\pi\otimes\eta\mu)$ 根据命题 1.1(2) 不存在例外零点。由于 ν 是二面体型而 π 不是，根据命题 1.1(4)， $L(s,\nu\times(\pi\otimes\mu))$ 不存在例外零点。由 η 可知 π 是八面体型，因此由引理 3.2(3b) 可得 $A^3(\pi)\otimes\eta\mu = A^3(\pi)\otimes\mu$。因此，根据命题 1.1(3)， $L(s,A^3(\pi)\otimes\eta\mu)$ 不存在例外零点。总之， $L(s,A^4(\pi)\times\pi')$ 不存在例外零点。

9. Proof of Theorem 1.3(1d)

设 $\pi,\pi',\pi''\in\mathfrak{F}_2$，并假设 $\pi\not\sim\pi''$。本节将证明以下结果。

定理 9.1. 若 $\pi,\pi',\pi''\in\mathfrak{F}_2$ *and* $\pi\not\sim\pi''$，则 $L(s,\pi\times\pi'\times\pi'')$ 的任何例外零点都是某个自对偶阿贝尔因子的零点。当 π,π',π'' 均为非二面体时，不存在这样的因子。

注 9.2. (1) 根据 Ramakrishnan [27], 的研究，我们可以将 $L(s,\pi\times\pi'\times\pi'')$ 视为一个可能可分解的 $\mathrm{GL}_2\times\mathrm{GL}_4$ Rankin–Selberg L-函数。(2) 若 $\pi\sim\pi'\sim\pi''$，则存在 $\psi\in\mathfrak{F}_1$ 使得 $L(s,\pi\times\pi'\times\pi'') = L(s,\pi\otimes\psi)^2L(s,A^3(\pi)\otimes\psi)$，此时我们会遇到注 7.2 中所述的困难。

定理 *1.3(1d)* 的证明。 必要条件包含在定理 9.1中。 □

9.1. **扭曲不等价的非二面体情形**。 假设 π， π'， π''均为非二面体且两两扭曲不等价。由定理 3.7，存在表示 $\pi\boxtimes\pi'$， $\pi'\boxtimes\pi''\in\mathfrak{F}_4$ 和$A^2(\pi)\boxtimes\widetilde{\pi}''\in\mathfrak{F}_6$ 使得

$$L(s,\pi\boxtimes\pi') = L(s,\pi\times\pi'),\quad L(s,\pi'\boxtimes\pi'') = L(s,\pi'\times\pi''),\quad L(s,A^2(\pi)\boxtimes\widetilde{\pi}'') = L(s,A^2(\pi)\times\widetilde{\pi}'').$$

定义等压和 $\Pi := (\pi\boxtimes\pi')\boxplus\widetilde{\pi}''\boxplus(A^2(\pi)\boxtimes\widetilde{\pi}'')\in\mathfrak{A}_{12}$ 和

$$\begin{aligned} D_8(s) &= \zeta_F(s)^3,\\ D_9(s) &= L(s,A^2(\pi))^4\cdot L(s,A^4(\pi))\cdot L(s,A^2(\pi'))\cdot L(s,A^2(\pi''))^2\\ &\quad\cdot L(s,A^2(\pi)\times A^2(\pi'))\cdot L(s,A^2(\pi)\times A^2(\pi''))^3\cdot L(s,A^4(\pi)\times A^2(\pi''))\\ &\quad\cdot L(s,A^3(\pi)\times(\pi'\boxtimes\pi''))\cdot L(s,A^3(\widetilde{\pi})\times(\widetilde{\pi}'\boxtimes\widetilde{\pi}'')),\\ D(s) &= L(s,\pi\times\pi'\times\pi'')^2\cdot L(s,\widetilde{\pi}\times\widetilde{\pi}'\times\widetilde{\pi}'')^2\cdot D_8(s)\cdot D_9(s). \end{aligned} \tag{9.1}$$

由引理 3.4， $D(s)$ 的解析导子的对数为 $O(\log(\mathfrak{C}_\pi\mathfrak{C}_{\pi'}\mathfrak{C}_{\pi''}))$。由引理 3.3~和定理 3.7，可得 $D(s) = L(s,\Pi\times\Pi)$。 Π 的每个尖点成分的秩都不同。因此， $D(s)$ 在 $s=1$ 处有一个三阶极点（来自 $D_8(s)$），而 $L(s,\pi\times\pi'\times\pi'')$、$L(s,\widetilde{\pi}\times\widetilde{\pi}'\times\widetilde{\pi}'')$ 和 $D_9(s)$ 均为整函数。由命题 5.1 应用于 (9.1) 中的 $D(s)$，并取 $\ell_1=\ell_2=2$ 和 $k=3$，我们得出 $L(s,\pi\times\pi'\times\pi'')$ 没有例外零点。

9.2. **扭曲等价的非二面体情形**。 我们继续假设 π、 π'、 π''均为非二面体。 不失一般性，我们可以假设存在 $\chi\in\mathfrak{F}_1$ 使得 $\pi' = \pi\otimes\chi$，在这种情况下

$$L(s,\pi\times\pi'\times\pi'') = L(s,A^2(\pi)\times(\pi''\otimes\omega_\pi\chi))\cdot L(s,\pi''\otimes\omega_\pi\chi).$$

由于 π、 π'' 均为非二面体，且 $\pi\not\sim\pi''$，由定理 3.7(3) 可知 $A^2(\pi)\not\sim A^2(\pi'')$。因此，对第一个因子应用命题 1.1(6)，对第二个因子应用命题 1.1(2)，可得 $L(s,\pi\times\pi'\times\pi'')$ 没有 例外零点。

9.3. **二面体情形**。 不妨设 π'' 由 $(\eta,\ \xi,\ K)$ 给出，为二面体情形，此时 $\pi'' = I_K^F(\xi)$。记 π_K（分别记 π'_K）为 π（分别为 π'）到 K 的基变换。这些是 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K)$ 的（可能是非尖点的）自守表示。由此可得

$$L(s, \pi \times \pi' \times \pi'') = L(s, \pi_K \times (\pi'_K \otimes \xi)),$$

它可分解为若干一般线性群$_m$ × 一般线性群$_n$ L-函数的乘积，其中 K，且 $m,\ n \leq 2$。对这些因子分别应用命题 1.1(2,4)，我们得出结论： $L(s,\ \pi \times \pi' \times \pi'')$ 的任何例外零点都是一个自对偶阿贝尔因子的零点。

10. Proof of Theorem 1.3(1e)

设 $(\pi,\ \pi',\ \pi_0) \in \mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{F}_3$。假设 $\pi_0 \not\simeq A^2(\pi)$ 且 $\pi_0 \not\simeq A^2(\pi')$。本节证明以下结果。

定理 10.1。 设 $(\pi, \pi', \pi_0) \in \mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{F}_2 \times \mathfrak{F}_3$。若 $\pi_0 \not\simeq A^2(\pi)$ 且 $\pi_0 \not\simeq A^2(\pi')$，则 $L(s, \pi \times \pi' \times \pi_0)$没有例外零点。

备注 10.2. 根据 Kim 和 Shahidi 的工作 [18],，我们可以将 $L(s, \pi \times \pi' \times \pi_0)$ 视为 $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_6$ 的 Rankin–Selberg L-函数。若存在 $\psi \in \mathfrak{F}_1$ 使得 $\pi_0 = A^2(\pi) \otimes \psi$，那么

$$L(s, \pi \times \pi' \times \pi_0) = L(s, A^3(\pi) \times (\pi' \otimes \psi)) \cdot L(s, \pi \times (\pi' \otimes \psi)),$$

且定理 12.1 （下文）适用。

证明 定理 *1.3*（*1e*）。其假设是定理 10.1 中假设的特例。 □

10.1. **扭曲不等价的非二面体情形**。 假设 π, π' 是非二面体且 $\pi \not\simeq \pi'$。由于根据假设 $\pi_0 \not\simeq A^2(\pi)$ 和 $\pi_0 \not\simeq A^2(\pi')$，定理 3.7 保证表示$\pi \boxtimes \pi_0$, $\pi' \boxtimes \pi_0$ 和 $A^2(\pi) \boxtimes \widetilde{\pi}'$ 全都属于 $\mathfrak{F}_6$。因此我们可以定义等压和

$$\Pi := (\pi \boxtimes \pi_0) \boxplus \widetilde{\pi}' \boxplus (A^2(\pi) \boxtimes \widetilde{\pi}') \in \mathfrak{A}_{14}$$

以及

$$\begin{aligned} D_{10}(s) &= \zeta_F(s)^2 \cdot L(s, (\pi \boxtimes \pi_0) \times (\widetilde{\pi} \boxtimes \widetilde{\pi}_0)), \\ D_{11}(s) &= L(s, A^2(\pi))^3 \cdot L(s, A^4(\pi)) \cdot L(s, A^2(\pi'))^2 \cdot L(s, A^2(\pi) \times A^2(\pi'))^3 \\ &\quad \cdot L(s, A^4(\pi) \times A^2(\pi')) \cdot L(s, A^3(\pi) \times (\pi' \boxtimes \pi_0)) \cdot L(s, A^3(\widetilde{\pi}) \times (\widetilde{\pi}' \boxtimes \widetilde{\pi}_0)), \\ D(s) &= L(s, \pi \times \pi' \times \pi_0)^2 \cdot L(s, \widetilde{\pi} \times \widetilde{\pi}' \times \widetilde{\pi}_0)^2 \cdot D_{10}(s) \cdot D_{11}(s). \end{aligned} \tag{10.1}$$

由引理 3.4， $D(s)$ 的解析导子的对数为 $O(\log(\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{C}_{\pi'} \mathfrak{C}_{\pi_0}))$。由引理 3.3 和定理 3.7， $D(s) = L(s, \Pi \times \widetilde{\Pi})$。由于 $\pi \boxtimes \pi_0$， $A^2(\pi) \boxtimes \widetilde{\pi}' \in \mathfrak{F}_6$，因此 $D_{10}(s)$ 在 $s = 1$ 处有一个三阶极点。由于 $\pi' \boxtimes \pi_0 \in \mathfrak{F}_6$， L-函数 $L(s, A^3(\pi) \times (\pi' \boxtimes \pi_0))$（因此 $D_{11}(s)$）是整函数。因此，将命题 5.1 应用于 (10.1) 中的 $D(s)$，并取 $\ell_1 = \ell_2 = 2$ 和 $k = 3$，可知 $L(s, \pi \times \pi' \times \pi_0)$ 没有例外零点。

10.2. **扭曲等价的非二面体情形**。我们继续假设 π， π' 是非二面体，且满足 $\pi_0 \not\simeq A^2(\pi)$，但现在假设存在 $\chi \in \mathfrak{F}_1$ 使得 $\pi' = \pi \otimes \chi$，在这种情况下

$$L(s, \pi \times \pi' \times \pi_0) = L(s, A^2(\pi) \times (\pi_0 \otimes \omega_\pi \chi)) \cdot L(s, \pi_0 \otimes \omega_\pi \chi).$$

将定理 6.1 应用于第一个因子，并将命题 1.1(2) 应用于第二个因子，我们得出 $L(s,\ \pi \times \pi' \times \pi_0)$ 没有例外零点。

10.3. 二面体情形。 假设 π 由（η, ξ, K）定义为二面体，此时 $\pi = I_K^F(\xi)$。若 π'_K（分别地，$(\pi_0)_K$）是将 π（分别地，π_0）从 F 基变换到 K所得，则

$$L(s, \pi \times \pi' \times \pi_0) = L(s, \pi'_K \times ((\pi_0)_K \otimes \xi)).$$

设 $\theta = \theta_{K/F}$ 为 $\mathrm{Gal}(K/F)$ 中的非平凡元素，并令 $\xi^\theta = \xi \circ \theta$。由于 η 是一个二次特征，我们得出 $\pi_0 \neq \pi_0 \otimes \eta$。因此，根据 [27, 命题 2.3.1(5)] (该命题总结了 [1]中的结果），$(\pi_0)_K$ 是尖点的。接下来只需考虑以下三种情况。

10.3.1. π'_K 是非尖点的。 这里，基变换π'_K 是 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_K)$ 上的非尖点等压自守表示。因此，它是 K 上的两个幂等类特征的等压和。我们已知 $(\pi_0)_K$是 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{A}_K)$ 上的尖点自守表示，因此 $L(s, \pi'_K \times (\pi_0)_K \otimes \xi$分解为由 GL L的尖点自守表示的 $_3(\mathbb{A}_K)$ 上的 L 函数的乘积，根据命题 1.1(2)，其没有例外零点。

10.3.2. π'_K 是尖点的 点，且 $\pi'_K \otimes \xi \neq \pi'_K \otimes \xi^\theta$。 根据 [27, 定理 M]， $\pi \boxtimes \pi'$ 是尖点的。注意 t

$$(\pi \boxtimes \pi') \otimes \eta = (\pi \otimes \eta) \boxtimes \pi' = \pi \boxtimes \pi' \qquad \text{and} \qquad \pi_0 \neq \pi_0 \otimes \eta.$$

因此， $L(s, \pi \times \pi' \times \pi_0)$ 根据定理 1.7没有例外零点。

10.3.3. π'_K 是尖点的，且 $\pi'_K \otimes \xi = \pi'_K \otimes \xi^\theta$。 在此情形下，我们有恒等式 $\pi'_K = \pi'_K \otimes \xi^\theta \xi^{-1}$。若$M$ 是由类域论中二次特征 $\xi^\theta \xi^{-1}$ 所对应的 K 的二次扩张，则存在一个定义在 M 上的幂等类特征 ψ，使得 $\pi'_K = I_M^K(\psi)$。由此可得

$$L(s, \pi'_K \times ((\pi_0)_K \otimes \xi)) = L(s, ((\pi_0)_K \otimes \xi)_M \otimes \psi).$$

根据 [27, 命题 2.3.1(5)], 这是一个 L-函数，它来自一般线性群 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{A}_M)$ 上的尖点自守表示。因此， $L(s, \pi \times \pi' \times \pi_0)$ 根据命题 1.1 (2) 没有例外零点。

11. Proof of Theorem 1.3(1f)

令 π, π', $\pi'' \in \mathfrak{F}_2$，并假设 $\pi \not\sim \pi'$。本节将证明以下结果。

定理 11.1。 若 $\pi, \pi', \pi'' \in \mathfrak{F}_2$和 $\pi \not\sim \pi'$，则 $L(s, \pi \times A^2(\pi') \times A^2(\pi''))$的任意例外零点都是某个自对偶阿贝尔因子的零点。当 π 和 π' 均为非二面体时，不存在这样的因子。

注 11.2。 若存在 $\chi \in \mathfrak{F}_1$ 使得 $\pi' = \pi \otimes \chi$，则

$$L(s, \pi \times A^2(\pi') \times A^2(\pi'')) = L(s, \pi \times A^2(\pi''))L(s, A^3(\pi) \times A^2(\pi'')).$$

第一个因子由引理 3.10讨论。第二个因子由定理 7.1及其后的注记讨论。

定理 *1.3(1f)* 的证明。 在定理 11.1中，将 π 替换为 $\pi \otimes \omega_{\pi'} \omega_{\pi''}$。 □

11.1. 扭曲不等价的一般情形。 假设 π, π', π''两两扭曲不等价，并假设 π' 和 π'' 均为非二面体。我们讨论以下三种情形。

11.1.1. π 是非二面体的，而 π' 或 π'' 是非四面体的。由此可得 π, π', π'' 均为非二面体且两两扭曲不等价。现在，我们将第5.2节中所述的方法加以推广，关键是利用定理3.7 来确保 $\pi \boxtimes A^2(\pi')$ $\pi \boxtimes A^2(\pi'')$ $\in \mathfrak{F}_6$。定义

$$\begin{aligned}
D_{12}(s) &= \zeta_F(s)^6 \cdot L(s, A^4(\pi') \times A^4(\pi'')),\\
D_{13}(s) &= L(s, A^2(\pi))^4 \cdot L(s, A^2(\pi'))^7 \cdot L(s, A^4(\pi'))^5 \cdot L(s, A^2(\pi''))^2 \cdot L(s, A^4(\pi''))^2\\
&\quad \cdot L(s, \pi \times A^2(\pi''))^2 \cdot L(s, \widetilde{\pi} \times A^2(\pi''))^2 \cdot L(s, A^2(\pi') \times A^2(\pi''))^3\\
&\quad \cdot L(s, A^2(\pi') \times A^4(\pi''))^3 \cdot L(s, A^2(\pi) \times A^2(\pi'))^4 \cdot L(s, A^2(\pi) \times A^4(\pi'))^4\\
&\quad \cdot L(s, A^4(\pi') \times A^2(\pi'')) \cdot L(s, (\pi \boxtimes A^2(\pi'')) \times A^4(\pi'))^2 \cdot L(s, (\widetilde{\pi} \boxtimes A^2(\pi'')) \times A^4(\pi'))^2,\\
D(s) &= L(s, (\pi \boxtimes A^2(\pi')) \times A^2(\pi''))^4 \cdot L(s, (\widetilde{\pi} \boxtimes A^2(\pi')) \times A^2(\pi''))^4 \cdot D_{12}(s) \cdot D_{13}(s).
\end{aligned} \tag{11.1}$$

由引理3.4， $D(s)$ 的对数解析导子为 $O(\log(\mathfrak{C}_\pi \mathfrak{C}_{\pi'} \mathfrak{C}_{\pi''}))$.

引理 11.3. 设 $D(s)$ 如 (11.1)所示，并设 $a_D(v^\ell)\log q_v$ 为 v^ℓ 的第$-(D'/D)(s)$个狄利克雷系数。若 $v \notin S_\pi^\infty \cup S_{\pi'}^\infty \cup S_{\pi''}^\infty$，则 $a_D(v^\ell) \geq 0$。

证明。 设 $v \notin S_\pi^\infty \cup S_{\pi'}^\infty \cup S_{\pi''}^\infty$，并定义 $\Pi_v = 2\pi_v \otimes A^2(\pi_v') \oplus A^2(\pi_v'') \oplus A^2(\pi_v') \otimes A^2(\pi_v'')$。一方面，由引理 3.3和定理 3.7可知， v的第 $D(s)$ 个欧拉因子为 $L(s, \Pi_v \otimes \widetilde{\Pi}_v)$。另一方面，计算可得

$$-\frac{L'}{L}(s, \Pi_v \otimes \widetilde{\Pi}_v) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{|2a_\pi(v^\ell)a_{A^2(\pi')}(v^\ell) + a_{A^2(\pi'')}(v^\ell) + a_{A^2(\pi')}(v^\ell)a_{A^2(\pi'')}(v^\ell)|^2 \log q_v}{q_v^{\ell s}}.$$

所需结果随即得到。 □

由于 $A^4(\pi') \in \mathfrak{A}_5$ 和 $\pi \boxtimes A^2(\pi'') \in \mathfrak{F}_6$， $L(s, (\pi \boxtimes A^2(\pi'')) \times A^4(\pi'))$ 是整函数。由引理 3.8， $D_{13}(s)$ 的所有其他因子都是整函数，因此 $D_{13}(s)$ 是整函数。此外，根据引理 3.8(3,4) 以及 π'、 π'' 不同时为四面体的假设， $L(s, A^4(\pi') \times A^4(\pi''))$（分别为 $D_{12}(s)$）在 $s = 1$ 处至多有一个简单极点（分别至多有七阶极点）。因此，由命题 5.1 应用于 (11.1) 中的 $D(s)$，并取 $\ell_1 = \ell_2 = 4$ 和 $k \leq 7$， $L(s, (\pi \boxtimes A^2(\pi')) \times A^2(\pi''))$ 没有例外零点。

11.1.2. π 是非二面体的， π' 且 π'' 是四面体的。若 π' 由 μ 判定为四面体的，则引理 3.2(3a) 蕴含

$$L(s, (\pi \boxtimes A^2(\pi'')) \times A^4(\pi')) = L(s, (\pi \boxtimes A^2(\pi')) \times A^2(\pi'')) \cdot L(s, \pi \times (A^2(\pi'') \otimes \mu)) \cdot L(s, \pi \times (A^2(\pi'') \otimes \mu^2)).$$

利用这一分解，我们可知，若

$$\begin{aligned} D_{14}(s) = {} & L(s, A^2(\pi))^4 \cdot L(s, A^2(\pi'))^7 \cdot L(s, A^4(\pi'))^5 \cdot L(s, A^2(\pi''))^2 \cdot L(s, A^4(\pi''))^2 \\ & \cdot L(s, \pi \times A^2(\pi''))^2 \cdot L(s, \widetilde{\pi} \times A^2(\pi''))^2 \cdot L(s, A^2(\pi') \times A^2(\pi''))^3 \\ & \cdot L(s, A^2(\pi') \times A^4(\pi''))^3 \cdot L(s, A^2(\pi) \times A^2(\pi'))^4 \cdot L(s, A^2(\pi) \times A^4(\pi'))^4 \\ & \cdot L(s, A^4(\pi') \times A^2(\pi'')) \cdot L(s, \pi \times (A^2(\pi'') \otimes \mu))^2 \cdot L(s, \pi \times (A^2(\pi'') \otimes \mu^2))^2 \\ & \cdot L(s, \widetilde{\pi} \times (A^2(\pi'') \otimes \overline{\mu}))^2 \cdot L(s, \widetilde{\pi} \times (A^2(\pi'') \otimes \overline{\mu}^2))^2, \end{aligned}$$

则 $D(s)$ 满足 (11.1) 中的条件

$$D(s) = L(s, \pi \times A^2(\pi') \times A^2(\pi''))^6 \cdot L(s, \widetilde{\pi} \times A^2(\pi') \times A^2(\pi''))^6 \cdot D_{12}(s) \cdot D_{14}(s). \tag{11.2}$$

由引理 3.8， $D_{14}(s)$ 是整函数，而 $L(s, A^4(\pi') \times A^4(\pi''))$（分别地， $D_{12}(s)$）在 $s = 1$ 处有阶数至多为 4（分别地，至多为 10）的极点。因此，将命题 5.1 应用于 (11.2) 中的 $D(s)$，其中 $\ell_1 = \ell_2 = 6$ 和 $k \leq 10$，可知 $L(s, \pi \times A^2(\pi') \times A^2(\pi''))$ 没有例外零点。

11.1.3. π 是二面体的。现在假设 π 由 (η、 ξ、 K) 判定为二面体的。这引出了两种情形。情形 *11.1.3a*： $\pi \boxtimes A^2(\pi')$ 是尖点的。在这种情形下，我们有

$$(\pi \boxtimes A^2(\pi')) \otimes \eta = (\pi \otimes \eta) \boxtimes A^2(\pi') = \pi \boxtimes A^2(\pi').$$

由于 η是一个非平凡的二次特征，我们还有 $A^2(\pi'') \neq A^2(\pi'') \otimes \eta$。因此，根据定理 1.7， $L(s, \pi \times A^2(\pi') \times A^2(\pi''))$ 没有例外零点。

情形 *11.1.3b*： $\pi \boxtimes A^2(\pi')$ 不是尖点。 根据 [30, 定理 9。1], 存在 χ_1， $\chi_2 \in \mathfrak{F}_1$ 使得$\pi \boxtimes A^2(\pi') = A^2(\pi') \otimes \chi_1 \boxplus A^2(\pi') \otimes \chi_2$。由此可得

$$L(s, (\pi \boxtimes A^2(\pi')) \times A^2(\pi'')) = L(s, A^2(\pi') \times (A^2(\pi'') \otimes \chi_1)) \cdot L(s, A^2(\pi') \times (A^2(\pi'') \otimes \chi_2)).$$

对每个因子应用定理 6.1 ，我们得出 $L(s, (\pi \boxtimes A^2(\pi')) \times A^2(\pi''))$ 没有 例外零点。

11.2. 扭曲不等价的约化情形。 假设 π、π'、π'' 两两扭曲不等价，且 π' 和 π'' 中至少有一个是二面体。不失一般性，根据（η、ξ、K），我们假设 π' 是二面体。这引出了以下两种情形。

11.2.1. π'' 是非二面体的。由引理3.2(2)，我们得到恒等式

$$L(s,(\pi\boxtimes A^2(\pi'))\times A^2(\pi''))=L(s,(\pi\boxtimes A^2(\pi''))\times I_K^F(\xi\xi'^{-1}))\cdot L(s,\pi\times(A^2(\pi'')\otimes\eta)),$$

由于 π'' 是非二面体的，$A^2(\pi'')\in\mathfrak{F}_3$，而 $A^2(I_K^F(\xi\xi'^{-1}))$ 不是，因此 $A^2(\pi'')\not\sim A^2(I_K^F(\xi\xi'^{-1}))$。由假设，$\pi\not\sim\pi''$，根据定理 3.7(3) 可得 $A^2(\pi)\not\sim A^2(\pi'')$。将定理 10.1 应用于第一个因子，并将命题 1.1(6) 应用于第二个因子，我们得出$L(s,(\pi\boxtimes A^2(\pi'))\times A^2(\pi''))$ 没有例外零点。

11.2.2. π'' 是二面体的。由引理 3.2(2) 可知，存在非平凡二次特征 η'，$\eta''\in\mathfrak{F}_1$ 以及二面体 ν'，$\nu''\in\mathfrak{F}_2$ 使得

$$L(s,(\pi\boxtimes A^2(\pi'))\times A^2(\pi''))=L(s,(\pi\boxtimes\nu')\times\nu'')\cdot L(s,\pi\times(\nu'\otimes\eta''))\cdot L(s,\pi\times(\nu''\otimes\eta'))\cdot L(s,\pi\otimes\eta'\eta'')$$

对第一个因子应用定理 9.1，对其余因子应用命题 1.1(2,4)，我们得出，$L(s,(\pi\boxtimes A^2(\pi'))\times A^2(\pi''))$ 的任何例外零点都是一个自对偶阿贝尔 因子的零点。

11.3. 扭曲等价情形。 假设 π、π'、π'' 中恰有两个彼此扭曲等价。不失一般性，这引出两种情形。

11.3.1. $\pi\not\sim\pi'$ 和 $\pi'\sim\pi''$。在这种情形下，我们有 $A^2(\pi')=A^2(\pi'')$，而引理 3.3 推出

$$L(s,\pi\times A^2(\pi')\times A^2(\pi''))=L(s,\pi)\cdot L(s,\pi\times A^2(\pi'))\cdot L(s,\pi\times A^4(\pi')).$$

对第一因子应用命题 1.1(2)，对第二因子应用命题 1.1(6)，并对第三因子应用定理 8.1，我们得出：的任何例外零点 $L(s,\pi\times A^2(\pi')\times A^2(\pi''))$ 都是某个自对偶阿贝尔因子的零点。此外，若 π 和 π' 均为非二面体，则不存在例外零点。

11.3.2. $\pi\not\sim\pi'$ 和 $\pi\sim\pi''$。这里，我们有 $A^2(\pi'')=A^2(\pi)$，因此引理 3.3 推出

$$L(s,\pi\times A^2(\pi')\times A^2(\pi''))=L(s,\pi\times A^2(\pi'))\cdot L(s,A^3(\pi)\times A^2(\pi')).$$

对第一因子应用命题 1.1(6)，并对第二因子应用定理 7.1，我们得出：的任何例外零点 $L(s,\pi\times A^2(\pi')\times A^2(\pi''))$ 都是某个自对偶阿贝尔因子的零点。特别地，若 π 和 π' 均为非二面体，则不存在例外零点。

12. Proof of Theorem 1.3(2)

设 $\pi,\pi'\in\mathfrak{F}_2$。本节证明以下结果。

定理 12.1. 设 $\pi,\pi'\in\mathfrak{F}_2$。若 $A^3(\pi)\neq A^3(\tilde{\pi}')$ 或 $\pi\sim\pi'$，则$L(s,A^3(\pi)\times\pi')$ 的任一例外零点都是某个自对偶阿贝尔因子的零点。若 $\pi\not\sim\pi'$，且 π,π' 中至少一个是非二面体的，则不存在这样的因子。

定理*1.3(2)* 的证明。在定理12.1中，将 π' 替换为 $\pi'\otimes\omega_\pi$。 □

12.1. **定理 t 不同的通常情形。** 假设 $\pi \not\sim \pi'$ 和 $A^3(\pi) \in \mathfrak{F}_4$。定义

$$\begin{aligned} D_{15}(s) &= \zeta_F(s)^9 \cdot L(s, A^3(\pi) \times A^3(\pi'))^4 \cdot L(s, A^3(\widetilde{\pi}) \times A^3(\widetilde{\pi}'))^4 \cdot L(s, A^4(\pi')) \\ D_{16}(s) &= L(s, \pi \times \pi')^6 \cdot L(s, \widetilde{\pi} \times \widetilde{\pi}')^6 \cdot L(s, \pi \times A^3(\pi'))^4 \cdot L(s, \widetilde{\pi} \times A^3(\widetilde{\pi}'))^4 \\ &\quad \cdot L(s, A^2(\pi'))^9 \cdot L(s, A^2(\pi) \times A^2(\pi'))^4 \cdot L(s, A^4(\pi))^4 \cdot L(s, A^4(\pi) \times A^2(\pi'))^4 \\ &\quad \cdot L(s, A^2(\pi))^9 \cdot L(s, A^2(\pi) \times A^2(\pi'))^5 \cdot L(s, A^2(\pi) \times A^4(\pi')), \\ D(s) &= L(s, A^3(\pi) \times \pi')^6 \cdot L(s, A^3(\widetilde{\pi}) \times \widetilde{\pi}')^6 \cdot D_{15}(s) \cdot D_{16}(s). \end{aligned} \tag{12.1}$$

(12.1) 中的 $D(s)$ 与引理 5.2 中的 $D(s)$ 相对应，其中 $c_{1,2,0} = 1$, $c_{1,0,0} = c_{2,1,0} = 2$，其他情况下为 $c_{j,k,r} = 0$。若 π' 是非二面体的，则应用引理 3.8 可知 $D_{16}(s)$ 是整函数，且 $L(s, A^4(\pi'))$ 是整函数。若 π' 是二面体的，则利用假设 $\pi \not\sim \pi'$ 和引理 3.2(2) 可知 $D_{16}(s)$ 仍是整函数，而 $L(s, A^4(\pi'))$ 在 $s = 1$ 处至多有一个二阶极点。无论哪种情况，若 $A^3(\pi) \neq A^3(\widetilde{\pi}')$（即 $L(s, A^3(\pi) \times A^3(\pi'))$ 是整函数），则由命题 5.1 应用于 (12.1) 中的 $D(s)$，并结合 $\ell_1 = \ell_2 = 6$ 和 $k \leq 11$，可知 $L(s, A^3(\pi) \times \pi')$ 没有例外零点。

12.2. **扭曲不等价的约化情形。** 我们继续假设 $\pi \not\sim \pi'$，但现在假设 $A^3(\pi)$ 不是尖点。我们需要考虑两种情形。

12.2.1. π 是二面体。由引理 3.2(2)，存在二面体表示 $\nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{F}_2$，使得$L(s, A^3(\pi) \times \pi')$ 可分解为 $L(s, \nu_1 \times \pi') \cdot L(s, \nu_2 \times \pi')$。对每个因子应用命题 1.1(4)，我们得出结论：$L(s, A^3(\pi) \times \pi')$ 的任何例外零点都是某个自对偶阿贝尔因子的零点；当 π' 是非二面体时，则不存在例外零点。

12.2.2. π 由 μ可知是四面体。由引理 3.2(3a)，可得

$$L(s, A^3(\pi) \times \pi') = L(s, \pi \times (\pi' \otimes \mu)) \cdot L(s, \pi \times (\pi' \otimes \mu^2)).$$

由于 π是非二面体的，且 $\pi \not\sim \pi'$，由命题 1.1(4) 可知 $L(s, A^3(\pi) \times \pi')$ 没有例外零点。

12.3. **扭曲等价情形。** 若 $\psi \in \mathfrak{F}_1$ 满足 $\pi' = \pi \otimes \psi$，则

$$L(s, A^3(\pi) \times \pi') = L(s, A^3(\pi) \times (\pi \otimes \eta)) = L(s, A^4(\pi) \otimes \omega_\pi \psi) \cdot L(s, A^2(\pi) \otimes \omega_\pi \psi)$$

根据引理 3.3。由定理 1.5 应用于第一个因子，以及命题 1.1(2) 应用于第二个因子可知，$L(s, A^3(\pi) \times \pi')$ 的任何例外零点都是一个自对偶阿贝尔因子的零点。

13. Proof of Theorem 1.3(3)

令 $\chi \in \mathfrak{F}_1$，并令 π，$\pi' \in \mathfrak{F}_2$ 满足 $\pi \not\sim \pi'$。本节中，我们证明以下结果 .

定理 13.1。 令 $\pi, \pi' \in \mathfrak{F}_2$ 和 $\chi \in \mathfrak{F}_1$。假设 $\pi \not\sim \pi'$。若 $\chi^2 \neq \mathbb{1}$ 或 $A^4(\pi) \neq A^4(\pi')$，则 $L(s, A^4(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi))$ 的任何例外零点都是自对偶阿贝尔因子的零点。当 π' 是非二面体时，不存在这样的因子。

注记 13.2. 如果存在 $\psi \in \mathfrak{F}_1$ 使得 $\pi' = \pi \otimes \psi$，那么 $L(s, A^4(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi)) = L(s, A^4(\pi) \times (A^2(\pi) \otimes \chi))$。当 π 为可解多面体型时，根据引理 3.2，该式可分解，且任何例外零点都是某个自对偶阿贝尔因子的零点。如果 π 不是可解多面体型，则我们有如下分解

$$L(s, A^4(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi)) = L(s, A^2(\pi) \otimes \chi) \cdot L(s, A^4(\pi) \otimes \chi) \cdot L(s, \pi, \mathrm{Sym}^6 \otimes \chi \omega_\pi^3)$$

这与推论 3.6 有关。在命题 1.2 的语境之外，我们目前还无法排除 $L(s, \pi, \mathrm{Sym}^6 \otimes \chi \omega_\pi^3)$ 存在例外零点的可能性。

定理的证明 *1.3(3)*。 在定理13.1中，将 χ替换为 $\chi \omega_\pi^2 \omega_{\pi'}$。 □

13.1. 扭曲不等价的一般情形。 假设 $\pi \not\sim \pi'$, $A^2(\pi') \in \mathfrak{F}_3$, 且 $A^4(\pi) \in \mathfrak{F}_5$。由于 $A^4(\pi)$ 是自对偶的，我们分两种情形讨论。

13.1.1. $A^2(\pi') \otimes \chi$ 是非自对偶的。在这种情况下，$L(s, A^4(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi))$ 没有例外零点，由命题 1.1(8)。

13.1.2 。 $A^2(\pi') \otimes \chi$ 是自对偶的。$A^2(\pi')$ 和 $A^2(\pi')$ 的自对偶性 $\otimes \chi$ 意味着

$$A^2(\pi') \otimes \chi^2 = A^2(\pi'). \tag{13.1}$$

通过比较中心特征，我们得出 $\chi^6 = \mathbb{1}$。

情形 *13.1.2a*: $\chi = \mathbb{1}$。定义

$$\begin{aligned}
D_{17}(s) &= \zeta_F(s)^6 \cdot L(s, A^4(\pi) \times A^4(\pi')) \\
D_{18}(s) &= L(s, A^2(\pi))^6 \cdot L(s, A^4(\pi))^6 \cdot L(s, \pi')^4 \cdot L(s, \widetilde{\pi}')^4 \cdot L(s, A^2(\pi'))^7 \cdot L(s, A^3(\pi'))^2 \\
&\quad \cdot L(s, A^3(\widetilde{\pi}'))^2 \cdot L(s, A^4(\pi')) \cdot L(s, A^2(\pi) \times \pi')^4 \cdot L(s, A^2(\pi) \times \widetilde{\pi}')^4 \\
&\quad \cdot L(s, A^4(\pi) \times \pi')^4 \cdot L(s, A^4(\pi) \times \widetilde{\pi}')^4 \cdot L(s, A^2(\pi) \times A^2(\pi'))^7 \cdot L(s, A^2(\pi) \times A^4(\pi')) \\
&\quad \cdot L(s, A^4(\pi) \times A^3(\pi'))^2 \cdot L(s, A^4(\pi) \times A^3(\widetilde{\pi}'))^2 \\
&\quad \cdot L(s, A^2(\pi) \times A^3(\pi'))^2 \cdot L(s, A^2(\pi) \times A^3(\widetilde{\pi}'))^2, \\
D(s) &= L(s, A^4(\pi) \times A^2(\pi'))^7 \cdot D_{17}(s) \cdot D_{18}(s).
\end{aligned} \tag{13.2}$$

（13.2）中的 $D(s)$ 与引理 5.2 中的 $D(s)$ 相符，其中 $c_{2,1,0} = 2$, $c_{2,0,0} = c_{2,2,0} = 1$，且其余情况下为 $c_{j,k,r} = 0$。根据引理 3.8, $D_{18}(s)$ 是整函数。若 $A^4(\pi) \neq A^4(\pi')$（即 $L(s, A^4(\pi) \times A^4(\pi'))$ 是整函数），则 $D_{17}(s)$ 在 $s = 1$ 处有一个 6 阶极点。因此，由命题 5.1 应用于（13.2）中的 $D(s)$，并取 $\ell_1 = 7, \ell_2 = 0$ 和 $k = 6$，可知 $L(s, A^4(\pi) \times A^2(\pi'))$ 没有例外零点。

情形 *13.1.2b*: $\chi \neq \mathbb{1}$ 和 $\chi^2 = \mathbb{1}$。定义

$$\begin{aligned}
D_{19}(s) &= \zeta_F(s)^6 \cdot L(s, A^4(\pi) \times A^4(\pi'))^5 \cdot L(s, A^4(\pi) \times (A^4(\pi') \otimes \chi))^4, \\
D_{20}(s) &= L(s, \chi)^4 \cdot L(s, A^2(\pi))^6 \cdot L(s, A^2(\pi) \otimes \chi)^4 \cdot L(s, A^4(\pi))^6 \cdot L(s, A^4(\pi) \otimes \chi)^4 \\
&\quad \cdot L(s, A^2(\pi'))^7 \cdot L(s, A^2(\pi') \otimes \chi)^8 \cdot L(s, A^4(\pi'))^5 \cdot L(s, A^4(\pi') \otimes \chi)^4 \\
&\quad \cdot L(s, A^2(\pi) \times A^2(\pi'))^7 \cdot L(s, A^2(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi))^8 \cdot L(s, A^2(\pi) \times A^4(\pi'))^5 \\
&\quad \cdot L(s, A^2(\pi) \times (A^4(\pi') \otimes \chi))^4 \cdot L(s, A^4(\pi) \times A^2(\pi'))^7, \\
D(s) &= L(s, A^4(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi))^8 \cdot D_{19}(s) \cdot D_{20}(s).
\end{aligned} \tag{13.3}$$

(13.3) 中的 $D(s)$ 与引理 5.2 中的 $D(s)$ 相对应，其中 $c_{2,2,0} = 2$, $c_{2,0,1} = c_{2,2,1} = 1$，而 $c_{j,k,r} = 0$ 则相应地如此。由引理 3.8, $D_{20}(s)$ 是整函数。

$A^4(\pi)$ 和 $A^4(\pi') \otimes \chi$ 的中心特征分别为 1 和 $\chi^5 = \chi$。由于根据假设 $\chi \neq \mathbb{1}$，我们得出 $A^4(\pi) \neq A^4(\pi') \otimes \chi$，这意味着 $L(s, A^4(\pi) \times (A^4(\pi') \otimes \chi))$ 是整函数。因此，若 $A^4(\pi) \neq A^4(\pi')$，则 $L(s, A^4(\pi) \times A^4(\pi'))$ 是整函数，并且 $D_{19}(s)$ 在 $s = 1$ 处有一个 6 阶极点。将命题 5.1 应用于 (13.3) 中的 $D(s)$，取 $\ell_1 = 8, \ell_2 = 0$ 和 $k = 6$，我们得出 $L(s, A^4(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi))$ 没有例外零点。

情形 13.1.2c: $\chi^2 \neq \mathbb{1}, \chi^6 = \mathbb{1}$。将 (13.1) 两边同时按 χ 扭曲，我们得出 $A^2(\pi') \otimes \chi = (A^2(\pi') \otimes \chi) \otimes \chi^2$，其中 χ^2 非平凡。由于 $A^4(\pi)$ 和 $A^4(\pi) \otimes \chi^2$ 的中心特征分别为 1 和 χ^{10}，我们对 χ 的条件确保 $A^4(\pi) \neq A^4(\pi) \otimes \chi^2$。因此，$A^2(\pi') \otimes \chi$ 具有按 χ^2 的自扭曲，但 $A^4(\pi)$ 没有；在这种情况下，根据定理 1.7, $L(s, A^4(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi))$ 没有例外零点。

13.2. 扭曲不等价的约化情形。 我们继续假设 $\pi \not\sim \pi'$，但现在假设 $A^4(\pi)$ 或 $A^2(\pi')$ 是非尖点的。这引出四种情形。

13.2.1. π' 是二面体 由 (η, ξ, K)。 根据引理 3.2(2), $L(s, A^4(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi))$ 分解为

$$L(s, A^4(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi)) = L(s, A^4(\pi) \times (I_K^F(\xi\xi'^{-1}) \otimes \chi)) \cdot L(s, A^4(\pi) \otimes \eta\chi).$$

根据定理 1.5 和 8.1，右侧因子的任何例外零点都是一个 自对偶阿贝尔因子的零点。

13.2.2. π' 是非二面体， π 是二面体。根据引理 3.2(2), $L(s, A^4(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi))$ 可分解为以下形式的 L-函数的乘积： $L(s, A^2(\pi') \otimes \eta\chi)$ 或 $L(s, \nu \times (A^2(\pi') \otimes \chi))$，其中 $\nu \in \mathfrak{F}_2$ 是二面体，且 $\eta \in \mathfrak{F}_1$。根据命题 1.1(2,6)，每个因子都没有例外零点。

13.2.3. π' 不是 非二面体， π 根据 μ，是四面体的。根据引理 3.2(3a)，我们有如下分解

$$L(s, A^4(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi)) = L(s, A^2(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi)) \cdot L(s, A^2(\pi') \otimes \mu\chi) \cdot L(s, A^2(\pi') \otimes \mu^2\chi).$$

由于 $\pi \not\sim \pi'$，定理3.7(3)表明 $A^2(\pi') \not\sim A^2(\pi)$ 。将定理6.1 应用于第一个因子，并将命题 1.1(2)应用于其余因子，我们得出 $L(s, A^4(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi)$ 没有例外零点。

13.2.4. π' 是非二面体的， π 根据 η是八面体型的。由引理 3.2(3b)，存在一个二面体 $\nu \in \mathfrak{F}_2$，使得 $L(s, A^4(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi)) = L(s, A^2(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \eta\chi)) \cdot L(s, \nu \times (A^2(\pi') \otimes \chi))$。将定理 6.1应用于第一个因子，并将命题 1.1(6)应用于第二个因子，我们得出$L(s, A^4(\pi) \times (A^2(\pi') \otimes \chi))$没有例外零点。

References

[1] J. Arthur 和 L. Clozel。 *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, 《数学讲义》第 120 卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1989 年。[2] W. D. Banks。扭曲的对称平方 L 函数与 GL( ) 上 Siegel 零点的不存在性。, ( ): –。[3] F. Brumley。GL_n 上的有效重数一与 Rankin-Selberg L 函数的窄无零区域。*Amer. J. Math.*, 128(6): 1455–1474, 2006 年。[4] C. J. Bushnell 和 G. Henniart。成对导子的上界。 *J. Number Theory* 65 2 183 196, , ( ): –。[5] S. Gelbart 和 H. Jacquet。GL(2 3 *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 11 4 471 542, 1978) 与 GL( ) 的自守表示之间的关系。, ( ): –。[6] R. Godement 和 H. Jacquet。 *Zeta functions of simple algebras*。《数学讲义》, 第 260 卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1972 年。[7] G. Harcos 和 J. Thorner。Rankin-Selberg L 函数的新的无零区域。 *J. Reine Angew. Math.* 已接受发表。[8] G. Harcos 和 J. Thorner。Rankin-Selberg L 函数的 Tatuzawa 定理。 *arXiv e-prints*, 第 arXiv:2508.10844 页，2025 年 8 月。[9] J. Hoffstein 和 P. Lockhart。Maass 形式的系数与 Siegel 零点。 *Ann. of Math. (2)* 140 1 161 181, , ( ): –。附录由 Dorian Goldfeld、Hoffstein 和 Daniel Lieman 撰写。[10] J. Hoffstein 和 D. Ramakrishnan。Siegel 零点与尖点形式。 *Int. Math. Res. Not.*, (6): 279–308, 1995 年。[11] P. Humphries 和 F. Brumley。通过筛法理论得到 Rankin-Selberg L 函数的标准零点自由区域。, (-): –。 *Math. Z.* 292 3 4 1105 1122, 2019 [12] P. Humphries 和 J. Thorner。迈向 Hoheisel 现象的 GL_n 变体。 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 375 3 1801 1824, 2022 ( ): –。[13] H. Iwaniec 和 E. Kowalski。 *Analytic number theory* 53 *American Mathematical Society Colloquium Publications* *Analytic number theory* 53 *American Mathematical Society Colloquium Publications* *Analytic number theory* 53 *American Mathematical Society Colloquium Publications* *Analytic number theory* 53 *American Mathematical Society Colloquium* , 2004 卷, 2004 。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯, 2004 。[14] H. Jacquet、I. I. Piatetskii-Shapiro 和 J. A. Shalika。Rankin-Selberg 卷积。 *Amer. J. Math.*, 105(2): 367–464, 1983 年。[15] H. Jacquet 和 J. A. Shalika。GL_n *Invent. Math.* 38 1 1 16, 的 ζ 函数非消失定理。, ( ): –/。 1976 77 [16] H. H. Kim。GL_4 的外平方与 GL_2 的对称四次的函子性。 *J. Amer. Math. Soc.*, 16 1 139 183, 2003 1 2 ( ): –。附录由 Dinakar Ramakrishnan 撰写，另有 Kim 和 Peter Sarnak 撰写的附录。[17] H. H. Kim 和 F. Shahidi。对称幂的尖点性及其应用。 *Duke Math. J.* 112 1 177 197, , ( ): –。 2002

[18] H. H. Kim 和 F. Shahidi。GL $_2\times$ $_3$ $_2$ *Ann. of Math. (2)* 155 3 837 893, 2002
GL 的函子性乘积及 GL 上的对称立方。, ( ): –。附录由 Colin J. Bushnell 和 Guy Henniart 撰写。[19] E. Lapid。关于
$G\ F\ \backslash G\ \mathbb{A}$ *Automorphic representations and L-* ( ) ( ) 的 Harish-Chandra
functions 22 *Tata Inst. Fundam. Res. Stud. Math.* 335 377
Schwartz 空间。载于《 $G\ F\ \backslash G\ \mathbb{A}$ *Automorphic representations and L-*》,
functions 22 *Tata Inst. Fundam. Res. Stud. Math.* 335 377
$G\ F\ \backslash G\ \mathbb{A}$ *Automorphic representations and L-* 卷,
functions 22 *Tata Inst. Fundam. Res. Stud. Math.* 335 377
$G\ F\ \backslash G\ \mathbb{A}$ *Automorphic representations and L-*, 第 – 页。Tata 基础研究所, 孟
functions 22 *Tata Inst. Fundam. Res. Stud. Math.* 335 377
买, 2013 年。附录由 Farrell Brumley 撰写。[20] W. Luo。
$GL\ 2\ \times GL\ 3$ *Proc. Amer. Math.* ( ) ( ) 上尖点函子性乘积的 Siegel
Soc. 151 5 1915 1919, 2023
零点不存在性。, ( ): –。[21] W. Luo、Z. Rudnick 和 P. Sarnak。关于 GL(n) 上的广义拉马努金猜想。载于 *Automorphic forms,*
automorphic representations and arithmetic (Fort Worth, TX, 1996) 66 ,
automorphic representations and arithmetic (Fort Worth, TX, 1996) 66 ,
automorphic representations and arithmetic (Fort Worth, TX, 1996) 66 卷《 *Proc. Sympos. Pure Math.*》,
第 301–310 页。美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 1999 年。[22] C. Mœ glin 和 J.-L. Waldspurger。GL( ) 的剩余谱。
Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), ( ): –。[23] W. M
$_n$ *Geom.* uller 和 B. Speh。GL 上 Arthur
Funct. Anal. 14 1 58 93, 2004
迹公式谱侧的绝对收敛。, ( ): –。附录由 E. M. Lapid 撰写。[24] J. Newton 和 J. A. Thorne。希尔伯特模形式的对称幂函子性。 *Ann. of Math. (2)* 已接受发表。[25] J. Newton 和 J. A. Thorne。全纯模形式的对称幂函子性。 *Publ. Math. Inst.Hautes Études Sci.*, 134: 1–116, 2021 年。[26] J. Newton 和 J. A. Thorne。全纯模形式的对称幂函子性, II。 *Publ. Math.Inst. Hautes Études Sci.*, 134: 117–152, 2021 年。[27] D. Ramakrishnan。Rankin-Selberg L 级数的模性与 SL(2) 上的重数一。 *Ann. of Math. (2)*, 152 1 45 111, 2000 ( ): –。[28] D. Ramakrishnan。关于 GL(3) 上自对偶尖点形式的一道习题。 *Indian J. Pure Appl. Math.*, 45 5 777 785, 2014 ( ): –。[29] D. Ramakrishnan 和 S. Wang。Rankin-Selberg L 函数的例外零点。 *Compositio Math.*, 135 2 211( ): –244, 2003 年。[30] D. Ramakrishnan 和 S. Wang。GL(2) × GL(3) 上函子性乘积的尖点性判别准则及其上同调应用。 *Int. Math. Res. Not.*, (27): 1355–1394, 2004 年。[31] D. Ramakrishnan 和 L. Yang。GL(
n *Funct. Approx.*) 上尖点形式扭等价的一个约束。,
Comment. Math. 65 1 105 117, 2021
( ): –。[32] F. Shahidi。关于某些 L 函数。 *Amer. J. Math.*, 103(2): 297–355, 1981 年。[33] S. Takeda。关于某个元辛艾森斯坦级数与扭曲的对称平方 L 函数。 *Math. Z.*, 281 1 2 103(-): –157, 2015 年。[34] J. Thorner。Rankin–Selberg
L *Int. Math. Res.* 函数的例外零点与联合 Sato–
Not. IMRN 20 307, 2025
Tate 分布。, ( ): rnaf。[35] N. Wattanawanichkul。关于 L 函数无零区域的度量方法。 *arXiv e-prints*, 第 arXiv:2504.05606 页, 2025 年 4 月。

Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana, IL 61801, USA
Email address: jesse.thorner@gmail.com

Department of Mathematics, The Ohio State University, Columbus, OH 43210, USA
Email address: zhao.3326@buckeyemail.osu.edu