arXiv:2601.04228v1 [math.NT] 1 Jan 2026

非阿基米德布劳尔卡西尼卵形定理及其应用

K. Mahesh Krishna
数学与自然科学学院
Chanakya大学全球校区
NH-648，Haraluru村
德瓦纳哈利县，班加罗尔北区
卡纳塔克邦 ，562 110 ，印度
电子邮箱：kmaheshak@gmail.com

日期：2026年1月9日

摘要：Nica 和 Sprague [《美国数学月刊》， *2023*] 提出了格尔希戈林圆盘定理的非阿基米德版本。我们根据布劳尔 [《杜克数学杂志》， *1947*] 推导出卡西尼卵形线定理的非阿基米德版本，该定理推广了 Nica-Sprague 圆盘定理。我们给出了该结果在界定非阿基米德域上多项式的零点方面的应用。我们还证明，我们的结果等价于 Li 和 Li [《计算与应用数学杂志》， *2025*]推导出的奥斯特洛夫斯基非奇异性定理的非阿基米德版本。

关键词：特征值、圆盘、卵形线、非阿基米德赋值域。**数学主题分类（2020年）**：
15A18、15A42、12J25、26E30。

1. Introduction

设 $A=[a_{j,k}]_{1\leq j\leq n,\ 1\leq k\leq n}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。对于 $1\leq j\leq n$，定义

$$r_j(A):=\sum_{k=1,k\neq j}^{n}|a_{j,k}|.$$

对于 $1\leq k\leq n$，定义

$$c_k(A):=\sum_{j=1,j\neq k}^{n}|a_{j,k}|.$$

设 $\sigma(A)$ 为 A的所有特征值组成的集合。1931年，格尔什戈林证明了以下突破性结果，即著名的格尔希戈林圆/圆盘定理，该定理利用单行/单列来确定圆盘的半径。

定理 1.1。*[8, 9, 11, 20]*（格尔希戈林特征值包含定理 或格尔希戈林圆盘定理）对于$A=[a_{j,k}]_{1\leq j\leq n,\ 1\leq k\leq n}\in\mathbb{M}_n$（$\mathbb{C}$），

$$\sigma(A)\subseteq\bigcup_{j=1}^{n}\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{j,j}|\leq r_j(A)\}$$

and

$$\sigma(A)\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{k,k}|\leq c_k(A)\}.$$

定理 1.1 的一个显著应用是 Frobenius 的以下结果（该结果推进了 Browne 的成果）。

定理 1.2. *[4, 6, 13]* 设 $A = [a_{j,k}]_{1\leq j\leq n,\ 1\leq k\leq n} \in \mathbb{M}_n$（$\mathbb{C}$）。对于每个 $\lambda \in \sigma$（A），

$$|\lambda| \leq \min\left\{\max_{1\leq j\leq n}\sum_{k=1}^{n}|a_{j,k}|, \max_{1\leq k\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{j,k}|\right\} \leq \frac{1}{2}\left(\max_{1\leq j\leq n}\sum_{k=1}^{n}|a_{j,k}| + \max_{1\leq k\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{j,k}|\right).$$

特别地，

$$\begin{aligned}|det(A)| &\leq \min\left\{\left(\max_{1\leq j\leq n}\sum_{k=1}^{n}|a_{j,k}|\right)^n, \left(\max_{1\leq k\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{j,k}|\right)^n\right\}\\ &\leq \frac{1}{2}\left(\left(\max_{1\leq j\leq n}\sum_{k=1}^{n}|a_{j,k}|\right)^n + \left(\max_{1\leq k\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{j,k}|\right)^n\right).\end{aligned}$$

另一个值得注意的定理 1.1 应用是给出多项式的零点界。令$p(z)$:
$= c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + z^n \in \mathbb{C}[z]$。直接观察可知， p的零点就是 Frobenius 伴随矩阵的特征值

$$C_p := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_{n-3} & -c_{n-2} & -c_{n-1}\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$$

而且， C_p 的特征值与 p [2,3]的零点相同。1965年，Bell 利用定理 1.1 推导出了 p 的零点的以下界限。

定理 1.3。 *[1]*令 $p(z)$: $= c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + z^n \in \mathbb{C}[z]$。如果 λ 是 p的一个零点，则

$$|\lambda| \leq 1$$

or

$$|\lambda + c_{n-1}| \leq |c_0| + \cdots + |c_{n-2}|.$$

特别地，

(1) *(Lagrange bound)* $|\lambda| \leq \max\{1, |c_0| + \cdots + |c_{n-1}|\}$.

N请注意，不等式（1）是著名的 Montel 界的推广 [11]，该界指出 t

$$|\lambda| \leq 1 + |c_0| + \cdots + |c_{n-1}|.$$

有趣的是，不借助伴随矩阵 [10]也可以证明不等式（1）。

定理 1.4。 *[1]*设 $p(z)$: $= c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + z^n \in \mathbb{C}[z]$。若 λ 是 p的零点，则

$$|\lambda| \leq |c_0|$$

or

$$|\lambda| \leq 1 + |c_j|, \quad \textit{for some } 1 \leq j \leq n-2$$

or

$$|\lambda + c_{n-1}| \leq 1.$$

特别地，

(2) *(Bell bound)* $$|\lambda| \leq \max\{|c_0|, 1+|c_1|, \ldots, 1+|c_{n-1}|\}.$$

注意，不等式（2）是著名的柯西界 [14] 的推广，它指出

$$|\lambda| \leq 1 + \max\{|c_0|, \ldots, |c_{n-1}|\}.$$

设 $p(z) \coloneqq c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + z^n \in \mathbb{C}[z]$，其中 $c_0 \neq 0$。定义

$$q(z) \coloneqq \frac{1}{c_0} z^n p\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{c_0} + \frac{c_{n-1}}{c_0} z + \cdots + \frac{c_1}{c_0} z^{n-1} + z^n \in \mathbb{C}[z].$$

我们注意到 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 满足 $p(\lambda) = 0$ 当且仅当 $q(1/\lambda) = 0$。q 的 Frobenius 伴随矩阵为

$$C_q \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{c_0} & \frac{-c_{n-1}}{c_0} & \frac{-c_{n-2}}{c_0} & \cdots & \frac{-c_3}{c_0} & \frac{-c_2}{c_0} & \frac{-c_1}{c_0} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}).$$

现在，将前两个结果应用于多项式 q 并重新整理，可得以下结果。

定理 1.5。 *[1, 11]* 设 $p(z) \coloneqq c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + z^n \in \mathbb{C}[z]$ 且 $c_0 \neq 0$。如果 λ 是 p的一个零点，那么

$$\frac{1}{|\lambda|} \leq 1$$

or

$$\left|\frac{1}{\lambda} + \frac{c_1}{c_0}\right| \leq \frac{1}{|c_0|} + \frac{|c_2|}{|c_0|} + \cdots + \frac{|c_{n-1}|}{|c_0|}.$$

特别是，

$$\frac{1}{|\lambda|} \leq \max\left\{1, \frac{1}{|c_0|} + \frac{|c_1|}{|c_0|} + \frac{|c_2|}{|c_0|} + \cdots + \frac{|c_{n-1}|}{|c_0|}\right\} \leq 1 + \frac{1}{|c_0|} + \frac{|c_1|}{|c_0|} + \cdots + \frac{|c_{n-1}|}{|c_0|}$$

and

$$\begin{aligned} &\textit{(Lagrange lower bound)} && |\lambda| \geq \frac{|c_0|}{\max\{|c_0|, 1+|c_1|+\cdots+|c_{n-1}|\}} \\ &\textit{(Montel lower bound)} && \geq \frac{|c_0|}{1+|c_0|+|c_1|+\cdots+|c_{n-1}|}. \end{aligned}$$

定理 1.6. *[1, 11]* 设 $p(z) \coloneqq c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + z^n \in \mathbb{C}[z]$ 且 $c_0 \neq 0$。若 λ 是 p的零点，则

$$\frac{1}{|\lambda|} \leq \frac{1}{|c_0|}$$

or

$$\frac{1}{|\lambda|} \leq 1 + \frac{|c_j|}{|c_0|}, \quad \textit{for some } 2 \leq j \leq n-1$$

or

$$\left|\frac{1}{\lambda} + \frac{c_1}{c_0}\right| \leq 1.$$

特别是,

$$\frac{1}{|\lambda|} \leq \max\left\{\frac{1}{|c_0|}, 1 + \frac{|c_1|}{|c_0|}, \ldots, 1 + \frac{|c_{n-1}|}{|c_0|}\right\} \leq 1 + \max\left\{\frac{1}{|c_0|}, \frac{|c_1|}{|c_0|}, \ldots, \frac{|c_{n-1}|}{|c_0|}\right\}$$

and

$$\begin{aligned} &\textit{(Bell lower bound)} && |\lambda| \geq \frac{|c_0|}{\max\{1, |c_0| + |c_1|, \ldots, |c_0| + |c_{n-1}|\}} \\ &\textit{(Cauchy lower bound)} && \geq \frac{|c_0|}{|c_0| + \max\{1, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|\}}. \end{aligned}$$

一个比格尔什戈林早得多的结果如下。

定理 1.7。 *[11, 18–20] (*严格对角占优定理或 ***Levy-Desplanques*** 定理）若 $A = [a_{j,k}]_{1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 满足

$$|a_{j,j}| > r_j(A), \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

or

$$|a_{k,k}| > c_k(A), \quad \forall 1 \leq k \leq n,$$

则 A 可逆。

以下结果表明，定理 1.1 和 1.7 是等价的。

定理 1.8。 *[20]* 设 $n \in \mathbb{N}$。以下两个陈述等价。

(i) 令 $A = [a_{j,k}]_{1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq n} \in \mathbb{M}_n\ (\mathbb{C})$ 。则

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{j,j}| \leq r_j(A)\}.$$

(ii) 如果 $B = [b_{j,k}]_{1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq n} \in \mathbb{M}_n\ (\mathbb{C})$ 满足

$$|b_{j,j}| > r_j(B), \quad \forall 1 \leq j \leq n,$$

则 B 是可逆的。

定理 1.9。 *[20]* 令 $n \in \mathbb{N}$。以下两个陈述等价。

(i) 令 $A = [a_{j,k}]_{1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq n} \in \mathbb{M}_n\ (\mathbb{C})$ 。则

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{k,k}| \leq c_k(A)\}.$$

(ii) 如果 $B = [b_{j,k}]_{1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq n} \in \mathbb{M}_n\ (\mathbb{C})$ 满足

$$|b_{k,k}| > c_k(B), \quad \forall 1 \leq k \leq n,$$

那么 B 是可逆的。

1947年，布劳尔推导出了定理 1.1 的以下推广，称为布劳尔（卡西尼）椭圆定理，该定理使用两行/列来确定卵形线的半径。

定理 1.10. *[5,13,20]*(布劳尔特征值包含定理或布劳尔（卡西尼）椭圆定理) 对任意 $A=[a_{j,k}]_{1\leq j\leq n,\ 1\leq k\leq n}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\sigma(A)\subseteq\bigcup_{j,k=1,j\neq k}^{n}\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{j,j}||z-a_{k,k}|\leq r_j(A)r_k(A)\}$$

and

$$\sigma(A)\subseteq\bigcup_{j,k=1,j\neq k}^{n}\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{j,j}||z-a_{k,k}|\leq c_j(A)c_k(A)\}.$$

应用布劳尔定理，可得以下结果。

定理1.11. 设 $p(z):=c_0+c_1z+\cdots+c_{n-1}z^{n-1}+z^n\in\mathbb{C}[z]$。若 λ 是 p的零点，则

$$|\lambda|\leq 1$$

or

$$|\lambda||\lambda+c_{n-1}|\leq|c_0|+\cdots+|c_{n-2}|.$$

The理 1.12. 设 $p(z):=c_0+c_1z+\cdots+c_{n-1}z^{n-1}+z^n\in\mathbb{C}[z]$。若 λ是 p的零点，则 n

$$|\lambda|^2\leq|c_0|(1+|c_j|),\quad \textit{for some } 1\leq j\leq n-2$$

or

$$|\lambda||\lambda+c_{n-1}|\leq|c_0|$$

or

$$|\lambda|^2\leq(1+|c_j|)(1+|c_k|),\quad \textit{for some } 1\leq j,k\leq n-2, j\neq k$$

or

$$|\lambda||\lambda+c_{n-1}|\leq 1+|c_j|,\quad \textit{for some } 1\leq j\leq n-2.$$

众所周知，布劳尔定理无法通过考虑三行/列 [20] 来推广。1937年，奥斯特洛夫斯基从定理 1.7 推导出了以下推广结果。

定理 1.13。 *[17,20]* (奥斯特洛夫斯基非奇异性定理）若 $A=[a_{j,k}]_{1\leq j\leq n,\ 1\leq k\leq n}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$满足

$$|a_{j,j}||a_{k,k}|>r_j(A)r_k(A),\quad\forall 1\leq j,k\leq n, j\neq k$$

or

$$|a_{j,j}||a_{k,k}|>c_j(A)c_k(A),\quad\forall 1\leq j,k\leq n, j\neq k,$$

则 A 可逆。

众所周知，定理1.10和定理1.13仍然等价。

定理1.14。 *[20]* 设 $n\in\mathbb{N}$。以下两个陈述等价。

(i) 设 $A=[a_{j,k}]_{1\leq j\leq n,\ 1\leq k\leq n}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。那么

$$\sigma(A)\subseteq\bigcup_{j,k=1,j\neq k}^{n}\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{j,j}||z-a_{k,k}|\leq r_j(A)r_k(A)\}.$$

(ii) 如果 $B=[b_{j,k}]_{1\leq j\leq n,1\leq k\leq n}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 满足

$$|b_{j,j}||b_{k,k}|>r_j(B)r_k(B),\quad\forall 1\leq j,k\leq n,j\neq k,$$

那么 B 是可逆的。

定理 1.15. *[20]* 设 $n\in\mathbb{N}$。以下两个命题等价。

(i) 设 $A=[a_{j,k}]_{1\leq j\leq n,1\leq k\leq n}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$。那么

$$\sigma(A)\subseteq\bigcup_{j,k=1,j\neq k}^{n}\{z\in\mathbb{C}:|z-a_{j,j}||z-a_{k,k}|\leq c_j(A)c_k(A)\}.$$

(ii) 如果 $B=[b_{j,k}]_{1\leq j\leq n,1\leq k\leq n}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 满足

$$|b_{j,j}||b_{k,k}|>c_j(B)c_k(B),\quad\forall 1\leq j,k\leq n,j\neq k,$$

那么 B 可逆。

自然会想到，对于非阿基米德域上的矩阵，定理 1.1、1.2、1.7、1.10 和 1.13 的对应版本是什么？本文中，$\mathbb{K}$ 表示一个赋值为 $|\cdot|$的非阿基米德赋值域。令$A=[a_{j,k}]_{1\leq j\leq n,\ 1\leq k\leq n}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$。对于 $1\leq j\leq n$，定义

$$h_j(A):=\max_{1\leq k\leq n,k\neq j}|a_{j,k}|.$$

对于 $1\leq k\leq n$，定义

$$v_k(A):=\max_{1\leq j\leq n,j\neq k}|a_{j,k}|.$$

2023年，Nica a nd Sprague 推导出了定理 1.1 和 1.7 的以下非阿基米德类比。

定理 1.16。 *[16](*非阿基米德 ***Gershgorin*** 特征值包含定理或***Nica-Sprague*** 圆盘定理*)* 对每个 $A=[a_{j,k}]_{1\leq j\leq n,\ 1\leq k\leq n}\in\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\sigma(A)\subseteq\bigcup_{j=1}^{n}\{z\in\mathbb{K}:|z-a_{j,j}|\leq h_j(A)\}$$

and

$$\sigma(A)\subseteq\bigcup_{k=1}^{n}\{z\in\mathbb{K}:|z-a_{k,k}|\leq v_k(A)\}.$$

定理 1.17. *[16]*（非阿基米德严格对角占优定理或 ***Nica-Sprague*** 非奇异性定理）若 $A=[a_{j,k}]_{1\leq j\leq n,\ 1\leq k\leq n}\in\mathbb{M}_n$（$\mathbb{K}$）满足

$$|a_{j,j}|>h_j(A),\quad\forall 1\leq j\leq n$$

or

$$|a_{k,k}|>v_k(A),\quad\forall 1\leq k\leq n,$$

则 A 可逆。

Nica 和 Sprague 证明了定理 1.16 和定理 1.17 等价。

定理 1.18。 *[16]* 设 $n \in \mathbb{N}$。以下两个陈述等价。

（i）设 $A = [a_{j,k}]_{1\le j\le n,\ 1\le k\le n} \in \mathbb{M}_n$（$\mathbb{K}$）。则

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \{z \in \mathbb{K} : |z - a_{j,j}| \le h_j(A)\}.$$

（ii）如果 $B = [b_{j,k}]_{1\le j\le n,\ 1\le k\le n} \in \mathbb{M}_n$（$\mathbb{K}$）满足

$$|b_{j,j}| > h_j(B), \quad \forall 1 \le j \le n,$$

则 B 是可逆的。

定理 1.19。 *[16]* 设 $n \in \mathbb{N}$。以下两个命题等价。

（i）设 $A = [a_{j,k}]_{1\le j\le n,\ 1\le k\le n} \in \mathbb{M}_n$（$\mathbb{K}$）。则

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \{z \in \mathbb{K} : |z - a_{k,k}| \le v_k(A)\}.$$

（ii）如果 $B = [b_{j,k}]_{1\le j\le n,\ 1\le k\le n} \in \mathbb{M}_n$（$\mathbb{K}$）满足

$$|b_{k,k}| > v_k(B), \quad \forall 1 \le k \le n,$$

那么 B 是可逆的。

定理 1.2 的非阿基米德版本如下。

定理 1.20。设 $A = [a_{j,k}]_{1\le j\le n,\ 1\le k\le n} \in \mathbb{M}_n$（$\mathbb{K}$）。对于每个 $\lambda \in \sigma$（A），

$$|\lambda| \le \min\left\{ \max_{1\le j\le n} \max_{1\le k\le n} |a_{j,k}|, \max_{1\le k\le n} \max_{1\le j\le n} |a_{j,k}| \right\} \le \frac{1}{2}\left(\max_{1\le j\le n} \max_{1\le k\le n} |a_{j,k}| + \max_{1\le k\le n} \max_{1\le j\le n} |a_{j,k}| \right).$$

特别地，

$$\begin{aligned} |det(A)| &\le \min\left\{ \left(\max_{1\le j\le n} \max_{1\le k\le n} |a_{j,k}| \right)^n, \left(\max_{1\le k\le n} \max_{1\le j\le n} |a_{j,k}| \right)^n \right\} \\ &\le \frac{1}{2}\left(\left(\max_{1\le j\le n} \max_{1\le k\le n} |a_{j,k}| \right)^n + \left(\max_{1\le k\le n} \max_{1\le j\le n} |a_{j,k}| \right)^n \right). \end{aligned}$$

设 $p(z) := c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1} z^{n-1} + z^n \in \mathbb{K}[z]$。设

$$C_p := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_{n-3} & -c_{n-2} & -c_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$$

是 p的伴随矩阵。通过应用定理 1.16，Nica 和 Sprague 得到了以下结果。

定理 m 1.21. *[16]* 设 $p(z) := c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1} z^{n-1} + z^n \in \mathbb{K}[z]$。若 λ 是 p 的零点，则 n

$$|\lambda| \le 1$$

or

$$|\lambda + c_{n-1}| \le \max\{|c_0|, |c_1|, \ldots, |c_{n-2}|\}.$$

特别是，

$$\textit{(Nica-Sprague bound)} \qquad |\lambda| \leq \max\{1, |c_0|, |c_1|, \ldots, |c_{n-1}|\}.$$

定理 1.22。 *[16]* 设 $p(z) := c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + z^n \in \mathbb{K}[z]$。若 λ 是 p的一个零点，则

$$|\lambda| \leq |c_o|$$

or

$$|\lambda| \leq \max\{1, |c_j|\}, \quad \textit{for some } 1 \leq j \leq n-2$$

or

$$|\lambda + c_{n-1}| \leq 1.$$

特别地，

(3) $$\textit{(Nica-Sprague bound)} \qquad |\lambda| \leq \max\{1, |c_0|, |c_1|, \ldots, |c_{n-1}|\}.$$

定理 1.23。 *[16]* 设 $p(z) := c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + z^n \in \mathbb{K}[z]$，且 $c_0 \neq 0$。若 λ 是 p的一个零点，则

$$\frac{1}{|\lambda|} \leq 1$$

or

$$\left|\frac{1}{\lambda} + \frac{c_1}{c_0}\right| \leq \max\left\{\frac{1}{|c_0|}, \frac{|c_2|}{|c_0|}, \ldots, \frac{|c_{n-1}|}{|c_0|}\right\}.$$

特别地，

$$\textit{(Nica-Sprague lower bound)} \qquad |\lambda| \geq \frac{|c_0|}{\max\{1, |c_0|, |c_1|, \ldots, |c_{n-1}|\}}.$$

定理 1.24。 *[16]* 设 $p(z) := c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + z^n \in \mathbb{K}[z]$，且 $c_0 \neq 0$。若 λ 是 p的一个零点，则

$$\frac{1}{|\lambda|} \leq \frac{1}{|c_0|}$$

or

$$\frac{1}{|\lambda|} \leq \max\left\{1, \frac{|c_j|}{|c_0|}\right\}, \quad \textit{for some } 2 \leq j \leq n-1$$

or

$$\left|\frac{1}{\lambda} + \frac{c_1}{c_0}\right| \leq 1.$$

尤其是，

$$\textit{(Nica-Sprague lower bound)} \qquad |\lambda| \geq \frac{|c_0|}{\max\{1, |c_0|, |c_1|, \ldots, |c_{n-1}|\}}.$$

在继续之前，我们给出不等式（3）的一种不同且直接的证明。令 $p(z) := c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + z^n \in \mathbb{K}[z]$，且 λ 是 p 的一个零点。若 $|\lambda| \leq 1$，则显然有不等式（3）。因此我们假设 $|\lambda| > 1$。由于 $p(\lambda) = 0$，我们有

$$\left(\frac{c_0}{\lambda^n} + \frac{c_1}{\lambda^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{\lambda} + 1\right)\lambda^n = 0.$$

由于 $\lambda \neq 0$,

$$\frac{c_0}{\lambda^n} + \frac{c_1}{\lambda^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{\lambda} + 1 = 0.$$

整理得,

$$-1 = \frac{c_0}{\lambda^n} + \frac{c_1}{\lambda^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{\lambda}.$$

取绝对值并注意到 $|\lambda| > 1$，可得

$$\begin{aligned} 1 &\leq \left| \frac{c_0}{\lambda^n} + \frac{c_1}{\lambda^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{\lambda} \right| \leq \max\left\{ \frac{|c_0|}{|\lambda|^n}, \frac{|c_1|}{|\lambda|^{n-1}}, \ldots, \frac{|c_{n-1}|}{|\lambda|} \right\} \\ &\leq \max\left\{ \frac{|c_0|}{|\lambda|}, \frac{|c_1|}{|\lambda|}, \ldots, \frac{|c_{n-1}|}{|\lambda|} \right\} = \frac{1}{|\lambda|} \max\{|c_0|, |c_1|, \ldots, |c_{n-1}|\}. \end{aligned}$$

整理上述不等式，即完成证明。

2025年，Li 和 Li 推导出了定理 1.13 的以下非阿基米德类比 .

定理 1.25。 *[12]* （非阿基米德奥斯特洛夫斯基非奇异性定理或***Li-Li*** 非奇异性定理）如果 $A = [a_{j,k}]_{1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq n} \in \mathbb{M}_n$（$\mathbb{K}$）满足

$$|a_{j,j}||a_{k,k}| > h_j(A)h_k(A), \quad \forall 1 \leq j, k \leq n, j \neq k$$

or

$$|a_{j,j}||a_{k,k}| > v_j(A)v_k(A), \quad \forall 1 \leq j, k \leq n, j \neq k,$$

则 A 可逆。

在本文中，我们推导出定理 1.10 的非阿基米德版本。我们还证明了我们的结果等价于定理 1.25。我们给出了用于界定非阿基米德域上多项式的零点的应用。

2. Non-Archimedean Brauer Oval (of Cassini) Theorem

我们从非阿基米德布劳尔特征值包含定理开始。我们的证明受到布劳尔 [5]证明的启发。

定理 2.1。 （非阿基米德布劳尔卡西尼卵形定理）对于 $A = [a_{j,k}]_{1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq n} \in \mathbb{M}_n$（$\mathbb{K}$），

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{j,k=1, j \neq k}^{n} \{z \in \mathbb{K} : |z - a_{j,j}||z - a_{k,k}| \leq h_j(A)h_k(A)\}$$

and

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{j,k=1, j \neq k}^{n} \{z \in \mathbb{K} : |z - a_{j,j}||z - a_{k,k}| \leq v_j(A)v_k(A)\}.$$

证明。 令 $\lambda \in \sigma(A)$。则存在一个 $0 \neq \mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{K}^n$ 使得

$$\lambda \mathbf{x} = A\mathbf{x}. \tag{4}$$

选择 $1 \leq j \leq n$，使得

$$|x_j| = \max_{1 \leq l \leq n} |x_l|.$$

现在选择 $1 \leq k \leq n$, 并使 $k \neq j$ 满足

$$|x_k| = \max_{1 \leq l \leq n, l \neq j} |x_l|.$$

于是我们有 $1 \leq j,\ k \leq n$ 其中 $j \neq k$ 且

$$|x_j| \geq |x_k| \geq \max_{1 \leq l \leq n, l \neq j, l \neq k} |x_l|. \tag{5}$$

我们分两种情形。情形 (i): $|x_k| = 0$。考虑方程（4）中的第 j 个坐标，得到

$$\lambda x_j = \sum_{p=1}^{n} a_{j,p} x_p.$$

重写前一个方程，得到

$$(\lambda - a_{j,j}) x_j = \sum_{p=1, p \neq j}^{n} a_{j,p} x_p.$$

因此，利用 (5) 可得

$$\begin{aligned} |(\lambda - a_{j,j}) x_j| &= \left| \sum_{p=1, p \neq j}^{n} a_{j,p} x_p \right| \leq \max_{1 \leq p \leq n, p \neq j} |a_{j,p} x_p| \\ &\leq \left(\max_{1 \leq p \leq n, p \neq j} |a_{j,p}| \right) \left(\max_{1 \leq p \leq n, p \neq j} |x_p| \right) = \left(\max_{1 \leq p \leq n, p \neq j} |a_{j,p}| \right) |x_k| \\ &= 0. \end{aligned}$$

由于对于所有 $1 \leq k \leq n,\ |x_k| = 0$ 和 $\mathbf{x} \neq 0$，都有 $|x_j| \geq |x_k|$, 因此必有 $|x_j| \neq 0$。于是前一个不等式给出 $|\lambda - a_{j,\ j}| = 0$。所以

$$\lambda = a_{j,j} \in \bigcup_{p,q=1, p \neq q}^{n} \{z \in \mathbb{K} : |z - a_{p,p}||z - a_{q,q}| \leq h_p(A) h_q(A)\}.$$

情形 (ii): $|x_k| > 0$。考虑方程（4）中的第 j 个和第 k 个坐标，得到

$$(\lambda - a_{j,j}) x_j = \sum_{p=1, p \neq j}^{n} a_{j,p} x_p \tag{6}$$

and

$$(\lambda - a_{k,k}) x_k = \sum_{q=1, q \neq k}^{n} a_{k,q} x_q. \tag{7}$$

将方程（6）和方程（7）相乘并取非阿基米德赋值，得到

$$\begin{aligned} |(\lambda - a_{j,j}) x_j (\lambda - a_{k,k}) x_k| &= \left| \sum_{p=1, p \neq j}^{n} a_{j,p} x_p \right| \left| \sum_{q=1, q \neq k}^{n} a_{k,q} x_q \right| \\ &\leq \left(\max_{1 \leq p \leq n, p \neq j} |a_{j,p} x_p| \right) \left(\max_{1 \leq q \leq n, q \neq k} |a_{k,p} x_q| \right) \\ &\leq \left(\max_{1 \leq p \leq n, p \neq j} |a_{j,p}| \right) \left(\max_{1 \leq p \leq n, p \neq j} |x_p| \right) \left(\max_{1 \leq q \leq n, q \neq k} |a_{k,p}| \right) \left(\max_{1 \leq q \leq n, q \neq k} |x_q| \right) \\ &= \left(\max_{1 \leq p \leq n, p \neq j} |a_{j,p}| \right) |x_k| \left(\max_{1 \leq q \leq n, q \neq k} |a_{k,p}| \right) |x_j| \\ &= h_j(A) |x_k| h_k(A) |x_j|. \end{aligned}$$

因此

$$|(\lambda - a_{j,j})(\lambda - a_{k,k})||x_j x_k| \leq h_j(A)h_k(A)|x_j||x_k|.$$

由于 $|x_j x_k| \neq 0$，我们有

$$|(\lambda - a_{j,j})(\lambda - a_{k,k})| \leq h_j(A)h_k(A).$$

前一个不等式表明

$$\lambda \in \bigcup_{p,q=1,p\neq q}^{n} \{z \in \mathbb{K} : |z - a_{p,p}||z - a_{q,q}| \leq h_p(A)h_q(A)\}.$$

陈述中的第二个包含关系可通过考虑 A 的转置，并注意到矩阵及其转置的谱相等来得到。□

应用定理 2.1，我们得到以下结果。

Theorem 2.2. 设 $p(z) := c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + z^n \in \mathbb{K}[z]$。如果 λ 是 p 的一个零点，则

$$|\lambda| \leq 1$$

or

$$|\lambda||\lambda + c_{n-1}| \leq \max\{|c_0|, \cdots, |c_{n-2}|\}.$$

定理 2.3。 设 $p(z) := c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + z^n \in \mathbb{K}[z]$。如果 λ 是 p 的零点，那么

$$|\lambda|^2 \leq |c_0| \max\{1, |c_j|\}, \quad \textit{for some } 1 \leq j \leq n-2$$

or

$$|\lambda||\lambda + c_{n-1}| \leq |c_0|$$

or

$$|\lambda|^2 \leq (\max\{1, |c_j|\})(\max\{1, |c_k|\}), \quad \textit{for some } 1 \leq j, k \leq n-2, j \neq k$$

or

$$|\lambda||\lambda + c_{n-1}| \leq \max\{1, |c_j|\}, \quad \textit{for some } 1 \leq j \leq n-2.$$

定理 2.4。 设 $p(z) := c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + z^n \in \mathbb{K}[z]$，且 $c_0 \neq 0$。如果 λ 是 p 的零点，那么

$$\frac{1}{|\lambda|} \leq 1$$

or

$$\frac{1}{|\lambda|}\left|\frac{1}{\lambda} + \frac{c_1}{c_0}\right| \leq \max\left\{\frac{1}{|c_0|}, \frac{|c_2|}{|c_0|}, \cdots, \frac{|c_{n-1}|}{|c_0|}\right\}.$$

定理 2.5。 设 $p(z) := c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + z^n \in \mathbb{K}[z]$ 满足 $c_0 \neq 0$。若 λ 是 p 的零点，则

$$\frac{1}{|\lambda|^2} \leq \frac{1}{|c_0|}\max\left\{1, \frac{|c_j|}{|c_0|}\right\}, \quad \textit{for some } 2 \leq j \leq n-1$$

or

$$\frac{1}{|\lambda|}\left|\frac{1}{\lambda} + \frac{c_1}{c_0}\right| \leq \frac{1}{|c_0|}$$

or

$$\frac{1}{|\lambda|^2} \leq \left(\max\left\{1, \frac{|c_j|}{|c_0|}\right\}\right)\left(\max\left\{1, \frac{|c_k|}{|c_0|}\right\}\right), \quad \textit{for some } 2 \leq j,k \leq n-1, j \neq k$$

or

$$\frac{1}{|\lambda|}\left|\frac{1}{\lambda} + \frac{c_1}{c_0}\right| \leq \max\left\{1, \frac{|c_j|}{|c_0|}\right\}, \quad \textit{for some } 2 \leq j \leq n-1.$$

与复数情形类似，定理 2.1 无法通过考虑三行/列来推广。 [20] 中给出的标量情形示例（另见 [7,15]）也可推广到非阿基米德情形。考虑任意非阿基米德域 $\mathbb{K}$上的以下矩阵。

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是 $\sigma(A) = \{0,1,1,2\}$ 和 $h_1(A) = 1, h_2(A) = 1, h_3(A) = 0, h_4(A) = 0$. 因此

$$\sigma(A) \nsubseteq \bigcup_{j,k,l=1, j\neq k, j\neq l, k\neq l}^{4} \{z \in \mathbb{K} : |z-a_{j,j}||z-a_{k,k}||z-a_{l,l}| \leq h_j(A)h_k(A)h_l(A)\} = \{0\}.$$

接下来，我们证明定理 2.1 改进了定理 1.16。我们的证明受到文献 [20]中给出的复数情形的启发。

定理 2.6。对每个 $A = [a_{j,k}]_{1\leq j\leq n,\ 1\leq k\leq n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\bigcup_{j,k=1, j\neq k}^{n} \{z \in \mathbb{K} : |z-a_{j,j}||z-a_{k,k}| \leq h_j(A)h_k(A)\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \{z \in \mathbb{K} : |z-a_{j,j}| \leq h_j(A)\}$$

and

$$\bigcup_{j,k=1, j\neq k}^{n} \{z \in \mathbb{K} : |z-a_{j,j}||z-a_{k,k}| \leq v_j(A)v_k(A)\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \{z \in \mathbb{K} : |z-a_{j,j}| \leq v_j(A)\}.$$

证明。 我们证明第一个包含关系，第二个包含关系的证明类似。令

$$Z := \bigcup_{j,k=1, j\neq k}^{n} \{z \in \mathbb{K} : |z-a_{j,j}||z-a_{k,k}| \leq h_j(A)h_k(A)\}$$

并设 $z \in Z$。那么存在 $1 \leq j,k \leq n$ ，使得 $j \neq k$ ，满足

$$|z-a_{j,j}||z-a_{k,k}| \leq h_j(A)h_k(A).$$

我们必须考虑两种情形。情形 (i)： $h_j(A)h_k(A) = 0$。那么 $z = a_{j,\ j}$ 或者 $z = a_{k,\ k}$。现在显然我们有

$$z \in \{x \in \mathbb{K} : |x-a_{j,j}| \leq h_j(A)\} \cup \{y \in \mathbb{K} : |y-a_{k,k}| \leq h_k(A)\} \subseteq \bigcup_{l=1}^{n} \{z \in \mathbb{K} : |z-a_{l,l}| \leq v_l(A)\}.$$

情况(ii)： $h_j(A)h_k(A) > 0$。于是

$$|z-a_{j,j}| \leq h_j(A)$$

or

$$|z-a_{k,k}| \leq h_k(A).$$

现在显然有

$$z \in \{x \in \mathbb{K} : |x - a_{j,j}| \leq h_j(A)\} \cup \{y \in \mathbb{K} : |y - a_{k,k}| \leq h_k(A)\} \subseteq \bigcup_{l=1}^{n} \{z \in \mathbb{K} : |z - a_{l,l}| \leq v_l(A)\}.$$

□

现在我们证明定理 1.25 和 2.1 等价。

定理 2.7。 设 $n \in \mathbb{N}$。以下两个陈述等价。

(i) 设 $A = [a_{j,k}]_{1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$。那么

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{j,k=1, j \neq k}^{n} \{z \in \mathbb{K} : |z - a_{j,j}||z - a_{k,k}| \leq h_j(A)h_k(A)\}.$$

(ii) 若 $B = [b_{j,k}]_{1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ 满足

$$|b_{j,j}||b_{k,k}| > h_j(B)h_k(B), \quad \forall 1 \leq j, k \leq n, j \neq k,$$

则 B 是可逆的。

证明。 (i) $\implies$ (ii) 设 $B = [b_{j,k}]_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ 满足

$$|b_{j,j}||b_{k,k}| > h_j(B)h_k(B), \quad \forall 1 \leq j, k \leq n, j \neq k. \tag{8}$$

我们需要证明 B 可逆。假设 B 不可逆。于是 $0 \in \sigma(B)$。根据假设 (i)，存在 $1 \leq j, k \leq n$，使得 $j \neq k$，从而

$$|0 - b_{j,j}||0 - b_{k,k}| \leq h_j(B)h_k(B). \tag{9}$$

不等式 (8) 和 (9) 相互矛盾。因此 B 可逆。

(ii) $\implies$ (i) 设 $A = [a_{j,k}]_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ 和 $\lambda \in \sigma(A)$。我们断言

$$|\lambda - a_{j,j}||\lambda - a_{k,k}| \leq h_j(A)h_k(A), \quad \text{for some } 1 \leq j, k \leq n, j \neq k.$$

假设该断言不成立。那么

$$|\lambda - a_{j,j}||\lambda - a_{k,k}| > h_j(A)h_k(A), \quad \forall 1 \leq j, k \leq n, j \neq k. \tag{10}$$

设 I_n 为 $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ 中的单位矩阵。定义 $B := \lambda I_n - A =: [b_{j,k}]_{1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n}$。因此 B 不可逆。注意，对于所有 $1 \leq j \leq n$, $h_j(A) = h_j(B)$。但由 (10) 还可得

$$|b_{j,j}||b_{k,k}| > h_j(B)h_k(B), \quad \forall 1 \leq j, k \leq n, j \neq k.$$

假设 (ii) 表明 B 可逆，这是不可能的。因此结论成立。

□

考虑矩阵的转置，我们很容易得到以下结果。

定理 2.8。 设 $n \in \mathbb{N}$。以下两个命题等价。

(i) 令 $A = [a_{j,k}]_{1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq n} \in \mathbb{M}_n$（$\mathbb{K}$）。则

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{j,k=1, j \neq k}^{n} \{z \in \mathbb{K} : |z - a_{j,j}||z - a_{k,k}| \leq v_j(A)v_k(A)\}.$$

（ii）如果 $B = [b_{j,k}]_{1\leq j\leq n,\ 1\leq k\leq n} \in \mathbb{M}_n$（$\mathbb{K}$） 满足

$$|b_{j,j}||b_{k,k}| > v_j(B)v_k(B), \quad \forall 1 \leq j,k \leq n, j \neq k,$$

那么 B 可逆。

3. Acknowledgments

本文部分内容是在印度孟买的 Lodha 数学科学研究所（LMSI）完成的，作者曾于2025年12月23日至25日参加该所举办的“高维扩张子教育研讨会”。作者感谢 LMSI 及其创办者给予他这一机会。作者感谢 Chaitanya G. K. 提醒他注意参考文献 [12]。

References

[1] H. E. Bell. 格什戈林定理与多项式的零点。 *Am. Math. Mon.*，72:292–295，1965年。[2] L. Brand. 伴随矩阵及其性质。 *Am. Math. Mon.*，71:629–634，1964年。[3] L. Brand. 伴随矩阵的应用。 *Am. Math. Mon.*，75:146–152，1968年。[4] Alfred 布劳尔. 矩阵特征根的界。 *Duke Math. J.*，13:387–395，1946年。[5] Alfred 布劳尔. 矩阵特征根的界。II. *Duke Math. J.*，14:21–26，1947年。[6] E. T. Browne. 矩阵的特征根。 *Bull. Am. Math. Soc.*，36:705–710，1930年。[7] Richard A. Brualdi. 矩阵、特征值与有向图。 *Linear Multilinear Algebra*，11:143–165，1982年。[8] Richard A. Brualdi and Stephen Mellendorf. 包含矩阵特征值的复平面区域。 *Am.Math. Mon.*，101(10):975–985，1994年。[9] S. A. Gershgorin. ¨关于矩阵特征值的界定。 *Bull. Acad. Sci. URSS*，1931年(6):749–754，1931年。[10] H. P. Hirst and W. T. Macey. 多项式根的界。 *The College Mathematics Journal*，28(4):292–295，1997年。[11] Roger A. Horn and Charles R. Johnson. *Matrix analysis*。剑桥：剑桥大学出版社，第2版，2013年。[12] Suhua Li and Chaoqian Li. 非阿基米德绝对值下的可逆矩阵及其逆矩阵。 *J. Comput.Appl. Math.*，470:16，2025年。[13] Marvin Marcus and Henryk Minc. *A survey of matrix theory and matrix inequalities*。高等数学丛书。波士顿：Allyn and Bacon, Inc.，1964年。[14] Morris Marden. *Geometry of polynomials. 2nd ed.*，第3卷， *Math. Surv.* 美国数学学会（AMS），罗德岛州普罗维登斯，1966年。[15] Morris Newman and Robert C. Thompson. 一个与格什戈林定理相关的反例。 *Linear AlgebraAppl.*，201:165–169，1994年。[16] Bogdan Nica and Dacota Sprague. 关于格什戈林定理和对角占优的非阿基米德视角。 *Am.Math. Mon.*，130(3):267–275，2023年。[17] Alexander Ostrowski. ¨关于具有 ¨占优主对角线的行列式。 *Comment. Math. Helv.*，10:69–96，1937年。[18] Hans Schneider. Olga Taussky-Todd 对矩阵理论和矩阵理论学家的影响：一篇娓娓道来的个人致敬。 *Linear Multilinear Algebra*，5:197–224，1977年。[19] Olga Taussky. 一个反复出现的行列式定理。 *Am. Math. Mon.*，56:672–676，1949年。[20] Richard S. Varga. *Geršgorin and his circles*，第36卷， *Springer Ser. Comput. Math.*柏林：Springer，2004年。