arXiv:2601.04229v1 [math-ph] 2 Jan 2026

作为量子化约束哈密顿系统的非交换空间

ANDREAS SYKORA

Abstract. 我们研究带电粒子在电磁场中的强场极限，并将其作为一般协变系统的玩具模型，从而建立约束哈密顿动力学与非交换几何之间的新颖联系。从作用量 $S = \int d\tau\, \dot{x}^i A_i(x)$ 出发，该作用量表示粒子路径相对于电磁势 A_i的整体单值性，我们分析由此得到的哈密顿量为零的一般协变系统。运动方程 $F_{ij}\dot{x}^j = 0$ 将粒子限制在由场强张量$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$定义的奇异叶状结构的叶上。我们证明，物理态空间对应于该叶状结构的叶空间，其中由场线连接的点规范等价。哈密顿分析表明，根据场强张量的秩，约束 $\kappa_i = p_i - A_i$ 在局部可分为第一类或第二类。量子化后，坐标算符变得不对易，从而使物理态空间成为非交换几何。我们给出具体示例，并特别证明磁单极子场强会产生模糊球面。

Contents

1. 引言 1 2. 物理态空间的拓扑 3 2.1. 二维情形 4 2.2. 三维情形 4 2.3. 场强的奇异叶状结构 5 2.4. 物理态空间 6 3. 哈密顿理论 8 3.1. 第一类和第二类约束 8 3.2. 狄拉克括号 9 4. 量子化 11 4.1. 广义福克空间量子化 11 4.2. 经典极限 12 4.3. 径向对称的 K¨ahler 势 12 5. 与 Connes方法的比较 15 6. 讨论 16 参考文献 16

1. Introduction

量子化引力的一种方法是正则量子引力，尤其是圈量子引力 [1]。广义相对论被表述为一个哈密顿系统，而该理论的哈密顿量为零，剩下的只有约束。与

杨-米尔斯理论的量子化不同，在杨-米尔斯理论中，时间仍是一个外部参数；在最基本的层次上，时间消失了。这是因为广义相对论具有微分同胚不变性，它排除了任何优先的时间概念。这种现象通常被称为“无时间物理学”，并非正则量子引力所独有，而是存在于所有一般协变系统中，参见例如 [7], 第 4 章。

由于不再存在传统意义上的时间演化，缺少全局时间参数使相应量子理论的诠释变得格外复杂。

非交换几何 [2]为描述“量子”空间提供了一个框架。在这类空间中，坐标彼此不对易，这反映了量子力学中可观测量的不对易性，并使几何能够延伸至普朗克尺度的区域；在这些区域，经典时空概念不再适用。通过用不对易算子取代空间上的函数，非交换几何将几何学拓展到可能与量子引力 [3, 4, 5]相关的情形。

在本文中，我们考察平直空间中带电粒子处于电磁场时的强场极限，并将看到，可以将由此得到的系统视为一般协变系统。此外，物理态空间还可以诠释为一种非交换几何。

在经典情形下，我们将看到，粒子被限制在由场强定义的叶状结构的叶上，而物理态空间则缩减为一个维数更低的子空间。在哈密顿理论中，物理态空间配备了狄拉克括号；构型空间坐标之间的狄拉克括号不为零。因此，量子化之后，物理态空间便成为一个非交换空间。这是一般协变系统与非交换几何之间一个有趣的联系。

我们的出发点是平直空间中任意维度 $\mathbb{R}^n$ 下的以下作用量 $n >$ 1

$$S_{full} = \int d\tau \left(L_{free}(\dot{x}) - q\dot{x}^i A_i(x) \right) \tag{1.1}$$

其中， L_{free}可以是自由牛顿 $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$或相对论性 $m\sqrt{-\dot{x}^2}$拉格朗日量。粒子的电荷为 q，并与电磁场的势 A最小耦合。一般而言，我们将势 A 视为 $U(1)$纤维丛的联络。可以将讨论限制在 $\mathbb{R}^n$的子集上，这样也就能够考虑磁单极子的势。

强电磁场极限$\frac{m}{q} \to 0$ 下，作用量变为

$$S = \int d\tau \, \dot{x}^i A_i(x) = \int_\gamma A \tag{1.2}$$

这基本上是粒子的路径 γ 相对于一形式$A = A_i dx^i$的整体单值性。任何仅存在于 L_{free} 中的度规都已消失，该系统因此具有坐标变换不变性。下文将证明，相应的哈密顿理论是广义协变的，且哈密顿量为零。因此，它可以被视为引力理论的一个极简单玩具模型。

此外，作用量 (1.2) 在世界线重参数化$x(\tau) \mapsto x(\tau(\tau'))$以及局域规范变换 $A_i \mapsto a_i + \partial_i \phi$ 下保持不变。请注意，经过规范变换后，有限路径的作用量会在路径两端产生 $U(1)$ 因子。因此，局域规范变换下的不变性仅存在于无限路径或闭合路径中。

尽管系统 (1.2) 的动力学相当简单，但它具有一个有趣的物理态空间。我们将看到，哈密顿理论会导出取决于势 A 场强的狄拉克括号，从而在量子化后产生非交换坐标。

以下所述的方法不同于通常对强电磁场极限下的粒子进行量子化的方式。通常，先对电磁场中的粒子进行量子化，然后为了取强场极限，投影到第一朗道能级上。例如，[6] 提到了平面上粒子的情形，并提出了一种类似的形式体系，用于球面上的朗道能级量子化。在这里，我们直接在经典系统中取强场极限，然后再进行量子化。

更一般地，在 [9] 和 [10], 中，利用强磁场中粒子的路径积分计算了最低朗道能级上的投影算子，即 Bergman 核。这与通常对兼容于复结构的辛流形进行量子化的方式相关。在这种框架下，量子希尔伯特空间构造为 K¨ahler 流形上的正线丛的全纯截面空间，而 Bergman 核则充当该全纯函数空间的再生核。在当前方法中，我们从一个一形式，或更一般地，从复线丛的一个联络出发，通过求出约束并在标准福克空间中实现这些约束，对一个特殊的协变哈密顿系统进行量子化。

本文结构如下：第 2 节分析最小耦合拉格朗日作用量并推导运动方程，说明它们与奇异叶状结构的关系。我们考察物理态空间的拓扑，并给出具体示例，包括二维情形和磁单极场构型。

第 3 节阐述哈密顿理论，考察约束的类型并推导狄拉克括号。结果表明，第一类约束和第二类约束的概念会随位置而变化。

第 4 节介绍一种采用广义福克空间方法的量子化方案。示例包括“圆盘”、“平面堆叠”以及单极子场强的情形。结果表明，单极子场强会产生一个模糊球面 [11, 12]。

顺带一提，在 [2] 叶状结构的叶空间被赋予了 C^*-代数结构。由于本文中也出现了叶状结构，因此自然会产生一个问题：这两种方法是否有共同之处。结果表明，这两种方法并不相同。第 5 节将对此进行讨论。

2. Topology of the physical state space

对 x^i 求作用量 (1.2) 的变分，或求解拉格朗日量 $L = \dot{x}^i A_i(x)$ 的欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\delta S}{\delta x^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = (\partial_i A_j)\dot{x}^j - (\partial_j A_i)\dot{x}^j \tag{2.1}$$

可得运动方程（运动方程）

$$F_{ij}\dot{x}^j = 0 \tag{2.2}$$

其中 $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ 是 A_i的场强。这些运动方程乍看之下相当平凡。当 F_{ij} 在一点 $p_0 = (x_0^j)$处可逆时，粒子便被限制在该点，且穿过该点的运动方程唯一解为 $x^j(\tau) = x_0^j$。此时，F_{ij} 是一个辛形式，并且 $\mathbb{R}^n$的每个点 p_0 都有唯一解。解空间，即经典物理态空间，由 $\mathbb{R}^n$参数化。

然而，正如我们将看到的，当 F_{ij} 不是辛形式时，由于存在进一步的规范不变性，规范等价解的空间可能具有比原始构形空间丰富得多的拓扑；这些规范不变性与 F_{ij}的零空间有关，也就是说，与切空间中被 F_{ij}消去的切向量 v^i 所构成的理想有关。任何保持 F 的零空间不变的变换，也不会改变运动方程（2.2）。当我们在下文讨论相应哈密顿系统的第一类约束时，这些规范不变性的性质也会更加清楚。

2.1. **二维情形**。 在讨论一般情形之前，我们先考虑二维情形 $n = 2$，在这种情形下，每个二形式或场强

$$F = \rho(x, y)dx \wedge dy$$

都会自动闭合。在 $\mathbb{R}^2$ 中 ρ 非零的区域里， F 可逆；由于它是闭合的，因此也是辛的。

运动方程 (2.2) 化简为

$$\rho\dot{x} = \rho\dot{y} = 0 \tag{2.3}$$

因此，在满足 $\rho \neq 0$ 的区域中，唯一的解是常值路径 $x(\tau) = x_0$， $y(\tau) = y_0$ ，对每个点 (x_0, y_0) 都成立。我们可以将这些解与这些区域中的点对应起来。

另一方面，当 $\rho = 0$ 时，不存在运动方程。在这些区域中，粒子的运动不受约束。然而，给定时刻 τ_1 的一个物理态后，运动方程应能唯一确定其他每个时刻 τ_2 的物理态。否则，就存在规范不变性；如果两个时刻 τ_2 的物理态可以由系统从时刻 τ_1 的同一物理态经时间演化到达，那么它们就是规范等价的。在当前情形下，当我们取由 $\rho = 0$ 定义的某个连通区域内的一点 (x_0, y_0) 时，可以用任意路径将该连通区域内的其他每一点与此点连接起来。由于不存在运动方程，这样的路径就是一个物理解。因此， $\rho = 0$ 成立的连通区域内的所有点都是规范等价的。

总而言之，在满足 $\rho \neq 0$ 的区域中不存在规范自由度，而在满足 $\rho = 0$ 的连通区域中，所有点都规范等价。因此，在二维情形下，物理态空间是一个平面，其中满足 $\rho = 0$ 的连通区域都收缩为一个点。当这些区域是单连通的时，不存在拓扑差异。对于多重连通区域，球面会被挤压掉。例如，当只有一个满足 $\rho = 0$ 的环形区域时，所得空间是一个平面，并在一点处与一个球面相切。

下面我们将考虑一个例子，其中 $\rho = 0$ 对单位圆外的所有点都成立 .

2.2. **三维情形**。 在三维情形 $n = 3$ 中，场强 $\vec{F}$ $\vec{}$. $\vec{}$ 可以表示为磁场 $B = \nabla \times A$，而运动方程化简为 $\dot{\vec{x}} \times \vec{B} = 0$。这意味着 $\dot{\vec{x}} \parallel \vec{B}$，即粒子被限制在磁力线上，但其沿给定磁力线的运动不受限制。

由于场强 F 的秩至少为二，因此存在一个坐标系，在该坐标系中它可以表示为

$$F = \rho(x, y, z)dx \wedge dy \tag{2.4}$$

由于我们要求 F 闭合 $dF = 0$，因此可得 $\partial_z\rho = 0$，也就是说，(2.4) 中的 ρ 仅依赖于 x 和 y。在这个坐标系中，磁场 B 在 z方向上只有一个分量 ρ。

重复关于规范等价点的论证，即从同一原始点出发，通过运动方程的解可以到达的两个点是规范

等价的，因此我们必须识别位于磁场同一条线上的点，或在式 (2.4) 的特殊坐标系中具有相同 z 坐标的点。请注意，这只有在 F 不依赖于 z时才有可能。

此外，与上文的二维情形一样， $\rho(x,\ y) = 0$ 必须识别的点。在这些区域中，不存在磁力线，因为磁场 B 或场强 F 为零。

因此，将解空间对这些规范不变性取商后，可用磁场的场线来参数化。例如，对于磁单极子的场，这会得到一个球面（见下文）。

2.3. 场强的奇异叶状结构。在一般的 n维情形下，我们看到，当 x属于二形式 $F = F_{ij}dx^i \wedge dx^j = dA$的零空间（即所有满足 $X^iF_{ij} = 0$的向量场 X 构成的向量空间）时，运动方程 (2.2) 并不对其施加约束。在上文的三维情形中，这些向量场与磁力线平行。

我们首先考虑一般的 k形式 ω ，之后再将讨论限制在二形式的情形。向量场 X 构成 k形式 ω的零空间，也就是说，满足 $i_X\omega = \omega(X,\cdot) = 0$或局部地满足 $\omega_{i_1i_2\dots i_k}X^{i_1} = 0$。它们构成 $\mathbb{R}^n$的切空间 $T(\mathbb{R}^n)$ 的一个分布 $N_\omega \subset T(\mathbb{R}^n)$。对于向量场 $Y_i \in T(\mathbb{R}^n)$， k形式 ω 的外微分为

$$\begin{aligned} d\omega(Y_0,\dots,Y_k) = &\sum_i (-1)^i Y_i\big(\omega(Y_0,\dots,\hat{Y}_i,\dots,Y_k)\big) \\ &+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega\big([Y_i,Y_j],\dots,\hat{Y}_i,\dots,\hat{Y}_j,\dots,Y_k\big) \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 $[Y_i,Y_j]$ 表示李括号，帽号表示省略相应的向量场。

如果 k形式 ω 是闭合的 $d\omega = 0$，则零空间 N_ω 是可积的，因为此时对于 $X_0, X_1 \in N_\omega$ 和 $Y_2,\dots Y_k \in T(\mathbb{R}^n)$

$$0 = d\omega(X_0,X_1,Y_2,\dots,Y_k) = -\omega\big([X_0,X_1],Y_2,\dots,Y_k\big) \tag{2.6}$$

也就是说， $[X_0,X_1] \in N_\omega$。由此可知，零空间 N_ω 是一个奇异叶状结构，即叶的维数可能各不相同的叶状结构 [13]。总之，每个闭形式 ω 都通过其零空间 N_ω 定义一个奇异叶状结构。

此外，闭形式 ω 相对于叶状结构是不变的。当 ω 是闭合的， $d\omega = 0$ 且 X 是零空间 N_ω 中的一个向量场，属于 ω，即 $i_X\omega = 0$时，可得李导数为零

$$L_X\omega = i_X d\omega + d(i_X\omega) = 0 \tag{2.7}$$

这意味着，沿着由 X定义的流平行移动时， ω 保持不变。由于这对零空间 N_ω中的任意向量场 X 都成立，因此 ω 沿叶状结构保持不变。

当存在局部坐标 $(x^i,\ z^j)$，其中 z^j 为叶状结构的叶的参数时，可得 ω 具有如下形式

$$\omega = \omega_{i_1\dots i_k}(x)dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k} \tag{2.8}$$

即 ω 不依赖于 z^j。利用式 (2.7) 中的向量场 $X_{z^i} = \partial_{z^i}$ 即可证明这一点。

对于闭场强二形式 F，由运动方程 (2.2) 定义的路径与零空间叶状结构的叶平行。在 (2.8) 的局部坐标中

场强变为

$$F = F_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j \tag{2.9}$$

F_{ij} 在定义局部坐标系的区域内不必可逆。可能存在秩 F 发生跃变的奇点。 F 在一点处的秩为偶数 $2p$。在 F 于该点周围的区域内秩恒定时，穿过该点的叶状结构叶片的维数为 $n-2p$，例如参见 [13], 定理1.6.15。

当我们假设闭合2-形式 F 在区域 $R \subset \mathbb{R}^n$ 的局部具有恒定秩$2p$时，根据达布定理，存在局部坐标系 x^i， $i=1$，.....， p和 y^i， $i=1$，.....， p，还可以选择加入其他 z^i， $i=1\ldots$， $N-2p$，使得

$$F = \sum_{i=1}^{p} dx^i \wedge dy^i \tag{2.10}$$

在这种情况下，满足 $F = dA$ 的一形式为$A = \sum_{i=1}^{p} x^i\, dy^i$。

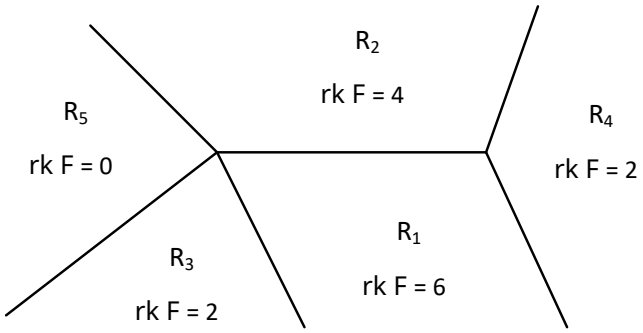

FIGURE 1. 场强 F的不同秩区域示意图

2.4. **物理态空间**。 如前所述，当 $\dot{x}^i$ 属于场强 F的零空间时，运动方程（2.2）不会对 $\dot{x}^i$施加约束。否则，运动方程（2.2）要求 $\dot{x}^i = 0$。 F 的零空间定义了一个叶状结构；由于同一叶上的任意两点都可以通过方程（2.2）的一组解相连，因此叶状结构的每个叶在物理态空间中都只对应一个点。因此，物理态空间就是由场强 F的零空间定义的奇异叶状结构的叶空间。

局部而言，物理态空间可以用（2.9）中的 x^i ，或（2.10）中的 x^i 和 y^i来参数化。

将完整空间 $\mathbb{R}^n$ 视为原始构形空间时，二形式 F 的秩 $2k$ 可能变化，在偶数0，2，.....， $2p$之间跳变，其中 $2p \leq n$ 是 F秩的最大值。换言之， F定义了一个函数 $\mathrm{rk}\ F\colon \mathbb{R}^n \to \{0, 2, \ldots, 2p\}$，它将 $\mathbb{R}^n$ 划分为若干区域 R_i （$i \in I$ 为索引集），在每个区域中，函数 $\mathrm{rk}\, F$ 为常数。

如上所述，在每个这样的区域 R_i 中， F 的常秩 $\mathrm{rk}\, F = 2k$ 是物理态集合 R_{phys} 的维数 $2k$ ，$_i$。应用规范等价点的等价关系后，秩为 $\mathrm{rk}\, F = 0$ 的区域 R_i 收缩为一点 $R_{\mathrm{phys},\ i}$，秩为 $\mathrm{rk}\, F = 2$ 的区域 R_i 收缩为二维曲面的一个子集 $R_{\mathrm{phys},\ i}$，一般而言

秩为 $\mathrm{rk}\, F = 2k$ 的区域 R_i 收缩为 $2k$ 维子流形的一个子集 $R_{\mathrm{phys},\, i}$。剩下的是一组拓扑多面体。最大秩 $\mathrm{rk}\, F = 2p$ 的区域 R_i 收缩为维数为 $2p$ 的体积 $R_{\mathrm{phys},\, i}$，这些体积由秩较低的区域 R_i 所围，这些区域产生维数为 $2k$ 的低维体积 $R_{\mathrm{phys},\, i}$，其满足 $k < p$。

图 1 示意性地展示了构形空间如何收缩为区域 R_1，在该区域中场强具有最大秩 $2p = 6$，并成为物理态空间的一个 6 维部分$R_{\mathrm{phys},\, 1}$。其他区域 R_i 则成为$R_{\mathrm{phys},\, 1}$的边界。例如，R_2 成为$R_{\mathrm{phys},\, 2}$ 的 4 维边界$R_{\mathrm{phys},\, 1}$。

需要指出的是，当我们从一个穿孔 $\mathbb{R}^n$ 作为构形空间出发时，例如在原点被排除的单极场情形下，收缩后的区域$R_{\mathrm{phys},\, i}$ 本身可能具有非平凡拓扑，例如球面。

下面我们将详细讨论三个例子；我们还将在哈密顿量理论中研究这些例子，并最终对其进行量子化。

例 2.1。 夹断圆盘

此例说明了这样一种情况： F 的秩发生跳变，使得叶状结构的一片叶具有边界。

我们用极坐标 $(r,\ \varphi)$ 参数化平面，并定义场强：当 $r \le r_0$ 时为 $F = d\rho \wedge d\varphi = \rho'(r)\, dr \wedge d\varphi$，当 $r > r_0$ 时为 $F = 0$。 ρ' 是函数ρ 在 r 中的 r 阶导数，其中 ρ' 在圆盘内部非零。例如，对于极坐标中的标准平直辛形式 $dx \wedge dy$，有 $\rho = r^2/2$。总之，在半径为 r_0 的圆盘内，场强非零；在外部则为 0。

一种可能的势为：当 $r \le r_0$ 时为 $A = \rho(r)\, d\varphi$，当 $r > r_0$ 时为 $A = 0$。

奇异叶状结构具有一片二维叶 $r > r_0$，其中 F 的秩为 0 . All 圆盘内的点是零维叶，其中 F 的秩为 2。

在圆盘 $r < r_0$内，每个点（$r,\ \varphi$）都对应于运动方程 (2.3) 的一个解。由于规范等价，圆盘 $r > r_0$外的所有点都必须视为同一点。经典物理态空间是一个拓扑球面。

例2.2。 平面堆叠

这说明了这样一种情况：场强的秩在某点的一个邻域内局部恒定。在这样的区域中，我们总能定义局部坐标，使F 为常数，见 (2.10)。

我们考虑 $n = 3$和 $\mathrm{rk}\ F = 2$，即坐标为 $x,\ y,\ z$的 $\mathbb{R}^3$，其场强 $F = dx \wedge dy$恒定。一个可能的势是 $A = -\frac{y}{2}\, dx + \frac{x}{2}\, dy$。

零空间平行于坐标 z。奇异叶状结构由以下直线组成：直线由（$x = x_0,\ y = y_0,\ z$）参数化，其中 x_0和 y_0为常数，且 z取值于 $\mathbb{R}$。沿这些直线，场强 F恒定。同一直线上的所有点都规范等价。经典物理态空间是这些直线构成的空间，可识别为由（$x_0,\ y_0$）参数化的 $\mathbb{R}^2$。限制在物理态空间上的 F 是平面上的恒定辛形式。

例2.3。 磁单极子场强

为了给出一个具有非平凡拓扑的例子，我们在 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 中考虑整数电荷为 N的磁单极子场强

$$F = \frac{N}{2} \epsilon^{ijk} \frac{x^i}{r^3} dx^j \wedge dx^k = \frac{N}{2} \sin\vartheta d\vartheta \wedge d\varphi \tag{2.11}$$

见 [8]。（由 $\sin\vartheta = 0$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义的直线是一个坐标奇点。）

F 是一个线丛的场强，该线丛具有局部狄拉克势

$$A_{\pm} = \frac{N}{2}\frac{1}{r}\frac{1}{z \pm r}(xdy - ydx) = \frac{N}{2}(\pm 1 - \cos\vartheta)d\varphi \tag{2.12}$$

A_+ 和 A_- 是坐标图 $\mathbb{R}^3 \setminus \{z + r = 0\}$ 和 $\mathbb{R}^3 \setminus \{z - r = 0\}$上的势。在这两个坐标图的重叠区域上，两个势通过无穷小规范变换 $A_+ - A_- = Nd\varphi$ 相关联，该变换对应于群值规范变换 $e^{iN\varphi}$；只有当 N 是整数时，它才是连续的。

在球对称坐标中，零空间平行于坐标 r。磁力线是从原点出发的射线。磁场 B 仅取决于 ϑ，尤其不取决于 r。因此，$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 形成一种奇异叶状结构，由所有从原点出发的射线组成。r坐标具有规范不变性。经典物理态空间可由单个球面上的点参数化。

运动方程 $\dot{x}_i = 0$ 这也表明经典物理态空间是一个由 φ 和 ϑ参数化的球面。F 限制在物理态空间上时，是球面上的常数辛形式。

3. 哈密顿量理论

对拉格朗日量 (1.2) 关于 $\dot{x}^i$ 求变分，得到正则动量 $p_i = A_i$以及初级约束

$$\kappa_i = p_i - A_i = 0 \tag{3.1}$$

哈密顿量

$$H = p_i\dot{x}^i - L = \dot{x}^i(p_i - A_i) = 0 \tag{3.2}$$

为零，这也表明 (1.2) 是一个一般协变系统。由于 $\{H, \kappa_i\} = 0$ 显然成立，因此不存在次级约束。$\{\cdot,\cdot\}$ 表示与$\{x^i, p_j\} = \delta^i_j$的正则泊松括号。

哈密顿运动方程可由扩展作用量导出

$$S_H = \int d\tau\,(p_i\dot{x}^i - v^i\kappa_i) = \int d\tau\,\big(p_i(\dot{x}^i - v^i) - v^iA_i\big) \tag{3.3}$$

带有拉格朗日乘子 v^i。可以验证，拉格朗日量的运动方程 (2.2) 可由哈密顿量的运动方程 (3.3) 推导得出。

3.1. 第一类约束和第二类约束。一般来说，我们还会进一步区分第一类约束和第二类约束。当某个约束与所有其他约束的泊松括号弱为零，即可表示为这些约束的线性组合时，它就是第一类约束。不具备这一性质的约束则为第二类约束。对于约束 (3.1)，泊松括号为

$$\{\kappa_i, \kappa_j\} = -\partial_{x^i}A_j + \partial_{x^j}A_i = -F_{ij} \tag{3.4}$$

在上述分析中，我们已经看到，可以找到一个局部坐标系，使场强形式 (2.9) 仅依赖于 $2p = \operatorname{rk} F$ 个坐标 x^i，且二形式F 相对于 $n - 2p$ 其余坐标 z^i保持不变。在这个坐标系中，(3.4) 变为

$$\{\kappa_{x^i}, \kappa_{x^j}\} = -F_{ij}, \qquad \{\kappa_{x^i}, \kappa_{z^k}\} = \{\kappa_{z^k}, \kappa_{z^l}\} = 0 \tag{3.5}$$

对于 $i,\ j = 1, \ldots\ldots, 2p$和 $k,\ l = 1, \ldots\ldots, n - 2p - 1$，其中 $\kappa_{x^i} = p_{x^i} - A_{x^i}$和 $\kappa_{z^k} = p_{z^k}$ 分别是与坐标 x^i 和 z^k相关的约束。

在此处以及下文中，我们将采用一种记号：用与相应坐标对应的指标为各个量标记指标。这意味着，例如， κ_{x^i} 表示与坐标 x^i具有相同指标的约束。 p_{x^i} 不依赖于 x^i ，但与 x^i具有相同的指标。这样可以更容易地区分与坐标相关的约束、动量、偏导数等，而这些坐标又被分组为 x^i、 y^i、 z^j 等；例如，其中指标 i 来自与指标 j不同的指标集。

在 F 的秩为常数的区域内，参见（2.10），我们可以使用达布坐标x^i、 y^i、 z^j，其中 $i=1$、.....、 p且 $j=1$、.....、 $n-2p$，此时（3.5）化为 $\{\kappa_{x^i},\kappa_{y^j}\}=\delta^{ij}$，而所有其他括号均为零。

由（3.5）可知，当 F_{ij} 非零时， κ_{x^i} 是第二类约束，而 κ_{z^k} 是第一类约束。无法在全局范围内将约束（3.1）指定为第一类或第二类。一般而言，只能指出：在二形式 F 的秩 $2p$ 为常数的区域内，某一点处的约束（3.1）局部包含 $2p$ 个第二类约束和 $n-2p$ 个第一类约束。

上文我们已经看到，叶状结构的叶由坐标 z^k 局部参数化，并对应于规范不变点。式（3.5）证实了这一点，因为众所周知，第一类约束是规范变换的生成元。然而，在当前情形下，并不存在规范李代数，只有由 F 的零空间 N_F 中的向量场所定义的规范李拟代数。

3.2. **狄拉克括号**。 为了处理具有第二类约束的系统，狄拉克引入了狄拉克括号，它与第一类约束相容。

在秩 F 为常数的区域内，式（3.5）的局部坐标系中，矩阵 F_{ij} 可逆，因为它具有最大秩 $2p$。此处的狄拉克括号变为

$$\{f,g\}_{DB}=\{f,g\}+\{f,\kappa_{x^i}\}\theta^{ij}\{\kappa_{x^j},g\} \tag{3.6}$$

其中 θ^{ij} 是矩阵 F_{ij} 的逆矩阵。 f 和 g 是相空间上的两个函数，通常依赖于所有坐标 x^i 和 z^k 及其动量 p_{x^i} 和 p_{z^k}。（式（3.6）中不同寻常的 $+$ 是由式（3.4）中的 $-F_{ij}$ 所致。）

在 F 的秩发生变化的点，无法定义狄拉克括号。在这些点， F 的分量变为零，而 θ^{ij} 必然发散。这与泊松流形形成对比：在泊松流形上， θ^{ij} 在全局范围内有定义，且可以变为零。

由于狄拉克括号 (3.6) 对相空间上的任意函数 f ，在任何约束 $\{\kappa_{x^i},f\}_{DB}=\{\kappa_{z^k},f\}_{DB}$上都为零，因此可以将其限制到物理态空间，并且只考虑物理态空间上的函数。这些函数不依赖坐标z^k 及其动量p_{z^k}，也就是说，它们是规范不变函数。

于是，我们能够在由 x^i 及其动量 $p_i=p_{x^i}$局部参数化的物理相空间上计算狄拉克括号。由于约束与所有函数 f对易，即 $\{\kappa_i,f\}_{DB}=0$，因此可得 $\{p_i,f\}_{DB}=\{A_i,f\}_{DB}$。于是

$$\begin{aligned}
&\{x^i,x^j\}_{DB}=\theta^{ij}\\
&\{x^i,p_j\}_{DB}=\{x^i,A_j\}_{DB}=\theta^{ik}\partial_kA_j=\delta^i_j+\theta^{ik}\partial_jA_k\\
&\{p_i,p_j\}_{DB}=\{A_i,A_j\}_{DB}=\theta^{kl}\partial_kA_i\partial_lA_j=\theta^{kl}\partial_iA_k\partial_jA_l
\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中，第二行和第三行的最后一步由 $\theta^{ik}F_{kj}=\delta^i_j$ 得出。

在达布坐标系中，其中 F_{ij} 和 θ^{ij} 为常数， $A_j = \frac{1}{2}F_{ij}x^i$ 是规范势的一个解，约束为 $p_i - \frac{1}{2}F_{ij}x^i$，相关关系简化为

$$\{x^i, x^j\}_{DB} = \theta^{ij}, \qquad \{x^i, p_j\}_{DB} = \frac{1}{2}\delta^i_j, \qquad \{p_i, p_j\}_{DB} = -\frac{1}{4}F_{ij} \tag{3.8}$$

当我们能够将系统 (1.2) 量子化时，便知道在半经典极限下，对易子将变为狄拉克括号。这表明，在量子化系统中，坐标函数将具有对易子，其一阶近似为场强 F 的（伪）逆。

例3.1. 夹断圆盘

接续例 2.1，两个约束为

$$\kappa_r = p_r, \qquad \kappa_\varphi = p_\varphi - \rho(r) \tag{3.9}$$

两个约束的泊松括号为

$$\{\kappa_r, \kappa_\varphi\} = \rho' \tag{3.10}$$

它在圆盘 $r < r_0$ 内非零，在外部为 0。因此，圆盘内的约束是第二类的，外部则是第一类的。在圆盘外存在规范对称性。

由圆盘内部各点参数化的物理态的狄拉克括号为

$$\{r, \varphi\}_{DB} = \frac{1}{\rho'} \tag{3.11}$$

也就是说，它在圆盘的边界处发散。

例3.2。平面堆叠

在例2.2中，约束为

$$\kappa_x = p_x + \frac{y}{2}, \qquad \kappa_y = p_y - \frac{x}{2}, \qquad \kappa_z = p_z \tag{3.12}$$

κ_x 和 κ_y 是第二类约束，而 κ_z 是第一类约束，并且在 z 方向上存在规范对称性。

由 x， y-平面上的各点参数化的物理态的狄拉克括号为

$$\{x, y\}_{DB} = 1 \tag{3.13}$$

例3.3. 磁单极子场强

对于例2.3，球对称坐标中的约束为

$$\kappa_\varphi = p_\varphi + \frac{N}{2}(\cos\vartheta \pm 1), \qquad \kappa_\vartheta = p_\vartheta, \qquad \kappa_r = p_r \tag{3.14}$$

κ_φ 和 κ_ϑ 是第二类，而 κ_r 是第一类。在 r 方向存在规范对称性，使物理态空间缩减为一个由 φ 和 ϑ参数化的球面。用这些坐标参数化的物理态的狄拉克括号为

$$\{\varphi, \vartheta\}_{DB} = \frac{2}{N\sin\vartheta} \tag{3.15}$$

它在球面的极点处发散，不过这与坐标奇点有关。

4. Quantization

我们已经证明，场强 F 在物理态空间上是可逆的。当物理态空间是一个流形时，场强会将其转化为辛流形。已知有多种量子化辛流形的方法，例如几何量子化 [14], [15] 和 Berezin-Toeplitz 量子化 [16], [17], [18]。

这里，我们采用一种不同的方法。我们从一个由函数（或更一般地说，线丛的截面）构成的希尔伯特空间出发，其中算子 $\hat{}p_i$ and $\hat{}x^i$ 实现为正则对，并尝试将其限制到一个更小的希尔伯特空间，即量子物理态空间，在其中实现约束，也就是说，对于态 ϕ， $\kappa_i\phi = 0$ 。

显然，对于通常的薛定谔表示，这会得到一个一维的量子物理态空间，因为对由 $\mathbb{R}^n$ 中的函数构成的空间施加 n 约束 $i\hbar\partial_i + A_i$ ，会将自由度降为 0。

然而，如果我们能够找到一个坐标系，使 A_i 构成某个 K¨ahler 势的联络，那么这种方法就有非平凡解，正如我们将在下文所展示的。

4.1. 广义福克空间量子化。特别地，我们将应用一种广义福克空间量子化方法。（例如参见 [7], 第 13.4章）。

我们首先注意到，(3.5) 中约束的数量$\hat{\kappa}_{x^i}$ 为偶数。因此，可能可以找到这些约束的线性组合，从而得到成对的约束$\hat{\kappa}_i$，$\hat{\kappa}'_i$，其中 $i = 1$，.....， p彼此为厄米反共轭$\hat{\kappa}'_i = -\hat{}\kappa_i^\dagger$ 。从数学上说，这意味着该流形具有复结构。

由此可知，对于每一对约束，在量子化过程中只考虑其中一个约束$\hat{\kappa}_i = 0$ 即可。特别地，对于具有$\hat{\kappa}_i\psi' = 0$ 的物理态的矩阵元，可得

$$< \psi', \hat{\kappa}_i^\dagger\psi >= - < \hat{\kappa}_i\psi', \psi >= 0 \tag{4.1}$$

这意味着，在由$\hat{\kappa}_i = 0, i = 1,\ldots, p$ 定义的子空间中，共轭约束也成立。

为利用这一点，我们假设场强 F 基于一个 K¨ahler 势 $\phi(a^i, \bar{a}^i)$，该势依赖于复坐标 $a^i = x^i + iy^i$ 及其共轭复坐标 $\bar{a}^i = x^i - iy^i$。 x^i 和 y^i （对于 $i = 1,\ldots, p$，其中 $2p \le n$）是成对的实坐标，它们组合成复坐标 a^i。请注意，这里滥用了记号：加号后的 i 表示虚数单位，而用于标记坐标的 i 是一个自然数。在局部范围内，场强为

$$F = \frac{i}{2}\partial_{a^i}\partial_{\bar{a}^j}\phi\, da^i \wedge d\bar{a}^j \tag{4.2}$$

一个满足 $F = dA$ 的可能的一形式 A 为

$$A = \frac{i}{4}\big(\partial_{\bar{a}^i}\phi\, d\bar{a}^i - \partial_{a^i}\phi\, da^i\big) \tag{4.3}$$

经典约束 (3.1) 随即变为

$$\kappa_{a^i} = p_{a^i} + i\partial_{a^i}\phi, \qquad \kappa_{\bar{a}^i} = p_{\bar{a}^i} - i\partial_{\bar{a}^i}\phi, \qquad \kappa_{z^j} = p_{z^j} \tag{4.4}$$

对于 $i = 1,\ldots, p$, $j = 1,\ldots, n - 2p - 1$，其中 $p_{a^i} = \frac{1}{2}(p_{x^i} - ip_{y^i})$ 且 $p_{\bar{a}^i} = \frac{1}{2}(p_{x^i} + ip_{y^i})$。请记住， z^i 是参数化零分布的坐标，见式（2.9）。重要的是，两个约束 κ_{a^i} 和 $\kappa_{\bar{a}^i}$ 互为复共轭。

在量子化时，我们使用由 a^i 和 $\bar{a}^i$上的平方可积函数构成的希尔伯特空间，并采用标准内积。

$$< \psi', \psi >= \int d^{2p}a\, \overline{\psi'(a,\bar{a})}\psi(a,\bar{a}) \tag{4.5}$$

其中 ψ' 和 ψ 是 a 和 $\bar{a}$中的两个函数。在此空间中，$\hat{}p_{a^i} = -i\hbar\partial_{a^i}$ 从而得到量子化约束

$$\hat{\kappa}_{a^i} = \hbar\partial_{a^i} - \partial_{a^i}\phi, \qquad \hat{\kappa}_{\bar{a}^i} = \hbar\partial_{\bar{a}^i} + \partial_{\bar{a}^i}\phi, \qquad \hat{\kappa}_{z^j} = \partial_{z^j} \tag{4.6}$$

对于 $i = 1, ..., p$，它们彼此反共轭 $(\hat{\kappa}_{a^i})^\dagger = -\hat{\kappa}_{\bar{a}^i}$，因为对于标准内积有 $(\partial_{a^i})^\dagger = -\partial_{\bar{a}^i}$。需要强调的是，此处只能选用带常数权重的标准内积 (4.5)，否则 $(\partial_{a^i})^\dagger$ 就不会是 $\partial_{\bar{a}^i}$的反共轭。此外，(4.5) 与量子化约束$\hat{\kappa}_{z^j}\psi = 0$ 相容。

满足$\hat{\kappa}_{\bar{a}^i}\psi = 0$ 的态为

$$\psi(a,\bar{a}) = e^{-\frac{1}{\hbar}\phi(a,\bar{a})}\tilde{\psi}(a) \tag{4.7}$$

将范围限制在这些函数（或更一般地，限制在线丛的截面上，其中联络一形式为 A）时，希尔伯特空间内积 (4.5) 变为

$$< \psi', \psi >= \int d^{2p}a\, e^{-\frac{2}{\hbar}\phi(a,\bar{a})}\overline{\tilde{\psi}'(a)}\tilde{\psi}(a) \tag{4.8}$$

并且，受限希尔伯特空间可以与全纯截面的希尔伯特空间 $\tilde{\psi}(a)$ 识别，其内积带有权重 $e^{-\frac{2}{\hbar}\phi(a,\bar{a})}$。

4.2. 经典极限。 要确定由 (4.8) 定义的希尔伯特空间的经典极限，可以通过将函数 f 的乘法投影到该空间上来定义 Toeplitz 算子 T_f，然后将星乘积 $f\star g$ 提取为算子乘积 T_fT_g 关于 $\hbar$ 的逆幂的渐近展开。

In [19], 证明了，以这种方式构造的 $\star$-乘积会得到一个泊松括号 t

$$\{f, g\} = \theta^{i\bar{j}}\partial_{a^i}\partial_{\bar{a}^i} + \mathcal{O}(\hbar) \tag{4.9}$$

其中 $\theta^{i\bar{j}}$ 是 K¨ahler 度量 $F_{i\bar{j}} = \partial_{a^i}\partial_{\bar{a}^j}\phi$ 的逆。在当前情况下，按照 [19] 的记号，我们可以在 [19], 的公式 (1.6) 中令 $\mu = 1/g$，其中 $g = \det F_{i\bar{j}}$。(4.9) 随即由 [19] 中的公式 (1.16) 得出。

这表明，在一阶近似下，$\star$-乘积对易子等于狄拉克括号（3.7）。

4.3. 径向对称的 K¨ahler 势。 为了推导出这些例子的显式公式，下面假设 $\phi(a,\bar{a}) = \phi(a\bar{a})$ 是径向对称的。在这种情况下，可以显式确定 a 中单项式的内积

$$< a^n, a^m >= \int d^2a\, e^{-\frac{2}{\hbar}\phi(a\bar{a})}\,\bar{a}^n a^m = \int r\, d\varphi dr\, e^{-\frac{2}{\hbar}\phi(r^2)} r^{n+m} e^{i\varphi(m-n)} \tag{4.10}$$

$$= \pi\delta^{nm}\int_0^\infty dx\, e^{-\frac{2}{\hbar}\phi(x)}x^n = \pi\delta^{nm}c_n \tag{4.11}$$

其中 $x = a\bar{a} = r^2$，这里我们引入了正实常数 c_n，它们仅取决于 $\hbar$ 和 ϕ。（我们只考虑使积分收敛的那些 n。）因此，

$$\varphi_n(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi c_n}}a^n \tag{4.12}$$

是希尔伯特空间的一组标准正交基。

算子 $Q(f)$ 的矩阵元，即乘以函数 f 的算子，为

$$Q(f)_{nm} =< \varphi_n, f\varphi_m >= \frac{1}{\pi\sqrt{c_m c_n}} \int d^2a\, e^{-\frac{2}{\hbar}\phi(a\bar{a})}\, \bar{a}^n f(a,\bar{a}) a^m \tag{4.13}$$

（一般而言，当 φ_n 是 H 的一组基时，则 $A\varphi_n = \varphi_m A_{mn}$ 对于矩阵 A 成立。因此 $AB\varphi_n = \varphi_m A_{mp} B_{pn}$。矩阵系数可通过 $< \varphi_m,\ A\varphi_n >= A_{mn}$ 确定。）乘以 a 就成为升算符 $\hat{a} = Q(a)$

$$\hat{a}\varphi_n(a) = a\varphi_n(a) = \sqrt{\frac{c_{n+1}}{c_n}} \frac{1}{\sqrt{\pi c_{n+1}}} a^{n+1} = \sqrt{\frac{c_{n+1}}{c_n}} \varphi_{n+1}(a) \tag{4.14}$$

由于乘以 $\bar{a}$ 是乘以 a 的厄米共轭，见（4.13），$\hat{\bar{a}} = Q(\bar{a}) = \hat{a}^\dagger$ 是降算符

$$\hat{\bar{a}}\varphi_n = \sqrt{\frac{c_n}{c_{n-1}}} \varphi_{n-1} \tag{4.15}$$

由此可知，对易子是对角的

$$[\hat{a}, \hat{\bar{a}}]\varphi_n = \Big(\frac{c_n}{c_{n-1}} - \frac{c_{n+1}}{c_n}\Big)\varphi_n \tag{4.16}$$

例 4.1. 夹断圆盘

接续夹断圆盘的例 2.1 $F = 0$ 对于 $r > r_0$，我们将内积 (4.8) 限制在半径为 r_0 的圆盘上。

$$< \psi', \psi >= \int_0^{r_0} r dr\, e^{-\frac{1}{\hbar}r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi\, \tilde{\psi}'(re^{-i\varphi}) \tilde{\psi}(re^{i\varphi}) \tag{4.17}$$

此外，我们选择了 $\phi = \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}a\bar{a}$，它是恒定场强 $F = \frac{i}{2} da \wedge d\bar{a} = r dr \wedge d\varphi$ 的一个解。

常数 c_n (4.11) 变为下不完全伽马函数

$$c_n = \int_0^{\sqrt{r_0}} dx\, e^{-\frac{1}{\hbar}x} x^n = \frac{n!}{\hbar^n}\Big(1 - e^{-\frac{1}{\hbar}\sqrt{r_0}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{r_0}^k}{\hbar^k k!}\Big) \tag{4.18}$$

在 $\hbar$ 较小的极限下，对易子变为

$$[\hat{a}, \hat{\bar{a}}] = -\hbar + \mathcal{O}\Big(e^{-\frac{1}{\hbar}r^2}\Big) \tag{4.19}$$

对于正确的量子化，我们预期对易子恰好为 $-\hbar$，并且基态的数量是有限的，因为球面（应当是经典极限）具有有限的面积。

例 4.2。平面堆叠

对于例2.2中的平面堆叠，我们考虑在 $\mathbb{R}^3$ 中坐标为 x，y，z 的势 $A = -\frac{y}{2}\, dx + \frac{x}{2}\, dy$，其具有恒定场强 $F = d\bar{x} \wedge dy$。量子化约束 (4.4) 为

$$\hat{\kappa}_x = \partial_x + \frac{iy}{2\hbar}, \qquad \hat{\kappa}_y = \partial_y - \frac{ix}{2\hbar}, \qquad \hat{\kappa}_z = \partial_z, \tag{4.20}$$

使用复坐标 $a = x + iy$ ($\partial_a = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$) 得到

$$\hat{\kappa}_a = \partial_a - \frac{\bar{a}}{4\hbar}, \qquad \hat{\kappa}_{\bar{a}} = \partial_{\bar{a}} + \frac{a}{4\hbar}, \qquad \hat{\kappa}_z = \partial_z, \tag{4.21}$$

对于量子化方案 (4.5)，约束$\hat{\kappa}_z$ 自动变为 0。由于关于 z 的规范不变性，所有与 z 正交的平面都被视为相同。

另外两个约束导出通常的福克空间量子化。结合前例中的 $r_0 \to \infty$ ，我们可推得

$$c_n = \frac{n!}{\hbar^n} \tag{4.22}$$

and

$$[\hat{a}, \hat{\bar{a}}] = -\hbar \tag{4.23}$$

例4.3。 磁单极子场强

我们继续讨论例2.3，其中磁单极子场强为 F，电荷为 N。为描述嵌套球面的相应 K¨ahler 结构，我们首先将嵌套球面立体投影到一叠复平面上，并介绍这两个立体投影。

我们定义从 $\mathbb{R}^3 \setminus \{r \pm z \neq 0\}$ 到 $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ 的坐标变换:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad a_\pm = \frac{x + iy}{r \pm z}, \qquad \bar{a}_\pm = \frac{x - iy}{r \pm z} \tag{4.24}$$

这些坐标变换对 $r \pm z = 0$ 未定义，可以将其视为单极场线丛的坐标图之间的映射，如例2.3所述。

由（4.24）可得

$$a_\pm \bar{a}_\pm = \frac{x^2 + y^2}{(r \pm z)^2}, \qquad 1 + a_\pm \bar{a}_\pm = \frac{2r}{r \pm z} \tag{4.25}$$

因此，反向变换为

$$x = r\frac{a_\pm + \bar{a}_\pm}{1 + a_\pm \bar{a}_\pm}, \qquad y = -ir\frac{a_\pm - \bar{a}_\pm}{1 + a_\pm \bar{a}_\pm}, \qquad z = \mp r\frac{a_\pm \bar{a}_\pm - 1}{1 + a_\pm \bar{a}_\pm} \tag{4.26}$$

由此可知，同一点（x， y， z）映射到点（r， a_+）和（r， a_-），其中 $a_+ a_- = 1$，这意味着坐标图之间的映射是 $a_+ \mapsto \frac{1}{a_+}$。

在坐标（4.24）中，相应坐标图上的狄拉克势（2.12）变为

$$A_\pm = \mp\frac{iN}{2}\frac{1}{1 + a_\pm \bar{a}_\pm}\left(\bar{a}_\pm da_\pm - a_\pm d\bar{a}_\pm\right) \tag{4.27}$$

将 A_+（r， a_+）映射到 A_-（r， a_+）的局域规范变换为 $g_{+-} = \frac{1}{a_+^N}$。因此，曲率为 F 的全纯线丛由关于 $a_\pm$ 的次数至少为 N的多项式构成。

从现在起，我们只考虑带有 $a = a_+$的第一个坐标图。量子化约束 (4.4) 变为

$$\hat{\kappa}_a = \hbar\partial_a + \frac{N}{2}\frac{\bar{a}}{1 + a\bar{a}}, \qquad \hat{\kappa}_{\bar{a}} = \hbar\partial_{\bar{a}} + \frac{N}{2}\frac{a}{1 + a\bar{a}}, \qquad \hat{\kappa}_r = \partial_r \tag{4.28}$$

而前两个约束可以用 K¨ahler 势来表示

$$\phi = \ln\left(1 + a\bar{a}\right)^{\frac{N}{2}} \tag{4.29}$$

对于量子化方案 (4.5)，约束$\hat{\kappa}_r$ 会自动变为 0。由于关于 r 的规范不变性，不同半径的球面彼此等同。

常数 c_n (4.11)变为

$$c_n = \int_0^\infty dr\, r^{2n+1} \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{N}{\hbar}}} = \frac{1}{2} n! \frac{\Gamma(\frac{N}{\hbar} - n - 1)}{\Gamma(\frac{N}{\hbar})} \tag{4.30}$$

将 $u = r^2$ 代入左侧即可证明这一点，所得的贝塔函数计算后即为右侧。当 $\frac{N}{\hbar}$ 为整数时，级数在 $n > \frac{N}{\hbar} - 1$处终止，因为此时伽马函数存在奇点。否则，对于所有 $n > 0$，常数c_n 都存在；不过我们将在下文中排除这些无限维表示。

由(4.14, 4.15)可得

$$\hat{a}\varphi_n = \sqrt{\frac{n+1}{\frac{N}{\hbar} - (n+1)}}\varphi_{n+1}, \qquad \hat{a}^\dagger \varphi_n = \sqrt{\frac{n}{\frac{N}{\hbar} - n}}\varphi_{n-1} \tag{4.31}$$

当我们令 $\frac{N}{\hbar} = 2J + 1$ 和 $m = J - n$ 相等并代入 $|m\rangle = \varphi_n$时，算子

$$J_+ = \frac{N}{\hbar}\hat{a}^\dagger (1 + \hat{a}\hat{a}^\dagger)^{-1}, \qquad J_- = \frac{N}{\hbar}(1 + \hat{a}\hat{a}^\dagger)^{-1}\hat{a} \tag{4.32}$$

（比较(4.26)）满足

$$J_+ |m\rangle = \sqrt{J(J+1) - m(m+1)}\, |m\rangle\,, \qquad J_- |m\rangle = \sqrt{J(J+1) - m(m-1)}\, |m\rangle \tag{4.33}$$

也就是说，它们是自旋 J 升算符和降算符。这证实我们确实获得了一个模糊球面，作为量子化相空间。

5. Comparision to Connes' approach

在 [2] 紧流形 V上给定叶状结构 F时，可定义一个可能非交换的 C^*代数 $C^*(V,\ F)$。

$C^*(V,\ F)$是叶状结构整体单值群胚上函数代数的完备化。整体单值群胚建立在路径之上，这些路径连接叶状结构中的点，并且与叶状结构平行。这意味着，只有连接同一叶内点的路径才会出现。在整体单值群胚中，具有相同平行移动整体单值性的路径被视为等价，即按照等价关系加以识别。整体单值群胚上的函数定义了卷积乘积，其中使用了叶状结构的横截测度。可以证明，当叶状结构 F 由浸没 $p\colon V \to B$给出，使得叶为 $p^{-1}(x)$ $x \in B$ 时，代数 $C^*(V,\ F)$与 $C_0(B)$同构；后者是 B上在∞处消失的连续函数代数。

在本文所介绍的方法中，叶状结构中同一叶上的所有点都通过规范不变性加以识别，这意味着同一叶内存在一条连接这些点的路径。非交换乘积定义在叶空间上的函数代数中。这与 [2] 类似。不过，我们给出了若干基于平面（$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$）或球面 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to S_2$ 的浸没的例子，这些例子产生了非交换代数，表明本文的方法不同于 [2] 中的方法。

6. Discussion

在这项工作中，我们通过分析电磁场中带电粒子的强场极限，建立了约束哈密顿系统与非交换几何之间的联系。

该系统的一个显著特征是，约束被分类为第一类还是第二类，会因场强的局部秩而随点变化F_{ij}。在 F 秩达到最大值的区域，所有约束都是第二类，物理自由度也因此完全确定。在 F 秩降低的区域，部分约束会变为第一类，从而产生局部规范对称性，将零分布的叶上的点识别起来。这种情况不同于标准规范理论，在标准规范理论中，规范群在整个时空中一致地作用。这里，规范对称性由李代数丛而非李代数来编码，其结构随场强的几何性质而变化。

系统（1.2）是一般协变理论的一个易于处理的玩具模型。与广义相对论一样，它具有一个消失的哈密顿量，其动力学完全由约束支配。不存在优先时间参数，反映了作用量的重参数化不变性。然而，当前系统足够简单，可以进行显式量子化。通过施加量子约束，可以直接构造物理态空间；所得希尔伯特空间具有清晰的几何解释，即零分布叶空间的量子化。

或许，这项工作中最引人注目的结果，是非交换几何从约束哈密顿系统的量子化过程中自然涌现。狄拉克括号 (3.7) 表明，物理态空间上的坐标函数彼此不满足泊松对易关系，其括号由场强的逆给出。量子化后，这意味着坐标算符彼此不对易。

这些例子展示了不同的场构型如何产生不同的非交换几何。特别是，磁单极子场强会产生一个模糊球面，说明紧致非交换空间可由拓扑非平凡的场构型自然产生。

总之，带电粒子在电磁场中的强场极限提供了一个丰富且易于处理的模型，将约束哈密顿动力学、奇异叶状结构与非交换几何联系起来。

References

[1] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, 剑桥大学出版社, 2004, https://www.cambridge.org/core/books/quantum-gravity/9EEB701AAE938F00DCF151AACE1A445D

[2] *Noncommutative Geometry* A. Connes, , Academic Press, 圣迭戈, CA, 1994, https://alainconnes.org/wp-content/uploads/book94bigpdf.pdf

[3] *Quantum Geometry* H. C. Steinacker, , *Matrix Theory, and Gravity*, 剑桥大学出版社, 2024, https://homepage.univie.ac.at/harold.steinacker/matrix-fuzzy-physics-book-openversion.pdf

[4] H. Steinacker, *Emergent Geometry and Gravity from Matrix Models: an Introduction*, arXiv:1003.4134 [ ] 2010 https://arxiv.org/abs/1003.4134 hep-th , , M. B. Frob, K. Papadopoulos and W. C. C. Lima,

[5] *Non-commutative Geometry from Perturbative Quantum Gravity* **107**, 064041 2023 2207 03345 [ ] https://arxiv.org/ , 《物理评论D》 ( ), arXiv: . gr-qc ,abs/2207.03345

[6] M. Greiter, *Landau Level Quantization on the Sphere*, 《物理评论B》 **83**, 115129 (2011), https://journals.aps.org/prb/abstract/10.1103/PhysRevB.83.115129

[7] *Quantization of Gauge Systems* M. Henneaux, C. Teitelboim, , 普林斯顿大学出版社, 1992, https://press.princeton.edu/books/paperback/9780691037691/quantization-of-gauge-systems

[8] Y. Shnir, *Magnetic Monopoles*, Springer-Verlag, 柏林、海德堡, 2005, https://link.springer.com/book/10.1007/3-540-29082-6 [9] M. R. Douglas, S. Klevtsov, *Bergman Kernel from Path Integral*, 《数学物理通讯》 **293**, 205–230 (2010 https://arxiv.org/abs/0808.2451), S. Klevtsov, [10] *Bergman Kernel from the Lowest Landau Level* **192 193**, , Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) — ( ) 154 155 2009 [11] J. Madore, *The Fuzzy Sphere*, 《经典与量子引力》 **9**, 69–87 (1992), https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/9/1/008 [12] J. Hoppe, *Quantum Theory of a Massless Relativistic Surface and a Two-Dimensional Bound State Problem* 1982 https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/15717 , 博士论文, 麻省理工学院, , [13] C. Laurent-Gengoux, R. Louis, L. Ryvkin, *Geometry of Singular Foliations: a Draft of an Introduction*, https://www.crm.cat/wp-content/uploads/2022/07/Singular-Foliations.pdf [14] *Lectures on the Geometry of Quantization* S. Bates, A. Weinstein, , ~alanw/GofQ.pdf https://math.berkeley.edu/ [15] M. Schottenloher, *Lecture Notes on Geometric Quantization*, uni-muenchen.de/~schotten/GEQ/GEQ.pdf https://www.mathematik. [16] M. Bordemann, E. Meinrenken, M. Schlichenmaier, *gl N N → ∞ Limits* *Toeplitz Quantization of Kähler Manifolds and* **165**, 281 296 1994 https://arxiv.org/abs/hep-th/ ( ) , 《数学物理通讯》 ( ), 9209134 [17] X. Ma, G. Marinescu, *Toeplitz Operators on Symplectic Manifolds*, J. Geom. Anal.**18**, 565–611 (2008), https://arxiv.org/abs/0806.2570 [18] M. Schlichenmaier, *Berezin-Toeplitz Quantization for Compact Kähler Manifolds. A Review of Results*, Adv. Math. Phys., 第2010卷, 文章编号 927280, https://www.researchgate.net/publication/45905910_Berezin-Toeplitz_Quantization_for_Compact_Kahler_Manifolds_A_Review_of_Results [19] *Weighted Bergman kernels and ⋆-products* https://arxiv.org/abs/2503.09322 A. Sykora, ,

(ANDREAS SYKORA)*Email address*:
syko@gelbes-sofa.de