arXiv:2601.04258v1 [math.CO] 6 Jan 2026

n丛的枚举

Arjun Maniyar

摘要

Palmer 提供了一种在 [3], 中枚举丛 的方法，但其循环指标公式 $Z(S_p^{(r)})$以及 s_p^n的取值存在一些排版错误； s_p^n表示 p 个点上的 n丛数量。本文旨在给出正确的公式。

1 引言

阶为 p 的 n丛 是一个含有 p 个点的 n维单纯复形，其中每个极大单形的维数为 n或 0（极大单形是指不属于任何更大单形面的单形）。例如，每个图都是一个 1-丛。本文关注的是对这些结构进行计数。注意，这个问题等同于计算以p 个顶点为顶点的$(n+1)$-均匀超图数量。本文使用的所有思想和记号均来自 [3], ；本文的唯一目的是给出$(S_p^{(r)})$的正确公式以及 s_p^n的正确取值。

令 $s_p^n(x)$ 表示阶为 p 的 n-复形的计数多项式，因此根据定义有

$$s_p^n(x) = \sum s_{p,k}^n x^k,$$

其中 $s_{p,\ k}^n$ 是具有 k 个维数为 n 的单形的 n-复形的数量。

为了对这些结构计数，我们首先需要给出一些定义。令 A 为作用在集合 $X = \{1, 2, \ldots, p\}$ 上的一个置换群。首先回顾一下，任意置换都可以唯一地写成若干个不相交循环的乘积。现在，对于 A 中的一个置换 α，令 $j_k(\alpha)$ 表示恰含 k 个元素的循环数量。令 y_1， y_2，……， y_p 为变量，我们将 A 的循环指标 定义为

$$Z(A) = \frac{1}{|A|} \sum_{\alpha \in A} \prod_{k=1}^{p} y_k^{j_k(\alpha)} = \frac{1}{|A|} \sum_{\alpha \in A} y_1^{j_1(\alpha)} \cdots y_p^{j_p(\alpha)}.$$

为了显示变量，我们也可以写作 $Z(A) = Z(A; y_1, \ldots, y_p)$。我们也可以使用这种记号，将函数 $f(x)$ 代入 $Z(A)$

$$Z(A, f(x)) = Z(A; f(x), f(x^2), \ldots, f(x^p)).$$

A对集合 X 的作用会诱导出相应的置换群$A^{(r)}$，称为 A的 r-群，它作用于 X的所有 r元子集所组成的集合 $X^{(r)}$。也就是说，每个置换 $\alpha \in A$ 都会诱导出一个置换$\alpha' \in A^{(r)}$，使得对于每个 $\{i_1, \ldots, i_r\} \in X^{(r)}$,

$$\alpha'\{i_1, \ldots, i_r\} = \{\alpha i_1, \alpha i_2, \ldots, \alpha i_r\}. \tag{1}$$

我们假设 $r \leq p$，因此 $X^{(r)}$ 非空。注意， $A^{(r)}$和 $A^{(p-r)}$ 是相同的置换群。这是因为 $X^{(r)}$ 中的每个元素都与 $X^{(p-r)}$ 中的一个元素一一对应，对应方式是取 X中各子集的补集，因此 $A^{(r)}$ 和 $A^{(p-r)}$ 只是元素名称不同，实为相同的置换群。因此，我们有

$$Z(A^{(r)}) = Z(A^{(p-r)}). \tag{2}$$

Frank Harary 在 [1] 中指出，P´olya 枚举定理 [4] 可用于用对称群 S_p的二元组群 $S_p^{(2)}$的循环指标来表示图的计数多项式 $s_p^1(x)$。类似地，也可证明以下结果（证明见 [2, 第 25, 32] 页）。

定理 1.1. 设 $p \geq n+1$，则阶为 p 的 n-*plex* 的计数多项式 s_p^n 由下式给出

$$s_p^n(x) = Z(S_p^{(n+1)}, 1+x),$$

其中 $S_p^{(n+1)}$是对称群 S_p的（$n+1$）群。

n-元组的总数 s_p^n 可以通过将 $x = 1$ 代入此公式计算。要应用这一结果，需要循环指标 $Z(S_p^{(n+1)})$。下一节将介绍计算该循环指标的方法。

2 计算 $S_p^{(r)}$的循环指标

我们先求出 S_p的循环指标。注意，循环指标只取决于置换中各循环的长度，而与循环内部的元素无关。因此，我们可以将具有相同循环结构的项归为一组。令 $(j) = (j_1, \ldots\ldots, j_p)$ 表示 p 的一个整数分拆，其中 j_k 是等于 k 的部分的数量。注意，每个置换 α 属于 S_p，都对应一个整数分拆 (j)，其中对于所有 k， $j_k = j_k(\alpha)$。并且，由于 S_p 中对应于分拆 (j) 的置换有$h(j) = p!/(\prod_k k^{j_k} j_k!)$ 个，我们得到 $Z(S_p)$的如下公式。

$$Z(S_p) = \frac{1}{p!} \sum_{(j)} h(j) \prod_k y_k^{j_k} = \frac{1}{p!} \sum_{(j)} \frac{p!}{\prod_k k^{j_k} j_k!} y_1^{j_1} \cdots y_p^{j_p},$$

其中，求和遍及 p 的所有分拆 (j)。

用于计数图的 $Z(S_p^{(2)})$的显式公式也是已知的，可在许多书籍和文章中找到，例如参见 [2, § 6]。但是，要为 $r \geq 3$中的 $Z(S_p^{(r)})$找到显式公式就更加困难和繁琐了，参见 [3] ，其中介绍了寻找 $Z(S_p^{(3)})$显式公式的一种方法。不过，Palmer 在 [3]中提供了一种更简单的方法，无需寻找显式公式即可求出循环指标 $Z(S_p^{(r)})$。下面将概述这种方法。

设(j)是 p 的一个整数分拆，并假设 α 是 S_p中的一个置换，其不相交循环分解对应于(j)，也就是说，对所有 k，都有 $j_k = j_k(\alpha)$。我们希望求出 α' 在 $S_p^{(r)}$中的诱导置换的循环结构，也就是说，对每个 k，我们要找出 $j_k(\alpha')$。首先使用以下公式：

$$j_1(\alpha') = \sum_{(i)} \prod_k \binom{j_k}{i_k}, \tag{3}$$

其中，求和遍及 r的所有分拆$(i) = (i_1, i_2, \ldots\ldots)$。为说明其正确性，考虑 $r = 4$的情形。设 $p = 8$ ，且 $\alpha = (1)(2\ 3)(4\ 5)(6\ 7\ 8)$。根据 α'的定义（见公式（1））， 一个4元子集被 α' 固定，当且仅当它是 α 的若干个不相交循环的并，且这些循环的总长度为4。在这个例子中， α' 只固定以下两个4元子集： $\{1, 6, 7, 8\}$ （一个3循环和一个1循环的并）以及 $\{2, 3, 4, 5\}$ （两个2循环的并）。因此，在这种情况下， $j_1(\alpha') = 2$。类似地，对于 $S_p^{(4)}$中的任意 α' ，1循环的数量 $j_1(\alpha')$由以下公式给出

$$\binom{j_1}{4} + \binom{j_1}{2}\binom{j_2}{1} + \binom{j_2}{2} + \binom{j_1}{1}\binom{j_3}{1} + \binom{j_4}{1}.$$

注意，如果 α_1 和 α_2 具有相同的循环结构，那么 $j_1(\alpha_1') = j_1(\alpha_2')$。因此，利用方程（3）为每个分拆 (j) 计算 $j_1(\alpha')$，即可得到 $S_p^{(r)}$中所有置换 α' 的 $j_1(\alpha')$。

现在设（j）是 p 的一个分拆，且 β 是 S_p 中与该分拆对应的一个置换。由方程（3）可知，对于每个 m，我们已经有 j_1（（β^m）′）。还要注意，（β^m）′ =（β'）^{m}，这直接由诱导置换的定义得出（见方程（1））。现在注意，在 β'中的一个 d-循环当且仅当 $d|m$时会变成（β'）^{m} 中的一个1循环，因为将一个置换提升到 m次方，恰好会固定循环长度整除 m的那些元素。此外，如果 $d|m$，那么 β' 中的每个 d-循环都会在（β'）^{m}中变成 d 1个循环。因此我们得到如下公式 [1]

$$j_1((\beta')^m) = \sum_{d|m} d j_d(\beta'). \tag{4}$$

[1]在 [3], 中，Palmer 在公式（4）的求和前加了一个因子 $1/m$ ，但这似乎是个排版错误。

我们可以依次对 $m=2$、3、4、.....使用这个公式来计算 j_m（β'）。因此，我们可以确定 Z（$S_p^{(r)}$）中 β' 的贡献。对于每个分拆（j），都可以重复这一过程（我们只对所选分拆（j）的一个置换应用此方法，因为与（j）对应的所有其他置换具有相同的贡献）。最后，将所有贡献相加，即可得到 Z（$S_p^{(r)}$）。我们还可以使用 [3] 中的以下公式来加快计算：如果 β' 对循环指标的贡献为 $\Pi y_k^{j_k}$，那么任意幂（β'）^{m} 的贡献为

$$\prod_k y_{k/(m,k)}^{(m,k)j_k}.$$

有关通过此方法计算得出的循环指标公式，请参见第4节。

3 n-团的数量

本节使用第4节中的公式计算 p 个点上的n-团数量 s_p^n。根据定理 1.1，我们已经知道

$$s_p^n(x) = Z(S_p^{(n+1)}, 1+x).$$

要计算 s_p^n，我们需要在方程中代入 $x=1$。这等同于直接将循环指标$Z(S_p^{(n+1)})$ 中每个变量 y_i 替换为 $y_i=2$。利用第4节中的公式，可得下表，其中列出了 $p \le 9$ 和 $n \le 3$ 对应的 s_p^n。

表1：阶为 $p \le 9$的n-团的数量。

p \ n	1	2	3
1	1	1	1
2	2	1	1
3	4	2	1
4	11	5	2
5	34	34	6
6	156	2136	156
7	1044	7013320	7013320
8	12346	1788782616656	29281354514767168
9	274668	53304527811667897248	2344317455340489227311115555415680

4 $Z(S_p^{(r)})$ 的公式

本节列出 $p \le 9$ 的所有 $Z(S_p^{(r)})$ 公式。由于 $Z(S_p)$ 和 $Z(S_p^{(2)})$ 的精确公式已知，因此我们只给出 $r = 3, 4$ 时的公式。利用方程（2），以下 6 个公式完整列出了 $p \le 9$ 对应的 $Z(S_p^{(r)})$。尽管我们预计 $Z(S_p^{(r)})$ 的项数与 p 的整数分拆数相同，但由于相同的项已合并，下面的表达式可能包含较少的项。例如，尚未合并的 $S_6^{(3)}$ 的循环指标为:

$$\begin{aligned} Z(S_6^{(3)}) = \frac{1}{6!}(&a_1^{20} + 15a_1^8a_2^6 + 45a_1^4a_2^8 + 40a_1^2a_3^6 + 40a_1^2a_3^6 + 120a_1^2a_3^2a_6^2 \\ &+ 15a_2^{10} + 90a_2^2a_4^4 + 90a_2^2a_4^4 + 120a_2a_6^3 + 144a_5^4). \end{aligned}$$

合并后的循环指标如下所列。

$$\begin{aligned} Z(S_6^{(3)}) = \frac{1}{6!}(&a_1^{20} + 15a_1^8a_2^6 + 45a_1^4a_2^8 + 80a_1^2a_3^6 + 120a_1^2a_3^2a_6^2 + 15a_2^{10} \\ &+ 180a_2^2a_4^4 + 120a_2a_6^3 + 144a_5^4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(S_7^{(3)}) = \frac{1}{7!}(&a_1^{35} + 21a_1^{15}a_2^{10} + 105a_1^7a_2^{14} + 70a_1^5a_3^{10} + 105a_1^3a_2^{16} \\ &+ 420a_1^3a_2a_3^4a_6^3 + 280a_1^2a_3^{11} + 420a_1a_4a_6a_{12}^2 + 840a_1a_2^3a_4^7 \\ &+ 210a_1a_2^2a_3^2a_6^4 + 504a_5^3a_{10}^2 + 840a_2a_3a_6^5 + 504a_5^7 + 720a_7^5). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z(S_8^{(3)}) = \frac{1}{8!}(&a_1^{56} + 28a_1^{26}a_2^{15} + 210a_1^{12}a_2^{22} + 112a_1^{11}a_3^{15} + 420a_1^6a_2^{25} \\ &+ 1120a_1^5a_2^3a_3^7a_6^4 + 420a_1^4a_2^4a_4^{11} + 1680a_1^3a_2^4a_3^3a_6^6 + 2520a_1^2a_2^5a_4^{11} \\ &+ 1120a_1^2a_3^{18} + 1120a_1^2a_3^8a_6^5 + 4032a_1a_5^5a_{10}^3 + 3360a_1a_2a_3a_4^2a_6a_{12}^3 \\ &+ 2688a_1a_5^2a_{15}^3 + 1344a_1a_5^{11} + 105a_2^{28} + 1260a_2^6a_4^{11} + 3360a_2a_3^2a_6^8 \\ &+ 3360a_2a_6^9 + 1260a_4^{14} + 5760a_7^8 + 5040a_8^7). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Z(S_9^{(3)}) =& \frac{1}{9!}(a_1^{84} + 36a_1^{42}a_2^{21} + 168a_1^{21}a_3^{21} + 378a_1^{20}a_2^{32} + 1260a_1^{10}a_2^{37} \\
&+ 756a_1^{10}a_2^5a_4^{16} + 2520a_1^9a_2^6a_3^{11}a_6^5 + 7560a_1^5a_2^8a_3^5a_6^8 + 945a_1^4a_2^{40} \\
&+ 7560a_1^4a_2^8a_4^{16} + 3024a_1^4a_5^{16} + 5600a_1^3a_3^{27} + 10080a_1^3a_3^{13}a_6^7 \\
&+ 18144a_1^2a_2a_5^8a_{10}^4 + 11340a_1^2a_2^9a_4^{16} + 15120a_1a_2^2a_3^3a_4^4a_6a_{12}^4 \\
&+ 15120a_1a_2^2a_3a_4^4a_6^2a_{12}^4 + 24192a_1a_3a_5^4a_{15}^4 + 2520a_1a_2^{10}a_3^3a_6^9 \\
&+ 30240a_1a_2a_3^3a_6^{12} + 30240a_1a_2a_3a_6^{13} + 9072a_2^2a_5^4a_{10}^6 \\
&+ 18144a_4a_5^2a_{10}a_{20}^3 + 25920a_7^6a_{14}^3 + 11340a_2^2a_4^{20} + 40320a_3a_9^9 \\
&+ 45360a_4a_8^{10} + 25920a_7^{12}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z(S_8^{(4)}) =& \frac{1}{8!}(a_1^{70} + 28a_1^{30}a_2^{20} + 210a_1^{14}a_2^{28} + 112a_1^{10}a_3^{20} + 525a_1^6a_2^{32} \\
&+ 1120a_1^6a_2^2a_3^8a_6^6 + 1120a_1^4a_3^{22} + 3360a_1^2a_4^2a_6^2 + 4200a_1^2a_2^6a_4^{14} \\
&+ 1680a_1^2a_2^4a_3^4a_6^8 + 1260a_1^2a_2^2a_4^{16} + 4032a_5^6a_{10}^4 + 2688a_5^2a_{15}^4 \\
&+ 1120a_2^2a_3^{10}a_6^6 + 6720a_2^2a_3^2a_6^{10} + 5040a_2a_4a_8^8 + 1344a_5^{14} + 5760a_7^{10}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z(S_9^{(4)}) =& \frac{1}{9!}(a_1^{126} + 36a_1^{56}a_2^{35} + 378a_1^{26}a_2^{50} + 168a_1^{21}a_3^{35} + 1260a_1^{12}a_2^{57} \\
&+ 2520a_1^{11}a_2^5a_3^{15}a_6^{10} + 945a_1^6a_2^{60} + 756a_1^6a_2^{10}a_4^{25} + 3360a_1^6a_3^{40} \\
&+ 7560a_1^5a_2^8a_3^7a_6^{14} + 7560a_1^4a_2^{11}a_4^{25} + 15120a_1^3a_2a_3a_4^4a_6^3a_{12}^7 \\
&+ 2520a_1^3a_2^9a_3^3a_6^{16} + 11340a_1^2a_2^{12}a_4^{25} + 10080a_1^2a_2^2a_3^{18}a_6^{11} \\
&+ 11340a_1^2a_2^2a_4^{30} + 9072a_1a_5^5a_{10}^{10} + 18144a_1a_5^{11}a_{10}^7 \\
&+ 18144a_1a_5a_{10}^2a_{20}^5 + 15120a_1a_2^2a_3a_4^4a_6^3a_{12}^7 + 24192a_1a_5^4a_{15}^7 \\
&+ 3024a_1a_5^{25} + 25920a_7^8a_{14}^5 + 10080a_2^3a_3^4a_6^{18} + 30240a_2^3a_3^2a_6^{19} \\
&+ 45360a_2a_4a_8^{15} + 2240a_3^{42} + 20160a_3^4a_6^{19} + 25920a_7^{18} + 40320a_9^{14}).
\end{aligned}
$$

致谢

这项工作是我暑期项目的一部分，项目由本科生研究支持计划（URSS）资助。我在 Helena Verrill 的指导下于华威数学研究所开展了该项目。这些公式中的错误由我的导师指出。在整个项目期间，我的导师 Helena Verrill 持续给予我指导、支持和反馈，对此我深表感谢。

参考文献

[1] Frank Harary。线性、有向、根图和连通图的数量。美国数学会会刊，78(2):445– 463，1955。[2] Frank Harary，编。《图论研讨会》。Holt, Rinehart and Winston，纽约，1967。[3] Edgar M. Palmer。关于 n- 丛的数量。离散数学，6(4):377–390，1973。ISSN 0012-365X。doi: https://doi.org/10. 1016/0012-365X(73)90069-1。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X73900691。[4]George P´olya。关于群、图和化学化合物的组合计数。数学学报，68:145–254，1937。