基于仅知逻辑的命题溯因：一种非单调方法

Sanderson Molick巴西联邦研究所人文学院 Par´a Par´a，巴西
smolicks@gmail.com

Vaishak Belle爱丁堡大学信息学院*爱丁堡，英国
vbelle@ed.ac.uk

本文通过在 Levesque 的仅知逻辑中加入一个由基本认知概念组合定义的溯因模态算子，提出了一种基础的知识与溯因逻辑。由此得到一种溯因的替代方法，它采用模态词汇，并探究溯因推理与仅知认知状态之间的关系。此外，我们将优先关系纳入模态框架，从而为基础框架提供一种非单调扩展，使其能够表达不同的溯因解释选择方法。本文探讨了这一框架下非单调后承关系的核心元理论性质，并表明该框架为溯因推理提供了良好的基础。

1 引言

溯因推理是当代人工智能知识表示理论的核心组成部分（参见 [22] 或 [21]）。逻辑 $\mathscr{L}$ 中的溯因问题通常表示为背景理论 Θ 与观测事件 α的组合，其中 $\Theta \not\models_{\mathscr{L}} \alpha$。由这一对 $\langle \Theta, \alpha \rangle$ 所描述问题的解，是一个公式 φ （也称为解释项或解释），满足$\Theta \cup \{\varphi\} \models_{\mathscr{L}} \alpha$。

本文探讨如何选择解释 φ，使其与主体的背景知识 Θ相一致，并能对观测事件 α提供解释。为此，我们提出 Levesque 的仅知逻辑（$\mathscr{OL}$）的一种新扩展，使其能够在主体背景知识的认知界限内表达溯因推理。这一模态框架称为仅知与溯因逻辑（下文记作 $\mathscr{AOL}$）。在 $\mathscr{AOL}$ 中，溯因被视为一种派生模态，通过基本认知概念之间的相互作用来定义。该框架通过加入溯因算子 A 构建，该算子以认知模态 O 和 K 定义（其中 Oφ表示主体“仅知 φ”，Kφ 表示主体“知道 φ”）。因此，溯因被理解为一种知识获取的认知过程，这与皮尔士式溯因理论的观点一致，例如 A. Aliseda 所探讨的理论（[1]）。

通过 $\mathscr{OL}$发展基于知识的溯因解释这一问题，最早由 Levesque（[11]）提出，旨在区分隐式信念与显式信念。其他基于模态逻辑的溯因解释，例如 [17], , 是在动态认知逻辑及相关框架内探讨溯因；而我们的方法着重于选择与主体仅知的背景知识相兼容的解释，从而将溯因建模为一种以基本认知状态为基础的结构化推理。为此，本文介绍了仅知与溯因的基本逻辑（$\mathscr{AOL}$），以及一种

*Vaishak Belle 获得了 CISCO 资助金和英国皇家学会大学研究奖学金。

M. Gebser、D. Inclezan、F. Ricca、M. Carro 和 M. Truszczynski：第41届国际逻辑编程会议（ICLP 2025），EPTCS439，2026，第5–17页，doi:10.4204/EPTCS.439.2

© Molick, S. 和 Belle, V. 本作品依据知识共享署名许可授权。

非单调扩展（逻辑 $\mathscr{AOL}^{\neg}$），通过为底层模态框架增添偏好结构来实现。此外，我们还在该框架内探讨溯因模态在一致性、解释力和最小性方面的形式属性。

概述。第2节介绍基本框架的句法和语义。第2节和第3节还介绍了溯因模态在刻画基于逻辑的溯因理论关键方面时的核心性质。随后，在第4节中，我们通过可信度语义扩展模态框架，并引入一种基于仅知与溯因逻辑的非单调后承关系。此举使人们能够针对给定的溯因问题 $\langle\Theta, \alpha\rangle$ 选择极小解释。本节还介绍了一种极小解释的集合论方法，该方法采用不同的标准来选择极小解释。在第5节中，我们证明了非单调框架的核心元理论结果。最后，本文在第6节讨论相关工作和未来探索方向。

2 预备知识：逻辑 $\mathscr{AOL}$

句法

我们考虑一种模态命题语言 $\mathbf{Lo}_{,\mathbf{A}}$，它由可数集的原子（At）、标准布尔联结词 $\neg, \wedge$ 和 $\rightarrow$，以及三个认知算子 K、O 和 A 构成。$\mathbf{Lo}_{,\mathbf{A}}$ 的公式集（记作 $\mathrm{Fm}(\mathbf{Lo}_{,\mathbf{A}})$）按如下方式归纳定义：

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \rightarrow \varphi \mid \mathbf{K}\varphi \mid \mathbf{O}\varphi \mid \mathbf{A}\varphi,$$

其中 $p \in \mathrm{At}$。我们用 ψ、φ、δ 等表示任意个体公式，用 Γ、Δ、Θ 等表示 $\mathrm{Fm}(\mathbf{Lo}_{,\mathbf{A}})$ 中的公式集。我们将遵循 Levesque 的表述（[12]），并将 $\mathrm{O}\varphi$ 读作“主体仅知道 φ”，将 $\mathrm{K}\varphi$ 读作“主体知道或相信 φ”。此外，$\mathrm{A}\varphi$ 读作“主体通过溯因知道 φ”。如果一个公式是布尔公式，且前面仅有模态算子 A，则称其为溯因公式。

语义

我们采用 Levesque 的语义约定：认知情境由一对 $(\mathscr{W}, w)$ 表示，其中 $\mathscr{W}$ 是认知状态集，$w \in \mathscr{W}$ 被指定为实际状态，并采用通常的原子公式真值赋值。语义结构定义如下：

定义 2.1。设 $\mathbf{Lo}_{,\mathbf{A}}$ 是模态命题语言，则 $\mathbf{Lo}_{,\mathbf{A}}$ 的克里普克模型是一个元组 $\mathscr{M} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R}, v\rangle$，其中 $\mathscr{W}$ 是认知状态集，$\mathscr{R}$ 是 $\mathscr{W}$ 上的二元关系，而 v 是一个映射，它为 $\mathbf{Lo}_{,\mathbf{A}}$ 的每个原子命题指定 $\mathscr{W}$ 的一个子集。模型 $\mathscr{M}$ 中的状态 $w \in \mathscr{W}$ 上公式的满足（或真）定义由以下条款确定：

(i) $(\mathscr{M}, w) \models p$ 当且仅当 $w \in v(p)$，且 p 是一个原子命题。(ii) $(\mathscr{M}, w) \models \neg\varphi$ 当且仅当 $(\mathscr{M}, w) \not\models \varphi$。(iii) $(\mathscr{M}, w) \models \varphi \wedge \psi$ 当且仅当 $(\mathscr{M}, w) \models \varphi$ 且 $(\mathscr{M}, w) \models \psi$。(iv) $(\mathscr{M}, w) \models \varphi \rightarrow \psi$ 当且仅当 $(\mathscr{M}, w) \models \varphi$ 蕴含 $(\mathscr{M}, w) \models \psi$。(v) $(\mathscr{M}, w) \models \mathrm{K}\varphi$ 当且仅当对于所有满足 wRw' 的 $w' \in \mathscr{M}$，均有 $(\mathscr{M}, w') \models \varphi$ 。(vi) $(\mathscr{M}, w) \models \mathrm{O}\varphi$ ，如果对于所有状态 $w' \in \mathscr{W}$：wRw' 当且仅当 $(\mathscr{M}, w') \models \varphi$。

(vii) $(\mathscr{M},w) \models A\varphi$ 当且仅当 $\exists\alpha$：$(\mathscr{M},w) \models O\alpha$ 且 $(\mathscr{M}, w) \models K(\varphi \rightarrow \alpha)$。

根据条款 (vii)，溯因公式会选出与主体的仅知背景知识相容的解释。公式 α 与模态 O 的结合，确保溯因推理仅依赖主体明确表述的背景知识，无需额外的认知闭包或更强的假设。以下示例说明了模态 A 这种行为背后的理由：

例1. 设 Θ 表示一组由仅知蕴含表示的诊断原则，F表示患者的症状集合，E表示可能的诊断解释集合。考虑以下医疗情境

$$\Theta = \{\mathbf{O}(cold \rightarrow cough),$$
$$\mathbf{O}(flu \rightarrow (cough \wedge fever)),$$
$$\mathbf{O}(pneumonia \rightarrow (chest_pain \wedge cough \wedge fever))\}$$
$$F = \{fever, cough\}$$
$$E = \{flu\}.$$

在此例中，对患者症状的最佳溯因解释是病症流感。设 $\mathscr{M}$ 是序对 $\langle\Theta,\alpha\rangle$ 的一个模型，并设 $\alpha :=$ 咳嗽 $\wedge$ 发烧。由于$O\alpha$ 和$K(\varphi \rightarrow \alpha)$均成立，

根据溯因算子的语义子句，诊断者可以得出解释$A\varphi$，其中 $\varphi =$ 流感。在此框架中，医生并非直接知道患者患有病症流感[1]。相反，该诊断是作为溯因推理产生的：在给定受约束假设的情况下，它由已知症状推导而来，因为咳嗽 $\wedge$ 发烧症状与

假设 f lu。K 与 O 的结合体现了两种截然不同的作用：O 将主体的知识库限定为某些假设，而 K 则提供从假设推导出观测症状（或事件）的演绎联系。溯因结论 $A\varphi$ 是主体仅知知识库以及其基于该知识库所能推断内容的产物。

将溯因视为肯定前件，是不同作者（如 [16], [1] 或 [8]）采用的一种策略，也是对皮尔士的溯因概念进行建模的核心。G. Schurz（[18]）还将例1所示情形中的这类溯因称为选择性溯因，因为它需要从预先设定的一组已知假设中选出最佳解释。根据 A 算子的语义子句，仅知粒子会选出属于主体隐含知识的解释。

如例子所示，按照仅知背景来选择解释，在医疗场景中可能很有用；在这些场景里，必须在不借助外部信息来源的情况下为某种病症选出解释。R. Brachman（[4]）将运用形式化方法对医疗场景中的溯因进行建模称为溯因诊断。使用溯因模态 A，可以检验与初始病症集合及诊断原则相容的最佳解释。因此，在我们的框架中，溯因诊断被视为一种选择性溯因。我们将在下文引入其他定义：

定义 2.2.（局部后承）我们用 $\Gamma \models \varphi$表示：对于每个克里普克模型 $\mathscr{M} = \langle\mathscr{W},\mathscr{R}、v\rangle$ 以及每个可能世界 $w \in \mathscr{W}$，若对于所有 $\gamma \in \Gamma$，$(\mathscr{M}, w) \models \gamma$，则 $(\mathscr{M}, w) \models \varphi$。
定义 2.3.（全局有效性）如果对于每个模型 $\mathscr{M} = \langle\mathscr{W}、\mathscr{R}、v\rangle$ 属于 $\mathscr{F}$，且对于每个可能世界 $w \in \mathscr{W}$，$(\mathscr{M},w) \models \varphi$ 成立，则称公式 φ 相对于模型类 $\mathscr{F}$ 全局有效（记作 $\models^{\mathscr{F}} \varphi$）。

[1]请注意，尽管可以通过溯因推断得出感冒，但病症流感与这组症状最为相符。

定义 2.4.（溯因解释）如果公式 φ 是一个溯因公式且 $\Theta \cup \{\varphi\} \models \alpha$，则称公式 φ 是溯因问题 $\langle \Theta, \alpha \rangle$ 的一个解释。

下面说明如何确保在 $(\mathscr{M}, w) \models A\varphi$ 成立时，公式 α 存在。下文中，给定克里普克模型 $\mathscr{M} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R}, v \rangle$，令 $R(w) = \{w' \in \mathscr{W} : wRw'\}$，且 $R^{\varphi}(w) = \{w' \in R(w) : (\mathscr{M}, w') \models \varphi\}$。

定理1. 设 Θ 是模型 $\mathscr{M}$ 中为真的有限非空仅知公式集合。对每个 $\phi \in Fm(Lo_{,A})$，以下陈述均成立：

•若 $(\mathscr{M}, w) \models A\varphi$ 成立，则存在公式 α，使得 $(\mathscr{M}, w) \models O\alpha$ 和 $(\mathscr{M}, w) \models K(\varphi \rightarrow \alpha)$ 均成立。

证明。设 $(\mathscr{M}, w) \models A\varphi$ 在模型 $\mathscr{M}$ 中成立。证明的关键是说明如何为 $\Theta \neq /0$ 构造 α。令 $\Theta = \{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n\}$ 为状态 w 中为真的仅知公式集合。根据仅知的语义子句，我们得到 $(\mathscr{M}, w) \models O\varphi$ 当且仅当 $R^{\varphi}(w) \neq /0$。现在令 $\alpha := \bigwedge\{\varphi : (\mathscr{M}, w') \models \varphi \text{ 且 } w' \in R(w)\}$。注意，对于 $1 \leq i \leq n$，有 $\alpha = (\bigwedge \psi_i)$。根据构造可知，$(\mathscr{M}, w') \models \varphi \Rightarrow (\mathscr{M}, w') \models \alpha$ 在每个 w′中都成立。因此，$\varphi \rightarrow \alpha$ 在从 w 可达的所有状态中都为真。由此，根据 K 和 Oα 的语义子句，可得 $(\mathscr{M}, w) \models K(\varphi \rightarrow \alpha)$ 和 $(\mathscr{M}, w) \models O\alpha$。

□

溯因算子对模型中新信息的添加十分敏感，这是对溯因推理进行建模的一个核心特征。考虑一个模型 $\mathscr{M}_1$，其中有 $\mathscr{W} = \{w_1\}$，并具有以下有效式：$(\mathscr{M}, w_1) \models f\,ever$、$(\mathscr{M}, w_1) \models f\,lu$ 以及 $(\mathscr{M}, w_1) \not\models$ 感冒。现在令 $\alpha := f\,lu$ 且 $\varphi := f\,ever$。注意，$(\mathscr{M}, w_1) \models O\,f\,lu$，并且 $(\mathscr{M}, w_1) \models f\,ever \rightarrow f\,lu$。因此，$(\mathscr{M}, w_1) \models K(f\,ever \rightarrow f\,lu)$，且 $(\mathscr{M}, w_1) \models A\,f\,ever$。现在考虑 $\mathscr{W} = \{w_1, w_2\}$，使得 $w_1 R w_2$，并具有以下赋值：$(\mathscr{M}, w_2) \models f\,ever$、$(\mathscr{M}, w_2) \not\models f\,lu$ 以及 $(\mathscr{M}, w_2) \models$ 感冒。结论 A f ever 被阻断。以下是基于逻辑的溯因理论（由 Aliseda ([1]) 提出）的核心性质，并且已证明与 A模态一致：

定义 2.5. 设 $\langle \Theta, \alpha \rangle$ 是一个溯因问题。以下是任意 $\langle \Theta, \alpha \rangle$ 的核心性质：（一致性）$\Theta \cup \varphi$ 是一致的，且 $\Theta, \varphi \models \alpha$；（可解释性）(i) $\Theta \not\models \alpha$；(ii) $\varphi \not\models \alpha$；以及 (iii) $\Theta, \varphi \models \alpha$。

定理 2. 设 $\langle \Theta, \alpha \rangle$ 是一个溯因问题，其中 Θ 是仅知蕴涵的有限集合。对任意 $\Theta \cup \alpha \subseteq Fm(Lo_{,A})$，以下陈述均成立：(i) 若 $(\mathscr{M}, w) \models A\varphi$ 成立，则 $\langle \Theta, \alpha \rangle$ 的可解释性成立；(ii) 若 $(\mathscr{M}, w) \models A\varphi$ 成立，则 $\langle \Theta, \alpha \rangle$ 的一致性成立。

证明。假设 $(\mathscr{M}, w) \models A\varphi$ 在模型 $\mathscr{M}$ 中成立。定理1和 A 的语义子句足以满足可解释性的条件。

对于一致性，反设 $\Theta \cup \varphi$ 不一致。因此，存在一个公式 $\neg\varphi \in \Theta$，使得 $(\mathscr{M}, w) \models \neg\varphi$。鉴于 Θ 是一个仅知蕴涵集合，我们知道 φ 具有 $O(\alpha \rightarrow \beta)$ 的形式，其中对于某个 α、$\beta \in Fm(Lo_{,A})$。因此，$(\mathscr{M}, w) \models \neg O(\alpha \rightarrow \beta)$，即存在一个状态 w′，使得 wRw′，且 $(\mathscr{M}, w') \not\models (\alpha \rightarrow \beta)$。现在，根据 A 的语义子句，我们知道 $(\mathscr{M}, w) \models K(\alpha \rightarrow \beta)$。因此，对于满足 wRw′ 的每个 w′，$(\mathscr{M}, w') \models (\alpha \rightarrow \beta)$ 都成立，矛盾由此得出。

□

3 溯因的核心性质

本节将介绍 $\mathscr{AOL}$的一些核心性质。首先注意到，模态 K 和 A 并不坍缩。虽然 $\models O\varphi \to A\varphi$ 成立，但我们有 $\not\models A\varphi \to O\varphi$。我们首先定义能够验证溯因推理实例的模型集合。

命题 1. 对于每个 $\varphi,\psi \in Fm(Lo_{,A})$: $O\varphi, O(\psi \to \varphi) \models A\psi$，该式在所有自反模型中成立 .

证明。设 $\mathscr{M}$ 是一个自反模型，使得 $\mathscr{W} = \{w_1,w_2\}$ 且 $\mathscr{R} = \{w_1Rw_2,w_1Rw_1,w_2Rw_2\}$。现在假设 ($\mathscr{M}$,w) $\models O(\psi \to \varphi)$ 和 ($\mathscr{M}$, w) $\models O\varphi$ 成立。注意，由于 w 是自反的，因此 ($\mathscr{M}$, w) $\models(\psi \to \varphi)$ 和 ($\mathscr{M}$,w) $\models K(\psi \to \varphi)$ 成立。令 $\alpha := \varphi$。根据 A 的语义子句，我们得到 ($\mathscr{M}$, w) $\models A\psi$。

□

命题 2。 以下推理在仅知与溯因逻辑 $\mathscr{AOL}$ 中是有效的:

(i). $A\varphi,A\psi \models A(\varphi \wedge \psi)$ (ii).
$A\varphi,A\psi \models A(\varphi \vee \psi)$ (iii).
$A\varphi,A(\varphi \to \delta) \models A\delta$

证明。假设在给定模型 $\mathscr{M}$ 中，($\mathscr{M}$, w) $\models A\varphi$ 和 ($\mathscr{M}$, w) $\models A\psi$ 成立。根据 A 的语义子句，存在一个 α，使得 ($\mathscr{M}$, w) $\models O\alpha$ 且 ($\mathscr{M}$, w) $\models K(\varphi \to \alpha)$。根据相同的推理，存在一个 β，使得 ($\mathscr{M}$, w) $\models O\beta$ 且 ($\mathscr{M}$, w) $\models K(\psi \to \beta)$。现在令 $\alpha := \varphi$ 和 $\beta := \psi$。根据 O 的语义子句，($\mathscr{M}$, w) $\models \varphi \wedge \psi$。现在设 $\gamma = (\varphi \wedge \psi)$。因此，($\mathscr{M}$, w) $\models O\gamma$ 且 ($\mathscr{M}$, w) $\models K(\gamma \to \gamma)$。最后，根据 A 的语义子句，我们可以得出 ($\mathscr{M}$, w) $\models A(\varphi \wedge \psi)$。 (ii) 和 (iii) 的证明可通过类似的推理得到。

□

值得强调的是， $\mathscr{OL}$-片段无法解释基于自反模型中的仅知公式进行溯因推理的有趣实例。根据命题 1 中的模型 $\mathscr{M}$，很容易看出 ($\mathscr{M}$, w) $\models O(\psi \to \varphi)$ 和 ($\mathscr{M}$, w) $\models O\varphi$，但也有 ($\mathscr{M}$, w) $\not\models O\psi$。虽然一些不具自反性的模型也可能满足命题 1，但将 $\mathscr{AOL}$限制为自反模型有助于避免以下问题情形：设 $\mathscr{M}$ 是一个模型，使得$\mathscr{W} = \{w_1,w_2\}, \mathscr{R} = \{w_1Rw_2,w_2Rw_1\}$，且赋值如下：($\mathscr{M}$, w_1)$\models \alpha$, ($\mathscr{M}$, w_1) $\models \varphi \to \alpha$, ($\mathscr{M}$, w_2) $\not\models \alpha$ 和 ($\mathscr{M}$, w_2) $\not\models \varphi \to \alpha$。根据 A 的语义子句，我们得到 ($\mathscr{M}$, w_2) $\models K(\varphi \to \alpha)$ 和 ($\mathscr{M}$, w_2) $\models A\varphi$。然而，也可能有 ($\mathscr{M}$, w_2) $\not\models \varphi$。在这类模型中，主体可以通过溯因推断出一个在某个状态下为假的公式。通过自反性扩充该模型，无法同时得到 ($\mathscr{M}$, w_2) $\models K(\varphi \to \alpha)$ 和 ($\mathscr{M}$, w_2) $\not\models \varphi \to \alpha$。遗憾的是，$\mathscr{AOL}$ 的 S5 模型也不足以确保溯因的非空性，如下所示:

命题 3（溯因的非空性）。对于每个 $\varphi \in Fm(Lo_{,A})$：若 ($\mathscr{M}$, w) $\models A\varphi$，则 ($\mathscr{M}$, w) $\not\models K\neg\varphi$。

然而，需要注意的是，断言 ($\mathscr{M}$, w) $\models A\varphi$ 并不等同于 ($\mathscr{M}$, w) $\models \varphi$。因此，($\mathscr{M}$, w) $\models A\varphi$ 和 ($\mathscr{M}$, w) $\models \neg\varphi$ 在逻辑上并不矛盾。即使在条件句 $\varphi \to \alpha$ 空洞地为真的模型中，主体仍可能希望仅依据其仅知背景知识，考虑哪些推论在逻辑上是一致的。这类情况也可能出现在医学诊断中，此时现有信息可能使诊断者考虑彼此不相容的解释性假设。缺乏确凿证据时，诊断者必须依据其仅知背景知识进行溯因推理，同时也要意识到

所考虑的某些假设与某些证据不相容，或者最终可能被证明是错误的。在第4节中，我们通过为模态框架增添优先语义，避免使用条件句空洞地为真的模型。以下结果表明，对于溯因的非空性不成立的模型，存在一个与之等价且溯因的非空性成立的子模型。

引理 1. 设 $\mathscr{M} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R}, \mathrm{v} \rangle$ 是一个克里普克模型，且 $\mathrm{w} \in \mathscr{W}$ 是一个状态，使得 $(\mathscr{M}, \mathrm{w}) \models \mathrm{A}\varphi$。那么存在一个子模型 $\mathscr{M}' = \langle \mathscr{W}', \mathscr{R}', \mathrm{w}' \rangle$，以及 $\mathrm{w}' \in \mathscr{W}'$，满足以下条件：

$$(\mathscr{M}', w') \models \mathbf{A}\varphi \textit{ and } (\mathscr{M}', w') \not\models \mathbf{K}\neg\varphi \textit{ hold iff } \mathscr{W}' = \{w' \in W \mid (\mathscr{M}, w') \models \Theta \textit{ and } (\mathscr{M}, w') \not\models \neg\varphi\} \textit{ is non-empty,}$$
where Θ *denotes the agent's knowledge base.*

证明。设 $\mathscr{M} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R}, \mathrm{v} \rangle$ 是一个模型，其中有一个状态 w，使得 $(\mathscr{M}', \mathrm{w}') \models \mathrm{A}\varphi$ 和 $(\mathscr{M}', \mathrm{w}') \not\models \mathrm{K}\neg\varphi$ 成立。定义子模型模型 $\mathscr{M}' = \langle \mathscr{W}', \mathscr{R}', \mathrm{v}' \rangle$ 如下：

- $\mathscr{W}' = \{w' \in W \mid (\mathscr{M}, w') \models \Theta \text{ and } (\mathscr{M}, w') \not\models \neg\varphi\}$,
- $\mathscr{R}' = \mathscr{R} \cap (\mathscr{W}' \times \mathscr{W}')$,
- $v' = v(p) \cap \mathscr{W}'$,

根据构造，很容易看出 $\mathscr{W}'$ 非空。从左侧到右侧，由 $(\mathscr{M}, \mathrm{w}') \models \Theta$ 成立这一事实以及假设，可得 $(\mathscr{M}', \mathrm{w}') \models \mathrm{A}\varphi$ 。 □

引理 2。对于任意 $\varphi \in \mathrm{Fm}(\mathrm{Lo}_{\mathrm{A}})$，都有：

$$\textit{If } (\mathscr{M}, w) \models \varphi, \textit{ then } (\mathscr{M}', w') \models \varphi,$$

其中，$\mathscr{M}'$ 是 $\mathscr{M}$ 的子模型。

证明。对 φ 的长度作归纳。对于 $\varphi = \mathrm{p}$，其中 p 是一个原子命题。根据构造，$\mathrm{v}'(\mathrm{p}) = \mathrm{v}(\mathrm{p}) \cap \mathscr{W}'$。因此，$\mathrm{w} \in \mathrm{v}(\mathrm{p})$ 蕴含 $\mathrm{w}' \in \mathrm{v}'(\mathrm{p})$。所以，$(\mathscr{M}', \mathrm{w}') \models \mathrm{p}$。对于 $\varphi = \neg\psi$，根据归纳假设，$(\mathscr{M}, \mathrm{w}) \models \phi$ 蕴含 $(\mathscr{M}', \mathrm{w}') \models \phi$。因此，$(\mathscr{M}, \mathrm{w}) \not\models \phi$ 蕴含 $(\mathscr{M}', \mathrm{w}') \not\models \phi$。根据否定的子句，$(\mathscr{M}', \mathrm{w}) \models \neg\phi$。证明的其余部分照常进行。模态算子的情形由可及关系的限制得出。

□

定理3。设 $\mathscr{M} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R}, \mathrm{v} \rangle$ 是一个克里普克模型，其中溯因的非空性在状态 $\mathrm{w} \in \mathscr{W}$ 处不成立。存在一个子模型 $\mathscr{M}' = \langle \mathscr{W}', \mathscr{R}', \mathrm{v}' \rangle$ 和 $\mathrm{w}' \in \mathscr{W}'$，使得以下结论成立：(i) 对任意 $\Theta \subseteq \mathrm{Fm}(\mathrm{Lo}_{\mathrm{A}})$，若 $(\mathscr{M}, \mathrm{w}) \models \Theta$，则 $(\mathscr{M}', \mathrm{w}') \models \Theta$；以及 (i) 若 $(\mathscr{M}', \mathrm{w}') \models \mathrm{A}\varphi$，则 $(\mathscr{M}', \mathrm{w}') \not\models \mathrm{K}\neg\varphi$。

证明。假设 $\mathscr{M} = \langle \mathscr{W}、\mathscr{R}、\mathrm{v} \rangle$ 是一个模型，其中溯因的非空性在状态 $\mathrm{w} \in \mathscr{W}$ 处不成立。根据引理 1，存在一个子模型 $\mathscr{M}' = \langle \mathscr{W}'、\mathscr{R}'、\mathrm{v}' \rangle$。由引理 2，存在一个状态 $\mathrm{w}' \in \mathscr{W}'$，使得 $(\mathscr{M}, \mathrm{w}) \models \varphi$ 蕴含 $(\mathscr{M}', \mathrm{w}') \models \varphi$。此外，$(\mathscr{M}', \mathrm{w}') \models \Theta$。现在假设 $(\mathscr{M}', \mathrm{w}') \models \mathrm{A}\varphi$。根据 $\mathscr{M}'$ 的构造，$(\mathscr{M}', \mathrm{w}') \not\models \mathrm{K}\neg\varphi$ 成立。

□

4 溯因问题与极小解释

选择与主体的背景知识相容的解释这一任务，通常需要根据特定标准对这些解释进行比较。[2] 特别是，在同一事件存在多个可用解释的情形下，评估和比较不同解释集合的能力尤其有价值（Aliseda 在 [2] 中指出，选择极小解释是基于逻辑的溯因方法的核心性质）。例如，如例1所示，如果医生发现咳嗽并非相关症状，她就必须重新考虑应当采用哪种解释。尽管逻辑 $\mathscr{AOL}$ 在单个模型层面会对新信息作出反应，但在后承关系层面，该逻辑仍然是单调的。

在本节中，我们用一个可信度关系 $\prec$ 扩充克里普克模型。所得逻辑是 $\mathscr{AOL}$（下文记作 $\mathscr{AOL}^{\prec}$）的非单调扩展。通过非单调后承关系对溯因进行建模，可见于 [16] ，或见于 [15] 中基于自适应逻辑的研究。虽然这些作者通过非单调扩充式方法处理溯因，以验证形如（$\varphi \wedge \psi$） $\psi \models \varphi$的推理，但 $\mathscr{AOL}^{\prec}$ 框架关注的是与仅知背景相容的推理。我们首先介绍基本定义。

定义 4.1. 设 $\mathbf{Lo}_{\mathbf{A}}$ 为一种模态语言，则 $\mathbf{Lo}_{\mathbf{A}}$ 的可信度克里普克模型是一个元组 $\mathscr{M} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{R}, \prec, \mathrm{v} \rangle$，其中 $\mathscr{W}$ 是认知上可能的状态集合， $\mathscr{R}$ 是 $\mathscr{W}$ 上的二元关系， $\prec$ 是 $\mathscr{W}$ 上的可信度序，其中 $\mathrm{w} \prec \mathrm{w}'$ 表示 w 比 w′更受偏好（更可信），而 v 是一个映射，为 $\mathbf{Lo}_{\mathbf{A}}$ 的每个原子命题分配 $\mathscr{W}$ 的一个子集。模型 $\mathscr{M}$ 中状态 $\mathrm{w} \in \mathscr{W}$内公式的满足（或真）的定义仍与定义 2.1 类似。有所改变的子句如下：

(iv) $(\mathscr{M}, \mathrm{w}) \models \varphi > \psi$ 当且仅当 $(\mathscr{M}, \mathrm{w}) \models \psi$ 在所有可从 w 访问的 $\prec$-极小状态中成立，且这些状态满足 $(\mathscr{M}, \mathrm{w}) \models \varphi$。(vii) $(\mathscr{M}, \mathrm{w}) \models \mathrm{A}\varphi$ 当且仅当 $\exists \alpha$： $(\mathscr{M}, \mathrm{w}) \models \mathrm{O}\alpha$ 且 $(\mathscr{M}, \mathrm{w}) \models (\varphi > \alpha)$ 在所有可从 w 访问的 $\prec$-极小状态中成立。

此后我们假设 $\prec$ 是一个传递且连通的关系（即对于所有 $\mathrm{w}、\mathrm{w}' \in \mathscr{W}$， $\mathrm{w} \prec \mathrm{w}'$ 或 $\mathrm{w}' \prec \mathrm{w}$ 成立）。

定义 4.2。如果不存在 $\mathrm{w}' \prec \mathrm{w}$，则称状态 w 为 $\prec$-极小（或简称极小）；若 $(\mathscr{M}, \mathrm{w}) \models \varphi$ 且不存在满足 $\mathrm{w}' \prec \mathrm{w}$ 和 $(\mathscr{M}, \mathrm{w}') \models \varphi$ 的 $\mathrm{w}' \in \mathscr{W}$，则称其为φ-极小。

定义 4.3。如果公式 φ 在每个满足 $(\mathscr{M}, \mathrm{w}) \models \gamma$ 的极小状态 w 中都满足 $(\mathscr{M}, \mathrm{w}) \models \varphi$，则称其为公式集 Γ 的优先后承（记作$\Gamma \models_{\prec} \varphi$），对于每个 $\gamma \in \Gamma$ 均如此。

定义 4.4。（极小解释）若公式 φ是一个溯因公式，且 $\Theta \cup \{\varphi\} \models_{\prec} \alpha$，则称其为溯因问题 $\langle \Theta, \alpha \rangle$ 的极小解释。

不难看出，在优先后承关系 $\models_{\prec}$ 中，溯因问题满足一致性和可解释性。此外，优先条件句的语义子句保证了溯因的非空性。下面的例子展示了一种情况： $\mathscr{AOL}$ 后承关系无法选出单一解释，而优先蕴涵却可以做到这一点：

例2。设 $\langle \Theta, \beta \rangle$ 是一个溯因问题，其中 $\Theta = \{((\alpha > (\gamma \vee \delta)) \vee \delta) \vee (\psi > ((\gamma \vee \delta) \vee \gamma))\}$，且 $\beta = (\alpha \vee \psi)$。考虑一个似真性模型 $\mathscr{M}$，使得 $\mathscr{W} = \{\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2\}, \mathscr{R} = \{\mathrm{w}_1 \mathrm{R} \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \mathrm{R} \mathrm{w}_2\}$，且 $\mathrm{w}_1 \prec \mathrm{w}_2$，并具有以下情景：

[2]例如,例如， [15]和 [6], 认为，选择性溯因涉及某种形式的可废止推理 .

$\mathscr{W}$	$(\alpha > (\gamma \vee \delta)$	$(\psi > (\gamma \vee \delta)$	γ	δ	$\mathbf{A}\alpha$	$\mathbf{A}\psi$
w_1	$\surd$	$\times$	$\surd$	$\times$	$\surd$	$\times$
w_2	$\times$	$\surd$	$\times$	$\surd$	$\times$	$\surd$

根据上述例子，我们有 $(\mathscr{M},w_1) \models \gamma$，因此 $(\mathscr{M},w_1) \models \gamma \vee \delta$。此外，根据蕴涵的语义子句，$(\mathscr{M},w_1) \models \alpha > (\gamma \vee \delta)$。根据 O 的语义子句，可得 $(\mathscr{M},w_1) \models O(\gamma \vee \delta)$。最后，A 的语义子句给出 $(\mathscr{M},w_1) \models A\alpha$。对状态 w_2, 按照相同的推理，我们得到 $(\mathscr{M},w_2) \models A\psi$。现在，$\mathscr{AOL}$- 后承关系无法选出一个解释。然而，由于 w_1 是一个极小状态，优先后承将选出 $A\alpha$ 作为极小解释。

4.1 非单调性质

序 $\prec$ 的性质保证，在逻辑 $\mathscr{AOL}$ 上构造的优先后承具备非单调逻辑的核心元性质（见 [20] 或 [13]），因此构成良好定义的后承关系 [3]。以下各定理的证明均为标准证明，可见于 [13]。

定理 4（超经典性）。对于任意 $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm(\mathbf{Lo}, \mathbf{A})$：如果 $\Gamma \models \varphi$，那么 $\Gamma \models_{\prec} \varphi$。

定理 5（自反性）。对于任意 $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm(\mathbf{Lo}, \mathbf{A})$：如果 $\varphi \in \Gamma$，那么 $\Gamma \models_{\prec} \varphi$。

定理 6（谨慎单调性）。对于任意 $\Gamma \cup \{\varphi,\psi\} \subseteq Fm(\mathbf{Lo}, \mathbf{A})$: 若 $\Gamma \models_{\prec} \psi$ 且 $\Gamma \models_{\prec} \varphi$，则 $\Gamma \cup \{\varphi\} \models_{\prec} \psi$。

定理 7（谨慎传递性）。对于任意 $\Gamma \cup \{\varphi,\psi\} \subseteq Fm(\mathbf{Lo}, \mathbf{A})$: 若 $\Gamma \models_{\prec} \varphi$ 且 $\Gamma \cup \{\varphi\} \models_{\prec} \psi$，则 $\Gamma \models_{\prec} \psi$

4.2 选择解释的其他方式

本节将针对给定的溯因问题，引入比较不同极小解释集合的其他限制。例2展示了一种情形：相对于该溯因问题，有不止一个解释可供选择。在这些情形下，$\mathscr{AOL}$-后承无法选出单一解释。由于 $w_1 \prec w_2$, ，优先后承使我们能够选出唯一的解释。在有多个解释可供选择的情形下，优先后承不仅能够选出极小解释，还能够对极小解释集合施加其他限制[4]。下文将说明，选择极小解释的不同标准可以通过逻辑 $\mathscr{AOL}^{\prec}$ 表达。

定义 4.5. 公式集合 Δ 称为溯因问题 $\langle \Theta,\alpha \rangle$ 的极小解释集合，当且仅当每个 $\delta \in \Delta$ 都是一个极小解释（也记作 Δ_{min}）。

接下来，我们通过对优先后承 $\models_{\prec}$ 所选取的解释集合施加进一步限制，介绍比较极小解释的不同方法。令 $\Pi(\Theta,\alpha) = \{\varphi \mid \Gamma,\varphi \models_{\prec} \alpha\}$，即 $\Pi(\Theta,\alpha)$ 表示问题 $\langle \Theta,\alpha \rangle$ 在模型 $\mathscr{M}$ 中的所有极小解释的集合。

[3]这里，非单调逻辑 $\mathscr{L}_{nm}$ 被定义为一种结构 $\langle \models_m, \prec \rangle$，其中 $\models_m$ 是非平凡的单调后承关系，而 $\prec$ 是优先语义。[4] 关于如何通过基于逻辑的溯因方法比较解释，不同的做法见于 [7]（采用概率语义）或 [14]（采用可能世界语义）。

定义 4.6。（子集极小选择）令 $\Pi(\Theta,\alpha)^{\subset} = \{\Delta \in \Pi(\Theta,\alpha) \mid \forall \Delta' \subset \Delta, \Delta' \notin \Pi(\Theta,\alpha)\}$。集合 Δ称为解释的子集极小集。

定义 4.7。（基数选择）设 $\Pi(\Theta,\alpha)^{<} = \{\Delta \in \Pi(\Theta,\alpha) \mid \forall \Delta'$，使得 $|\Delta'| < |\Delta|, \Delta' \notin \Pi(\Theta,\alpha)\}$。集合 Δ 称为解释的基数极小集。

对于优先级比较，我们通过优先级函数 $g : I \to \Delta$ 来扩充极小解释集，使得对每个 $i,k \in \Delta$（且 I 是可数指标集），$\delta_i \leq \delta_k$ 或 $\delta_k \leq \delta_i$。我们称指标 i 为解释 δ_i的优先级。给定两个极小解释集 Δ_1 和Δ_2，若存在某个 $\delta_i \in \Delta_1$ 和 $\delta_k \in \Delta_2$，使得 $i \leq k$，则记作 $\Delta_1 \sqsubset \Delta_2$。

定义 4.8.（优先级选择）令 $\Pi(\Theta,\alpha)^{\sqsubset} = \{\Delta \in \Pi(\Theta,\alpha) \mid \forall \Delta' \sqsubset \Delta, \Delta' \notin \Pi(\Theta,\alpha)\}$。集合 Δ 称为解释的优先级集合。

下面的例子说明了各种选择标准之间的差异 .

例 3. 考虑以下医疗情境：

$$\Theta = \{O(\text{普通感冒} \to (\text{喉咙痛} \vee \text{咳嗽}))，O(\text{链球菌性咽喉炎} \to (\text{喉咙痛} \wedge \text{发烧}))，O(\text{过敏} \to (\text{头痛} \vee \text{眼痒}))\} F = \{\text{发烧、喉咙痛、头痛}\} E = \{\text{普通感冒、链球菌性咽喉炎、过敏}\}。$$

令 $\Pi(\Theta, F) = \{\Delta_1, \Delta_2\}$，其中 $\Delta_1 = \{$过敏、链球菌性咽喉炎$\}$ 以及 $\Delta_2 = \{$普通感冒、链球菌性咽喉炎$\}$。基数选择和子集选择都无法选出单个极小解释集合。处理这类情形的一种方法是采用优先级选择。为此，设定以下优先级：过敏$_1$，链球菌性咽喉炎$_2$ 以及普通感冒$_3$。根据优先级选择，集合 Δ_1 将被选为该溯因问题中最可信的集合。优先级方法在医疗场景中可能很有用，尤其是在需要优先治疗某种症状的情况下。

通过进一步限制优先后承所选取的解释集合，可以得到以下其他后果关系：$\models^{s}_{\prec}$, $\models^{c}_{\prec}$ 和$\models^{p}_{\prec}$，其中每种后果关系的定义如下：

定义 4.9.（s-后果关系）$\Gamma \models^{s}_{\prec} \varphi$ 当且仅当 $\Delta \subseteq \Gamma$，其中 $\Delta \in \Pi(\Theta,\varphi)^{\subset}$ 且 $\Delta \models_{\prec} \varphi$。

定义 4.10.（c-后果关系） $\Gamma \models^{c}_{\prec} \varphi$ 当且仅当 $\Delta \subseteq \Gamma$，其中 $\Delta \in \Pi(\Theta,\varphi)^{<}$ 且 $\Delta \models_{\prec} \varphi$。

定义 4.11.（p-后果关系） $\Gamma \models^{p}_{\prec} \varphi$ 当且仅当 $\Delta \subseteq \Gamma$，其中 $\Delta \in \Pi(\Theta,\varphi)^{\sqsubset}$ 且 $\Delta \models_{\prec} \varphi$。

在下一节中，我们将说明每种 $\models^{*}_{\prec}$在何种病症下与$\models_{\prec}$一致，其中 $* \in \{$s、c、p$\}$。此外，下一节中的定理 7 保证，对于任意溯因问题$\langle \Theta, \alpha \rangle$，$\Pi(\Theta,\alpha) \neq /0$。下表列出了每种后承关系概念所具有的性质。

例4。根据例4，虽然可以推出 $\Delta_1 \models$过敏和 $\Delta_1 \models$链球菌性咽喉炎，但也可以推出 Δ_1链球菌性咽喉炎 $\not\models$ 过敏。因此，谨慎单调性对于 c-后果关系和 s-后果关系均不成立。要说明谨慎传递性不成立，注意到可以推出 $\Delta_1 \models$ 过敏以及 Δ_1，过敏 $\models$ 链球菌性咽喉炎。然而，也可以推出 $\Delta_1 \not\models$ 过敏 $\to$链球菌性咽喉炎。其余情况可用类似的推理证明。

性质	$\models$	$\models_{\prec}$	$\models^{s}_{\prec}$	$\models^{c}_{\prec}$	$\models^{p}_{\prec}$
超经典性	✓	✓	✓	✓	✓
自反性	✓	✓	✓	✓	✓
谨慎单调性	×	✓	×	×	×
谨慎传递性	×	✓	✓	✓	×

表 1:

5 元理论

本节介绍非单调 $\mathscr{AOL}$元理论中的核心结果：我们证明，在可信度克里普克模型框架内，任意溯因问题 $\langle\Theta,\alpha\rangle$ 都存在一个极小模型，并说明选择方法与优先后承关系在哪些条件下相一致。我们首先陈述以下定理:

定理 8（最小模型存在性）。对于任意溯因问题 $\langle\Theta,\alpha\rangle$，若其具有可信度克里普克模型 $\mathscr{M}=\langle\mathscr{W},\mathscr{R},\prec,\mathrm{v}\rangle$，则存在一个极小模型 $\mathscr{M}_{min}=\langle\mathscr{W}_{min},\mathscr{R}_{min},\mathrm{v}_{min}\rangle$，其中 $\mathscr{W}_{min}$ 是 $\mathscr{W}$ 中所有 α-极小状态的集合，并且 $(\mathscr{M}_{min},\mathrm{w})\models\alpha$。

极小模型存在性的证明

证明旨在说明，给定任意模型 $\mathscr{M}$，都可以构造一个极小模型 $\mathscr{M}_{min}$，使其验证相同的公式。我们首先介绍一些基本定义。

定义 5.1。给定一个可信度克里普克模型 $\mathscr{M}=\langle\mathscr{W},\mathscr{R},\prec,\mathrm{v}\rangle$，按如下方式定义极小模型 $\mathscr{M}_{min}=\langle\mathscr{W}_{min},\mathscr{R}_{min},\mathrm{v}_{min}\rangle$：

- $\mathscr{W}$最小 $=\{\mathrm{w}\in\mathscr{W}\mid\forall\mathrm{w}'\in\mathscr{W},\ \mathrm{w}'\prec\mathrm{w}\implies\mathrm{w}'=\mathrm{w}\}$,
- $\mathscr{R}$最小 $=\mathscr{R}\cap(\mathscr{W}$最小 $\times\mathscr{W}$最小),
- v最小 $=v(p)\cap\mathscr{W}$最小,

引理 3。模型 $\mathscr{M}_{min}=\langle\mathscr{W}_{min},\mathscr{R}_{min},\prec,\mathrm{v}_{min}\rangle$ 相对于优先关系$\prec$是最小的。

证明。由定义 5.1以及模型 $\mathscr{M}_{min}$的构造可直接得到。 □

引理 4。对于任意状态 $\mathrm{w}\in\mathscr{W}_{min}$，$(\mathscr{M},\mathrm{w})\models\varphi$ 蕴含 $(\mathscr{M}_{min},\mathrm{w})\models\varphi$。

证明。设 $\mathscr{M}=\langle\mathscr{W},\mathscr{R},\prec,\mathrm{v}\rangle$ 是一个可信度克里普克模型，并设 $\mathscr{M}_{\min}=\langle\mathscr{W}_{\min},\mathscr{R}_{\min},\mathrm{v}_{\min}\rangle$ 是按照定义 5.1 构造的极小模型。通过对 φ 的长度进行归纳来完成证明。对于情形 $\varphi=\mathrm{p}$，其中 p 是一个原子命题。根据构造，$\mathrm{v}_{\min}(\mathrm{p})=\mathrm{v}(\mathrm{p})\cap\mathscr{W}_{\min}$。因此，$\mathrm{w}\in\mathrm{v}_{\min}(\mathrm{p})$ 当且仅当 $\mathrm{w}\in\mathrm{v}(\mathrm{p})$。所以，$(\mathscr{M}_{\min},\mathrm{w})\models\mathrm{p}$。对于情形 $\varphi=\neg\psi$。根据归纳假设，$(\mathscr{M},\mathrm{w})\models\phi$ 当且仅当 $(\mathscr{M}_{\min},\mathrm{w})\models\phi$。因此，$(\mathscr{M},\mathrm{w})\not\models\phi$ 当且仅当 $(\mathscr{M}_{\min},\mathrm{w})\not\models\phi$。根据否定的子句，$(\mathscr{M}_{\min},\mathrm{w})\models\neg\phi$。对于情形 $\varphi=\mathrm{K}\psi$ 或 $\mathrm{O}\psi$，回顾一下，可及关系 $\mathscr{R}_{\min}$ 是 $\mathscr{R}$ 到 $\mathscr{W}_{\min}$ 的限制。因此可得，$(\mathscr{M},\mathrm{w})\models\psi$ 当且仅当 $(\mathscr{M}_{\min},\mathrm{w})\models\psi$。

□

定理 9（最小模型存在性）。对于任意具有可信度克里普克模型 $\mathscr{M}=\langle\mathscr{W}、\mathscr{R}、\prec、\mathrm{v}\rangle$ 的溯因问题 $\langle\Theta、\phi\rangle$，存在一个极小模型 $\mathscr{M}_{min}=\langle\mathscr{W}_{min}、\mathscr{R}_{min}、\mathrm{v}_{min}\rangle$，其中 $\mathscr{W}_{min}$ 是 $\mathscr{W}$ 中所有 ϕ-极小状态的集合，并且 $(\mathscr{M}_{min},\mathrm{w})\models\phi$。

证明。假设 $\langle \Theta、\varphi \rangle$ 是模型 $\mathscr{M}$ 中的一个溯因问题。根据引理 4，我们知道存在一个验证 $\langle \Theta、\varphi \rangle$ 的极小模型 $\mathscr{M}_{min}$。现在假设存在溯因问题 $\langle \Theta、\varphi \rangle$ 的一个解 α，使得 $(\mathscr{M}, w) \models \alpha$。因此，$(\mathscr{M}_{min}, w) \models \alpha$。根据最小性的定义，$\alpha$ 是一个极小解释。 □

极小集合的选择与优先后承

以下结果展示了对于溯因问题 $\langle \Theta, \alpha \rangle$，在什么条件下，针对解释极小集合的某种选择方法会与优先后承关系相一致。

定义5.2. 给定一个溯因问题 $\langle \Theta, \alpha \rangle$，若解释集合 $\Delta \subseteq \Pi(\Theta, \alpha)$ 不存在满足 $\Theta \cup \Delta' \models \alpha$ 的真子集 $\Delta' \subset \Delta$，则称其为子集极小。

引理5. 设 Δ 是溯因问题 $\langle \Theta, \alpha \rangle$ 的一个子集极小解释集合。因此$\Theta \cup \Delta \models_{\prec} \alpha$。

证明. 设 Δ 是一个子集极小解释集合，并假设对于某个状态 $w \in \mathscr{W}$，$(\mathscr{M}, w) \models \Theta$、$(\mathscr{M}, w) \models \Delta$ 以及 $(\mathscr{M}, w) \models \alpha$ 均成立。由于 Δ 是子集极小的，对于任意真子集 $\Delta' \subset \Delta$，都有 $\Theta \cup \Delta' \not\models \alpha$。因此，w 在 $\prec$ 下是 α-极小的，因为不存在 $w' \prec w$ 使得 $(M, w') \models \Theta$ 且 $(M, w') \models \alpha$。最后，根据优先后承的定义，可得 $\Theta \cup \Delta \models_{\prec} \alpha$。 □

引理6. 设 $\Theta \cup \Delta \models_{\prec} \alpha$。则 Δ 是子集极小的。

证明。假设 $\Theta \cup \Delta \models_{\preceq} \alpha$ 成立，并设 Δ 是与一个 α-极小状态相对应的解释集合，在该状态下以下各式均成立：$(\mathscr{M}, w) \models \Theta$、$(\mathscr{M}, w) \models \Delta$ 以及 $(\mathscr{M}, w) \models \alpha$。现在，反设 Δ 不是子集极小的。因此，存在一个真子集 $\Delta' \subset \Delta$，使得 $\Theta \cup \Delta' \models \alpha$。此外，还存在一个状态 $w' \in \mathscr{W}$，使得 $w' \prec w$，并满足以下条件：$(\mathscr{M}, w') \models \Theta$、$(\mathscr{M}, w') \models \Delta$ 以及 $(\mathscr{M}, w') \models \alpha$。然而，根据 $\prec$ 的连通性和最小性的定义，矛盾随即产生。 □

定理10. 给定溯因问题 $\langle \Theta$ 的一组极小解释 Δ，$\alpha \rangle$ 是子集极小的，当且仅当 $\Theta \cup \Delta \models_{\preceq} \alpha$。

证明。由引理 3 和引理 4 可得。 □

推论 1. 对于任意溯因问题 $\langle \Theta$，若状态集合 $\mathscr{W}$ 上的可信度关系 $\prec$ 具有传递性和连通性，则优先后承关系 $\models_{\preceq}$ 在选择极小解释时与子集极小性一致。

对于基数以及极小解释集合的优先选择，也可以证明类似的结果。事实上，可以证明，对于有限知识库，在选择极小解释时，基数选择与子集极小选择始终一致。

6 相关工作与未来方向

仅知逻辑由 H. Levesque 于 [12] 提出，后来又由不同的作者（[10], [5] 和 [3]）加以探讨，用于刻画知识动态的不同方面。特别是，通过 $\mathscr{OL}$ 建立基于知识的溯因解释这一问题，最早由 Levesque 在 [11] 中提出。在本文中，我们通过将溯因视为一种认知的

模态来探讨一种替代性解释；这种模态通过基本认知概念的组合定义，并受主体背景知识的约束。此外，我们在单调逻辑 $\mathscr{AOL}$ 之上，通过借助可信度克里普克模型扩展语义框架，构建了一个非单调后承关系。

不同作者提出了不同的溯因模态方法，例如 [14], [12] 和 [9]。虽然当前大多数溯因方法都试图通过发现过程来发展其动态推理，并以证明论方法对这一过程进行建模（参见 [14] 或 [19]），但我们的工作通过在模态（及优选）结构中引入一种新模态，提出了一种语义学方法。为所得逻辑开发适当的证明论工具，是未来探索的一个课题。此外，Levesque（[11]）通过对自认知逻辑的解释，首次建立了 $\mathscr{OL}$ 与非单调形式体系之间的联系；而我们则在优选模态语义中通过 $\mathscr{AOL}$ 提出了另一种解释。与其他用于溯因推理的非单调模态框架（例如 [16]）相比，我们的框架代表了一种新颖的方法。

第4节和第5节展示的结果表明，在 $\mathscr{AOL}$之上构建的非单调逻辑能够表达选择极小解释的不同方法。 $\mathscr{AOL}$和 $\mathscr{AOL}^{\prec}$ 具有基于逻辑的溯因刻画所需的核心性质，这一事实表明，可以为这些系统提供溯因序列规则（采用 [2]提出的风格）。此外，Levesque在 [11]中介绍了将 $\mathscr{OL}$ 扩展到多模态框架的其他方式。将我们的框架推广至多智能体场景，或推广至其他仅知多模态框架，仍是未来探索的方向。

7 致谢

作者感谢审稿人的细致审阅。

参考文献

[1] Atocha Aliseda（2000）：《作为认知变化的溯因：人工智能中的皮尔士模型》，第45–58页，doi:10.1007/978-94-017-0606-3_3。施普林格·荷兰，多德雷赫特。[2] Atocha Aliseda（2006）：溯因推理。SyntheseLibrary330，施普林格。[3] Vaishak Belle 与 Gerhard Lakemeyer（2010）：《重新审视多智能体仅知》。载于：第十二届知识表示与推理原理国际会议，第49–59页。参见 https://cdn.aaai.org/ocs/1361/1361-7395-1-PB.pdf。[4] Ronald J Brachman（2004）：《知识表示与推理》。Morgan Kaufman/Elsevier。[5] Jianhua Chen（1994）：《作为非单调推理统一框架的仅知逻辑》。FundamentaInformaticae21(3)，第205–220页。[6] Claudio Delrieux（2004）：《可废止推理中的溯因推断：研究纲领模型》。JournalofAppliedLogic2(4)，第409–437页，doi:10.1016/j.jal.2004.07.003。CMSRA。[7] Thomas Eiter 与 Georg Gottlob（1995）：《基于逻辑的溯因的复杂性》。《美国计算机协会会刊》（JACM）42(1)，第3–42页，doi:10.1145/200836.200838。[8] Peter A Flach 与 Antonis C Kakas（2000）：《溯因与归纳：论二者关系与整合的论文集》。AppliedLogicSeries18，施普林格科学与商业媒体。[9] Tjerk Gauderis（2013）：《用模态自适应逻辑对科学中的溯因建模》。Foundationsof Science18(4)，第611–624页，doi:10.1007/s10699-012-9293-8。[10] Joseph Y Halpern 与 Gerhard Lakemeyer（2001）：《多智能体仅知》。JournalofLogicandCompu-tation11(1)，第41–70页。参见 https://arxiv.org/pdf/cs.AI/0001015。

[11] Hector J Levesque（1989）：《溯因的知识层次说明》。载于：IJCAI，第1061–1067页。参见 https://www.ijcai.org/Proceedings/89-2/Papers/034.pdf。[12] Hector J. Levesque（1990）：《我所知的一切：自认知逻辑研究》。人工智能 42(2)，第263–309页，doi:10.1016/0004-3702(90)90056-6。[13] David Makinson（2003）：《经典逻辑与非单调逻辑之间的桥梁》。LogicJournalof IGPL11(1)，第69–96页。[14] Marta Cialdea Mayer 与 Fiora Pirri（1995）：《模态逻辑中的命题溯因》。Logic Journal of the IGPL 3(6)，第907–919页。参见 https://citeseerx.ist.psu.edu/document? repid=rep1&type=pdf&doi=fcbe4de867d95512288c2070fd594cf1d03ff090。[15] Joke Meheus（2007）：《用于溯因和阐释寻求解释过程的自适应逻辑》。载于：溯因与科学发现过程国际会议，里斯本大学科学哲学中心，第97–119页。[16] Joke Meheus、Liza Verhoeven、Maarten Van Dyck 与 Dagmar Provijn（2002）：《扩展性自适应逻辑与基于逻辑的溯因方法的基础》。Logicaland computationalaspects of model-based reasoning，第39–71页。[17] Angel Nepomuceno-Fern´andez、Fernando Soler-Toscano 与 Fernando R Vel´azquez-Quesada（2017）：《动态认知逻辑中的溯因推理》。Springerhandbookofmodel-basedscience，第269–293页。[18]Gerhard Schurz（2008）：《溯因模式》。Synthese 164，第201–234页，doi:10.1007/ s11229-007-9223-4。[19] Fernando Soler-Toscano、Angel Nepomuceno-Fern´andez 与 Atocha Aliseda-Llera（2009）：《通过 C-tableaux 和 δ-归结进行溯因》。应用非经典逻辑杂志 19(2)，第211–225页，doi:10.3166/jancl.19.211-225。[20] Christian Strasser 与 G. Aldo Antonelli（2024）：非单调逻辑。载于 Edward N. Zalta 与 Uri Nodelman 编：《斯坦福哲学百科全书》，2024年冬季版，形而上学研究实验室，斯坦福大学。[21] Richmond Thomason（2024）：基于逻辑的人工智能。载于 Edward N. Zalta 与 Uri Nodelman 编：《斯坦福哲学百科全书》，2024年春季版，形而上学研究实验室，斯坦福大学。[22] Efthymia Tsamoura、Timothy Hospedales 与 Loizos Michael（2021）：《神经符号集成：组合视角》。载于：AAAI人工智能会议论文集，35，第5051–5060页，doi:10.1609/aaai.v35i6.16639。