arXiv:2601.04338v1 [math.GR] 6 Jan 2026

AG-群作为平行四边形空间

M. SHAH 和 V. SORGE

Abstract. 众所周知，AG-群是参数中列的，而参数中列是平行四边形空间。由此可知，AG-群是平行四边形空间。本文将直接证明这一事实，并进一步加以研究。我们的主要结果是，AG-群的平行四边形空间仍然是一个 AG-群，这尤其意味着阿贝尔群的平行四边形空间也是阿贝尔群。随后，我们将这一结果推广到中列拟群。最后，我们给出一些简便方法：只要已知该平行四边形至少一个非平凡顶点，就能求出其他顶点。

1. Introduction

AG-群 G 是一个具有左单位元和逆元，并满足左可逆律的广群

$$(xy)z = (zy)x.$$

拟群是一个广群（Q，$\cdot$），对于任意 a，b 属于 G，方程

$$a \cdot x = b, \qquad y \cdot a = b$$

在 G 中，x 和 y 有唯一解。$x \cdot y$ 通常记作 xy。唯一解 x 和 y 有时分别称为左除法和右除法，记作 $x = a\backslash b$ 和 $y = b/a$。

如果拟群 Q 满足恒等式 $ab \cdot cd = ac \cdot bd$，则称其为中列拟群。如果还满足恒等式 $aa = a$，则称其为幂等中列拟群（幂等中列拟群） [10]。根据下面给出的引理 1，很明显每个 AG-群都是中列的。因此，在 [8, 14, 5] 中针对中列拟群引入的所有几何概念当然同样适用于 AG-群。容易验证，幂等 AG-群是阿贝尔群，因此非结合 AG-群不可能是幂等的，从而也不可能是六边形拟群 [11]、GS-拟群 [9]、施泰纳拟群 [4], 或二次拟群 [12]。因此，与此前研究过几何概念的那些中列拟群子类相比，AG-群完全是中列拟群的一个不同子类。

我们首先证明，如果 G 是一个 AG-群，那么给定任意三个点 a、b、$c \in G$，存在唯一的 $d \in G$，使得 a、b、c、d 构成一个平行四边形。在 [8] 中，已证明中介拟群 Q是一个平行四边形空间。我们在定理 2 中，依据 [3]中的平行四边形空间定义，直接证明这一事实对 AG-群成立。

对于各种类型的拟群，人们已经给出了显式公式，用以根据平行四边形的另外三个顶点求出第四个顶点（见 [1, 9, 13, 14]）。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 20N05.*Key words and phrases.* 中列拟群、AG-群、平行四边形、平行四边形空间。

我们在定理 1 中为 AG-群给出了这样的公式，并提供了一种高效的计算方法。

对于某些其他类别的拟群，只要已知平行四边形中至少两个点，就可以提供计算其余点的方法。在我们的最终结果中，我们进一步给出了一些方法：即使只知道一个非平凡点，也能找出平行四边形的其余点。AG-群 G 是具有左单位元和逆元，并满足左可逆律的一种广群。

$$(xy)z = (zy)x.$$

AG-群最早在 [2] 中被确认为有限阿贝尔格拉斯曼广群的一个重要子类。它们推广了阿贝尔群的概念，因为它们不要求交换性和结合性；对于 AG-群，这两个概念彼此等价，而只要其中任一性质成立，AG-群实际上就是阿贝尔群（更多细节见 [6]）。AG-群有时也称为左近群或 LA-群。

AG-群具有多样的性质，因此除了与群并行研究外，也可以在拟群和环理论的背景下加以研究 [7]。事实上，AG-群可以视为拟群的一种特殊类型。

拟群是一个广群（$Q,\ \cdot$），满足：对于任意 $a,\ b \in G$，方程

$$a \cdot x = b, \qquad y \cdot a = b$$

对属于 G 的 x 和 y 具有唯一解。$x \cdot y$ 通常记作 xy。唯一解 x 和 y 有时分别称为左除法和右除法，记作 $x = a\backslash b$ 和 $y = b/a$。

若拟群 Q 满足恒等式 $ab \cdot cd = ac \cdot bd$，则称其为中列拟群。若还满足恒等式 $aa = a$，则称其为幂等中列拟群（幂等中列拟群） [10]。根据下面给出的引理 1，很明显每个 AG-群都是中列的。因此，针对中列拟群引入的所有几何概念，在 [8, 14, 5] 中当然也同样适用于 AG-群。容易验证，幂等 AG-群是一个阿贝尔群，因此非结合 AG-群不可能是幂等的，从而也不可能是六边形拟群 [11]、GS-拟群 [9]、施泰纳拟群 [4], 或二次拟群 [12]。因此，与此前研究过几何概念的那些中列拟群子类相比，AG-群完全是中列拟群的一个不同子类。

我们首先证明，若 G 是一个 AG-群，那么对于任意三个点 a、b、$c \in G$，存在唯一的 $d \in G$，使得 a、b、c、d 构成一个平行四边形。在 [8] 中，已证明中介拟群 Q是一个平行四边形空间。我们在定理 2 中依据 [3]给出的平行四边形空间定义，直接证明 AG-群也具有这一性质。

对于各种类型的拟群，已有显式公式可以将平行四边形的第四个顶点表示为其余三个顶点的函数（见 [1, 9, 13, 14]）。我们在定理 1 中为 AG-群给出这样的公式，并提供一种高效的计算方法。

对于拟群的其他一些类别，当至少已知两个点时，可以提供计算平行四边形各点的方法。在最后的结果中，我们进一步推进了这一点：给出了一些方法，用于在仅已知一个非平凡点的情况下，求出平行四边形的其余点。

2. Parallelograms

在本文余下部分中，我们将使用引理 1 中的方程 [7] 进行计算。

引理 1. 以下条件在每个 *AG*-群 G 中成立。设 $a, b, c, d, e \in G$，并设 e 为 G中的左单位元。

(i) $(ab)(cd) = (ac)(bd)$, (ii) $ab = cd \Rightarrow ba = dc$, (iii) $a \cdot bc = b \cdot ac$, (iv) $(ab)(cd) = (db)(ca)$, (v) $(ab)(cd) = (dc)(ba)$, (vi) $ab = cd \Leftrightarrow d^{-1}b = ca^{-1}$, (vii) 若 e 是 G 中的右单位元，则它也成为 G中的左单位元，即 $ae = a \Rightarrow ea = a$, (viii) $ab = e \Rightarrow ba = e$, (ix) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, (x) $a(b \cdot cd) = a(c \cdot bd) = b(a \cdot cd) = b(c \cdot ad) = c(a \cdot bd) = c(b \cdot ad)$, (xi) $a(bc \cdot d) = c(ba \cdot d)$, (xii) $(a \cdot bc)d = (a \cdot dc)b$, (xiii) $(ab \cdot c)d = a(bc \cdot d)$.

设 Q 是一个拟群。若存在点 $p, q \in Q$ 使得 $pa = qb$ 且 $pd = qc$，则称 $a, b, c, d \in Q$ 构成一个平行四边形，记作 $Par(a, b, c, d)$。

定理 1. 设 G 是一个 *AG*-群，且 $a, b, c, d \in G$。则 $Par(a, b, c, d)$ 成立，当且仅当存在 $x, y \in G$ 使得 $xb = a, by = c$ 且 $b \cdot xy = d$。

证明。设 $x, y \in G$ 是满足 $xb = a, by = c$ 和 $b(xy) = d$的元素。令 e表示 G中的左单位元。取 $p = e$ 和 $q = x$，可得 $pa = qb$；由引理 1 的 (xiii) 部分， $pd = b(xy) = x(by) = qc$，即 $par(a, b, c, d)$ 成立。现在假设 $par(a, b, c, d)$ 成立，并记 $x = a/b$, $y = b/c$，则 $xb = a$ 且 $by = c$。根据[3, 推论 5], ，对任意 $p \in G$，存在唯一的 $q \in G$使得$pa = qb$且 $pd = qc$。特别地，对于 $p = e$，可得 $a = qb \Rightarrow q = x$且 $d = qc = xc = x.by = b.xy$。□

在 [8], 中，已证明如果 Q 是中介拟群，那么这个四元关系满足平行四边形空间的以下性质。

(i) 对任意三个点 a、b、c，存在且仅存在一个点 d，使得$Par(a, b, c, d)$。(ii) 如果 (e, f, g, h) 是 (a, b, c, d) 或 (d, c, b, a) 的任意一个循环置换，那么$Par(a, b, c, d)$ 蕴含 $Par(e, f, g, h)$。(iii) 由 $Par(a, b, c, d)$ 和 $Par(c, d, e, f)$ 可推出 $Par(a, b, f, e)$。

定义 1. [3] 平行四边形空间是一个非空集 Q，其上定义了四元关系 $P \subseteq Q^4$，并满足以下条件：

(P1) 若 $Par(a, b, c, d)$ 成立，则对所有 $a, b, c, d \in Q$， $Par(a, c, b, d)$ 均成立。(P2) 若 $Par(a, b, c, d)$ 成立，则对所有 $a, b, c, d \in Q$， $Par(c, d, a, b)$ 均成立。(P3) 若 $Par(a, b, f, g)$ 和 $Par(f, g, c, d)$ 均成立，则对所有$a, b, c, d, f, g \in Q$， $Par(a, b, c, d)$ 均成立。

(P4) 对于任意三个点 $a,\ b,\ c$，存在且仅存在一个点 d，使得Par**(**$a,\ b,\ c,\ d$**)** 成立。

再次，在 [8], 中已证明，如果 Q 是中介拟群，那么按照 D. Vakarelov[15] 的术语，结构 (Q,Par) 是笛沙格系统的一个特例；而按照 F. Ostermann 和 T. Schmit [3], 的术语，(Q,P) 是一个平行四边形空间，其中

$$P(a,b,c,d) \Leftrightarrow Par(a,b,d,c) \tag{8}$$

。为简便起见，(Q,Par) 也称为平行四边形空间。

对于 AG-群 G，利用定义 1 和 (8)，我们直接证明 (G,Par) 是一个平行四边形空间。但首先我们证明以下引理。

引理 2. ***(i)*** 若 $Par(a,b,c,d)$ 成立，则对所有 $a,b,c,d \in G$，$Par(c,d,a,b)$ 均成立。***(ii)*** 对任意三个点 a,b,c，存在唯一一个点 d，使得 $Par(a,b,c,d)$成立。

证明。 (i) 若 Par**(**$a,\ b,\ c,\ d$**)** 成立，则存在 $p,\ q \in G$ 使得下式成立:

$$\begin{aligned} pa = qb \text{ and } pd = qc &\implies qc = pd \text{ and } qb = pa \\ &\implies Par(c,d,a,b) \end{aligned}$$

(ii) (a) 取 $d = cb^{-1} \cdot a$，我们证明 Par**(**$a,\ b,\ c,\ d$**)** 成立。因此，设 $p,\ q \in G$ 使得 $pa = qb$。现在

$$pd = p(cb^{-1} \cdot a) = cb^{-1} \cdot pa = cb^{-1} \cdot qb = q(cb^{-1} \cdot b) = qc.$$

因此 Par**(**$a,\ c,\ b,\ d$**)** 成立。

(b) 对于唯一性，设 $d_1,\ d_2 \in G$ 使得 $pa = qb$ 且 $pd_1 = qc,\ pd_2 = qc$。由最后两个等式，根据左消去律可得 $d_1 = d_2$。

□

定理 2。 *AG-*群 G 是一个平行四边形空间。

证明。 (P1) 若 P**(**$a,\ b,\ c,\ d$**)** 成立，则 Par**(**$a,\ b,\ d,\ c$**)** 成立。于是根据定理 1，存在 $x_1,\ y_1 \in G$ 使得

$$x_1 b = a, by_1 = d, b \cdot x_1 y_1 = c \Rightarrow x_1 d = c.$$

取 $x_2 = ac^{-1}, y_2 = de \cdot c^{-1}$，我们有 $x_2 c = a, cy_2 = d$，以及 $c \cdot x_2 y_2 = x_2 \cdot cy_2 = x_2 d = ac^{-1} \cdot d = dc^{-1} \cdot a = dc^{-1} \cdot x_1 b = dx_1 \cdot c^{-1} b = ce \cdot c^{-1} b = bc^{-1} \cdot c = b$。

因此，Par**(**a, b, c, d**)** 成立，从而 P**(**a, c, b, d**)** 成立。

(P2) 设 P**(**a, b, c, d**)** 成立。也就是说，Par**(**a, b, d, c**)** 成立。那么存在 $p, q \in G$，使得以下结论成立:

$$pa = qb \text{ and } pc = qd \quad \Rightarrow \quad pc = qd \text{ and } pa = qb$$

因此，Par**(**c, d, b, a**)** 成立，从而 P**(**c, d, a, b**)** 成立。

(P3) 设 P**(**a, b, f, g**)** 和 P**(**f, g, c, d**)** 成立。也就是说，Par**(**a, b, g, f**)** 和 Par**(**f, g, d, c**)** 成立。因此由定理 1 可知，存在 $x_1, y_1, x_2, y_2 \in G$，使得

$x_1 b = a, by_1 = g, b \cdot x_1 y_1 = f \Rightarrow x_1 g = f$和 $x_2 g = f, gy_2 = d, g \cdot x_2 y_2 = c \Rightarrow x_2 d = c.$

取 $x_3 = x_1 = x_2$， $y_3 = de \cdot b^{-1}$，我们有 $x_3 b = a$， $by_3 = d$，并且

$$b \cdot x_3 y_3 \quad = \quad x_3 b\{y_3 = x_3 d = x_2 d = c.$$

因此，再次由定理 1，我们证明了 $Par(a,\ b,\ d,\ c)$ 成立，从而 $P(a,\ b,\ c,\ d)$ 成立。

(P4) 证明与引理 2(ii) 类似，只需交换 $p = q$。

因此，$(G,\ Par)$ 是一个平行四边形空间。 □

推论 1。设 G 是一个 *AG*-群，并且对于某些 p、$q \in G$， $Par(a$、b、c、$d)$ 成立。那么

$$ab^{-1} = p^{-1}q$$

证明。首先证明 $Par(a,\ b,\ c,\ cq \cdot p^{-1})$ 成立。设 $pa = qb$ 对某些 $p,\ q \in G$ 成立。现在

$$p(cq \cdot p^{-1}) = cq \cdot e = qc.$$

因此， $Par(a,\ b,\ c,\ cq \cdot p^{-1})$成立。现在根据定理 2 (P4)，我们有

$$cb^{-1} \cdot a = cq \cdot p^{-1} \implies ab^{-1} \cdot c = p^{-1}q \cdot c$$

因此，根据右消去律，我们证明了这一断言。 □

上述推论为我们提供了一种求出 $p,\ q \in G$ 的方法，前提是我们知道 $Par(a,\ c,\ b,\ d)$成立。由于 G 是一个拟群，对于 $a,\ b \in G$，我们可以求得 $p^{-1}q$。然后，任意固定 q，即可求得 p^{-1}，最后我们得到 p 作为 p^{-1}的逆元。下面的例子将对此进行说明。

例1. 考虑下面这个阶为 12 的 AG-群：

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	0	3	2	6	7	4	5	10	11	8	9
2	3	2	1	0	8	11	10	9	4	7	6	5
3	2	3	0	1	10	9	8	11	6	5	4	7
4	6	4	8	10	9	0	11	1	7	2	5	3
5	7	5	11	9	0	8	1	10	3	6	2	4
6	4	6	10	8	11	1	9	0	5	3	7	2
7	5	7	9	11	1	10	0	8	2	4	3	6
8	8	10	6	4	5	2	7	3	11	0	9	1
9	9	11	5	7	3	4	2	6	0	10	1	8
10	10	8	4	6	7	3	5	2	9	1	11	0
11	11	9	7	5	2	6	3	4	1	8	0	10

取 $a = 3,\ b = 7$，则根据定理 1，我们有 $Par(3,\ 7,\ 2,\ 6)$成立。现在我们想知道，对于这个平行四边形，$p,\ q$ 究竟是什么。因此，利用推论 1，我们可以按以下方式求出它们。

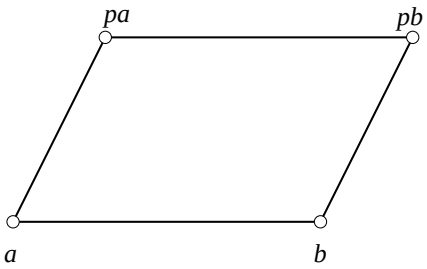
我们有 $3 \cdot 7^{-1} = p^{-1}q$，这意味着 $8 = p^{-1}q$。现在取 $q = 10$ （例如）。于是我们有 $8 = p^{-1} \cdot 10$。这意味着 $p^{-1} = 1$。最终得到 $p = 1^{-1} = 1$。我们可以验证它们是正确的，因为 $2 = 1 \cdot 3 = 10 \cdot 7 = 2$ 且 $4 = 1 \cdot 6 = 10 \cdot 2 = 4$。如果我们取 $q = 4$，就会得到 $p = 3$。

定理 2 (P4) 给出第四个点或元素 d，对于 G 的任意三个点元素 a, b, c，它们可构成一个平行四边形。以下定理描述了在给定任意两点时如何构成一个平行四边形。

定理 3. 设 G 是一个 *AG*-群，且 $a, b, p \in G$。则 $Par(a, b, pb, pa)$ 成立。

证明。设 $c = pb, d = pa$。取 $q \in G$ 使得 $pa = qb$。现在 $qc = q(pb) = p(qb) = q(pa) = pd$。因此，$Par(a, b, pa, pb)$成立。□

下面用图示说明定理 3 的结果：



我们也通过一个例子来说明上述定理。

例2. 任取例*1*中的 $a = 2$、 $b = 7$和 $p = 9$ 。那么可以找到$q = 1$，使得 $Par(2、7、6、5)$ 成立。注意， $p = 9$ 已是已知的。

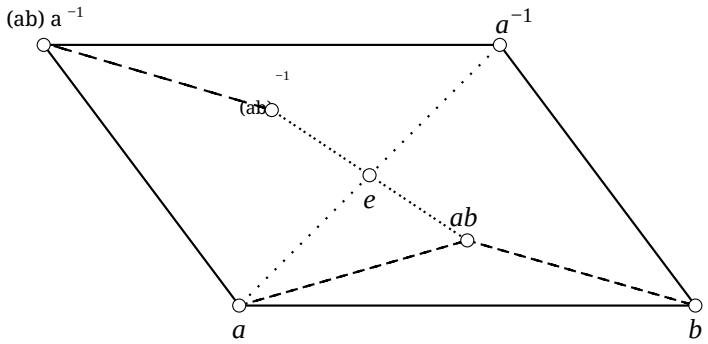
定理 4. 设 G 是一个 *AG*-群。那么 $Par(a、 b、 a^{-1}、 (ab)^{-1}a)$ 成立。

证明. 设 $p, q \in G$ ，使得 $pa = qb$。

$$\begin{aligned} \text{Now } qa^{-1} &= [(b^{-1}a)p]a^{-1} \\ &= (a^{-1}p)(b^{-1}a) \text{by invertive law} \\ &= (a^{-1}b^{-1})(pa) \text{ by Lemma 1 Part(i)} \\ &= p[(a^{-1}b^{-1})a] \text{ by Lemma 1 Part(iii)} \\ &= p[(ab)^{-1}a] \text{ by Lemma 1 Part(ix)} \end{aligned}$$

因此， $Par(a, b, a^{-1}, (ab)^{-1}a)$成立。 □

我们将再次通过图示来阐释上述定理，然后给出一个例子。



例3. 任取例*1*中的 $a = 3$和$b = 8$。那么 $Par(3、 8、 2、 11)$成立。这里 $p = 1$ 和 $q = 7$。

定理 5. 设 G 为一个 *AG*-群，且令 $a, b \in G$ 满足 $e \neq a$。则$Par(a, ab, (ae)a^{-1}, b)$ 成立

证明。 设 $p, q \in G$ 满足 $pa = q(ab)$。现在

$$\begin{aligned} pa &= a(qb) \text{ by Lemma 1 Part(xiii)} \\ ap &= (qb)a \text{ by Lemma 1 Part(ii)} \\ qb &= (ap)a^{-1} \text{by right inverse property} \\ qb &= (ap)(ea^{-1}) \\ qb &= (a^{-1}e)(pa) \text{ by Lemma 1 Part(iv)} \\ qb &= p((a^{-1}e)a) \text{ by Lemma 1 Part(iii)} \\ qb &= p((ae)a^{-1}). \end{aligned}$$

因此， $Par(a,\ ab,\ (ae)a^{-1},\ b)$成立。 □

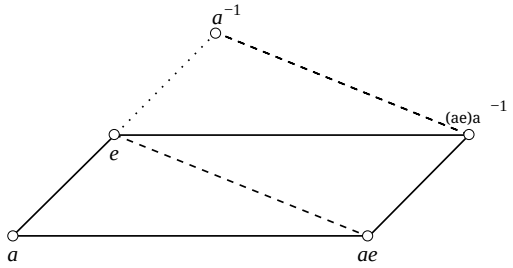
我们来考虑下面的例子。

例4. 任取例*1*中的 $a = 5, b = 2$。则 $Par(5、11、1、2)$成立。这里 $p = 10$ 和 $q = 4$。

下面的推论给出了一种快速计算AG-群 G中任意非平凡元素的平行四边形空间的方法。

推论2. 设 G 是一个*AG*-群，且 $a \in G$满足 $e \neq a$。则$Par(a, ae, (ae)a^{-1}, e)$ 成立。

注意，由于 e 是AG-群中的左单位元，因此元素 ae通常不同于 a，所以 $Par(a, ae, (ae)a^{-1}, e)$ 是非平凡的。我们再次通过一幅图示以及随后给出的具体例子来说明该推论。



例5. 在例*1*中任取 $a = 6$。则 $Par(6, 4, 1, 0)$ 成立。这里$p = 3$ 且 $q = 2$。

定理6. 设 G是一个*AG*-群，若 $Par(a_1, b_1, c_1, d_1)$ 且 $Par(a_2, b_2, c_2, d_2)$，则 $Par(a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, d_1d_2)$ 也成立。

证明。 由于 $Par(a_1, b_1, c_1, d_1)$ 和 $Par(a_2, b_2, c_2, d_2)$ 成立，由定理 1，存在 $x_1, y_1, x_2, y_2 \in G$ 使得

$$x_1a_1 = b_1, b_1y_1 = c_1, b_1 \cdot x_1y_1 = d_1, x_2a_2 = b_2, b_2y_2 = c_2, b_2 \cdot x_2y_2 = d_2$$

取 $x_3 = x_1x_2, y_3 = c_2b_1^{-1} \cdot c_1b_2^{-1}$，可得 $x_3 \cdot a_1a_2, b_1b_2 \cdot y_3 = c_1c_2$。现在

$$\begin{aligned} b_1b_2 \cdot x_3y_3 &= (b_1b_2)\{(x_1x_2)(c_2b_1^{-1} \cdot c_1b_2^{-1})\} \\ &= (b_1b_2)\{(x_1x_2)(c_2c_1 \cdot b_1^{-1}b_2^{-1})\} \\ &= (x_1x_2)\{(c_2c_1)(b_1b_2 \cdot b_1^{-1}b_2^{-1})\} \\ &= (x_1x_2)(c_2c_1 \cdot e) \\ &= x_1x_2 \cdot c_1c_2 \\ &= x_1c_1 \cdot x_2c_2 \\ &= (b_1 \cdot x_1y_1) \cdot (b_2 \cdot x_2y_2) \\ &= d_1d_2 \end{aligned}$$

因此，由定理 1 可知结论成立。 □

定理 7. 设 G 是一个 *AG*-群，则平行四边形空间 (G, Par) 仍是一个 *AG*-群。

证明。 在 (G, Par) 上定义二元运算 @:

$$Par(a_1, b_1, c_1, d_1)@Par(a_2, b_2, c_2, d_2) = Par(a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, d_1d_2)$$
$$\text{for all } a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \in G$$

由定理6可知，(G, Par) 在 @ 下封闭。
设 $x = Par(a_1, b_1, c_1, d_1)$ $y = Par(a_2, b_2, c_2, d_2)$ $z = Par(a_3, b_3, c_3, d_3) \in (G, Par)$，则

$$\begin{aligned} (x@y)@z &= [Par(a_1, b_1, c_1, d_1)@Par(a_2, b_2, c_2, d_2)]@Par(a_3, b_3, c_3, d_3) \\ &= Par(a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, d_1d_2)@Par(a_3, b_3, c_3, d_3) \\ &= Par(a_1a_2 \cdot a_3, b_1b_2 \cdot b_3, c_1c_2 \cdot c_3, d_1d_2 \cdot d_3) \\ &= Par(a_3a_2 \cdot a_1, b_3b_2 \cdot b_1, c_3c_2 \cdot c_1, d_3d_2 \cdot d_1) \\ &= Par(a_3a_2, b_3b_2, c_3c_2, d_3d_2)@Par(a_1, b_1, c_1, d_1) \\ &= [Par(a_3, b_3, c_3, d_3)@Par(a_2, b_2, c_2, d_2)]@Par(a_1, b_1, c_1, d_1) \\ &= (z@y)@x \end{aligned}$$

因此，(G, Par) 在 @ 运算下是一个 AG-群胚。
$Par(e, e, e, e) \in (G, Par)$ 起左单位元的作用，因为对所有 $Par(a, b, c, d) \in (G, Par)$，我们有

$$Par(e, e, e, e)@Par(a, b, c, d) = Par(ea, eb, ec, ed) = Par(a, b, c, d)$$

(G, Par) 中的每个元素 $Par(a, b, c, d)$ 都有一个逆元 $Par(a^{-1}, c, b, d)$，使得

$$\begin{aligned} Par(a, b, c, d)@Par(a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, d^{-1}) &= Par(e, e, e, e) \text{ and} \\ Par(a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, d^{-1})@Par(a, b, c, d) &= Par(e, e, e, e) \end{aligned}$$

因此，$(G, Par, @)$ 是一个 AG-群。 □

推论3. 设 G 是一个阿贝尔群，则 $(G, Par, @)$ 是一个阿贝尔群。

现在，我们可以将上述结果推广为以下定理。

定理 8。 设 G 为中介拟群，则 $(G, Par, @)$ 也为中介拟群。

该定理的证明与定理 7 的证明类似。

References

[1] V. Krcadinac 和 V. Volenec。与三次 Pisot 数相关的一类拟群。 *Quasigroups and Related Systems*，13:269–280，2005。[2] Q. Mushtaq 和 M.S. Kamran。关于左近群。 *Proc. Pak. Acad. of Sciences*，33 2，1996 1：–。[3] F. Ostermann 和 J. Schmidt。由平行四边形性质导出向量运算的基础。 *Math.-Phys. Semesterberichte*，10(1):47–64，1963。[4] M.J. Pellingal 和 D.G. Rogersa。施泰纳拟群 ii：组合方面。 *Bull. Austral.*，：– *Math. Soc.* 20 321 344, 1979 。[5] N.K. Puharev。某些中列拟群的几何问题。 *Sibirsk. Mat. Zh.*，9:891–897，1968。俄文。[6] M. Shah 和 A. Ali。AG-群的一些结构性质。 *Int. Mathematical Forum*，6 34 1661( )：–1617，2011。[7] M. Shah 和 A. Ali。作为拟群的 AG-群。已提交。[8] V. Volenec。中列拟群的几何，南斯拉夫数学杂志。 *Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjet.*，421 5 79( )：–91，1986。[9] V. Volenec。Gs-拟群。 *Casopis Pest. Mat.*，115:307–318，1990。[10] V. Volenec。im-拟群的几何。 *Rad Hrvat. Akad. Znan. Umjet.*，456:139–146，1991。[11] V. Volenec。六边形拟群。 *Arch. Math.*，27a:113–122，1991。[12] V. Volenec。二次群胚。 *Note di Matematica*，13(1):107–115，1993。[13] V. Volenec 和 R. Kolar-ˇSuper。二次拟群中的平行四边形，1997 年。预印本。[14] V. Volenec 和 V. Krcadinac。关于中列拟群的一则注记。 *Mathematical Communications*，11 83：–85，2006。[15] D. Vakarelov 德萨格系统。 *Godinik univ. Sofija. Mat. fak.*，64:227–235，1971。

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, QUAID-I-AZAM UNIVERSITY, ISLAMABAD, PAKISTAN*Email address*: mshahmaths@gmail.comSCHOOL OF COMPUTER SCIENCE, UNIVERSITY OF BIRMINGHAM, UK.*Email address*: V.Sorge@cs.bham.ac.uk