arXiv:2601.04374v1 [math.GR] 7 Jan 2026

具有任意系数的有限群的 ≥ 3 次上同调中的任意类可在有限扩张中平凡化

Adrien DeLazzer Meunier

1 引言

本文旨在阐述标题中所述命题的证明。这个思想——有限群 G 的任意上同调类（次数足够高时）都可以在一个 有限群扩张中平凡化——专家们已经了解了一段时间。特别是，这个问题一直是物理学文献中的讨论主题，例如[Tac]，它是本文的主要灵感来源。作者还指出了 [WWW] ，其中针对类似问题给出了更直接的物理学论证。我不打算对这一命题的物理学解释作过多说明；感兴趣的读者可以查阅上述两个来源 [Tac；WWW]。

我将给出的证明始于对 [Tac, §2.7] 中所述证明的略微推广。受物理学解释的启发， [Tac] 中的结果表述为 n-余循环的形式，其中 G with $n \geq 2$, 系数取自$U(1) \subset \mathbb{C}^\times$，并将其视为平凡的 G-模。然而，只要其像生成一个有限子群，这里的论证同样适用于取值于更一般 G-模的余循环。这一技术相当初等，其根源可追溯至 [HS], 这篇论文；Hochschild 和 Serre 正是在该论文中引入了我们将在证明中遇到的谱序列。对于更熟悉谱序列工具的读者， [D´ec] 的引理 4.2.3 给出了这一命题的一个更高阶证明，适用于系数模作为阿贝尔群具有挠性的情形。在本文中，我将更进一步证明：只要 $n \geq 3$，任何 n-余循环 G with coefficients in 任意 G-模都可以被平凡化。

在下一节中，我将回顾与有限群 G 以阿贝尔核为核的扩张相关的 Lyndon-Hochschild-Serre（LHS）谱序列的一些有用事实。这些事实将在下一节中用到，届时我将证明所述结果。在附录中，我会介绍一些群上同调的背景知识，我认为这些内容对不太熟悉相关主题的读者会有所帮助。特别是，我会简要介绍导出函子；如果读者对较为抽象的形式体系不感兴趣，可以放心跳过这一部分。之后，我会回顾群上同调本身的一些基本事实和定义。

2 关于 LHS 谱序列的若干事实

我主要关注的情形是以阿贝尔核为核的群扩张。考虑这样一个以阿贝尔 A 为核的扩张 G，由短正合列 $1 \to A \hookrightarrow \Gamma \twoheadrightarrow G \to 1$ 给出。一个众所周知的事实（例如参见 [Bro, §IV]）是，Γ 的同构类完全由以下数据决定：G 在 A 上的一个作用，以及 $H^2(G; A)$ 中的一个上同调类，我将其称为扩张类。在群同构意义下，Γ 由集合 $A \times G$ 给出；若 $c \in Z^2(G; A)$ 代表该扩张类，则群运算由 $(a,\ g)(b,\ h) = (a + g \cdot b + c(g,\ h),\ gh)$ 给出。我将这个特定的群记为 $A \rtimes^c G$；在处理扩张 $\Gamma \cong A \rtimes^c G$ 时，我会滥用记号，将 $\gamma \in \Gamma$ 写作 $\gamma = (a,\ g)$。

分析 Γ 的上同调，并从 G 和 A 的角度加以理解，一个有用的工具是 Lyndon-Hochschild-Serre (LHS) 谱序列。它最初由 [HS] 引入，用于更一般地计算商群的上同调；在这一特定情形下，它也相当好用。若 M 是某个 G-模，那么由于 $G \cong \Gamma/A$，它也可以视为一个 Γ-模，而正规子群 A 在其上的作用是平凡的。取系数于 M，E_2 页的 LHS 谱序列形式如下：

$$E_2^{r,s} = H^r(G; H^s(A; M))$$

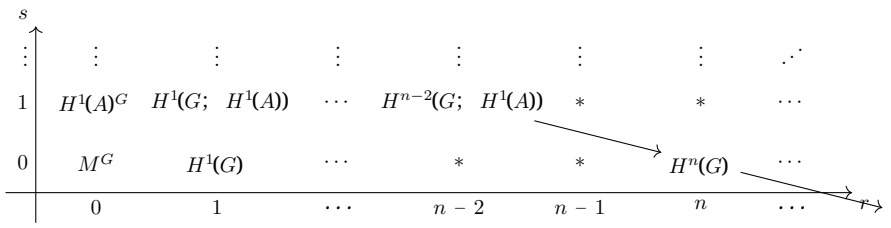
该谱序列收敛到 Γ 的上同调，其含义是 $H^n(\Gamma;\ M) \cong \bigoplus_{r+s=n} E^{r,s}_\infty$。在此背景下，作用 $G \curvearrowright H^s(A;\ M)$ 由作用 $G \curvearrowright A$ 和 $G \curvearrowright M$ 诱导，并在上链层面定义为：

$$(g \cdot f)(a_1, \ldots, a_s) = g \cdot f(g^{-1} \cdot a_1, \ldots, g^{-1} \cdot a_s)$$

由于 $A \curvearrowright M$ 平凡地，$H^1(A;\ M) = \mathrm{Hom}^{\mathrm{Grp}}(A,\ M)$，因此函数 $A \otimes H^1(A;\ M) \to M$ 由 $a \otimes f \mapsto f(a)$ 给出，是一个定义良好的群同态。此外，在 $H^1(A;\ M)$ 上的诱导作用下，这个求值映射也是 G-模之间的配对。如附录 C 中所述，这会在上同调中诱导出如下形式的杯积。

$$\cup_{\mathrm{ev}} : H^*(G; A) \otimes H^*(G; H^1(A; M)) \longrightarrow H^*(G; M)$$

为了证明所声称的结果，我需要用到关于 LHS 谱序列的几个事实。为便于理解，我们来看一下对应于短正合列 $1 \to A \hookrightarrow \Gamma \twoheadrightarrow G \to 1$ 的 E_2 页中的以下部分。



其中 $H^\bullet(-)$ 应理解为 $H^\bullet(-;\ M)$，而 $(-)^G$ 应理解为 $H^0(G;\ -)$，d_2 箭头表示相应的微分，而 $*$ 表示一些无关的其他上同调群。这是一个第一象限谱序列

因为我们取 $E^{r,\ 2}{}^{s} = 0$ 当 $r < 0$ 或 $s < 0$时。一般而言， E_k页上的微分是如下形式的同态。

$$d_k \colon E_k^{r,s} \longrightarrow E_k^{r+k,s+k-1}$$

因此，特别地，对于任意 $k \geq 2$，所有从 $E^{r,}{}_{k}{}^{0}$ 出发的微分都是零映射。根据翻页的定义，后续各页中该序列的底行由以下商给出。

$$\begin{aligned} E_{k+1}^{r,0} &= \frac{\ker\left(E_k^{r,0} \xrightarrow{d_k} 0\right)}{\operatorname{im}\left(E_k^{r-k,k-1} \xrightarrow{d_k} E_k^{r,0}\right)} \\ &= \frac{E_k^{r,0}}{\operatorname{im}\left(E_k^{r-k,k-1} \xrightarrow{d_k} E_k^{r,0}\right)} \end{aligned}$$

这些商给出了对所有 $k \geq 2$都成立的满同态 $E^{r,\ 0}_{k} \twoheadrightarrow E^{r,0}_{k+1}$。当该部分中源和靶之间的微分全都为零映射后，谱序列的这一部分便稳定下来。观察射向底行的微分之源何时离开页面，显然可知 $E^{r,\ 0}_{r-1} = E^{r,0}_{\infty}$。此外，LHS 谱序列的收敛性表明，存在一个同态 $E^{r,0}_{\infty} \hookrightarrow H^r(\Gamma; M)$。综上，可得以下复合映射。

$$H^r(G;M) = E_2^{r,0} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_{r-1}^{r,0} = E_\infty^{r,0} \hookrightarrow H^r(\Gamma;M) \qquad (1)$$

在 [HS 的 §III.1], 中，作者论证这个复合映射由“提升同态” $H^r(G;\ M) \to H^r(\Gamma;\ M)$ 给出，它是由满同态 $\Gamma \twoheadrightarrow G$ 在上同调中诱导的映射。特别地，如果一个上同调类 $\omega \in H^r(G;\ M)$ 属于这些满射之一的核，也就是说， ω 属于序列中射向底行的某个微分的像，那么它就被提升为零上同调类。

我从 LHS 还需要的最后一点，是一个关于射到最底行的 E_2-页微分的公式。这些是如下形式的同态d_2： $H^r(G;\ H^1(A;\ M)) \to H^{r+2}(G;\ M)$。 [HS， §III] 中的定理 4 表明，对于任意 $\alpha \in H^r(G;\ H^1(A;\ M))$，其微分由 $d_2(\alpha) = -\alpha \cup_{\mathrm{ev}} c$ 给出，其中$\cup_{\mathrm{ev}}$ 是由求值配对诱导的杯积，而 $c \in H^2(G; A)$ 是扩张类。根据定义 12（见附录C），我们得到代表上循环层面的以下方程（位于 M 中）。

$$d_2(\alpha)(g_1, \ldots, g_{r+2}) = -\alpha_{(g_1,\ldots,g_r)}(g_1 \cdots g_r \cdot c(g_{r+1}, g_{r+2})) \qquad (2)$$

这里我的记号是， $\alpha_{(g_1,\ldots,g_r)} \in H^1(A;\ M)$ 是映射 $\alpha\colon G^{\times r} \to H^1(A;\ M)$ 的像。

3 平凡化

在本节中， G 是某个固定的有限群， M 是一个 G-模，而$\omega\colon G^{\times n} \to M$是 M中 G的一个固定的 n-上循环。一般来说，对于群同态

phism ϕ: $K \to G$，我会写作 $\phi^* := H^i(\phi;\ M)$: $H^i(G;\ M) \to H^i(K;\ M)$，例如 $\phi^*\omega = \omega \circ \phi^{\times n}$；对于 G-模同态 f: $M \to N$，我会写作$f_* := H^i(G;\ M) \to H^i(G;\ N)$，例如 $f_*\omega = f \circ \omega$。群或模可以改变，但模式保持不变。

3.1 主要结果

ω 的像生成子群 $\Omega := \langle \mathrm{im}(\omega) \rangle \subseteq M$。我将证明的论断是：如果 Ω 有限且 $n \geq 2$，那么 ω 可在 G 的一个有限扩张中通过阿贝尔核使其平凡化。更确切地说，有如下定理。

定理 1 如果 $|\Omega| < \infty$，则存在有限群的短正合列

$$1 \longrightarrow A \xhookrightarrow{\iota} \Gamma \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1 \tag{3}$$

以及一个上链 $\alpha \in C^{n-1}(G;\ M)$，使得 A 是阿贝尔群，且 $\pi^*\omega = \delta_\Gamma \alpha \in Z^n(\Gamma;\ M)$。特别地，$\pi^*\omega = 0 \in H^n(\Gamma;\ M)$

注释 2 给定扩张 *(3)*，包含映射 ι: $A \hookrightarrow \Gamma$ 诱导一个上链映射 ι^*: $C^\bullet(\Gamma;\ M) \to C^\bullet(A;\ M)$。如果 $\pi^*\omega$由 α平凡化，那么 $\iota^*\alpha$必然是 A的上循环。事实上，不难验证

$$\begin{aligned}\delta_A(\iota^*\alpha) &= \iota^*(\delta_\Gamma \alpha)\\ &= \iota^*(\pi^*\omega)\\ &= (\pi \circ \iota)^*\omega\\ &= 0\end{aligned}$$

注意到，由于 $|G^{\times n}| = |G|^n < \infty$ 和 M 是阿贝尔群，Ω 是有限生成阿贝尔群。因此，有限生成阿贝尔群基本定理表明，$|\Omega| < \infty$ 当且仅当 Ω 是挠的。如果 M 本身是挠的，那么 Ω 必定是有限群；如此一来，上述定理便立即推出以下结论。

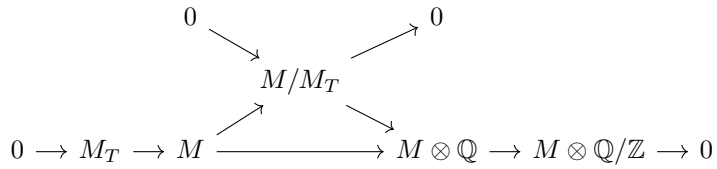
推论 3 如果 G 是有限群，且 M 是一个作为阿贝尔群具有挠性的 G-模，那么 $n \geq 2$ 中 G的任意 n-上循环，都可以在由有限阿贝尔群扩张 G所得的扩张中平凡化。

引理 4.2.3 给出了一个更直接的推论 3 证明，它绕过了定理 1；该证明见 [D´ec]，运用了应用于相关 LHS 谱序列的一些一般谱序列方法。我将在下一节证明定理 1。在此期间，先假设它成立，我们还可以得到以下定理。

定理 4 设 M 是任意 G-模，ω 是 G 在 M 中的一个 n-上循环，且 $n \geq 3$、
~
，那么存在 G 的一个有限扩张 Γ，使得 ω 可以被平凡化。

证明：

定义 M_T 为 M 的 $\mathbb{Z}$-挠子模，即由 M 中所有有限阶元素构成的 G 子模。现在考虑由 $0 \to \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ 给出的平凡 G-模（即阿贝尔群）的短正合列。记作 $\otimes = \otimes_{\mathbb{Z}}$，我们可以对该序列应用右正合函子 $M \otimes -$，并计算最左侧映射的核。不难证明，这恰好是 M_T，因此我们得到四项正合列 $0 \to M_T \hookrightarrow M \to M \otimes \mathbb{Q} \twoheadrightarrow M \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$。它可分解为如下两个短正合列。



接下来，由于（标准化）巴分解由 i 维的自由$\mathbb{Z}[G]$-模 $\mathbb{Z}G_i$ 给出（见附录 B），协变函子 $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}G_i, -)$ 都是正合的。因此，我们得到两个相应的上链复形短正合列。第一个是 $0 \to C^\bullet(G;\, M/M_T) \to C^\bullet(G;\, M \otimes \mathbb{Q}) \to C^\bullet(G;\, M \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0$，并导出如下上同调长正合列。

$$
\begin{aligned}
&\cdots \longrightarrow H^{i-1}(G; M \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \\
&\longrightarrow H^i(G; M/M_T) \longrightarrow H^i(G; M \otimes Q) \longrightarrow H^i(G; M \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \\
&\longrightarrow H^{i+1}(G; M/M_T) \longrightarrow \cdots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Bro 的命题 9.5（§III.9）指出，对于任意子群 $K \subseteq G$ 和 G-模N，存在同态 $H^\bullet(G;\, N) \to H^\bullet(G;\, N)$，由 $c \mapsto [G\colon K]c$ 给出，且它经过 $H^\bullet(K;\, N)$ 分解。因此，取 $K = \{1\}$ 即可推出，对于任意上同调类 $c \in H^\bullet(G;\, N)$，都有 $|G|c = 0$。如果 N 是包含 $|G|$ 的某个域上的向量空间，那么 $H^\bullet(G;\, N) = \{0\}$，因为对于任意 c，$c = (|G|^{-1}|G|)c = |G|^{-1}(|G|c) = |G|^{-1}(0) = 0$。不难证明，$M \otimes \mathbb{Q}$ 确实是 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间，因此对于所有 i，都有 $H^i(G; M \otimes \mathbb{Q}) = 0$。(4) 的正合性随后蕴含 $H^i(G;\, M/M_T) \cong H^{i-1}(G;\, M \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$。

令 $p\colon M \to M/M_T$为商映射，则 $p \circ \omega = p_* \omega \in H^n(G;\, M/M_T)$。由于 $M \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 作为阿贝尔群是挠的，推论 3 表明，若$n - 1 \geq 2$，则存在一个有限扩张 $\pi\colon \Gamma \twoheadrightarrow G$，其扩张对象为 G，使得 $\pi^*(p_* \omega) = 0 \in H^n(\Gamma;\, M/M_T) \cong H^{n-1}(\Gamma;\, M \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$。我们还需要考虑的另一个链复形短正合序列是 $0 \to C^\bullet(\Gamma;\, M_T) \to C^\bullet(\Gamma;\, M) \to C^\bullet(\Gamma;\, M/M_T) \to 0$。相关上同调长正合列的示意如下。

$$
\cdots \to H^i(\Gamma; M_T) \xrightarrow{j_*} H^i(\Gamma; M) \xrightarrow{p_*} H^i(\Gamma; M/M_T) \to \cdots
\tag{5}
$$

根据假设，$\pi^*(p_*\omega) = 0$，但我们也有 $\pi^*(p_*\omega) = p\circ\omega\circ\pi^{\times n} = p_*(\pi^*\omega)$。这意味着 $\pi^*\omega \in \ker(p_*)$，因此根据（5）的正合性，存在一个上循环 $\beta\colon \Gamma^n \to M_T$，使得 $j_*\beta = \pi^*\omega$，其中 $j\colon M_T \hookrightarrow M$ 是包含映射。

特别地，我们有 $n \geq 2$ 而且，$j_*\beta$ 是 Γ 在 M 中的一个 n-上循环，其像生成一个有限群。这正是 $\widetilde{}$ 定理 1 的假设，因此存在一个有限扩张 $\widetilde{\pi}\colon \Gamma \twoheadrightarrow \Gamma$ of Γ，使得 $\sim\widetilde{\pi}^*(j_*\beta) = 0 \in H^n(\Gamma; M)$。进而，这说明原来的上循环在此处也被平凡化了，因为 $\widetilde{\pi}^*(j_*\beta) = \widetilde{\pi}^*(\pi^*\omega) = (\pi\circ\widetilde{\pi})^*\omega$。□

3.2 定理 1 的证明

按照 [Tac, §2.7], ，策略是先在一个以自由阿贝尔群（因此是无限群）为核的 G 扩张中平凡化 ω。接着，我再将 $\mathcal{A}$ 与一个有限循环群作张量积，得到 A。我们需要假设 $|\Omega| < \infty$ 的原因是，这样才能实际构造所讨论的有限循环群。

定义 $\mathcal{A}$ 为由符号 $\{\times_{g,h} \mid g,h \neq 1 \in G\}$生成的自由阿贝尔群。或者，也可以将其视为先由$G\times G$自由生成，再对关系取商，该关系规定对于任意 $g \in G$，$\times_{1,g} = \times_{g,1} = 0$。这样做的原因是，$\mathcal{A}$应当是 G的规范化 2-上循环的泛目标。为此，映射 $c\colon G\times G \to \mathcal{A}$ 定义为$c(g,h) = \times_{g,h}$，其自身应当是一个 2-上循环。为使这一点成立，我们在 $\mathcal{A}$上赋予一个由下式定义的 G-作用：

$$g\cdot\times_{h,k} = \times_{gh,k} - \times_{g,hk} + \times_{g,h}$$

对于任意 $g,h,k \in G$。这样定义恰到好处，使得 c满足 2-上同调循环条件（即 $\delta c = 0$）。于是，这个 G- 模 $\mathcal{A}$ 表示取 G 的 2- 上循环这一 Ab- 富集函子。

$$Z^2(G;-)\colon G\,\mathrm{Mod} \longrightarrow \mathrm{Ab}$$

其泛性质如下：对于任意 G-模 M 以及任意归一化的 2-上循环 μ：$G\times G \to M$，存在唯一的 G-模同态$\varphi\colon \mathcal{A} \to M$，使下图交换。

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \xrightarrow{c} & \mathcal{A} \\ & \searrow^{\mu} & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ & & M \end{array}$$

G-模 $\mathcal{A}$ 以及由 c 表示的 $H^2(G;\mathcal{A})$ 中的上同调类，确定了一个 G 被 $\mathcal{A}$扩张的扩张$\mathcal{G} \cong \mathcal{A}\rtimes^c G$。这由以下短正合列描述。

$$1 \longrightarrow \mathcal{A} \xhookrightarrow{j} \mathcal{G} \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

下一步是证明 ω 作为 $\mathcal{G}$ 在 M中的 n上循环是平凡的，也就是说，$p^*\omega$ 代表 $0 \in H^n(\mathcal{G}; M)$。这里，$p^*$ 是提升同态，因此

它由复合 (1) 给出。由于 $\omega = E^n$ 代表 $H^n(G;\, M)_{,0\,2}$ 中的一个上同调类，只需证明随着谱序列逐页推进，ω 最终会被映射到复合中的某个满射的核中。幸运的是，ω 已被第一个满射 $E^{n,\ 0} \twoheadrightarrow E^{n,0\,3}$ 消去。根据定义，这等同于它属于 d_2 微分的像；也就是说，存在某个 $b \in Z^{n-2}(G;\, H^1(\mathcal{A};\, M))$，它代表 $H^{n-2}(G;\, H^1(\mathcal{A};\, M)) = E^{n-2,1\,2}$ 中的一个上同调类，使得

$$\begin{aligned}\omega(g_1,\dots,g_n) &= (d_2 b)\,(g_1,\dots,g_n)\\ &= -b_{(g_1,\dots,g_{n-2})}\,(g_1\cdots g_{n-2}\cdot c(g_{n-1},g_n))\end{aligned}$$

其中我使用了微分 d_2 的公式 (2)。顺便一提，这正是条件 $n \geq 2$ 发挥作用的地方；如果 $n = 0$ 或 $n = 1$，那么对于任意 $k \geq 2$，都没有微分映到 $E^{n,\ 0}_{\ k}$。我将通过直接构造来证明这样的 b 存在，并分两步完成。首先，令 Y 为一个取值于 $H^1(\mathcal{A};\, M)$ 的 $(n-2)$- 上链，其属于 $\mathcal{G}$，并且是一个按如下方式定义的 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathcal{A},\ M)$。

$$Y_{(g_1,\dots,g_{n-2})}(\times_{g_{n-1},g_n}) = -\omega(g_1,\dots,g_n) \tag{6}$$

通过按 $\mathbb{Z}$-线性地扩张到整个 $\mathcal{A}$，这就得到了一个取值于 $H^1(\mathcal{A};\, M)$ 的良定义上链。然后，我通过以下方式稍作修改 Y，定义一个新的上链。

$$b_{(g_1,\dots,g_{n-2})} \coloneqq \big((g_1\cdots g_{n-2})^{-1}\big)\cdot Y_{(g_1,\dots g_{n-2})}$$

因此，按构造可得 $d_2(b) = \omega$。剩下要检查的只有 b 确实是一个上循环。我将利用莱布尼茨法则 (7)，并借助 ω 和 c 都是 G 的上循环这一事实来证明这一点。

$$\begin{aligned}0 &= -\delta_G\omega(g_1,\dots,g_{n+1})\\ &= \delta_G(b\cup_{\mathrm{ev}} c)(g_1,\dots,g_{n+1})\\ &= \big(\delta_G b\cup_{\mathrm{ev}} c + (-1)^{n-2} b\cup_{\mathrm{ev}} \delta_G c\big)(g_1,\dots,g_{n+1})\\ &= \big(\delta_G b\cup_{\mathrm{ev}} c\big)(g_1,\dots,g_{n+1})\\ &= (\delta_G b)_{(g_1,\dots,g_{n-1})}\big(g_1\cdots g_{n-1}\cdot c(g_n,g_{n+1})\big)\\ &= (g_1\cdots g_{n-1})\cdot\big((g_1\cdots g_{n-1})^{-1}\cdot(\delta_G b)_{(g_1,\cdots,g_{n-1})}\big)(c(g_n,g_{n+1}))\\ &= \big((g_1\cdots g_{n-1})^{-1}\cdot(\delta_G b)_{(g_1,\cdots,g_{n-1})}\big)(c(g_n,g_{n+1}))\end{aligned}$$

其中在最后一步中，我通过 M 上的 G 作用，在等式两边都作用了 $(g_1\cdots g_{n-1})^{-1}$。现在，由于 $c(g_n,g_{n+1}) = \times_{g_n,g_{n+1}}$ 是 $\mathcal{A}$ 的生成元，上述内容可以视为 $H^1(\mathcal{A};\, M) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(\mathcal{A}, M)$ 中的一个等式。

$$0 = (g_1\cdots g_{n-1})^{-1}\cdot(\delta_G b)_{(g_1,\cdots,g_{n-1})}$$

我再次让 $g_1\cdots g_{n-1}$ 从两侧作用，这次是通过 $H^1(\mathcal{A};\, M)$ 上的 G-作用，最终得到 $\delta_G b = 0 \in C^{n+1}(G;\, H^1(\mathcal{A};\, M))$。因此，$b$ 确实是所需的上循环，并且我们有 $p^*\omega = 0 \in H^n(\mathcal{G};\, M)$。

到这里，我们的任务几乎完成了。现在唯一剩下的就是将所有内容有限化。这可以通过完全相同的论证并使用相同的公式来完成，只需将 $\mathcal{A}$ 替换为有限群 $A \coloneqq \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/N$，其中 N是一个足够大的自然数。N 需要足够大，是因为这样才能确保定义上链 Y的公式 (6)，进而确保上循环 b 仍然有定义。特别是，Y 和 b 必须实际取值于 $H^1(A; M) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(A, M)$。考虑这样一种情况：对于 G中的某些 h_i，N小于 $\omega(h_1, \ldots, h_n)$ 的阶，并将 $\mathbb{Z}/N$ 的生成元记为 1_N。在这种情况下，会得到如下矛盾

$$\begin{aligned} NY(h_1, \ldots, h_{d-2})(\times_{h_{d-1}, h_d} \otimes 1_N) &= -N\omega(h_1, \ldots, h_d) \neq 0 \\ &= Y(h_1, \ldots, h_{d-2})(N \times_{h_{d-1}, h_d} \otimes 1_N) = 0 \end{aligned}$$

由于我假设 Ω 是有限的（因此是挠的），避免这种情况的一种方法是令 N 为 $\mathrm{im}(\omega)$ 中非零元素的阶的最小公倍数。这样就能避免上述矛盾，因为对于任意一组正整数 $\{n_i\}_{i=1}^k$，$\mathrm{lcm}(n_1、\ldots\ldots、n_k) \geq n_i$ 对任意 i都成立。此外，$N\omega(g_1、\ldots\ldots、g_n) = 0$ 对 G 中任意选取的 g_i 都成立，这正是我们所需要的。将 $\mathcal{A} \cong \mathbb{Z}^{(|G|-1)^2}$ 替换为 $A \cong (\mathbb{Z}/N)^{(|G|-1)^2}$ 后，同样的论证便可证明该定理。

□

附录

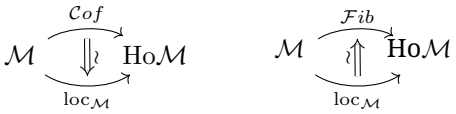
关于群上同调，有说不完的话题。事实上，这个概念很容易在各种不同的情境下得到诠释。因此，定义某个群 G 在某个模 M 中系数的上同调，有许多种等价的方式。最直接的定义是通过导出函子给出的，所以我会先花些时间介绍它们，并稍微说明一下为何 它们会是现在这个样子。

链同伦理论

正如我将在下一节中所说，群 G上某个 G-模的系数上同调由某个导出函子给出。我最初学习上同调以及更一般的导出函子时，它们似乎相当晦涩，计算它们也让人感觉像是在随机地执行一连串步骤。本节旨在通过强调它们的同伦性质，稍微揭开这一概念的神秘面纱。用现代语言来说，“同伦理论”指的是（等价类的）$(\infty, 1)$-范畴。这些范畴可以通过模型范畴以 1-范畴的方式呈现，而这正是我将采用的语境。

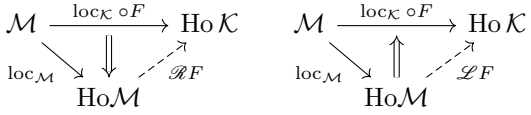
模型范畴由一个完备且余完备的 1-范畴 $\mathcal{M}$ 以及三个特殊的态射类组成，分别称为弱等价、纤维化和余纤维化。它们还必须满足一系列公理，这里我就不

一一列举了（参见例如 [Rie; DS; Hov]），这些公理旨在抽象代数拓扑中研究的同伦理论。特别是，人们通常只在“同伦”意义下考察空间和连续映射，而与模型范畴相关联的同伦范畴 正是对这一直觉的刻画。它是通过形式地求逆（即对弱等价作局部化）得到的。对于弱等价为 $\mathcal{W}$的模型范畴 $\mathcal{M}$，我将其典范局部化函子记为 $\mathrm{loc}_{\mathcal{M}}\colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{M}\left[\mathcal{W}^{-1}\right] \coloneqq \mathrm{Ho}\mathcal{M}$。我还将分别用 $\mathcal{F}ib$ 和 $\mathcal{C}of$ 表示纤维化替换函子与余纤维化替换函子，它们带有以下自然同构。



设 $F\colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{K}$ 是模型范畴之间的某个（任意）函子。 F可能保留弱等价，也可能不保留；如果保留，那么它还会在相应的同伦范畴之间诱导一个函子。如果 F 不保留弱等价，那么我们可以尝试用一个保留弱等价的函子来对它作泛近似。这正是导出函子的作用。

定义 5 若全右导出函子 $\mathscr{R}F$ 存在，则它是 F 的一个左Kan 延拓；而全左导出函子 $\mathscr{L}F$ 是 F 的一个右 Kan 延拓；二者都沿着 $\mathrm{loc}_{\mathcal{M}}$延拓 $\mathrm{loc}_{\mathcal{K}} \circ F$ 。以下图表对此作了总结。



有一类称为左（分别为右）Quillen 函子的特殊函子，它们总是存在左（分别为右）导出函子。具体而言，保余连续且保余纤维化以及其中构成弱等价的子类的函子是左 Quillen 函子；而以同样方式保纤维化的连续函子是右 Quillen 函子。根据 [Rie], 的推论 4.2.4，我们可以将这些导出函子计算为 $\mathscr{L}F = F \circ \mathcal{C}of$ 和 $\mathscr{R}F = F \circ \mathcal{F}ib$。这些函子在对象上定义良好，因为（余）纤维对象尤其是 $\mathcal{M}$中的对象。在态射上，它们仅在弱等价意义下定义良好，因此它们定义了到 $\mathrm{Ho}\,\mathcal{K}$的函子。

现在考虑一个阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$。范畴 $\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 包含 $\mathcal{C}$ 内部的链复形，它有两个满子范畴，分别由上有界和下有界的复形构成。由于只需通过反转指标（即 $X_\bullet \mapsto X^{-\bullet}$），就能将任意链复形与一个上链复形对应起来，因此我将用 $\mathrm{Ch}_\bullet(\mathcal{C})$ 表示下有界链复形，用 $\mathrm{Ch}^\bullet(\mathcal{C})$ 表示上有界链复形；后者与下有界上链复形相同。这些范畴具有一些标准且经过深入研究的模型结构，具体如下。

事实 6 设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔范畴，$\mathrm{Ch}_\bullet(\mathcal{C})$ 和 $\mathrm{Ch}^\bullet(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$ 中下有界的（上）链复形。

1. $\mathcal{C}$上的投射模型结构，定义在$\mathrm{Ch}_\bullet(\mathcal{C})$上，具体如下：

   - 纤维化是每个次数上都是满态射的映射 $X_n \twoheadrightarrow Y_n$ 。– 唯一的链映射 $X_\bullet \to 0_\bullet$ 是纤维化，因此每个对象都是纤维对象。

   - 余纤维化是每个次数上都具有投射余核的单态射 $X_n \hookrightarrow Y_n \twoheadrightarrow P_n$ 。– 唯一的链映射 $0_\bullet \to X_\bullet$ 是余纤维化，当且仅当每个 X_n 都是投射对象。

   - 右正合函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 相对于投射模型结构诱导左 *Quillen* 函子。

2. $\mathcal{C}$上的内射模型结构，定义在$\mathrm{Ch}^\bullet(\mathcal{C})$上，具体如下：

   - 纤维化是每个次数上核为内射对象的满态射 $J^n \hookrightarrow X^n \twoheadrightarrow Y^n$ 。– 唯一的上链映射 $X^\bullet \to 0^\bullet$ 是纤维化，当且仅当每个 X^n 都是内射对象。

   - 余纤维化是每个次数上的单态射 $X^n \hookrightarrow Y^n$ – 唯一的上链映射 $0^\bullet \to X^\bullet$ 是余纤维化，因此每个对象都是余纤维对象。

   - 左正合函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 相对于内射模型结构诱导右 *Quillen* 函子。

3. 两种模型结构中的弱等价都是拟同构，$\mathcal{Q}$。它们是诱导每个次数上的（余）同调同构的（余）链映射。$\mathcal{C}$ 的导出范畴就是同伦范畴。

$$\mathscr{D}_\bullet(\mathcal{C}) \coloneqq \mathrm{Ch}_\bullet(\mathcal{C})\left[\mathcal{Q}^{-1}\right] \simeq \mathrm{Ch}_\bullet(\mathcal{P}_\mathcal{C})\left[\mathcal{Q}^{-1}\right]$$

$$\mathscr{D}^\bullet(\mathcal{C}) \coloneqq \mathrm{Ch}^\bullet(\mathcal{C})\left[\mathcal{Q}^{-1}\right] \simeq \mathrm{Ch}^\bullet(\mathcal{J}_\mathcal{C})\left[\mathcal{Q}^{-1}\right]$$

其中，$\mathcal{P}_\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{J}_\mathcal{C}$ 分别是 $\mathcal{C}$ 的投射对象与内射对象构成的全子范畴。

投射模型结构在 [DS, §7] 中讨论，背景是环 R 上的 $\mathcal{C} = R\text{Mod}$。关于 R Mod 中无界链复形的内射模型结构，参见 [Hov, §2.3]。nLab 网页 [nLa] 汇集了许多相关事实，并为感兴趣的读者列出了大量参考文献。

在同调代数中，人们通常计算的是我所说的n^{th} 导出函子。例如，左正合函子 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 的 n^{th} 右导出函子 $\mathscr{R}^nF$ 是以下复合。

$$\mathcal{C}\hookrightarrow \mathrm{Ch}^\bullet(\mathcal{C})\xrightarrow{\mathcal{F}ib}\mathrm{Ch}^\bullet(\mathcal{J}_{\mathcal{C}})\left[\mathcal{Q}^{-1}\right]\xrightarrow{F}\mathscr{D}^\bullet(\mathcal{D})\xrightarrow{H^n}\mathcal{D}$$

其中，嵌入 $\mathcal{C}\hookrightarrow \mathrm{Ch}^\bullet(\mathcal{C})$ 是通过将一个对象置于零次得到的。对这个复形作纤维化替换，恰好得到该对象的内射分解。投射模型结构中的类似情形则得到该对象的投射分解。计算全导出函子后，我们便可读出其（上）同调对象。总之，最后我将介绍一些众所周知且重要的导出函子例子。

例 7 设 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半阿贝尔范畴。

1. $\otimes\colon \mathrm{Ch}(\mathcal{C}\times\mathcal{C})\to\mathrm{Ch}(\mathrm{Ab})$ 是一个右正合函子，因此相对于 $\mathrm{Ch}_\bullet(\mathcal{C}\times\mathcal{C})=\mathrm{Ch}_\bullet(\mathcal{C})\times\mathrm{Ch}_\bullet(\mathcal{C})$ 上的投射模型结构，它存在一个（全）左导出函子 $\mathscr{L}\otimes$。于是我们得到熟悉的 $\mathscr{L}^n\otimes(X,Y)=\mathrm{Tor}^n_{\mathcal{C}}(X,Y)$。此外，利用定义中已有的数据，我们可以构造如下的 *2*-胞腔。

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Ch}_\bullet(\mathcal{C})\times\mathrm{Ch}_\bullet(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\otimes} & \mathrm{Ch}_\bullet(\mathcal{C})\\ {\scriptstyle \mathcal{C}ofc}\downarrow\ \Rightarrow\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{loc}} & \Uparrow & {\scriptstyle \mathrm{loc}}\downarrow\ \Leftarrow\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{C}ofc}\\ \mathscr{D}_\bullet(\mathcal{C})\times\mathscr{D}_\bullet(\mathcal{C}) & \xrightarrow[\mathscr{L}\otimes]{} & \mathscr{D}_\bullet(\mathcal{C})\end{array}$$

特别是，这表明余纤维替换函子 $\mathcal{C}of_{\mathcal{C}}$ 是宽松幺半的。

2. $\mathit{Hom}_{\mathcal{C}}\colon \mathit{Ch}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C})\to \mathit{Ch}(\mathit{Ab})$ 是左正合的，因此相对于 $\mathit{Ch}^\bullet(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\times\mathcal{C})=\mathit{Ch}_\bullet(\mathcal{C})^{\mathrm{op}}\times\mathit{Ch}^\bullet(\mathcal{C})$ 上的内射模型结构，它存在右导函子 $\mathscr{R}\mathit{Hom}_{\mathcal{C}}$。于是我们有 $\mathscr{R}^n\mathit{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)=\mathit{Ext}^n_{\mathcal{C}}(X,Y)$。由于 $\mathit{Hom}_{\mathcal{C}}$ 是一个双函子，我们可以选择固定一个变量，并令 $\mathscr{R}\mathit{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)(Y)\cong\mathscr{R}\mathit{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Y)(X)$（见 *[Sch]* 中的定理*4.7.10*）。由于 $\mathit{Ch}_\bullet(\mathcal{C})^{\mathrm{op}}$ 上的内射模型结构实际上由 $\mathcal{C}$ 中的投射复形给出，这样做的好处是，我们可以选择用哪些分解来计算 *Ext*。

B G-模与上同调

首先，将 G 的群环记为 $\mathbb{Z}[G]$，那么（比如说左） G-模按通常的环上模的意义，是一个（含幺左） $\mathbb{Z}[G]$-模。这等价于给出一个阿贝尔群 M 以及一个群同态 $G\to\mathrm{Aut}_{\mathrm{Ab}}(M)$。两个 G-模之间的 G-线性映射 $f\colon M\to N$ 是一个阿贝尔群同态 f，满足对于所有 $m\in M$ 和 $g\in G$，都有 $f(g\cdot m)=g\cdot f(m)$。这些对象构成 G-模的范畴 $G\,\mathrm{Mod}$。若对所有 $g\in G$ 和 $m\in M$，作用均由 $g\cdot m=m$ 给出，则称 G-模是平凡的。以下是一些重要的平凡 G-模的例子。

例 8

1. 任意阿贝尔群 A 都可以视为一个平凡的 G-模，即平凡$_G(A) = A$，其作用为 $g \cdot a := a$，对所有 $a \in A$、$g \in G$ 均成立。

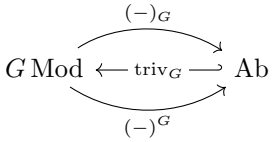
2. 若 M 是任意 G-模，则通过取 G作用下的不变元，可得到一个平凡的子 G-模：

$$M^G := \{m \in M \mid g \cdot m = m,\ \forall g \in G\}$$

3. 若 M 是任意 G-模，则通过取 G作用下的余不变元，可得到一个平凡的商 G-模：

$$M_G := \frac{M}{\langle g \cdot m - m \rangle_{g \in G}^{m \in M}}$$

这些例子都是函子性的；triv_G 是从 Ab 到GMod 的范畴嵌入，其中 $(–)^G$ 和 $(–)_G$ 分别是它的右伴随和左伴随。这可用下图表示。



根据抽象废话，由于 Ab 和 GMod 都是阿贝尔范畴，$(–)^G$是右伴随函子，这意味着它是左正合函子。根据附录 A 中更进一步的抽象废话，由于它是左正合函子，因此存在一个右导出函子。

定义 9 设 G 是一个群，M 是某个 G-模。G 取系数于 M 的 n^{th} 上同调群是 $(–)^G$ 的 n^{th} 右导出函子 $\mathscr{R}^n$。

$$H^n(G; M) := \mathscr{R}^n(M)$$

由于 $(M)^G \cong \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, M)$，其中 $\mathbb{Z}$ 具有平凡的 G-模结构，因此$H^n(G;\ M) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$。

正如例 7.2 中所指出的，要计算 $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$，我可以通过 M的内射分解和 $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, –)$ 来进行，也可以通过平凡 G-模 $\mathbb{Z}$的投射分解和 $\mathrm{Hom}_G(–, M)$ 来进行。这时我会用到著名的归一化巴尔分解 $\mathbb{Z}G_\bullet$，它是 $\mathbb{Z}$的一个自由 分解。$\mathbb{Z}G_n$的基由符号$[g_1|\cdots|g_n]$给出，其中 $g_i \in G \setminus \{1\}$。从这里开始，任何计算细节都可以在标准参考文献中找到，例如 [Bro]。下面给出群上同调的一个更具操作性的定义。

定义 10 设 G 为任意群。

1. 对任意 $n \in \mathbb{N}$， $C^n(G;\ M)$ 是 中的规范化 n-上链群M。这些是满足以下条件的函数 f: $G^{\times n} \to M$: 若存在任何$g_i = 1$，则 $f(g_1, \ldots, g_n) = 0$；它们由将巴分解映入 M 后取 Hom 得到。

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_G(\overline{\mathbb{Z}G}_n, M) &\cong C^n(G; M) \\ \varphi &\mapsto \varphi([g_1|\cdots|g_n]) \end{aligned}$$

2. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$，所得的 余边界同态 δ_G^n: $C^n(G;\ M) \to C^{n+1}(G;\ M)$ 定义为

$$\begin{aligned} (\delta_G^n f)(g_1, \ldots, g_{n+1}) = g_1 \cdot f(g_2, \ldots, g_n) + \cdots \\ + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_n) + \cdots \\ + (-1)^n f(g_1, \cdots, g_{n-1}) \end{aligned}$$

3. 余边界的核 $\ker(\delta_G^n) = Z^n(G;\ M)$ 是 G 在 M 中的（归一化） n-上循环群。类似地，像 $\mathrm{im}(\delta_G^{n-1}) = B^n(G;\ M)$ 是 G 在 M 中的（归一化） n-余边界群。

4. n^{th} 的上同调群，系数取 M，可计算为商群

$$H^n(G; M) = \frac{Z^n(G; M)}{B^n(G; M)}$$

当 G-模 M 具有非平凡的 G-作用时，这也称为“扭曲”群上同调。从这里开始，取 G 为一个固定但任意的有限群，并且所有上链都取为归一化的。请注意，在书写余边界同态时，我通常会省略指标。

C 配对与杯积

现在让我们关注系数。对于任意固定的 G-模 M， M 中 G 的上链自然构成一个分次阿贝尔群，其分次由上链的次数给出。由于上同调是按次数定义的，这种分次结构便传递到上同调上，因此 $H^*(G;\ M) = \bigoplus_{n \geq 0} H^n(G;\ M)$。这种分次结构使我们能够发现更多结构。特别地，有如下引理。

引理 11 函子 $H^*(G;\ -)$: G 模 $\to \mathrm{Ab}_{\mathbb{N}}$ 是宽松幺半函子。特别地，存在自然映射 $\cup$: $H^*(G;\ M) \otimes H^*(G;\ N) \to H^*(G;\ M \otimes N)$。

证明:

回顾一下，我们通过在纤维化替换或余纤维化替换上计算原函子来计算导出函子。在本例中，我们使用的是 $\mathrm{Ch}_\bullet(G\text{模})^{\mathrm{op}}$ 上的内射模型结构，因此特别有如下结论。

$$\begin{aligned} H^n(G;M) &= \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(-,M)(\mathbb{Z}) \\ &= \mathrm{Hom}_G(-,M)\circ \mathcal{F}ib_{G\,\mathrm{Mod}^{\mathrm{op}}}(\mathbb{Z}) \\ &= \mathrm{Hom}_G(-,M)\circ \mathcal{C}of^{\mathrm{op}}_{G\,\mathrm{Mod}}(\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

这里用到这样一个事实：模型范畴的对偶范畴也是模型范畴，但纤维化与余纤维化的角色互换了。特别地，我们有 $\underline{\mathcal{F}ib_{G\text{模}^{\mathrm{op}}}}(\mathbb{Z}) = \mathcal{C}of^{\mathrm{op}}_{G\text{模}}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}G_\bullet$。

平凡的 G-模 $\mathbb{Z}$ 是 G 模中的平凡余代数。具体来说，$\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}$，因此恒等映射定义了一个余结合余乘法。此外，例 7.1 表明 $\mathcal{C}of^{\mathrm{op}}_{G\text{模}}$ 是反笛卡尔幺半的，因此保余代数。事实上，巴分解也是一个类似的平凡余代数。这源于这样一个事实：张量积 $\mathbb{Z}G_\bullet\otimes\mathbb{Z}G_\bullet$ 也是 $\mathbb{Z}$ 的一个（投射）分解，再结合 [Bro] 的定理 I.7.5。后者指出，同一模上的任意两个投射分解在 $\mathscr{D}_\bullet(G\text{模})^{\mathrm{op}}$ 中唯一同构。最后，一般而言，若 $X\in\mathcal{C}$ 是富化幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的余代数，则函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ -)$ 是宽松幺半的。□

为了继续，我们需要明确选定一个链映射，以见证巴分解的余乘法在同伦意义下是平凡的。常见的一种选择称为 Alexander-Whitney 链映射，按次数定义如下（例如见 [Bro，第 5.1] 节）。

$$\Delta_n\colon \overline{\mathbb{Z}G}_n \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n}\overline{\mathbb{Z}G}_i\otimes\overline{\mathbb{Z}G}_j$$

$$[g_1|\cdots|g_n]\mapsto\sum_{k=0}^{n}[g_1|\cdots|g_k]\otimes g_1\cdots g_k[g_{k+1}|\cdots|g_n]$$

因此，存在一个自然变换 $C^\bullet(G;\,M)\otimes C^\bullet(G;\,N)\to C^\bullet(G;\,M\otimes N)$，由 $\alpha\otimes\beta\mapsto\alpha\cup\beta:=(\alpha\otimes\beta)\circ\Delta_\bullet$ 给出。此外，这个映射满足莱布尼茨法则，其表达式如下。

$$\delta(\alpha\cup\beta)=(\delta\alpha)\cup\beta+(-1)^p\alpha\cup(\delta\beta) \tag{7}$$

特别是，这意味着 $\cup$ 将上循环映射为上循环，将余边界映射为余边界，因此在上同调中定义良好。这个映射有许多优良性质，汇集于 [Bro, §5.3], ，包括分次交换、结合、含幺。公式（7）一般不难证明，但记号会变得极其繁琐。下面给出一个使用

$\alpha, \beta \in C^1(G;\ M)$。

$$\begin{aligned}
\delta(\alpha \cup \beta)(g,h,k) &= g \cdot (\alpha(h) \otimes h \cdot \beta(k)) - \alpha(gh) \otimes (gh) \cdot \beta(k) \\
&\quad + \alpha(g) \otimes g\beta(hk) - \alpha(g) \otimes g \cdot \beta(h) \\
&= g \cdot \alpha(h) \otimes (gh) \cdot \beta(k) - \alpha(gh) \otimes (gh) \cdot \beta(k) \\
&\quad + \alpha(g) \otimes g\beta(hk) - \alpha(g) \otimes g \cdot \beta(h) \\
&\quad + \alpha(g) \otimes (gh) \cdot \beta(k) - \alpha(g) \otimes (gh) \cdot \beta(k) \\
&= \delta\alpha(g,h) \otimes (gh) \cdot \beta(k) + (-1)^1 \alpha(g) \otimes g \cdot \delta\beta(h,k) \\
&= \Big((\delta\alpha) \cup \beta + (-1)^1 \alpha \cup (\delta\beta)\Big)(g,h,k)
\end{aligned}$$

我们可以利用引理 11 所隐含的自然映射，在分次群上同调中找到更多结构。特别地，考虑三个 G-模M, N, L，并令 G在 $M \otimes N$上作对角作用，即 $g \cdot (m \otimes n) = (g \cdot m) \otimes (g \cdot n)$。这种情形使我们可以考虑一些形式特别好的分次同态： $H^*(G;\ M) \otimes H^*(G;\ M) \to H^*(G;\ L)$。

定义 12 M 和 N 到 L 的配对是一个 G-模同态P： $M \otimes N \to L$。与该配对 P相关的杯积是复合映射$\cup_P = H^*(P) \circ \cup$。

在第 2 节中，我回顾一个简单却重要的配对例子，其相关的杯积在 Lyndon-Hochschild-Serre 谱序列中发挥着重要作用。下面是一些其他简单的杯积例子。

例 13

1. 显然，取 $L = M \otimes N$，配对 $\mathrm{id}_{M\otimes N}$ 诱导出 $\cup_{\mathrm{id}} = \cup$。

2. 设 $M = N = L = R$、某个环 R，并设 G 作用平凡。映射$(r, s) \mapsto rs$ 是一个配对，其产生的杯积给出 $H^*(G;\ M)$ 一个分次环结构。这正是代数拓扑中空间的上同调环里的杯积的来源，因此在更一般的情形下也沿用了这个名称。

参考文献

[Bro] K. S. Brown. 群的上同调. 第87卷。数学研究生教材。Springer-Verlag, 纽约—柏林，1982年，第x+306页。[D´ec] T. D. D´ecoppet. *Drinfeld* 中心与融合 *2*-范畴的 *Morita* 等价类. 2024年。arXiv: 2211.04917 [math.QA].[DS] W. G. Dwyer 和 J. Spali´nski。“同伦论与模型范畴”。载于：代数拓扑手册。North-Holland，阿姆斯特丹，1995年，第73–126页。

[Hov] M. Hovey. 模型范畴. 第63卷。数学调查与专著。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1999年，第xii+209页。[HS] G. Hochschild 和 J.-P. Serre。“群扩张的上同调”。载于：美国数学会会刊 74.1（1953），第110–134页。[nLa] nLab 作者。链复形上的模型结构。https://ncatlab.org/nlab/show/model+structure+on+chain+complexes。修订版110。2024年10月。[Rie] E. Riehl。“同伦范畴：从模型范畴到（∞，1）-范畴”。载于：稳定范畴与结构化环谱。第69卷。数学科学研究所出版物。剑桥大学出版社，剑桥，2022年，第5–74页。[Sch] P. Schapira. 范畴与同调代数。https://perso.imj-prg.fr/pierre-schapira/wp-content/uploads/schapira-pub/lectnotes/HomAl.pdf。2011年。[Tac] Y. Tachikawa。“有限子群规范化”。载于：*SciPost Physics*8.1（2020），第015号论文，共23页。[WWW] J. Wang、X.-G. Wen 和 E. Witten。“SPT 与 SET 态的对称有隙界面：系统性构造”。载于：*Physical Re-view X* 8.3（2018年8月）。