arXiv:2601.04417v1 [math.LO] 7 Jan 2026

# 一种没有直径为二的博雷尔图化的可博雷图化等价关系

PATRICK LUTZ

摘要。我们通过证明存在一种没有直径小于 3 的 Borel图化的 Borel可图化等价关系，回答了 Arant 、 Kechris 和 Lutz 提出的问题。更具体地说，我们证明存在一种等价关系，它有直径至多为 4 的 Borel图化，但没有直径小于 3 的 Borel图化。我们的证明依赖于一个关于可计算性理论泛型性的技术引理，该引理或许还有其他应用。

## 1. 引言

设 $E$ 是波兰空间 $X$上的一个等价关系。 $E$ 的**Borel图化** 是定义在 $X$ 上的一个博雷图 $G$ ，满足对所有 $x$， $y \in X$,

$$x\,E\,y \iff \text{there is a path in } G \text{ between } x \text{ and } y.$$

换言之， $G$ 的连通分支恰好是 $E$的等价类。若 $E$ 有一个 Borel图化，我们就称 $E$ 是**可博雷图化** 的。

图化**的直径**定义为图化 $G$ 在 $E$ 中的距离上确界 $G$ ，取遍 $E$等价的[1] 元素 $X$的所有点对。更准确地说，对于任意一对 $x$， $y \in X$ 满足 $x\,E\,y$的元素，我们用$\mathrm{dist}_G(x, y)$ 表示[2] 中连接 $G$ 与 $x$ 之间的 $y$最短路径的长度。接着，我们将 $G$ 的直径定义为

$$\mathrm{diam}(G) := \sup\{\mathrm{dist}_G(x, y) \mid x\,E\,y\}$$

其中，若$\{\mathsf{dist}_G(x,\ y)\ \mid x\,E\,y\}$ 在 $\mathbb{N}$ 中无界，则 $\mathsf{diam}(G)\ = \infty$。

Borel可图化等价关系这一概念由 Arant 提出 [Ara19] ，并由 Arant、Kechris 和 Lutz 进一步研究 [AKL24]。在后者的论文中，作者指出，当一个等价关系被证明是 Borel可图化时，几乎总是通过展示一个直径至多为2的 Borel图化来实现。鉴于此，该论文提出了这样一个问题：是否存在一种 Borel可图化等价关系，无法以这种方式实现？更确切地说，是否存在一个 Borel可图化等价关系 $E$ ，使得$E$ 的每个 Borel图化的直径都至少为3？本文旨在肯定地回答这个问题。

**定理1.1**。 存在一个定义在波兰空间上的等价关系，它是可博雷图化的，但其每一种博雷图化的直径都至少为3。

为了证明这一定理，我们将定义一个特定的等价关系，并证明它有一个直径至多为 4 的 Borel 图化，但没有直径小于 3 的 Borel 图化（顺便一提，我们不知道它是否存在直径恰为 3 的 Borel图化，不过我们怀疑并不存在）。事实上，这个等价关系正是 Arant、Kechris 和 Lutz 在上述论文中定义的那个；不过，为了使本文

[1]请注意，这与图的直径通常的定义略有不同：通常我们会对所有元素对取上确界，而不仅仅是彼此 $E$等价的元素对。我们的定义等价于对图的连通分支的直径（按标准意义定义）取上确界。[2]请注意，我们采用这样的约定：如果 $x = y$ ，那么 $x$ 与 $y$之间总存在一条长度为0的路径。

相对独立，我们在第 3 节回顾其定义。在那篇论文中，他们还证明了这个等价关系有一个直径至多为4 的 Borel图化；我们的贡献仅在于证明它没有直径小于 3 的 Borel图化。

这个等价关系的定义用到了可计算性理论泛型性的概念，我们将在第 2节回顾这一概念。证明中的一个关键工具是下面这个关于此类泛型性的技术引理，我们认为它可能还有其他用途。

**引理 1.2**。对于任意 $r \in 2^{\mathbb{N}}$，存在 $x, y \in 2^{\mathbb{N}}$，使得 $x$ 和 $y$ 是 $r'$-泛型，并且对于任意属于 $r'$-泛型的 $z \in 2^{\mathbb{N}}$，要么 $x$ 和 $z$ 相互 $r$-泛型，要么 $y$ 和 $z$ 相互$r$-泛型。

**注1.3**。这个引理的证明很容易稍作修改，从而证明一个略强的陈述：对于所有 $r$，$s \in 2^{\mathbb{N}}$，存在 $x$，$y \in 2^{\mathbb{N}}$，使得 $x$和 $y$是 $s$-泛型，并且对于任意属于 $r'$-泛型的$z \in 2^{\mathbb{N}}$，要么 $x$ 和 $z$ 相互 $r$-泛型，要么 $y$ 和 $z$ 相互$r$-泛型。换言之，可以要求 $x$ 和 $y$ 具有任意高的泛型性（即远不止是 $r'$-泛型），而不影响引理的结论。

在第 3 节，我们将看到如何运用这个引理证明定理 1.1，随后会在第 4 节证明引理本身。不过，在继续讨论本文的技术细节之前，我们想指出，关于博雷图化的直径，有几个问题我们尚不知道答案，也不清楚本文的方法是否有助于解决这些问题。

首先，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们可以问：是否存在一个等价关系，它有直径为 $n+1$ 的博雷图化，但没有直径为 $n$ 的博雷图化？注意，对于 $n = 1$，这等价于询问是否存在一个等价关系，它有直径为 2 的博雷图化，但该图化不是博雷的；而且，[Ara19] 和 [AKL24]中证明了存在许多这样的等价关系。正如上文所述，我们在定理 1.1 的证明中使用的等价关系有直径为 4 的博雷图化，但没有直径为直径2 的博雷图化。因此，对于 $n = 2$ 或 $n = 3$，这个等价关系为该问题给出了肯定答案，不过我们不知道是哪一个（但我们猜测是 $n = 3$）。然而，对于 $n$ 的所有其他取值，我们不知道这个问题的答案，而且我们在定理 1.1 的证明中使用的思路似乎无法直接提供帮助。

第二个密切相关的问题是，是否存在一种 Borel可图化等价关系，使其不存在有限直径的 Borel图化。注意，如果对于无穷多个 $n$ 值，我们对第一个问题的回答是肯定的，那么对这个问题的回答也会是肯定的。特别是，如果存在一个 Borel可图化等价关系序列$\{E_n\}_n$，其中每个 $E_n$ 都不存在直径小于 $n$ 的 Borel图化，那么我们可以取它们的不交并，从而得到一种不存在有限直径 Borel图化的 Borel可图化等价关系。然而，对于反方向，这一推论并不明显。而且，证明定理1.1 所用的思路似乎也无法直接帮助我们回答这个问题。

## 2. 可计算性理论泛型性的背景

现在我们来回顾泛型性的标准可计算性理论定义。下文假定读者熟悉有效描述集合论、强迫和超算术层级；关于这些主题的介绍，请参阅《描述集合论的递归方面》，作者为 Mansfield 和 Weitkamp [MW85]。若想更全面地了解可计算性理论泛型性，请参阅《算法随机性与复杂性》中第 2.24 节，作者为 Downey 和 Hirschfeldt [DH10]。

2.1. **泛型性与相互泛型性**。粗略地说，给定 $r \in 2^{\mathbb{N}}$, $x \in 2^{\mathbb{N}}$ ，若 $r$ 相对于 $r$ 泛型，则意味着：当我们只考虑那些可由 $r$ 计算的稠密集时，它对于科恩强迫是泛型的。不过，精确定义要比这稍微复杂一些。[3]

**定义 2.1**。设 $A \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ 是字符串的集合。如果存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $x \upharpoonright n \in A$ ，则实数 $x \in 2^{\mathbb{N}}$ **满足** $A$ ；如果存在某个 $n \in \mathbb{N}$ 使得对于所有 $\sigma \geq x \upharpoonright n$, $\sigma \notin A$，则实数 $x \in 2^{\mathbb{N}}$ **避开** $A$ 。

**定义 2.2** (Jockusch 和 Posner [Joc80])。给定某个固定的 $r \in 2^{\mathbb{N}}$， $x \in 2^{\mathbb{N}}$ 若 **$r$-泛型**，则对于每个集合 $A \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ ，该集合相对于 $r$ 是可计算可枚举的， $x$ 要么满足，要么避开 $A$。

不难看出，对于任意 $r$，都有连续统多个 $r$-泛型。类似地，也不难看出，随着 $r$ 的图灵度提高，对 $r$-泛型性的要求会变得更加严格。特别地，我们有以下事实，下面将会用到这些事实。

**事实 2.3**。对于每个 $r$，如果 $r \leq_T s$ ，那么 $2^{\mathbb{N}}$ 中每个 $s$-泛型的元素也是 $r$-泛型的。

**事实 2.4**。福对于每个 $r \in 2^{\mathbb{N}}$，存在某个 $x \in 2^{\mathbb{N}}$ ，使得 $x$ 是 $r$-泛型的，但不是 $r'$-泛型的 .

还有一种可计算性理论中的相互泛型性概念： $x$ 和 $y$ 是**相互$r$-泛型的** ，当且仅当 $x \oplus y$ 是 $r$-泛型的（其中 $x \oplus y$ 表示将 $2^{\mathbb{N}}$ 的两个元素编码为 $2^{\mathbb{N}}$ 的单个元素的标准方法）。不难看出，这可以用满足或避开字符串对的可枚举集来重新定义。

**定义 2.5**。假设 $A \subseteq 2^{<\mathbb{N}} \times 2^{<\mathbb{N}}$ 是字符串对的一个集合。一对实数（$x$， $y$） $\in 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$ **满足** $A$，如果存在某些 $n$， $m \in \mathbb{N}$，使得（$x \upharpoonright n$， $y \upharpoonright m$） $\in A$；并且当存在某些 $n$， $m \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $\sigma \geq x \upharpoonright n$ 和 $\tau \geq y \upharpoonright m$， （$\sigma$， $\tau$） $\notin A$ 时，称其**避开**$A$。

**事实 2.6**。对于任意 $r \in 2^{\mathbb{N}}$ ， $x$、 $y \in 2^{\mathbb{N}}$、 $x$ 和 $y$ 相互 $r$-泛型，当且仅当对于每个相对于 $r$ 可计算可枚举的字符串对集合 $A \subseteq 2^{<\mathbb{N}} \times 2^{<\mathbb{N}}$ ，有序对 $(x, y)$ 要么与 $A$ 相交，要么避开 $A$。

Liang Yu 证明了另一种相互泛型性的刻画，我们将在下文中用到。 [Yu06]。它有时被称为泛型性版本的范兰巴尔根定理的类比。[4]

**定理 2.7** (Yu)。对于任意 $r \in 2^{\mathbb{N}}$， $x$ 和 $y$ 相互 $r$-泛型，当且仅当 $x$ 是 $r$-泛型，且 $y$ 是 $(r \oplus x)$-泛型。

2.2. **泛型性与强迫**。正如标题以及我们上文的一些评论所表明的，可计算性理论中的泛型性概念与科恩强迫密切相关。这种联系有两点对后文很有用。

首先，泛型性的定义可以改写为在科恩强迫中与某些稠密集相交。回想一下，如果对于所有 $\sigma \in 2^{<\mathbb{N}}$，都存在某个 $\tau \geq \sigma$ 使得 $\tau \in D$，那么字符串集合 $D \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ 就是**稠密**的。对于任意 $r \in 2^{\mathbb{N}}$， $r$-泛型性都可以用以下方式刻画：

[3]实际上，我们在这里对可计算性理论泛型性所作的非正式解释，在可计算性理论中通常称为“弱泛型性”。具体而言，如果 $x \in 2^{\mathbb{N}}$ 满足**弱 $r$-泛型** ，那么它会与每个可由 $r$ 计算得到的科恩强迫稠密集相交。就本文而言，泛型性与弱泛型性之间的区别并不特别重要；我们选择使用泛型性而非弱泛型性的唯一原因，是它在可计算性理论中更为标准。[4]范兰巴尔根定理是算法随机性理论中的一条重要定理，它启发了 Yu 定理。

与某些依赖于 $r$ 的稠密集相交。特别地，给定任意字符串集合 $A \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$，令 $D_A$ 为由以下方式定义的字符串集合：

$$D_A = \{\sigma \mid \sigma \in A \text{ or } \forall \tau \geq \sigma\, (\tau \notin A)\}.$$

容易验证， $D_A$ 是稠密的，并且 $x$ 是 $r$-泛型，当且仅当 $x$ 与每个形如 $D_A$的稠密集相交，其中 $A$是相对于 $r$可计算可枚举的。

一个简单但有用的事实是，若 $D$ 是一个可由 $r$ 计算的字符串集，那么对于某个相对于 $r$ 可计算可枚举的 $A$，$D$ 可以写成 $D_A$ 的形式（事实上，我们只需取 $A = D$）。因此，若 $x$ 是 $r$-泛型，那么它会与每个可由 $r$计算的稠密集相交。

当然，关于相互泛型性的论述也几乎完全相同。特别地，若字符串对的集合 $D \subseteq 2^{<\mathbb{N}} \times 2^{<\mathbb{N}}$满足以下条件，则称其为**稠密**：对每一对字符串$(\sigma,\ \tau) \in 2^{<\mathbb{N}} \times 2^{<\mathbb{N}}$，都存在一对字符串$(\sigma',\ \tau') \in D$，使得 $\sigma' \geq \sigma$且 $\tau\prime \geq \tau$。对于任意字符串对集合$A \subseteq 2^{<\mathbb{N}} \times 2^{<\mathbb{N}}$，我们都可以关联一个稠密集 $D_A$，使得 $x$ 和 $y$ 是相互 $r$-泛型，当且仅当字符串对$(x,\ y)$与每个形如 $D_A$ 的稠密集相交，其中 $A$ 是相对于 $r$可计算可枚举的。

其次，如果 $x$ 是 $r$-泛型，那么关于 $x$ 的 $\Sigma^0_1(r)$ 和 $\Pi^0_1(r)$ 事实必定可由 $x$ 的某个初始段强迫（事实上，这实际上刻画了 $r$-泛型性，也是稍显复杂的定义背后的动机）。特别地，如果 $x$ 是 $r$-泛型，那么对于每个以 $r$ 为参数的 $\Sigma^0_1$ 公式 $\varphi$，都存在 $x$ 的某个初始段 $\sigma$，使得 $\sigma \Vdash \varphi$ 或 $\sigma \Vdash \neg\varphi$成立，其中 $\Vdash$ 表示科恩强迫的强迫关系。由此可得一个推论：如果 $x$ 是$r$-泛型，且包含于某个 $\Sigma^0_1(r)$ 集合 $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ 中，那么存在 $x$的某个初始段 $\sigma$，使得对于任何延伸 $\sigma$的 $r$-泛型 $y$， $y$ 也包含于 $A$ 中。此外，这一事实可以推广到浅层博雷尔层级的所有层级，如下所示。

**事实 2.8.** 固定 $r \in 2^{\mathbb{N}}$ 和 $\alpha < \omega_1^r$，并假设 $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ 属于浅层点类$\Sigma^0_{1+\alpha}(r)$。如果 $x$ 是 $r^{(\alpha)}$-泛型且包含于 $A$ 中，那么存在 $x$ 的某个有限初始段 $\sigma$，使得任何延伸 $\sigma$ 的 $r^{(\alpha)}$-泛型 $y$ 也包含于 $A$中。

再一次，关于相互泛型性也有几乎完全相同的事实。特别地，我们有以下事实。

**事实 2.9**。 固定 $r \in 2^{\mathbb{N}}$ 和 $\alpha < \omega_1^r$，并假设 $A \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$ 属于浅层点类 $\Sigma^0_{1+\alpha}(r)$。如果 $x$ 和 $y$ 是相互 $r^{(\alpha)}$- 泛型的，且 $(x, y) \in A$，那么存在 $x$ 的有限初始段 $\sigma$ 和 $y$ 的有限初始段 $\tau$，使得对于任意相互 $r^{(\alpha)}$-泛型的 $u$ 和 $v$，只要 $u$延伸 $\sigma$且 $v$延伸 $\tau$，就有 $(u, v) \in A$。

## 3. 主定理的证明

现在我们将证明，存在一个等价关系，它是可博雷图化的，但不存在直径小于 3 的博雷图化。我们将从定义这个等价关系开始。正如上文所述，Arant、Kechris 和 Lutz 最早研究了这一关系，见 [AKL24]。

令 LO 表示定义在 $\mathbb{N}$ 上的线性序所构成的波兰空间（更详细的定义见 [Kec95] 的第 16C 节和第 27C 节）。对于一个良基线性序 $L \in$LO，令 $|L|$ 表示与 $L$ 同构的序数。令 $X$ 为波兰空间 $\text{LO} \times 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$，并令 $E$ 为定义在 $X$ 上的等价关系：规定 $(L, r, x)$ 和 $(R, s, y)$ 等价，当且仅当 $L = R$、$r = s$，且满足以下条件之一：

(1) $L$是非良基的。(2) $L$ 是良基的，并且 $x$ 和 $y$ 都不是 $r^{(\alpha)}$-泛型，其中 $\alpha = |L|$。(3) $L$ 是良基的，并且 $x$ 和 $y$ 都是 $r^{(\alpha)}$- 泛型，其中 $\alpha = |L|$。

换句话说，对于每个 $L \in \mathsf{LO}$ 和 $r \in 2^{\mathbb{N}}$，集合 $\{(L, r, x) \mid x \in 2^{\mathbb{N}}\}$ 由一个或两个 $E$-等价类组成：若 $L$ 是非良基的，则有一个；若 $L$ 是良基的，则有两个。在后一种情况下，一个等价类由第三个坐标为 $r^{(\alpha)}$-泛型的那些元组组成，另一个则由第三个坐标不是 $r^{(\alpha)}$-泛型的那些元组组成（其中 $\alpha = |L|$）。

已在 [AKL24] 中证明 $E$ 是解析的（命题 57），并且可由直径至多为 4 的博雷图化进行可博雷图化（命题 60）。因此，要证明定理 1.1，只需证明 $E$ 不存在直径小于 3的 Borel图化。

反设 $E$ 确实存在一个直径小于 3 的 Borel图化，设$G$ 是这样一个图化。由于 $G$ 是博雷的，存在某个 $\alpha < \omega_1$，使得 $G$ 属于粗体点类 $\mathbf{\Sigma}^0_{1+\alpha}$，因此存在某个 $r \in 2^{\mathbb{N}}$，使得 $\alpha < \omega_1^r$ 且 $G$ 属于浅层点类$\Sigma^0_{1+\alpha}(r)$。固定这样一个 $r$，并设 $L$ 是一个可由 $r$计算得到的 $\alpha$ 的表示。

我们将只讨论 $X$ 中形如 $(L+1,\ r,\ -)$ 的元素，其中 $L+1$表示一个固定的 $\alpha+1$ 的表示，且该表示可由 $r$计算得到。证明的整体策略如下。首先，我们将在下文的引理 3.1 中证明：若 $u$ 和 $v$ 互为 $r^{(\alpha)}$-泛型，则 $(L+1,\ r,\ u)$ 与 $(L+1,\ r,\ v)$ 之间不可能存在边；其根本原因是，$G$ 过于简单，无法判断 $u$ 和 $v$ 是否为 $r^{(\alpha+1)}$-泛型。其次，我们将利用引理 1.2 证明 $G$ 必定包含一条这种形式的边。

**引理 3.1**。假设 $u$ 和 $v$ 彼此 $r^{(\alpha)}$-泛型。那么，在 $G$ 中，$(L+1, r, u)$ 与 $(L+1, r, v)$ 之间不存在边。

证明。注意，由于 $G$ 是 $\Sigma^0_{1+\alpha}(r)$，由其定义的关系 $R \subseteq 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$ 也是如此：

$$R(x,y) \iff \text{there is an edge in } G \text{ between } (L+1,x) \text{ and } (L+1,r,y).$$

现在反设 $G$ 中存在一条边连接 $(L+1, r, u)$ 与 $(L+1, r, v)$——也就是说，$R(u, v)$ 成立。由于 $u$ 和 $v$ 彼此 $r^{(\alpha)}$-泛型，根据事实 2.9，必定存在 $u$ 的有限初始段 $\sigma$ 和 $v$ 的有限初始段 $\tau$，它们迫使 $R(u, v)$ 成立。换言之，对于所有延伸 $\sigma$ 的 $\tilde{u}$ 以及延伸 $\tau$ 的 $\tilde{v}$，如果 $\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 彼此 $r^{(\alpha)}$-泛型，那么 $R(\tilde{u}, \tilde{v})$ 成立。

为了完成证明，我们只需取一些 $\tilde{u}$ 扩张 $\sigma$ 和 $\tilde{v}$ 扩张 $\tau$，使得$\tilde{u}$ 和 $\tilde{v}$ 相互 $r^{(\alpha)}$-泛型，$\tilde{u}$ 是 $r^{(\alpha+1)}$-泛型，而 $\tilde{v}$ 不是 $r^{(\alpha+1)}$-泛型。[5] 为了说明这为何完成了证明，注意根据 $E$ 的定义，$(L+1,\ r,\ \tilde{u})$ 和 $(L+1,\ r,\ \tilde{v})$ 并非 $E$-等价；但由于 $R(\tilde{u},\ \tilde{v})$ 成立，它们之间在 $G$ 中有一条边，这与 $G$ 是 $E$ 的图化这一假设矛盾。□

根据引理 1.2，我们可以找到一些 $x$、$y \in 2^{\mathbb{N}}$，使得 $x$ 和 $y$ 都是 $r^{(\alpha+1)}$-泛型，并且对于任何 $z$，只要它是 $r^{(\alpha+1)}$-泛型，那么 $x$ 和 $z$ 相互 $r^{(\alpha)}$-泛型，或者 $y$ 和 $z$ 相互 $r^{(\alpha)}$-泛型。注意，$(L+1,\ r,\ x)$ 和 $(L+1,\ r,\ y)$ 是 $E$-等价的，因此它们必定在 $G$ 中由一条长度为 1 或 2 的路径连接。现在我们将证明，这两种可能性都会导致矛盾。

首先，假设 $(L+1, r, x)$ 和 $(L+1, r, y)$ 在 $G$ 中由一条长度为 2 的路径连接。令 $(L+1, r, z)$ 为这条路径的中点——也就是说，$G$ 中存在连接 $(L+1, r, x)$ 与 $(L+1, r, z)$ 的边，也存在连接 $(L+1, r, z)$ 与 $(L+1, r, y)$ 的边。由于 $(L+1, r, z)$ 与 $(L+1, r, x)$ 是 $E$-等价的，$z$ 必须是 $r^{(\alpha+1)}$-泛型。因此，根据我们对 $x$ 和 $y$ 的选择，$x$ 和 $z$ 互相 $r^{(\alpha)}$-泛型，或者 $y$ 和 $z$ 互相 $r^{(\alpha)}$-泛型。无论哪种情况，都会与引理 3.1 矛盾。

现在假设 $(L+1,\ r,\ x)$ 和 $(L+1,\ r,\ y)$ 在 $G$ 中由一条长度为 1 的路径连接。换言之，它们之间在 $G$ 中有一条边。我们声称 $x$ 和 $y$ 互相

[5]例如，使用事实 2.4 来找出某个 $\tilde{v}$ 扩展 $\tau$ 且为 $r^{(\alpha)}$-泛型但不是 $r^{(\alpha+1)}$-泛型的对象，然后任取一个 $\tilde{u}$ 扩展 $\sigma$ 且为 $(\tilde{v} \oplus r^{(\alpha+1)})$-泛型的对象。根据定理 2.7 （范兰巴尔根定理的泛型性版本），$\tilde{u}$和 $\tilde{v}$ 互相 $r^{(\alpha)}$-泛型。

$r^{(\alpha)}$-泛型，这与引理 3.1 矛盾。原因很简单：由于 $x$ 是 $r^{(\alpha+1)}$-泛型的，因此根据引理 1.2 的陈述取 $z = x$，可知要么 $x$ 和 $x$ 互相 $r^{(\alpha)}$-泛型，要么 $x$ 和 $y$ 互相 $r^{(\alpha)}$-泛型。前一种情况不可能成立（$2^{\mathbb{N}}$ 中的一个元素不可能与自身互相泛型），因此后一种情况必然成立。

## 4. 关键引理的证明

现在我们来证明引理 1.2。固定 $r \in 2^{\mathbb{N}}$；我们的目标是构造 $r'$-泛型 $x$ 和 $y$，使得对于任意 $r'$-泛型 $z$，要么 $x$ 和 $z$ 互相 $r$-泛型，要么 $y$ 和 $z$ 互相$r$-泛型。

我们先固定一些记号。设 $D_0$，$D_1$，$D_2$，..... 是 $2^{<\mathbb{N}} \times 2^{<\mathbb{N}}$ 的稠密子集的一个枚举，一对实数必须与这些稠密子集相交，才能互相 $r$-泛型（见第 2.2 节）。注意，我们可以选择序列 $D_0$，$D_1$，$D_2$，..... 使其能够从 [6] 一致可计算地得到 $r'$。

现在我们尝试简要说明证明的一些主要思路。一个简单的观察是，$x$ 和 $y$ 不能互相 $r'$-泛型：否则我们可以取$z = x \oplus y$，根据定理 2.7，它将是 $r'$-泛型，但与$x$ 或 $y$都不互相 $r$-泛型。这表明，我们的证明应当沿用其他构造两个各自泛型、但不互相泛型的实数的证明思路（例如，证明众所周知的事实：对于任意 $a \in 2^{\mathbb{N}}$，存在泛型实数 $b$ 和 $c$，使得 $b \oplus c \geq_T a$）。我们确实会这样做。粗略地说，$x$ 和 $y$ 将轮流行动：一方与稠密集相交，以确保 $r'$-泛型性；另一方则创造机会，让潜在的 $z$ 与它们中的每一个 $D_n$ 相交。更准确地说，在构造的任一时刻，$x$ 和 $y$ 中的一方会尝试与某个稠密集相交，以确保 $r'$-泛型性；另一方则会尝试为任何潜在的 $z$ 创造机会，使其能与某个 $D_n$ 一同相交。随后，我们将利用 $z$ 的泛型性，确保 $z$ 无限多次抓住这样的机会。

下　述引理有助于确保上述协调方式。

**引理 4.1.** 存在 $r'$-可计算函数 $g_1, g_2 \colon \mathbb{N} \to 2^{<\mathbb{N}}$，使得对于任意 $n$以及任意长度为 $n$的字符串 $\gamma_1$ 和 $\gamma_2$，有序对$(\gamma_1^\frown g_1(n)\ \gamma_2^\frown g_2(n))$ 与所有稠密集$D_0, D_1, \ldots, D_n$均相交。

证明。固定 $n$。我们将通过一列 $2^{2n}$ 步来定义 $g_1(n)$和 $g_2(n)$，每一步对应有序对$(\gamma_1, \gamma_2)$的一个可能取值。更确切地说，我们将定义两个字符串序列，
$\varnothing = \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \ldots \leq \sigma_{2^{2n}}$和 $\varnothing = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \leq \tau_{2^{2n}}$，然后令$g_1(n) = \sigma_{2^{2n}}$ 以及 $g_2(n) = \tau_{2^{2n}}$。为此，固定所有长度为 $n$的字符串对的一个枚举。

假设我们刚刚定义了 $\sigma_i$ 和 $\tau_i$，现在需要定义 $\sigma_{i+1}$ 和$\tau_{i+1}$。设 $(\gamma_1, \gamma_2)$ 是上述固定枚举中的第 $(i+1)^{\text{th}}$ 对。令 $\sigma_{i+1}$ 和 $\tau_{i+1}$ 分别为延伸 $\sigma_i$ 和 $\tau_i$的字符串，使得 $(\gamma_1^\frown \sigma_{i+1}, \gamma_2^\frown \tau_{i+1})$ 与 $D_0, \ldots, D_n$ 中的每一个都相交（这是可行的，因为 $D_0, \ldots, D_n$ 全都是稠密集）。为了使 $\sigma_{i+1}$ 和 $\tau_{i+1}$ 的选取具有确定性，首先选择使总长度 $|\sigma_{i+1}| + |\tau_{i+1}|$ 最小的，然后在长度最小的前提下，选择字典序最小的。

最后请注意，刚才描述的整个过程都可以从 $r'$ 一致可计算地得到，因此函数 $g_1$ 和 $g_2$ 是 $r'$-可计算的。□

[6] 要看出这一点，只需注意，在第 2.2 节的记号中，$r'$ 可以根据集合 $A$ 相对于 $r$ 可计算可枚举的索引，统一计算出稠密集 $D_A$。

现在递归地定义数列 $k_0$，$k_1$，$k_2$，……，令

$$k_0 := 0$$
$$k_{n+1} := k_n + |g_1(k_n)|.$$

注意，由于函数 $g_1$ 是 $r'$-可计算的，序列 $k_0$，$k_1$，$k_2$，…… 也是如此。还要注意，如有必要，对函数 $g_1$ 稍作修改后，我们可以假设序列 $k_0$，$k_1$，$k_2$，……严格递增。

现在我们准备构造实数 $x$ 和 $y$。构造的细节包含在下面的引理中，该引理还概括了 $x$ 和 $y$ 的关键性质，我们将在下文用到这一性质。

**引理 4.2**。存在实数 $x$、$y \in 2^{\mathbb{N}}$，它们是 $r'$-泛型的，并且对于每个 $n$，要么 $x \restriction [k_n, k_{n+1}) = g_1(k_n)$，要么 $y \restriction [k_n, k_{n+1}) = g_1(k_n)$。

证明。其思路是让 $x$ 和 $y$ 轮流满足稠密集，并照着函数 $g_1$ 的指示行事。为了更精确地说明这一点，我们先固定一个枚举 $E_0$，$E_1$，$E_2$，……，列出需要满足的 $2^{<\mathbb{N}}$ 的稠密子集，以确保 $r'$-泛型性。

我们将在无限多个阶段构成的序列中，通过初始片段近似来定义 $x$ 和 $y$。现在描述第 $n+1$ 阶段的情况。假设在第 $n$ 阶段结束时，我们已经分别定义了 $x$ 和 $y$ 的初始片段 $\sigma$ 和 $\tau$。我们假设 $|\sigma| = |\tau| = k_m$ 对某个 $m$ 成立（因此，我们还需要确保在第 $n+1$ 阶段结束时这一条件仍然成立）。

我们按以下步骤进行。首先，取一个延伸 $\sigma$ 的字符串 $\sigma'$，使得 $\sigma'$ 与 $E_{n+1}$相交。令 $m'$ 为满足 $k_{m'} \geq |\sigma'|$的最小数。通过在 $\sigma'$ 后填充 0，我们可以假设$|\sigma'| = k_{m'}$。令 $\tau'$ 为通过复制 $k_m$ 和 $k_{m'}$之间的 $g_1$ 得到的字符串。换句话说，

$$\tau' = \tau^\frown g_1(k_m)^\frown g_1(k_{m+1})^\frown \cdots^\frown g_1(k_{m'-1}).$$

现在交换 $\sigma'$和 $\tau'$的角色并重复上述步骤。换句话说，取一个延伸$\tau'$且与 $E_{n+1}$相交的字符串 $\tau''$，令 $m''$为满足 $k_{m''} \geq |\tau''|$的最小数，并通过复制 $k_{m'}$ 和 $k_{m''}$之间的$g_1$ 将 $\sigma'$延伸至 $\sigma''$。此外，在 $\tau''$ 后填充 0，使其长度恰好为 $k_{m''}$。字符串 $\sigma''$ 和 $\tau''$ 分别是由第 $n+1$ 阶段结束时确定的 $x$ 和 $y$的初始片段。□

现在我们将证明，上述引理中构造的实数 $x$ 和 $y$ 具有所需性质。为此，假设 $z$ 是 $r'$-泛型的。我们将证明，对于每个 $n$，二元组 $(x, z)$ 要么与所有 $D_0$，$D_1$，……，$D_n$ 相交，要么二元组 $(y, z)$ 与所有 $D_0$，$D_1$，……，$D_n$ 相交。这足以推出：$x$ 与 $z$ 彼此 $r$-泛型，或者 $y$ 与 $z$ 彼此 $r$-泛型。

固定 $n$，并考虑由形如 $\tau^\frown g_2(k_m)$ 的字符串组成的集合 $F_n$，其中 $k_m > n$ 且 $|\tau| = k_m$。由于 $\lim_{m\to\infty} k_m = \infty$, $F_n$ 是稠密的，并且函数 $g_2$ 以及序列 $k_0$，$k_1$，$k_2$，…… 都可由 $r'$ 计算得到，$F_n$ 也可由 $r'$ 计算得到。因此，任何 $r'$-泛型的实数都必须与 $F_n$ 相交。

特别地，由于 $z$ 是 $r'$-泛型的，$z$ 必定与 $F_n$相交。因此，$z$ 有一个形如 $\tau^\frown g_2(k_m)$ 的初始段，其中 $k_m > n$且 $|\tau| = k_m$。根据我们对 $x$和 $y$的选择（见上文引理 4.2），$x$ 和 $y$ 中至少有一个具有形如 $\sigma^\frown g_1(k_m)$ 的初始段，其中 $|\sigma| = k_m$。不失一般性，假设 $x$ 有一个这种形式的初始段。根据$g_1$ 和 $g_2$的定义，数对 $(\sigma^\frown g_1(k_m)\ \tau^\frown g_2(k_m))$ 与所有稠密集 $D_0$、……、$D_n$ 相交，因此数对 $(x, z)$ 也与这些稠密集相交。

## 参考文献

[AKL24] Tyler Arant、Alexander S. Kechris 和 Patrick Lutz。Borel可图化等价关系。预印本，arXiv:2409.08624 [math.LO] (2024)，2024。[Ara19] Tyler Arant。《图、等价关系与波兰空间的有效理论》。博士论文，加利福尼亚大学洛杉矶分校，2019。[DH10] Rodney G. Downey 和 Denis R. Hirschfeldt。《算法随机性与复杂性》。可计算性理论与应用。施普林格，纽约，2010。[Joc80] Carl G. Jockusch, Jr. 泛型集的度。载于《递归论：其推广与应用（逻辑学会 colloquium 论文集，利兹大学，利兹，1979）》，第45卷《伦敦数学会讲义丛书》，第110–139页。剑桥大学出版社，剑桥—纽约，1980。[Kec95] Alexander S. Kechris。《经典描述集合论》，第156卷《数学研究生教材》。施普林格出版社，纽约，1995。[MW85] Richard Mansfield 和 Galen Weitkamp。《描述集合论的递归方面》，第11卷《牛津逻辑指南》。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1985。含 Stephen Simpson 撰写的一章。[Yu06] Liang Yu。泛型性的低性。《数学逻辑文献》，45(2):233–238，2006。

数学系，密歇根大学电子邮箱地址： pglutz@umich.edu