一个或多个参数为整数或相差整数时的五参数超几何函数 3F2(1)：推导、综述、奇异变换及其他

Michael Milgram，咨询物理学家，Geometrics Unlimited, Ltd.，邮政信箱1484号，Deep River，安大略省，加拿大。
mike@geometrics-unlimited.com2025年9月30日

arXiv:2601.04425v1 [math.CA] 7 Jan 2026

数学学科分类：33C20、33c90、33-01

关键词：超几何函数、3F2(1)、Saalsch¨utz、奇异

修订：2025年11月18日。

1. 全文进行了细微修正；2. 对附录B作了重大修订，并在全文中增加了关于终止级数的讨论；3. 增加了（4.30）；4. 增加了（3.1.4）、（6.2）和（6.7）节；5. 增加了若干条新参考文献；

摘要

本书旨在专门讨论超几何 3F2(1)，除此之外不涉及其他内容。最初的目标是重新审视文献中多年来推导出的许多恒等式，并说明只需掌握少量初等恒等式，便可用更简单的方法得到这些恒等式。有耐心的读者将会发现，这一目标已经实现。从另一个角度看，本书也是对过去半个世纪以来某一组特定 3F2(1) 求值进展的部分综述，尤其关注至少有一个参数为整数，或两个及以上参数之间相差一个整数的情形。其成果是一组非常一般的恒等式（或技巧），分析学家在寻求对某个特定的 3F2(1) 进行求值时，或许可以将其作为起点。这是本书的次要目标。

不过，在此过程中，我不禁想要探究他人提出的未解问题中的至少一个。这引出了几段旁枝，以及一些可能是新的结果。欢迎读者跟随我的好奇心，看看它如何引领我偏离对最新进展的直截了当的综述。

1 引言与背景

由下式定义的无穷级数

$$ {}_3F_2(a,b,c;e,f;1) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+a)\,\Gamma(k+b)\,\Gamma(k+c)\,\Gamma(e)\,\Gamma(f)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+e)\,\Gamma(k+f)} \tag{1.1} $$

在数理物理中经常出现，分析学家通常会为参数 $\{a,b,c,e,f\}$ 的特殊组合和值寻求闭式求值。特别是，参数组合 $s \equiv \Re(e+f-a-b-c)$ 有时被称为“参数超额”，它定义了**s-平衡**求和；通常只有当 $\Re(s) > 0$ 或参数 a,b,c 中的一个或多个为非正整数时，该求和才收敛。$s=n$ 为正整数时，这个求和尤其受到关注。

注 1。 **关于记号：** 以上是本文将采用的记号，但需注意，如果所引用的不等式不成立，则右端 (1.1) 的任何相应的可求和或闭式求值，都依据解析延拓原理表示左端（但存在一些注意事项——见下文 (2.19) 之前的讨论）。

由于还存在另一种排版记号，即 ${}_3F_2\left(\begin{smallmatrix}a,b,e\\ c,f\end{smallmatrix}\middle|1\right)$，本文偶尔会使用这种记号，因此相应的参数可以标记为上参数或下参数。除非另有说明，全文中符号 j,k,m,n,p,q 均为非零正整数；为简洁起见，(1.1) 的左端可写作 $3F2(1)$（一般情况下也可写作 $pFq(1)$）。所有其他符号均默认为复数，但除非上下文要求，均明确按实数处理。当下限超过上限时，任何求和均为零；符号 $:=$ 表示符号替换，符号 $a \leftrightarrow b$ 表示将符号 a 和 b进行符号互换。“可求和”一词表示某个求和是终止和，或可以转换为终止和；“闭式”表示一个表达式已化为不再包含求和运算的形式（尽管双伽马函数 $\psi(x)$ 本身按定义通常包含一个隐藏的求和运算）。双伽马函数的 n^{th} 阶导数表示为 $\psi(n,x)$， G 为卡塔兰常数，波赫哈默符号 $(x)_n \equiv \Gamma(x+n)/\Gamma(x)$。本文推导的许多恒等式都基于伽马函数反射公式 $\Gamma(1-s) = \pi/\sin(\pi s)/\Gamma(s)$；特别是对于整数自变量的情形， $\Gamma(k-n)/\Gamma(-n) = (-1)^k\Gamma(1+n)/\Gamma(1-k+n)$。

最早的 3F2(1) 求值由 Dixon、Whipple 和 Watson（DWW）给出；在 $m=n=0$时重现于附录A。1935年，Bailey [1], 对这些结果进行了总结，并介绍了1879年的 Thomae二分变换，以及 Whipple 对三分变换的分析。有关 Thomae 变换的列表及 Hardy 的巧妙推导，见附录B。利用 Thomae 变换，可以从任意一个 DWW 恒等式出发，得到其他任何一个（且只能得到其中一个）DWW 恒等式。多年来，人们曾多次尝试将 DWW 恒等式推广到其参数的相邻取值，主要采用递推方法（参考文献见 [2] ），直到最终在2012年，

Chu [3] 通过完整总结所有与基本 DWW 恒等式相邻的可能变换，解决了这一问题，从而使这些恒等式成为可求和的（符号说明见附录A；示例见下文的（6.5）和（6.6））。尽管 Chu 给出了包罗全面的解决方案，Awad、Rakha 和 Mohammed 最近发表的一篇论文 [2]却重新探讨了较早的递推方法。

关于 Thomae 变换，人们普遍认为，这 120 个变换（其中只有 9 个彼此独立）代表了 3F2(1) 之间仅有的一般五参数二项变换，尽管当时已知少数几个令人费解的例外。然而，2006年，Krattenthaler 和 Rivoal [4]证明了这一看法存在许多例外，并将它们称为“奇异”恒等式。此后不久，Chu 和 Wang [5] 进一步阐述了这些恒等式，但在这两种情况下，证明都仅适用于只涉及非负整数参数的 3F2(1)。第4节将研究涉及非整数参数的奇异终止情形示例。

除了三个著名的 DWW恒等式外，多年来，文献中还出现了许多包含不同数量独立参数的特殊情形汇编；或许 Prudnikov 等人 [6, 第 7.4 节4]和 Slater [7,附录III] 的综合总结最为人熟知，同时也应注意，此外还存在一些非常专门的求值汇编（例如 [8] Krupnikov 和 K¨olbig 列举了一些侧重于分数参数的专门情形）。除了这些列出的含有特殊参数的恒等式汇编之外，Rainville [9, 第 81 页及后续页] 还给出了任意参数的 3F2(1) 项之间的四个主邻接关系；其他人也大幅扩充了这一列表（例如下文的 (C.12)），其中 Chu 和 Wang [5]的贡献尤为突出。附录 C 收录了其中一些关系。

总而言之，在这项工作中，我主要尝试处理涉及五个独立参数的情形，其中参数要么是整数，要么彼此相差整数。因此，第2节介绍了将无穷和变换为终止和的经典恒等式，并表明仅从基本定义（1.1）和 Thomae 恒等式出发，便可以用更简单的方法推导（并推广）这些恒等式。第3节中，我尝试运用上一节所建立的方法，处理其他文献提出的一个特殊情形挑战，但收效有限。不过，通过将这一挑战情形化归为一个特殊子集，我得到了若干新的一般恒等式，并以更简单的方法推导出已知恒等式。这些恒等式将我们带入更广阔的领域，涉及若干 4F3(1)、一个特殊的欧拉和，以及著名 Saalsch¨utz 定理的一个推广 [1]。第4节从“奇异性”的角度考察了迄今推导出的变换。第5节则运用这些恒等式，得到一般变换，以及一些全新的特殊情形，或比以往认为的更容易推导的特殊情形。最后，第6节聚焦于从近期文献中选取的一些恒等式，展示如何运用本文所发展的工具，以更简单的方式得到或推广给定的恒等式。

本摘要现在以一组内容作结，其中列出了全文中提出的一些较有趣的恒等式——

并按其对应的方程编号标注:

(2.18)：Minton终止和的一个 $p-$平衡扩展，其中一个上参数比一个下参数大一个整数:

$$ {}_3F_2\left(-m, a, c+n; c, p+n+a-m; 1\right); $$

(2.34)：第2节研究的 KRGT 恒等式的一个 m 平衡变式;

$$ {}_3F_2\left(a, b, c+n; c, a+b+n+m; 1\right) $$

(3.8)：Saalsch¨utz 定理的一个 $m-$平衡非终止类比（参见 (2.3)）：

$$ {}_3F_2\left(a, b, n; c, a+b-c+n+m; 1\right); $$

(3.28)：挑战问题的一个连续关系:

$$ {}_3F_2\left(a, b, c; a+1, e; 1\right) + A\,{}_3F_2\left(a, b, c; a+2, e; 1\right) + B = 0\,. $$

(4.20)：仅含正整数参数的一个非终止级数:

$$ {}_3F_2\left(j, m, n; p, 1; 1\right); $$

(4.27): 一个 零平衡、终止型 Saalsch¨utz 定理变体（参见 (2.3)） .

$$ {}_3F_2\left(1-n, a, m; 1, a-n+m; 1\right); $$

(5.2)：Saalsch¨utz 定理的一个 $n-$平衡（终止型）推广（参见 (2.3)）：

$$ {}_3F_2\left(-m, a, b; c, a+b-c+n-m; 1\right); $$

(5.5)：一种常见的可求和形式:

$$ {}_3F_2\left(a, b, m; 1, a+n; 1\right); $$

（5.24）：一个欧拉型和:

$$ \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \psi\left(k+1\right) \tag{1.2} $$

2 历史视角

2.1 熟悉的恒等式

一个重要的恒等式，其特征仅在于出现了负整数上参数，因此可以直接将其识别为一个终止和，而收敛性并不是问题:

$$ {}_3F_2\left(-n,a,b;c,e;1\right)=\frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(e\right)\,\Gamma\left(n+1\right)}{\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(b\right)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma\left(a+k\right)\Gamma\left(b+k\right)\left(-1\right)^{k}}{\Gamma\left(c+k\right)\Gamma\left(e+k\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(n-k+1\right)}. \tag{2.1} $$

一个类似的、通常归因于 Sheppard [10, 推论 3.3。4], 的特殊情形涉及如下变换

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left(-n,a,b;c,e;1\right)=&\frac{\Gamma\left(n+c-a\right)\Gamma\left(n+e-a\right)\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(e\right)}{\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(e-a\right)\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(n+e\right)}\\ &\times{}_3F_2\left(-n,a,1-e-c+a+b-n;1+a-c-n,1+a-e-n;1\right), \end{aligned} \tag{2.2} $$

如果令 $e=a+b-n+1-c$，则该式可化为闭合的（单平衡）Saalsch¨utz 定理 [1, 第 9] 页

$$ \begin{aligned} &{}_3F_2\left(-n,a,b;c,1+a+b-c-n;1\right)\\ &\qquad=\frac{\Gamma\left(1+b-c\right)\Gamma\left(1+a-c\right)\Gamma\left(1+a+b-c-n\right)\Gamma\left(1-c-n\right)}{\Gamma\left(1+b-c-n\right)\Gamma\left(1+a-c-n\right)\Gamma\left(1-c+b+a\right)\Gamma\left(1-c\right)}. \end{aligned} \tag{2.3} $$

关于（2.2）的推导，参见下文（2.15）及后续内容；关于（2.3）的推广，参见下文（4.33）。在已知的其他少数闭合恒等式中，我们还发现了一个重要的终止、零平衡特殊情形。该情形经常出现，值得单独讨论，其特征是一个上参数比一个下参数大一个正整数。它归因于 Minton[11,式（10）], ，其广义形式为

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left(-m,a,c+n;c,n+a-m;1\right)=&\left(-1\right)^{m}\,\frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(n+a-m\right)\Gamma\left(1+m\right)}{\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(a\right)}\\ &+\frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(n+a-m\right)\Gamma\left(1+n\right)}{\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(a-m-c\right)}\sum_{k=1+m}^{n}\frac{\Gamma\left(-c+a-m+k\right)\left(-1\right)^{k}}{\Gamma\left(1+n-k\right)k\,\Gamma\left(a+k\right)\Gamma\left(k-m\right)}. \end{aligned} \tag{2.4} $$

注 2. 关于 (2.4) 的证明，参见附录 D，定理 (D.1)。Minton 对零平衡级数的原始推导仅考虑了 $m\geq n$ (2.4) 中的求和为零的情形。关于 (2.4) 的一个平衡推广，见下文 (2.18)。 $p-$

对于非终止级数，如果上参数比下参数大一个正整数，Karlsson [12, 利用围道积分，在式 (10)], 中得到了如下变换

$$ {}_3F_2\left(a,b,c+n;c,e;1\right)=\frac{\Gamma\left(e\right)\Gamma\left(e-a-b\right)}{\Gamma\left(e-b\right)\Gamma\left(e-a\right)}\,{}_3F_2\left(-n,a,b;c,1-e+a+b;1\right). \tag{2.5} $$

此处，右侧根据 (2.1) 终止，因此 (2.5) 对一个特定的无穷级数求和，其中 $e-a-b-n>0$，并在不等式不成立时对左侧作解析延拓。令 $e=b+1$，则 (2.5) 的右侧化简为一个（可求和的）2F1(1)，且有 $1-a-n>0$，从而得到 (2.4) 的闭式推广：

$$ {}_3F_2\left(a,b,c+n;c,b+1;1\right)=\frac{\Gamma\left(b+1\right)\Gamma\left(1-a\right)\Gamma\left(c+n-b\right)\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(b+1-a\right)\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(c-b\right)}. \tag{2.6} $$

正如 Karlsson 也指出的， [12, 式 (11)], 由 (2.4) 和 (2.5) 混合而成的一个特殊情形为

$$ {}_3F_2\left(-(m+n),a+m,b+n;a,b;1\right)=\frac{(-1)^{m+n}\,\Gamma\left(m+n+1\right)\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(b\right)}{\Gamma\left(a+m\right)\Gamma\left(b+n\right)}. \tag{2.7} $$

1981 年，通过化简 q–类比式，Gasper [13], 重新推导出[1] Karp 和 Prilepkina[14, 式 (2.15)], ，并找到了 (2.5) 的另一种表示，其变换为

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left(a,b,c+n;c,e;1\right)=&\frac{\Gamma\left(e\right)\Gamma\left(1-a\right)\Gamma\left(n+c-b\right)\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(c-b\right)\Gamma\left(b+1-a\right)\Gamma\left(e-b\right)\Gamma\left(c+n\right)}\\ &\times{}_3F_2\left(b,1+b-c,1+b-e;b+1-a,1+b-c-n;1\right). \end{aligned} \tag{2.8} $$

若现在取 $e=b+1+m$，显然 (2.8) 的右侧会终止（见 (2.1)），从而得到这一特殊情形

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left(a,b,c+n;c,b+1+m;1\right)=&\frac{\Gamma\left(b+1+m\right)\Gamma\left(1-a\right)(-1)^{n}\,\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(b\right)}\\ &\times\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{k}\,\Gamma\left(b+k\right)\Gamma\left(1+b-c+k\right)}{\Gamma\left(1-k+m\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(b+1-a+k\right)\Gamma\left(1+b-c-n+k\right)}, \end{aligned} \tag{2.9} $$

若 $m=0$，则化为 (2.6)。另见下文的 (4.28)。

稍后，定义 $\mathbf{c}\equiv\{c_1\ldots c_r\}$，Rosengren [15], 在多变量框架下，得到了关于 ${}_{r+2}F_{r+1}\left(a,b,\mathbf{c}+\mathbf{n};e,\mathbf{c};1\right)$ 的一个恒等式。将其特化到情形 $r=1$，可得 [15, 式（2）]

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left(a,b,c+n;c,e;1\right)=&\frac{\Gamma\left(e\right)\Gamma\left(c+1-e+n\right)\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(e-n-a-b\right)\Gamma\left(1-a\right)}{\Gamma\left(e-a\right)\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(e-b\right)\Gamma\left(1-n-a\right)\Gamma\left(c+1-e\right)}\\ &\times{}_3F_2\left(-n,c-a,1+b-e;1+c-e,1-n-a;1\right), \end{aligned} \tag{2.10} $$

[1] 关于 (2.8) 的另外两种推导，请参见 (4.4) 和 (4.14) 后面的评注。

一个终止和，可与（2.5）和（2.8）进行比较——参见第 4.1 节。用求和形式表示，Rosengren 的终止变换为

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(a,b,c+n;c,e;1\right)\\
&\quad=\frac{\Gamma\left(e\right)\Gamma\left(c+1-e+n\right)\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(1+n\right)\Gamma\left(e-n-a-b\right)\Gamma\left(1-a\right)\sin\left(\pi\left(e-b\right)\right)}{\Gamma\left(e-a\right)\Gamma\left(c+n\right)\pi\,\Gamma\left(c-a\right)}\\
&\quad\times\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma\left(b+1-e+k\right)\Gamma\left(c-a+k\right)\left(-1\right)^{k}}{\Gamma\left(1-n-a+k\right)\Gamma\left(c+1-e+k\right)\Gamma\left(1+n-k\right)\Gamma\left(k+1\right)},
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

并且，若 $e=b+m+1$，利用伽马函数的反射性质，很容易得出 (2.11) 化简为

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(a,b,c+n;c,b+m+1;1\right)\\
&\quad=\frac{\Gamma\left(b+m+1\right)\Gamma\left(n-b-m+c\right)\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(m+1-a-n\right)\Gamma\left(1-a\right)\Gamma\left(1+n\right)}{\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(b+m-a+1\right)\Gamma\left(c+n\right)}\\
&\quad\times\sum_{k=0}^{\min(m,n)}\frac{\Gamma\left(c-a+k\right)}{\Gamma\left(1-k+n\right)\Gamma\left(1-k+m\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(c-b-m+k\right)\Gamma\left(1-a-n+k\right)}.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

对于终止级数，两种 Thomae 变换可导出终止级数之间的一种变换。由 Thomae 变换 (B.10)，令 $c=-n$，可得

$$
{}_3F_2\left(-n,a,b;e,f;1\right)=\frac{\Gamma\left(e+f-a-b+n\right)\Gamma\left(e\right)}{\Gamma\left(e+n\right)\Gamma\left(-a-b+e+f\right)}{}_3F_2\left(-n,f-b,f-a;e+f-a-b,f;1\right)
\tag{2.13}
$$

然后，将右侧倒置并重新定义变量，可得

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(-n,a,b;e,f;1\right)\\
&\quad=\frac{\left(-1\right)^{n}\left(a\right)_n\left(b\right)_n}{\left(e\right)_n\left(f\right)_n}\,{}_3F_2\left(-n,1-f-n,1-e-n;1-b-n,1-a-n;1\right),
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

这是一种看似分量很重、实则基本上很简单的变换。类似地，Thomae 变换 (B.11) 令 $c=-n$ 后，可导出与 (2.13) 和 (2.14) 等价的结果，其中 $e\leftrightarrow f$。值得注意的是，尽管 (2.13) 未能呈现预期的关于互换 e 和 f 的对称性，这种对称性却在 (2.14) 中得以恢复。类似情况见 (2.16) 和 (4.25)。

除此之外，1952 年，Weber 和 Erdelyi [16, Eq.(16)] 采用 3F2(1) 的简单积分表示

$$
{}_3F_2\left(-n,a,b;e,f;1\right)=\frac{\Gamma\left(f\right)}{\Gamma\left(b\right)\Gamma\left(f-b\right)}\int_0^1{}_2F_1\left(a,-n;e;t\right)t^{b-1}\left(1-t\right)^{f-b-1}dt
\tag{2.15}
$$

随后进行简单的线性变换并逐项积分，得到变换公式

$$ {}_3F_2\left(-n,a,b;e,f;1\right)=\frac{\Gamma\left(f\right)\Gamma\left(n+f-a\right)}{\Gamma\left(n+f\right)\Gamma\left(f-a\right)}\,{}_3F_2\left(-n,a,e-b;e,a-f-n+1;1\right). \tag{2.16} $$

注意到右侧的 e 与 f 之间的对称性消失了，正如式（2.13）中那样，他们将式（2.16）按该互换重写。令两式右侧相等，并对变量作适当的重新定义后，他们得到了以下变换

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left(-n,a,b;e,f;1\right)=&\frac{\Gamma\left(e\right)\Gamma\left(e-a+n\right)\Gamma\left(a-f+1\right)\Gamma\left(1-f-n\right)}{\Gamma\left(n+e\right)\Gamma\left(e-a\right)\Gamma\left(a-f-n+1\right)\Gamma\left(1-f\right)}\\ &\times{}_3F_2\left(-n,a,1-\sigma;a-f-n+1,1-e+a-n;1\right) \end{aligned} \tag{2.17} $$

其中 $\sigma\equiv-a-b+e+f+n$，与 Sheppard 的结果一致——见式（2.2）。1992年，Rao、Van der Jeugt、Raynal、Jagannathan 和 Rajeswari [17] 通过递归地重现 Weber/Erdelyi 变换，将这一研究进一步推进；他们以与注释 23（附录B.1）所述相同的方式，利用其他变量之间互换所产生的对称性，发现终止型 3F2(1) 的变换可构成一个包含 72 个变换的群，其中 18 个是非平凡变换。这些变换列于 [17, 附录]；其中基本的变换在此重现——见附录B.2——并在全文中标记为 RJRJR。

除了两部分 Thomae 变换之外，Bailey 还介绍了 Whipple 提出的三分变换。Luke [18] 和 Slater [7], 也再次对这些变换作了总结，但分析学家很少使用它们，这或许是因为其符号体系大多难以理解，尽管 Milgram [19, 附录 C] 曾试图提供更清晰的解释，却未意识到 Rao、Van der Jeugt、Raynal、Jagannathan 和 Rajeswari[17]（见上文）以及 Beyer、Louck 和 Stein [20] 早在多年以前就已做过同样的工作：他们为 3F2(1) 的广义情形和终止情形建立了群论基础。

除了汇集一般恒等式之外，书中还介绍了用于计算一般超几何函数的新算法$A=B$ [21], ，通常以缩写 WZ 命名。这些算法主要依赖相邻元素之间的递推，通常会导出无法预先预见的恒等式——近期实例见 [22] 和 [23]。实际上，在整数参数导致出现双伽马函数的特殊情形下，WZ 算法会失效，因为极限运算会使各项变为非超几何项。

2010年，面对求值某个特定 3F2(1) 的需求，Milgram 遵循 Whipple 和 Watson 的做法， [24] 收集了文献中所有可用的结果，并逐一用九个独立的 Thomae 变换进行检验，以寻找新的恒等式。共发现 62 个，并建立了一个关于 3F2(1) 求值的计算机数据库。继这项工作之后，2011年，Milgram [25]尝试通过递归

扫描所有二部分变换以及选取的三分变换，从先前的数据库出发，寻找相应变换中三个项有两项已知且具有可求和形式或闭式的恒等式。该研究共发现 259 个新的求值，旧数据库扩充至 469 条记录，并以机器可检索形式提供（[25, 附录 E]）。

此后，文献中陆续出现了一些据称是新的恒等式，其中许多基于 WZ算法或积分恒等式。尽管其中不少如今被称为“奇异”恒等式，但数据库其实早已收录了大多数（例如 [23, 式（6）] ——见下文（5.26））；这些恒等式通常可以辨认为 Minton/Karlsson/Rosengren/Gasper/Thomae（MKRGT）恒等式或 Chu对DWW恒等式的推广 [3]的变式，只是此前未被识别出来。事实上，在 [25], 我曾断言，除非发现一种根本上全新且独立的求值方法，否则通过研究变换不会找到 3F2(1) 的新闭式求值。

2012年，Miller 和 Paris 找到了这样一种求值方法 [26], ；随后在 2015 年，S hpot 和 Srivastava 又提出了第二种求值方法[2] [28]。本文的一个目标是重新审视这两个恒等式，说明它们彼此相关且很容易推导（见第3节 3.1.2），研究其推论，并将推导扩展至其他相关情形的类似恒等式。这些恒等式的共同特点是包含一个或多个为整数或相差整数的参数。全文广泛运用了 Thomae 变换（附录 B.1）、Rao 等人的变换（RJRJR——见附录 B.2），以及已知 3F2(1) 三分变换中最简单的一种（见（3.1））。与此同时，我还研究了一组从近期文献中摘录的“新”恒等式，特别是 Karp 和 Kalmykov 提出的特殊情形恒等式 [29] 以及 Karp 和 Prilepkina 提出的恒等式 [14], ，其中 $c = f + n$ 和 $b := b + p$ 见（1.1），以及 Chen 和 Chu 引入的“奇异”恒等式 [30]。本文旨在表明，现有的已知变换集合中潜藏着许多新颖且有趣的 3F2(1) 求值公式。

2.2 熟知的终止恒等式的近期推广 s

A Minton零平衡恒等式 (2.4) 的一般 p–平衡推广为

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(-m, a, c+n; c, p+n+a-m; 1\right) &= \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(p+n+a-m)\,\Gamma(1+n)}{\Gamma(c+n)\,\Gamma(a-m+p-c)} \\
&\times \sum_{0\le k=1-p+m}^{n} \frac{\Gamma(p-c+a-m+k)\,\Gamma(p+k)\,(-1)^k}{\Gamma(1+n-k)\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(p+a+k)\,\Gamma(p-m+k)},
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

其证明可见附录 D 的推论（25）。注意，如果 $m \ge p+n$，则（2.18）的右侧为零，从而重现了 Karlsson的结果 [12,式（12）]。

[2]他们独立地重新发现了 Gottschalk 和 Maslen 于 1988 年提出的一个恒等式 [27]。

Karp 和 Prilepkina [14] 在 2018年对先前工作作了进一步拓展。他们研究了MKRG型恒等式的拓展，其动机是 Minton 的原始工作中遗漏了右侧的第二项（此处已补上）（参见（2.4），即 $n > m$），并进一步注意到，尽管 MKRG 恒等式中的 $3F2$(1)（例如（2.6））在 $1-a-n \leq 0$ 时发散，且解析延拓定律表明右侧是左侧的延拓，但如果 $a = m$，只要该不等式成立，左侧就会终止（因此不会发散），然而所声称的恒等式在数值上并不成立。基于这一观察，Karp 和 Prilepkina 推导出（2.6）的广义形式，该形式适用于平衡度为零或负值的终止和；将其化为 $3F2$(1) 的情形后，他们得到 [14, 式（2.3）],，其中 $0 \leq n \leq m-1$,

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(-m, a, c+n; a+1, c; 1\right) \\
&\quad = \frac{\Gamma(1+m)\,\Gamma(a+1)\,\Gamma(n+c-a)\,\Gamma(c)}{\Gamma(a+1+m)\,\Gamma(c-a)\,\Gamma(c+n)} - \frac{(-1)^n\,\Gamma(1+m)\,\Gamma(c)\,q_m}{\Gamma(c+n)}
\end{aligned} \tag{2.19}
$$

其中，他们根据 Meijer G函数的性质以解析方式定义常数 q_m （见下文 (2.30)）。在 $m := m-1,\ n = m$ 的情况下，他们给出了一个示例，其参数等价时与 (2.4) 完全一致。更值得关注的是负平衡的特例 $m := m-2, n = m$，他们发现，对于 $m \geq 2$,

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(2-m, a, c+m; c, a+1; 1\right) = \frac{\Gamma(m-1)\,\Gamma(c)}{\Gamma(c+m)} \\
&\quad \times \left(\frac{\Gamma(c-a+m)\,\Gamma(a+1)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(a+m-1)} + (-1)^m\, a\left(1-a+m\left(c+m-2\right)\right) \right)
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

从而将 (2.18) 扩展到范围 $p < 0$。

注 3。 读者可以自行利用递推公式（例如 (C.2)），从 (2.18) 的 $p = 1,\ n = m$ 版本推导出 (2.20)，这也可作为一道练习。提示：利用负平衡但终止的求和：

$$
{}_2F_1\left(2-m, c+m-1; c; 1\right) = (-1)^m\, \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(c)}{\Gamma(c+m-2)}\,. \tag{2.21}
$$

2.3 简单的替代推导

2010年，Miller 和 Srivastava [31] 采用“二项式系数$\binom{j}{k}$ 和第二类斯特林数的初等恒等式 $\left\{ {j \atop k} \right\}$”，以一种“非专业人士也能理解”的方式重新推导了 Karlsson-Minton求和公式。本文通过将 Thomae 恒等式应用于共同的左端，并注意到其中两个变体会产生终止和，提出了实现同一目标的另一种更为简洁的方法。

具体而言，除了 KRG 恒等式外，我们还分别应用 Thomae 恒等式 (B.3) 和 (B.6)，得到以下两个变体：

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a,b,c+n;c,e;1\right) &= \frac{\Gamma\left(e-n-a-b\right)\Gamma\left(e\right)\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(-b+e-n\right)\Gamma\left(e-a-n\right)} \\
&\quad\times {}_3F_2\left(-n,e-n-a-b,e-c-n;e-a-n,e-b-n;1\right) \qquad (2.22)\\
&= \frac{\Gamma\left(e-n-a-b\right)\Gamma\left(e\right)}{\Gamma\left(e-a\right)\Gamma\left(-b+e-n\right)}\,{}_3F_2\left(-n,a,c-b;c,e-b-n;1\right)\,. \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

在 (2.22) 或 (2.23) 中令 $e=b+1$，即可得到 Karlsson 恒等式 (2.6)。同样，在 (2.22) 中令 $e=b+1+m$，可得到 Gasper 恒等式 (2.9) 的一个等价变式

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a,b,c+n;c,b+m+1;1\right) &= \frac{\Gamma\left(1+n\right)\Gamma\left(b+m+1\right)\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(b+m+1-c-n\right)} \\
&\quad\times\sum_{0\le k=n-m}^{n}\frac{\left(-1\right)^k\,\Gamma\left(m+1-a-n+k\right)\Gamma\left(b+m+1-c-n+k\right)}{\Gamma\left(1-k+n\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(m+1-n+k\right)\Gamma\left(b+m+1-a-n+k\right)}\,. \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

与在 (2.9) 中令 $m=0$ 以重现 (2.6) 不同，在 (2.24) 中令 $n=1$，可得到一个闭式特殊情形，它等价于 Rosengren 恒等式 (2.12) 的 $n=1$ 情形：

$$
{}_3F_2\left(a,b,c+1;c,b+m+1;1\right) = \frac{\Gamma\left(m-a\right)\left(\left(m-a\right)c+a\,b\right)\Gamma\left(b+m+1\right)}{c\,\Gamma\left(m+1\right)\Gamma\left(b+m-a+1\right)}\,. \qquad (2.25)
$$

这也是指令。　在其中令 $e=a+1$，可得

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a,b,c+n;c,a+1;1\right) &= \frac{\Gamma\left(1+n\right)\Gamma\left(a+1\right)\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(1-n-c+a\right)} \\
&\quad\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k\,\Gamma\left(1-b-n+k\right)\Gamma\left(1-n-c+a+k\right)}{\Gamma\left(1-k+n\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(-b+a+1-n+k\right)\Gamma\left(1-n+k\right)}\,, \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

此时只有与指标 $k=n$ 对应的项有贡献，除非 b 是一个整数。在这种情况下，令 $b=-m$，从而将 Minton 变换 (2.4) 与 KRG 型变换联系起来。若 $m>n-1$，则 (2.26) 变为

$$
{}_3F_2\left(-m,a,c+n;c,a+1;1\right) = \frac{\left(-1\right)^n\,\Gamma\left(m+1\right)\Gamma\left(1-c+a\right)\Gamma\left(a+1\right)\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(1-n-c+a\right)\Gamma\left(m+a+1\right)}, \qquad (2.27)
$$

对应于 $p=m-n+1>0$ 时的特殊情形 (2.18)。若 $m\le n-1$，则必须将 (2.26) 中的求和拆分为 $k=0\ldots n-m-1$ 和 $k=n$ 两部分，因为 $n-m\le k<n$ 之间的所有项均为零，最终得到

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(-m,a,c+n;c,a+1;1\right) &= \frac{\left(-1\right)^n\,\Gamma\left(m+1\right)\Gamma\left(1-c+a\right)\Gamma\left(a+1\right)\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(1-n-c+a\right)\Gamma\left(m+a+1\right)} \\
&\quad+\frac{\Gamma\left(1+n\right)\Gamma\left(a+1\right)\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(1-n-c+a\right)}\sum_{k=0}^{n-m-1}\frac{\left(-1\right)^{m+k}\,\Gamma\left(1-n-c+a+k\right)}{\Gamma\left(n-m-k\right)\left(n-k\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(m+a+1-n+k\right)} \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

其中恒等式

$$\lim_{b\to -m}\frac{\Gamma\left(1-b-n+k\right)}{\Gamma\left(1-n+k\right)}=\frac{\left(-1\right)^{-m}\,\Gamma\left(n-k\right)}{\Gamma\left(-m+n-k\right)},\qquad m+1\leq n,\ 0\leq k\leq n-m-1, \tag{2.29}$$

已采用。比较 (2.28) 和 (2.19)，可简单地确定 Karp 和 Prilepkina 的常数 q_m （见 (2.19)）与 3F2(1) 之间的关系：

$$q_m=\frac{\left(-1\right)^{n}\,\Gamma\left(a+1\right)\Gamma\left(1+n\right)}{\Gamma\left(1-n-c+a\right)\Gamma\left(m+1\right)}\sum_{k=0}^{n-m-1}\frac{\left(-1\right)^{m+k}\,\Gamma\left(1-n-c+a+k\right)}{\left(k-n\right)\Gamma\left(m+a+1-n+k\right)\Gamma\left(n-m-k\right)\Gamma\left(k+1\right)}. \tag{2.30}$$

在（2.28）中设定 $m:=m-2$，随后设定 $n:=m$，即可重现 Karp 和 Prilepkina 的例（2.20）。

除了提供简单的推导之外，如果我们将 Thomae 恒等式应用于 Gasper 恒等式（2.8），结果表明，其中三个变体（分别为（B.3）、（B.5）和（B.8））可化为终止和。由此得到以下新的变换，可以将其加入我们迅速扩大的集合中：

$$\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(a,b,c+n;c,e;1\right)={}_3F_2\left(-n,c-a,e-n-a-b;e-a-n,1-n-a;1\right)\\
&\quad\times\frac{\Gamma\left(e\right)\Gamma\left(1-a\right)\Gamma\left(n+c-b\right)\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(e-n-a-b\right)\Gamma\left(1+b-c-n\right)}{\Gamma\left(1-c+b\right)\Gamma\left(e-a-n\right)\Gamma\left(1-n-a\right)\Gamma\left(c-b\right)\Gamma\left(e-b\right)\Gamma\left(c+n\right)} &(2.31)\\
&={}_3F_2\left(-n,b,e-c-n;e-a-n,1+b-c-n;1\right)\\
&\quad\times\frac{\Gamma\left(e\right)\Gamma\left(n+c-b\right)\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(e-n-a-b\right)}{\Gamma\left(e-a-n\right)\Gamma\left(c-b\right)\Gamma\left(e-b\right)\Gamma\left(c+n\right)} &(2.32)\\
&={}_3F_2\left(-n,1-e+b,1-c-n;1-n-a,1+b-c-n;1\right)\\
&\quad\times\frac{\Gamma\left(e\right)\Gamma\left(1-a\right)\Gamma\left(n+c-b\right)\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(e-n-a-b\right)}{\Gamma\left(e-a\right)\Gamma\left(1-n-a\right)\Gamma\left(c-b\right)\Gamma\left(e-b\right)\Gamma\left(c+n\right)}. &(2.33)
\end{aligned}$$

这些可用于研究有趣的特例；例如，如果在 (2.31) 中令 $e=n+a+b+m$，我们就得到 m–平衡变换

$$\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(a,b,c+n;c,a+b+n+m;1\right)\\
&\quad=\frac{\Gamma\left(n+a+b+m\right)\Gamma\left(1-a\right)\Gamma\left(n+c-b\right)\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(1+n\right)\Gamma\left(1+b-c-n\right)}{\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(1-c+b\right)\Gamma\left(c-b\right)\Gamma\left(n+a+m\right)\Gamma\left(c+n\right)}\\
&\quad\times\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma\left(m+k\right)\left(-1\right)^{k}\,\Gamma\left(c-a+k\right)}{\Gamma\left(1-k+n\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(b+m+k\right)\Gamma\left(1-n-a+k\right)}, &(2.34)
\end{aligned}$$

(2.9) 的一种变体　以及 (2.12)。显然还可以得到其他特例；例如，如果 $a=j$:

$$ {}_3F_2\left(b,j,n+c;c,n+j+b+m;1\right)=\frac{\Gamma\left(n+j+b+m\right)\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(1+n\right)}{\Gamma\left(j\right)\Gamma\left(c-j\right)\Gamma\left(n+j+m\right)\Gamma\left(n+c\right)} \tag{2.35} $$

$$ \times\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma\left(m+k\right)\Gamma\left(c-j+k\right)\Gamma\left(n+j-k\right)}{\Gamma\left(1-k+n\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(b+m+k\right)}. \tag{2.36} $$

3 一项挑战

在论文的结语中，Miller 和 Paris 写道：“.....尚有一个未解决的问题：如何推导出级数 ${}_3F_2(a,\ b,\ c;\ e,\ a+n;\ 1)$.....的求和公式。我们希望本文所阐述的进展能够激发人们对这一问题的兴趣。”本节旨在运用一种初等的三部分变换，以应对 Miller/Paris挑战。我们从超几何 $3F2$(1)中一个简单而众所周知的三部分变换开始；该变换见 Luke 的著作 [18, Eq. 3.13.3(11)]（含 $a\leftrightarrow c$）：

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left(a,b,c;e,f;1\right)&=\Gamma\left(f\right)\Gamma\left(e\right)\Gamma\left(1-c\right)\\ &\times\left(\frac{\Gamma\left(b-a\right)}{\Gamma\left(1-c+a\right)\Gamma\left(f-a\right)\Gamma\left(e-a\right)\Gamma\left(b\right)}\,{}_3F_2\left(a,1-e+a,1-f+a;1-b+a,1-c+a;1\right)\right.\\ &\left.+\frac{\Gamma\left(a-b\right)}{\Gamma\left(1-c+b\right)\Gamma\left(f-b\right)\Gamma\left(e-b\right)\Gamma\left(a\right)}\,{}_3F_2\left(b,1-e+b,1-f+b;1-c+b,1-a+b;1\right)\right). \end{aligned} \tag{3.1} $$

为了获得“可求和的”求值（而非变换），(3.1) 的右侧必须化简为一种不包含无穷求和的表示，因为左侧的一般形式显然包含无穷求和——参见 (1.1)。实现这一目标的一个简单尝试是将右侧化为终止和。考虑到 Miller/Paris挑战，在 (3.1) 中令 $f=a+n$，以求得

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left(a,b,c;e,a+n;1\right)&=\Gamma\left(1-c\right)\Gamma\left(a+n\right)\Gamma\left(e\right)\\ &\times\left(\Gamma\left(a-b\right)\frac{{}_3F_2\left(b,1+b-e,1+b-a-n;1+b-c,1+b-a;1\right)}{\Gamma\left(1+b-c\right)\Gamma\left(a+n-b\right)\Gamma\left(e-b\right)\Gamma\left(a\right)}\right.\\ &\left.+\Gamma\left(b-a\right)\frac{{}_3F_2\left(a,1-n,1+a-e;1+a-b,1+a-c;1\right)}{\Gamma\left(1+a-c\right)\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(e-a\right)\Gamma\left(b\right)}\right) \end{aligned} \tag{3.2} $$

并注意到，由于（2.1），括号内的第二项在 $n\geq 1$ 时是一个终止和。为了满足 Miller/Paris挑战，仍需确定第一

个超几何项在括号内是否终止，或能否转换为一个终止的表达式，其中 a，b，c，e 和 $n > 0$ 取一般值。(3.2) 有几个值得注意的性质：

- 在交换 $a \Leftrightarrow b$ 时，各项之间存在一定程度的对称性；
- 左侧在交换 $b \leftrightarrow c$ 时具有完全对称性，而这种对称性必定会以某种方式延伸到右侧；；

- 对于第一项，第三个上参数 $1 + b - a - n$ 与第二个下参数 $1 + b - a$ 之间存在等于 $-n$ 的参数差，这表明该项本身与左侧出现的项形式相同；

- 稍微放宽基本规则，令 $e = b + 1$，便得到已知恒等式 [32]

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a, b, c; b+1, a+n; 1\right) = & \frac{\Gamma(b+1)\,\Gamma(a-b)\,\Gamma(1-c)\,\Gamma(a+n)}{\Gamma(1-c+b)\,\Gamma(a+n-b)\,\Gamma(a)} \\
& - \frac{b\,\Gamma(a+n)\,\Gamma(1-c)}{(a-b)\,\Gamma(1-c+a)\,\Gamma(n)}\ {}_3F_2\left(a, a-b, 1-n; 1-b+a, 1-c+a; 1\right), \quad (3.3)
\end{aligned}
$$

  一个终止和。若稍微进一步放宽基本规则，并令 $e = a + m$，便可得到下文的恒等式 (3.5)。

- 最后，在本文余下部分，我们研究通过令 $c = m$，$m > 1$ 来放宽基本规则的情形，因为第一个上参数 b 与第一个下参数 $1 + b - c$ 之间的参数差变成了值为 $m - 1$ 的正整数，因此无论使用 (2.5) 还是 (2.10)，第一项都会转化为终止形式。需要注意的是，总因子 $\Gamma(1 - c)$ 的存在，使得这种方法不再简便。

3.1 四种尝试

3.1.1 一个函数方程

由于 (3.2) 中的第一项与左侧的形式相同，不妨重新定义该恒等式中的参数，实际上将该恒等式视为一个函数方程。验证这样做最终会得到重言式还是另一个等价的三项恒等式，则留作读者练习。

3.1.2 再次放宽约束可得到简单的推导

再次放宽限制，不要求 (3.2) 对一般的 a、b、c、e 和 $n>0$ 必须写成终止和的形式，就可以利用观察到的对称性：在 (3.2) 中令 $e=b+m$，从而得到

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a,b,c;a+n,b+m;1\right) &= \Gamma\left(a+n\right)\Gamma\left(b+m\right)\Gamma\left(1-c\right)\\
&\times\left(\frac{\Gamma\left(b-a\right){}_3F_2\left(1-n,a,1+a-b-m;1+a-b,1+a-c;1\right)}{\Gamma\left(1+a-c\right)\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(b+m-a\right)\Gamma\left(b\right)}\right.\\
&+\left.\frac{\Gamma\left(a-b\right){}_3F_2\left(1-m,b,1+b-a-n;1-c+b,1+b-a;1\right)}{\Gamma\left(1+b-c\right)\Gamma\left(a+n-b\right)\Gamma\left(m\right)\Gamma\left(a\right)}\right),
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

在这种情况下，(3.4) 右侧的两项都是终止和，因此 (3.1) 已化简为有限求和。明确地说，以求和形式表示为

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a,b,c;a+n,b+m;1\right) &= \frac{\Gamma\left(1-c\right)\Gamma\left(b+m\right)\Gamma\left(a+n\right)}{\Gamma\left(b\right)\Gamma\left(a\right)}\\
&\times\left((-1)^n\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Gamma\left(b+k\right)\Gamma\left(1+b+k-a-n\right)\left(-1\right)^k}{\Gamma\left(m-k\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(1+b+k-a\right)\Gamma\left(1+b+k-c\right)}\right.\\
&\left.+\left(-1\right)^m\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma\left(a+k\right)\Gamma\left(1-b-m+a+k\right)\left(-1\right)^k}{\Gamma\left(n-k\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(1-b+a+k\right)\Gamma\left(1-c+a+k\right)}\right),
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

恰好重现了 Gottschalk 和 Maslen 首次得到的恒等式 [27, 式（ 23] ）于 1988 年，后来由 Shpot 和 Srivastava 于 2015 年独立重新发现 [28]，而我自己 [19] 稍后对其作出了错误解读。如果 $n=1$，则（3.5）化为已知恒等式（3.3）

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a,b,c;1+a,b+m;1\right) &= \frac{\left(-1\right)^m\,\Gamma\left(1+a-b-m\right)\Gamma\left(1+a\right)\Gamma\left(b+m\right)\Gamma\left(1-c\right)}{\Gamma\left(1+a-b\right)\Gamma\left(b\right)\Gamma\left(1+a-c\right)}\\
&+\frac{\Gamma\left(b-a\right)\Gamma\left(1+m-c\right)\Gamma\left(1+a\right)\Gamma\left(b+m\right)}{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(m-c+b\right)}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\left(-1\right)^k\Gamma\left(c-1-k\right)}{\Gamma\left(a-k\right)\Gamma\left(m-k\right)\Gamma\left(b-a+1+k\right)},
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

写成求和形式。趁此机会，对（3.5）的左侧应用两部分 Thomae 变换（B.11），得到

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a,b,m;m+n,c;1\right) &= \frac{\pi\left(-1\right)^m\,\Gamma\left(n-a-b+c\right)\Gamma\left(n+m\right)\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(c-m\right)\Gamma\left(-a+n+m\right)\Gamma\left(-b+n+m\right)} \\
&\times\left(\frac{1}{\sin\left(\pi\,c\right)\Gamma\left(c-b\right)\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(n\right)}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Gamma\left(1-b+k\right)\Gamma\left(1-a+k\right)\Gamma\left(n+m-1-k\right)}{\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(m-k\right)\Gamma\left(2-c+k\right)}\right. \\
&\left.-\frac{\left(-1\right)^n\sin\left(\pi\left(b-c+a\right)\right)}{\sin\left(\pi\,a\right)\sin\left(\pi\,b\right)\Gamma\left(m\right)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma\left(m+k\right)\Gamma\left(1+a+b-c-n+k\right)\left(-1\right)^k}{\Gamma\left(b+1+k-n\right)\Gamma\left(1+a-n+k\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(n-k\right)}\right),
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

等价于 2012年 Miller/Paris 论文 [26]中首次出现的恒等式。再次沿用 Whipple 和 Watson 的方法，将 Thomae 变换 (B.5) 应用于恒等式 (3.5)，从而得到另一个可能是新的恒等式:

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(a,b,n;c,a+b-c+n+m;1\right) = \\
&\frac{\Gamma\left(1-b\right)\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(b-c+a+n+m\right)\Gamma\left(m\right)}{\Gamma\left(c-b\right)\Gamma\left(a-c+n+m\right)\Gamma\left(c-n\right)\Gamma\left(b+m+a-c\right)\Gamma\left(n\right)} \\
&\times\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Gamma\left(c-b-n-m+1+k\right)\Gamma\left(a-c+1+k\right)\Gamma\left(n+m-1-k\right)}{\Gamma\left(1+k\right)\Gamma\left(m-k\right)\Gamma\left(2-b-m+k\right)} \\
&-\frac{\left(-1\right)^n\,\Gamma\left(1+b-c\right)\sin\left(\pi\,a\right)\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(b-c+a+n+m\right)}{\sin\left(\pi\left(c-a\right)\right)\Gamma\left(b\right)\Gamma\left(a-c+n+m\right)} \\
&\times\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(-1\right)^k\Gamma\left(m+k\right)\Gamma\left(1-a+k\right)}{\Gamma\left(b-c+m+1+k\right)\Gamma\left(c+1-a-n+k\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(n-k\right)}\,.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

注释 4。**注释**

- m 平衡恒等式 (3.8) 是 Saalsch¨utz 定理 (2.3) 的一个非终止类比，可能是新的[3]。令 $m=n=1$，则 (3.8) 化简为已知的 1–平衡恒等式[6, Eq. 7.4.4(28)]；若 $n=1$ 且 $m>0$，则可得到具有四个独立参数的 m 平衡情形的推广

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(1,a,b;c,a-c+b+1+m;1\right) &= \frac{\Gamma\left(m\right)\Gamma\left(1+b-c\right)\Gamma\left(1-c+a\right)\Gamma\left(a-c+b+1+m\right)\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(b\right)\Gamma\left(a-c+1+m\right)\Gamma\left(1-c+b+m\right)\Gamma\left(a\right)} \\
&+\frac{\left(b+m+a-c\right)\Gamma\left(m\right)\left(c-1\right)\Gamma\left(1-b\right)}{\Gamma\left(a-c+1+m\right)\Gamma\left(c-b\right)}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Gamma\left(c-b-m+k\right)\Gamma\left(1+a-c+k\right)}{\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(-b+2-m+k\right)}\,;
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

[3]终止情形 (2.3) 是 1-平衡的；相应的 2-平衡情形的闭式结果可参见 [33, 式5]或见下文 (5.3)。在 (2.2) 中令 $e=a+b+m-n-c$，即可对 m–平衡的终止推广求和。

• 在 $b=-n,\quad m=1$ 的情况下，(3.8) 化简为 Saalschütz 定理 (2.3) 的一个 $b=n$ 实例。

• 与 DWW 的情形一样，恒等式 (3.5)、(3.7) 和 (3.8) 在 Thomae 变换的作用下构成闭集；也就是说，给定这组三个恒等式中的任意一个，都可以通过这些变换得到另外两个，而且只能得到另外两个。参见附录B，推论 22。

• 在这些恒等式中，假定变量 $a,\ b,\ c,\ e$ 取任意复数值，使无穷级数收敛。在特殊情况下，必须进行极限计算——见下文示例 (6.5)。

• 恒等式 (3.7) 将一些著名恒等式推广了；这些恒等式以教科书中的形式出现（例如 Luke [18,第 111] 页）或见下文 (5.26)，其中 n 和 m为较小的整数。

3.1.3 检查有用的 Thomae 等价式

在此，我们探讨能否通过应用某个 Thomae 变换，将式 (3.2) 右侧的非终止级数化为终止和。该项的九个非平凡 Thomae 派生式如下：

$$
{}_3F_2(b,\ 1+b-e,\ 1+b-a-n;\ 1+b-a,\ 1+b-c;\ 1)
$$

$$
= \frac{\Gamma(e+n-b-c)\,\Gamma(1+b-c)\,\Gamma(1+b-a)}{\Gamma(1+b-a-n)\,\Gamma(e+n-c)\,\Gamma(1+n-c)}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix} n, e+n-b-c, a+n-c \\ e+n-c, 1+n-c \end{matrix}\middle|1\right) \tag{3.10}
$$

$$
= \frac{\Gamma(e+n-b-c)\,\Gamma(1+b-c)\,\Gamma(1+b-a)}{\Gamma(1-e+b)\,\Gamma(e-c+n)\,\Gamma(1+e-a-c)}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix} e+n-b-c, e-c, e-a \\ e+n-c, 1+e-a-c \end{matrix}\middle|1\right) \tag{3.11}
$$

$$
= \frac{\Gamma(e+n-b-c)\,\Gamma(1+b-a)}{\Gamma(1-a)\,\Gamma(e+n-c)}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix} b, a+n-c, e-c \\ e+n-c, 1+b-c \end{matrix}\middle|1\right) \tag{3.12}
$$

$$
= \frac{\Gamma(e+n-b-c)\,\Gamma(1+b-c)}{\Gamma(1-c)\,\Gamma(e+n-c)}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix} n, b, e-a \\ e+n-c, 1+b-a \end{matrix}\middle|1\right) \tag{3.13}
$$

$$
= \frac{\Gamma(e+n-b-c)\,\Gamma(1+b-c)\,\Gamma(1+b-a)}{\Gamma(b)\,\Gamma(1+n-c)\,\Gamma(1+e-a-c)}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix} e+n-b-c, 1-c, 1-a \\ 1+n-c, 1+e-a-c \end{matrix}\middle|1\right) \tag{3.14}
$$

$$
= \frac{\Gamma(e+n-b-c)\,\Gamma(1+b-a)}{\Gamma(e-a)\,\Gamma(1+n-c)}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix} a+n-c, 1-c, 1+b-e \\ 1+n-c, 1+b-c \end{matrix}\middle|1\right) \tag{3.15}
$$

$$
= \frac{\Gamma(e+n-b-c)\,\Gamma(1+b-c)}{\Gamma(e-c)\,\Gamma(1+n-c)}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix} n, 1-a, 1+b-e \\ 1+n-c, 1+b-a \end{matrix}\middle|1\right) \tag{3.16}
$$

$$
= \frac{\Gamma(e+n-b-c)\,\Gamma(1+b-a)}{\Gamma(n)\,\Gamma(1+e-a-c)}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix} e-c, 1-c, 1+b-a-n \\ 1+e-a-c, 1+b-c \end{matrix}\middle|1\right) \tag{3.17}
$$

$$
= \frac{\Gamma(e+n-b-c)\,\Gamma(1+b-c)}{\Gamma(a+n-c)\,\Gamma(1+e-a-c)}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix} e-a, 1-a, 1+b-a-n \\ 1+e-a-c, 1+b-a \end{matrix}\middle|1\right), \tag{3.18}
$$

显然，对于参数的任意取值，这些变换都无法将其化为有限和。不过，如果目标稍微宽松一些，可以考虑情形 (3.17)：它似乎很有希望，因为令 $c = m$ 为正整数时，它确实可以化为终止和。然而，如前所述，式 (3.2) 中出现的因子 $\Gamma(1-c)$ 要求计算一个复杂的极限 $c \to m$ ，由此会得到一些出人意料的恒等式。首先，对于 $m > 0$，写成以下形式较为方便:

$$ {}_3F_2\left(e-c, 1-c, 1-a-n+b; 1-a+e-c, 1-c+b; 1\right) = \sum_{k=0}^{m-1}\{\cdots\} + \sum_{k=m}^{\infty}\{\cdots\} \tag{3.19} $$

其中， $\{\cdots\}$ 的内容只是（1.1）中相应的符号。求值极限 $c \to m$ 的过程十分冗长，但最终得出了两个重要结果:

- 首先，级数展开式中出现了一个与 $(c-m)^{-1}$ 相对应的项。显然，对于其参数的至少某个范围，级数 ${}_3F_2(a,\ b,\ m;\ e,\ a+n;\ 1)$ 是收敛的，因此该项的系数必定恒等于零。将其单独提取出来，可得恒等式

$$ \begin{aligned} &\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(e-m+k)(-1)^k\,\Gamma(1-a-n+b+k)}{\Gamma(m-k)\Gamma(k+1)\Gamma(1-a+e-m+k)\Gamma(1-m+b+k)} \\ &\quad = -\frac{(-1)^n\,\Gamma(e-m)\Gamma(e-b)\Gamma(n)\sin(\pi(a-e))\csc(\pi(a-b))}{\Gamma(e+n-b-m)\Gamma(m)\Gamma(b)} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k\,\Gamma(a+k)\Gamma(1-e+a+k)}{\Gamma(n-k)\Gamma(k+1)\Gamma(1-b+a+k)\Gamma(1-m+a+k)}, \end{aligned} \tag{3.20} $$

  也就是说，两个相等的终止和所含项数不同。关于（3.20）的更多内容，参见第5.1节。

- 级数展开中首项 $O((c-m)^0)$ 的求值过程十分冗长，需要大量计算机运算才能将其化简为简洁形式，其中需要用到恒等式

$$ \lim_{x \to k} \frac{\psi(-x)}{\Gamma(-x)} = (-1)^{k+1}\,\Gamma(k+1) \tag{3.21} $$

在求值（3.19）右侧第二项时需要用到该恒等式。最终结果得到恒等式

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a,b,m;e,a+n;1\right) &= \frac{\Gamma\left(a+n\right)\Gamma\left(e\right)\sin\left(\pi\left(a-e\right)\right)}{\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(m\right)\Gamma\left(b\right)\sin\left(\pi\left(a-b\right)\right)} \\
&\times\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(-1\right)^{m+k}\left(\psi\left(1-m+a+k\right)-\psi\left(m\right)\right)\Gamma\left(1+a+k-e\right)\Gamma\left(a+k\right)}{\Gamma\left(1-m+a+k\right)\Gamma\left(1+a+k-b\right)\Gamma\left(n-k\right)\Gamma\left(k+1\right)} \\
&- \frac{\Gamma\left(a+n\right)\Gamma\left(e\right)\Gamma\left(-b-m+e+n\right)}{\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(e-m\right)\Gamma\left(e-b\right)\Gamma\left(n\right)} \\
&\times\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\left(-1\right)^{n+m+k}\Gamma\left(e-m+k\right)\Gamma\left(1-a-n+b+k\right)}{\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(m-k\right)\Gamma\left(1-m+b+k\right)\Gamma\left(1-a+e-m+k\right)} \\
&\quad\times\left(\psi\left(m-k\right)-\psi\left(1+e+k-a-m\right)-\psi\left(1+b+k-m\right)\right. \\
&\qquad\left.+\psi\left(e+k-m\right)-\psi\left(e-m\right)+\psi\left(e+n-b-m\right)\right) \\
&+\left(-1\right)^{n}\frac{\Gamma\left(a+n\right)\Gamma\left(1+b+m-a-n\right)\Gamma\left(e+n-b-m\right)\Gamma\left(e\right)^{2}}{\Gamma\left(1+e-a\right)\Gamma\left(1+m\right)\Gamma\left(e-m\right)\Gamma\left(e-b\right)\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(1+b\right)\Gamma\left(a\right)} \\
&\quad\times{}_4F_3\left(1,1,e,1-a-n+b+m;1+m,1+b,1-a+e;1\right)
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

其中最后一项 ${}_4F_3$(1) 来自上述对 (3.21) 的应用。

尽管已知形如 ${}_3F_2$(1，1，a; $1+m$，e，f; 1) 的 3F2(1)超几何级数可以化为可求和级数（见下文的 (3.7)、(5.26) 及 [18]），但我不知道是否有人发现了出现在 (3.22) 中的 4F3(1)推广也具有类似性质。不过，(3.22) 中的特定 4F3(1) 是 $n-$平衡的，并且对于 $n=1$，文献中可以找到一个一般性的（但出处不明且颇为神秘的）闭式表达式（见[34]）。第5节将探讨若干特殊情形的恒等式。

3.1.4 应用邻接关系

在完成前述研究后不久，我得知 Chen 于 2021年 运用 (1.1) 的部分分式分解来处理 Miller/Paris 挑战问题，并由此得到连续关系 [35, 引理 1]

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a,b,c;a+1,e;1\right) &= \frac{\left(a-c+1\right)\left(a-b+1\right)}{\left(1+a-e\right)\left(a+1\right)}{}_3F_2\left(a+1,b,c;a+2,e;1\right) \\
&- \frac{\Gamma\left(e\right)\Gamma\left(e-b+1-c\right)}{\left(1+a-e\right)\Gamma\left(e-c\right)\Gamma\left(e-b\right)},
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

重现了此前由 Krattenthaler 和 Rivoal 推导出的已知恒等式 [36, 式（12.5）]，并由 Chu 和 Wang [5, 命题 20]引用。随后，Chen 使用归纳法扩展了（3.23）

[35, 定理 1] 待读

$$
{}_3F_2\left(a+m,b,c;a+m+1,e+1;1\right)=\frac{\Gamma\left(a+m+1\right)\Gamma\left(a+1-e+m\right)\Gamma\left(a-c+1\right)\Gamma\left(a-b+1\right)}{\Gamma\left(a+1\right)\Gamma\left(1+a-e\right)\Gamma\left(a+1-c+m\right)\Gamma\left(m+a+1-b\right)}
$$

$$
\times\left({}_3F_2\left(a,b,c;e,a+1;1\right)+\frac{\Gamma\left(e\right)\Gamma\left(e-b+1-c\right)\Gamma\left(a+1\right)\Gamma\left(1+a-e\right)}{\Gamma\left(a-c+1\right)\Gamma\left(a-b+1\right)\Gamma\left(e-b\right)\Gamma\left(e-c\right)}\right.
$$

$$
\left.\times\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Gamma\left(a+1-c+k\right)\Gamma\left(a+1-b+k\right)}{\Gamma\left(a+k+1\right)\Gamma\left(a+2-e+k\right)}\right),\tag{3.24}
$$

随后进一步推广为 [35, 定理 3]

$$
{}_3F_2\left(a,b,c;a+m,e;1\right)=\frac{\Gamma\left(a+m\right)}{\Gamma\left(a\right)}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\left(-1\right)^k\ {}_3F_2\left(a+k,b,c;a+k+1,e;1\right)}{\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(m-k\right)\left(a+k\right)}.\tag{3.25}
$$

Chen 还针对情形 ${}_3F_2(a-m,\ b,\ c;\ a-m+1,\ e;\ 1)$ 给出了与 (3.24) 类似的结果，并提供了一种算法，用于计算与上述内容相关的许多特殊情形，同时给出了示例。现在，若在 (3.25) 中令 $m=2$，则可得

$$
{}_3F_2\left(a,b,c;a+2,e;1\right)=\left(a+1\right){}_3F_2\left(a,b,c;e,a+1;1\right)-a\,{}_3F_2\left(a+1,b,c;a+2,e;1\right),\tag{3.26}
$$

并对 (3.23) 求逆（等价于在 (3.24) 中令 $m=1$），类似地可得

$$
{}_3F_2\left(a+1,b,c;a+2,e;1\right)=\frac{\Gamma\left(e-b+1-c\right)\left(a+1\right)\Gamma\left(e\right)}{\left(a-b+1\right)\left(a-c+1\right)\Gamma\left(e-b\right)\Gamma\left(e-c\right)}
$$

$$
+\frac{\left(a+1-e\right)\left(a+1\right)}{\left(a-b+1\right)\left(a-c+1\right)}{}_3F_2\left(a,b,c;e,a+1;1\right),\tag{3.27}
$$

然后将 (3.27) 代入 (3.26)，得到恒等式

$$
{}_3F_2\left(a,b,c;a+1,e;1\right)=-\frac{a\,\Gamma\left(e\right)\Gamma\left(e-b+1-c\right)}{\Gamma\left(e-b\right)\left(\left(-e+b-1+c\right)a-\left(b-1\right)\left(c-1\right)\right)\Gamma\left(e-c\right)}
$$

$$
-\frac{\left(a-c+1\right)\left(a-b+1\right)}{\left(\left(-e+b-1+c\right)a-\left(b-1\right)\left(c-1\right)\right)\left(a+1\right)}{}_3F_2\left(a,b,c;a+2,e;1\right).\tag{3.28}
$$

总之，正如 Chen 所指出的，上述所有内容仍然需要为挑战问题 ${}_3F_2(a,\ b,\ c;\ a+1,\ e;\ 1)$ 给出闭式表达式。必须认识到，(3.28) 已接近解决方案。

4 奇异变换与特殊情形

受 Krattenthaler 和 Rivoal [4], 的工作的启发——他们证明了存在 Thomae 的变换中未包含的 3F2(1) 二项变换——本节中，我们将介绍一些二项恒等式，探讨它们是否满足 Thomae 关系，并研究其结果。例如，Krattenthaler 和 Rivoal 首先利用邻接性质给出了两个不满足 Thomae 变换的二项恒等式（见 (C.12) 和 (C.13)）。随后，他们证明，在非负整数参数的情况下，存在无穷多个此类不符合 Thomae 关系的例外，并将其称为“奇异”恒等式。

在接下来的第一个小节中，我们将 Krattenthaler 和 Rivoal 的工作进一步推进，检验 KRGT 恒等式之间的比较是否满足 Thomae 变换。在其余小节中，我们将探讨本文得到的新恒等式是否满足 Thomae 变换，并研究其后果。我们还将研究 Thomae 变换群（附录 B.1）以及 Rao 等人（RJRJR——参见附录 B.2）在终止级数情形下的作用，其中一个上参数等于 $-n$。

4.1 Karlsson 与 Rosengren、Gasper 和 Thomae 的比较

首先，我们注意到，Karlsson 的变换（2.5）基于围道积分，而 Rosengren 的变换（2.10）则基于对多变量 q-级数的约化；二者都不同于 Thomae 推导所依据的基础，后者基于超几何参数之间的对称置换（见定理 21）。

写成超几何形式（重新定义参数 $e := 1 - e + a + b$）后，通过比较 Karlsson 恒等式 (2.5) 的右侧与 Rosengren (2.10) 的右侧，我们得到

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(-n, a, b; c, e; 1\right) = {} & \frac{(-1)^n\,\Gamma\left(c+e-b-a+n\right)\Gamma\left(1-a\right)\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(e\right)}{\Gamma\left(n+e\right)\Gamma\left(c-b+e-a\right)\Gamma\left(1-a-n\right)\Gamma\left(c+n\right)} \\
& \times {}_3F_2\left(-n, c-a, e-a; c-b+e-a, 1-a-n; 1\right)\,. \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

通过计算机搜索，很容易验证利用附录 B.1 中的任何 Thomae 关系，都无法将 (4.1) 的一侧变换为另一侧，因此变换 (4.1) 是一个在带有非整数参数的终止型 3F2(1) 之间的“奇异”变换。这与 Rosengren 的断言一致：式 (2.10) 将“在 Karlsson-Minton 层级与 Bailey 层级之间架起一座桥梁”。

然而，使用 RJRJR 变换集进行检验时，计算机搜索发现，(4.1) 两边之间存在几种不同的联系。简单来说，进行

由 (B.12) 对 $e \leftrightarrow c$ and $a \leftrightarrow b$ 进行操作，实际上即可解出 (4.1)，这表明通过适当的变换恒等式，可以从左边得到右边。换一种方式来看，使用 (B.17) 对 (4.1) 左边进行操作后，结果为

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(-n,a,b;c,e;1\right) &= \frac{(-1)^n\,\Gamma\left(n+e-a\right)\Gamma\left(n-b+e\right)\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(e\right)}{\Gamma\left(e-a\right)\Gamma\left(e-b\right)\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(n+e\right)} \\
&\quad\times {}_3F_2\left(-n,1+a+b-e-c-n,1-e-n;1+a-e-n,1+b-e-n;1\right) \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

而右侧在运用（B.14）后满足

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(-n,c-a,e-a;c+e-a-b,1-a-n;1\right) = \\
&\quad\frac{\Gamma\left(e-b+n\right)\Gamma\left(n+e-a\right)\Gamma\left(c+e-a-b\right)\Gamma\left(1-a-n\right)}{\Gamma\left(e-b\right)\Gamma\left(e-a\right)\Gamma\left(c+e-a-b+n\right)\Gamma\left(1-a\right)} \\
&\quad\times {}_3F_2\left(-n,1+a+b-e-c-n,1-e-n;1+a-e-n,1+b-e-n;1\right)\,. \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

消去右侧的公　　共项，即可得到（4.2）和（4.3），从而重现（4.1）。

类似地，将Gasper变换（2.8）与Rosengren变换（2.10）的对应两侧相等，并重新定义变量后，可得恒等式

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a,b,c+n;e,c;1\right) &= \frac{\Gamma\left(1-c+a\right)\Gamma\left(e-n-a-b\right)\Gamma\left(-c-n+1\right)\Gamma\left(e\right)}{\Gamma\left(e-a\right)\Gamma\left(e-b-n\right)\Gamma\left(1-n-c+a\right)\Gamma\left(1-c\right)} \\
&\quad\times {}_3F_2\left(-n,a,e-c-n;1-n-c+a,e-b-n;1\right) \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

经检查可知，该变换也与Thomae无关。然而，反转嵌入的右侧求和后，恒等式（4.4）便简化为Rosengren最初的恒等式（2.10），从而证明了Gasper与Rosengren的恒等式等价。

注 5。 在（4.4）中令 $e = b+1$，如同第2节中最初所做的那样，就需要计算这个棘手的表达式

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a,b,c+n;b+1,c;1\right) &= \frac{\Gamma\left(1-c+a\right)\Gamma\left(1-a-n\right)\Gamma\left(1-c-n\right)\Gamma\left(b+1\right)}{\Gamma\left(b+1-a\right)\Gamma\left(1-n\right)\Gamma\left(a-c-n+1\right)\Gamma\left(1-c\right)} \\
&\quad\times {}_3F_2\left(-n,a,1+b-c-n;a-c-n+1,1-n;1\right) \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

其中，右侧的 3F2(1) 显然发散，因为第二个下参数是一个负整数，且其绝对值大于同为负整数的第一个上参数；不过，分母因子 $\Gamma(1-n)$ 的存在抵消了这一点。然而，先调换求和顺序可得 (2.10)，此时立即令 $e = b+1$，便得到 Karlsson 恒等式 (2.6)，从而为如何解释提供了一种简便方法

$$
\frac{1}{\Gamma\left(1-n\right)}\,{}_3F_2\left(-n,a,b;c,1-n;1\right) = -\frac{\Gamma\left(b+n\right)\Gamma\left(1-a\right)\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(b\right)\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(1-a-n\right)} \qquad (4.6)
$$

重新定义变量 $b:=b-1+c+n$ ， $c:=-c+a-n+1$ 后。

对 Gasper (2.8) 和 Karlsson (2.5) 的变换进行类似比较，可得

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(-n,a,b;c,e;1\right)=&\frac{\Gamma\left(1-a\right)\Gamma\left(n+c-b\right)\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(1-e+b\right)}{\Gamma\left(c-b\right)\Gamma\left(b+1-a\right)\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(1-e\right)}\\
&\times{}_3F_2\left(b,e-a,1+b-c;b+1-a,1+b-c-n;1\right),
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

再次发现，双方都不能通过任何 Thomae 变换由另一方得到，尽管它们可以通过 RJRJR 变换集的若干变体得到。

沿着同样的思路，我们依次将每个 KRG 变换与 Thomae 关系 (2.22) 进行比较，分别得到

$$
{}_3F_2\left(-n,a,b;c,e;1\right)=\frac{\Gamma\left(1-e-n\right)\Gamma\left(1-e+a\right)}{\Gamma\left(1+a-e-n\right)\Gamma\left(1-e\right)}{}_3F_2\left(-n,c-b,a;c,1+a-e-n;1\right)
\tag{4.8}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{\Gamma\left(1-e+b\right)\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(1-a\right)\Gamma\left(e\right)}{\Gamma\left(e+n\right)\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(1-a-n\right)\Gamma\left(b+1-e-n\right)}\\
&\times{}_3F_2\left(-n,c-a,1-e-n;b+1-e-n,1-a-n;1\right)
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{\Gamma\left(1-a\right)\Gamma\left(b+n\right)\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(c+e-b-a+n\right)\Gamma\left(e\right)}{\Gamma\left(b\right)\Gamma\left(c-b+1-a\right)\Gamma\left(n+e\right)\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(e-a\right)}\\
&\times{}_3F_2\left(1-e-n,c-b,1-b;c-b+1-a,1-b-n;1\right)
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

并发现上述各式均不满足 Thomae 关系，尽管 (4.8) 和 (4.9) 都是特殊情形，且可通过 RJRJR 变换集相互联系，正如 (4.2) 和 (4.3) 所示。

注 6. 求解 (4.10) 并重新定义变量 ($e:=1-e-n, c:=c+b, b:=1-b, a:=1-a+c, b:=b+n$, $e\leftrightarrow a, b\leftrightarrow c$)，可得另一个变换恒等式

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a,b,c+n;c,e;1\right)=&\frac{\Gamma\left(1-c-n\right)\Gamma\left(e\right)\Gamma\left(1-a\right)\Gamma\left(1-c+b\right)\Gamma\left(e-n-a-b\right)}{\Gamma\left(e-b\right)\Gamma\left(1-c\right)\Gamma\left(1-c-n+b\right)\Gamma\left(e-a\right)\Gamma\left(1-a-n\right)}\\
&\times{}_3F_2\left(-n,1-c-n,1-e+b;1-a-n,1-c-n+b;1\right),
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

当 $e=b+1$ 时，化简为 Karlsson 恒等式 (2.6)。此外，令 $b=c-a-1+e+n$ 并重新定义变量 $c:=c+a+1-e-n$ ，即可将 (4.9) 化简为 Saalsch¨utz 定理 (2.3)。

4.2 超越 Thomae——求和顺序反转

除了上一节给出的其他推导方法外，我们还注意到，所考虑的各种对象都是终止和，因此可以反转求和顺序。这带来了新的自由度。例如，反转 Karlsson 恒等式 (2.5) 的右侧后，我们发现

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(-n,a,b;c,1-e+a+b;1\right) &= \frac{(-1)^n\,\Gamma(c)\,\Gamma(1-e+a+b)\,\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+n)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c+n)\,\Gamma(1-e+a+b+n)} \\
&\quad\times {}_3F_2\left(-n,1-c-n,e-n-a-b;1-n-a,1-b-n;1\right). \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

将 (4.12) 代入 (2.5) 后，可得到 (2.5) 的一个类似式。将该类似式的右端（即 (4.12)）与 Rosengren 恒等式 (2.10) 的右端相等，便得到一个变换

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(-n,a,b;c,e;1\right) &= \frac{(-1)^n\,\Gamma(c+e+n-a-b)\,\Gamma(1-e-n)}{\Gamma(c+e-a-b)\,\Gamma(1-e)} \\
&\quad\times {}_3F_2\left(-n,c-a,c-b;c+e-a-b,c;1\right) \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

其中，变量（从左侧起）已重新定义为 ($c:=1-c-n$，$e:=e+a+b+n$，$a:=1-a-n$，$b:=1-b-n$，$c\leftrightarrow a$，$e\leftrightarrow b$)。简单观察即可发现，(4.13) 的两侧通过一组 Thomae 变换相互关联。从这个意义上说，(4.13) 表明，Karlsson 和 Rosengren 的恒等式通过 Thomae 变换加上对其中一个求和式的反转而相互关联，尽管它们并非仅通过 Thomae 变换本身相互关联。同样地，将 Thomae 变换 (2.22) 的右端反转会得到

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(-n,a,c-b;c,e-b-n;1\right) &= \frac{(-1)^n\,\Gamma(c)\,\Gamma(c+n-b)\,\Gamma(a+n)\,\Gamma(e-b-n)}{\Gamma(c-b)\,\Gamma(a)\,\Gamma(e-b)\,\Gamma(c+n)} \\
&\quad\times {}_3F_2\left(-n,1-e+b,1-c-n;1-n-a,1+b-c-n;1\right). \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

将 (4.14) 代入 (2.22) 的右侧，并与 Gasper 恒等式 (2.8) 的右侧比较，只需重新定义变量，便可直接得到 (2.8) 本身。这表明，Gasper 恒等式不过是 Thomae 变换 (2.22) 右侧的反转，而后者本身也不过是重新定义变量后的基本 Thomae 变换 (B.6)。

使用反转变换还引入了多种获得闭式恒等式的方法，这与 Karlsson等人（第2节）所采用的方法大致相同。例如，对 Thomae 变换（2.23）进行反转可得

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a,b,c+n;c,e;1\right) &= \frac{(-1)^n\,\Gamma(e-a-b)\,\Gamma(e-c)\,\Gamma(e)\,\Gamma(c)}{\Gamma(e-c-n)\,\Gamma(e-b)\,\Gamma(e-a)\,\Gamma(c+n)} \\
&\quad\times {}_3F_2\left(-n,1-e+b,1-e+a;c+1-e,1-e+a+b;1\right) \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

并且，令ing $e=b+1+m$，然后是 $a=b+m$，其中 $b+n<1$，可得闭式

$$ {}_3F_2\left(b,b+m,c+n;c,b+1+m;1\right)=\frac{(-1)^n\,\Gamma\left(1-b\right)\Gamma\left(1+m-c+b\right)\,\Gamma\left(b+1+m\right)\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(b+1+m-c-n\right)\Gamma\left(1+m\right)\Gamma\left(c+n\right)}, \tag{4.16} $$

这是先前恒等式（例如 (2.24)）的一种变体。

注 7. 请注意，在 $b>1-n$ 求和发散的情况下，(4.16) 的右端是左端的解析延拓。这个恒等式也恰好与 Saalsch¨utz 定理 (2.3) 的一个 Thomae 派生式一致。

4.3 作为 Thomae 变换的其他二项恒等式

4.3.1 基于(3.8)

在推导 (E.1) 时，将 (3.8) 取极限 $c\to b+m$ （见下文第 5.2 节），展开式中会出现一个阶为 $(c-(b+m))^{-1}$ 的发散项。该系数必须为零。读者不妨验证，这会导出一个表面上是新的变换恒等式

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left(-n,m,a;1,c;1\right)&={}_3F_2\left(-n,1-m,1-c-n;1-n-m,a+1-n-c;1\right)\\ &\times(-1)^{m+1}\,\frac{\Gamma\left(m-c+a-n\right)\Gamma\left(n+m\right)\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(1-a+c+n-m\right)}{\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(n+1\right)\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(m\right)\Gamma\left(a-n+1-c\right)} \end{aligned} \tag{4.17} $$

其中，变量 $b:=b+a+n-m-1, b:=c, a:=1-a, n:=n+1$ 已重新定义，以使 (4.17) 成为标准形式。这引出了一个问题：式 (4.17) 的两边是否通过某个 Thomae 变换相关联；简单考察表明它们并无这种关联，尽管它们确实满足若干 RJRJR 变换恒等式。此外，**通过数值实验**，人们发现，当变量 n 扩展为连续变量时，在修改后的左侧收敛的范围内，(4.17) 在数值上成立。令 $n:=-b$，并令 $c>1-a-b-m$，最终可得到恒等式

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left(a,b,m;1,c;1\right)&={}_3F_2\left(1-m,b,1-c+b;1+b-m,a+1+b-c;1\right)\\ &\times(-1)^{m+1}\,\frac{\Gamma\left(m-c+a+b\right)\Gamma\left(m-b\right)\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(1-a+c-b-m\right)}{\Gamma\left(m\right)\Gamma\left(1-b\right)\Gamma\left(a+1+b-c\right)\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(c-b\right)}, \end{aligned} \tag{4.18} $$

这似乎与第2节中讨论的任何相应恒等式都不一致。

4.3.2 基于(5.11)

类似地，我们考察下面的（5.11），并发现其两边并未通过任何 Thomae 变换相联系。一般而言，（5.11）的两边都是形如（2.1）的终止和；除一种情况外，将 Thomae 变换应用于组成（5.11）的两个终止和中的任意一个所生成的所有变换都没有意义。例外情况出现在将变换（B.6）应用于（5.11）时，此时得到恒等式

$$ {}_3F_2\left(1-n,1-j,m;1,p+1-j-n;1\right)=\frac{\Gamma\left(p-m\right)\Gamma\left(p+1-j-n\right)}{\Gamma\left(p-m+1-j-n\right)\Gamma\left(p\right)}\,{}_3F_2\left(j,n,m;p,1;1\right)\,, \tag{4.19} $$

其中我们重新定义了 $p:=p-m$，此时（4.19）的收敛性在 $p>m$ 时成立。对（4.19）求逆，得到

$$ {}_3F_2\left(j,m,n;p,1;1\right)=\frac{\Gamma\left(p\right)\Gamma\left(p-m+1-j-n\right)}{\Gamma\left(p-m\right)\Gamma\left(p+1-j-n\right)}{}_3F_2\left(1-n,1-j,m;1,p+1-j-n;1\right), \tag{4.20} $$

从而将一个参数全为正整数的无穷级数转化为含有 n 或 j 项的有限求和。

注 8. （4.20）的左端是 Krattenthaler 和 Rivoal [4]以及 Chu 和 Wang [5, 第 4] 节研究的一般求和形式的特殊情形。

注 9. 左端级数（4.20）仅在 $p+1-j-m-n>0$ 时收敛；在这种情况下，鉴于整数 j,m,n,p 的定义范围，$m>p$ 或 $j+n>p+1$ 不可能成立。因此，只要左端收敛，右端就总是有定义的。将（4.20）写成求和形式，得到

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left(j,m,n;p,1;1\right)=&\frac{\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(j\right)\Gamma\left(p\right)\Gamma\left(p-m+1-j-n\right)}{\Gamma\left(m\right)\Gamma\left(p-m\right)}\\ &\times\sum_{k=0}^{N}\frac{\Gamma\left(m+k\right)}{\Gamma\left(n-k\right)\Gamma\left(j-k\right)\Gamma\left(k+1\right)^2\Gamma\left(p+1-j-n+k\right)}\,, \end{aligned} \tag{4.21} $$

其中 $N=\min\left(j-1,\ n-1\right)$。由于所有变量彼此独立，只有约束$p>m$例外，因此施加 $p\leq m$颇为耐人寻味，因为这样一来我们便有

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left(j,m,n;1,p;1\right)=&(-1)^{j+n+1}\,\frac{\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(j\right)\Gamma\left(p\right)\Gamma\left(1-p+m\right)}{\Gamma\left(m\right)\Gamma\left(m-p+j+n\right)}\\ &\times\sum_{k=0}^{N}\frac{\Gamma\left(m+k\right)}{\Gamma\left(n-k\right)\Gamma\left(j-k\right)\Gamma\left(k+1\right)^2\Gamma\left(p+1-j-n+k\right)}, \end{aligned} \tag{4.22} $$

其中左侧发散，因为 $p-j-m-n-1<0$，而右侧并不发散。**如果解析延拓对离散变量也成立**，那么不妨推测，(4.22) 右侧表示左侧关于变量 p 和 m的解析延拓；并且，将整数替换为实数（即 $m:=a,\ p:=b,\ j$从左向右排序），所得恒等式

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(m,n,a;b,1;1\right) = (-1)^{1+m+n}\,\frac{\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(m\right)\Gamma\left(b\right)\Gamma\left(1+a-b\right)}{\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(a-b+m+n\right)} \\
\times\sum_{k=0}^{N}\frac{\Gamma\left(a+k\right)}{\Gamma\left(n-k\right)\Gamma\left(m-k\right)\Gamma\left(k+1\right)^2\,\Gamma\left(b-n-m+1+k\right)}
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

其中，当 $N=\min(n-1,m-1)$ 时该结论应成立；这里再次强调，$a,b\in\mathfrak{C}$。事实上，我们通过实验发现，当 $b+1-a-m-n>0$ 时，(4.23)**在**数值上成立。由于 a,b 现在是连续变量，(4.23) 的右端确实表示左端在 $\Re(a)\geq\Re(b)$（最初为 $m\geq p$）情况下的解析延拓。事实上，由于 (4.23) 的左端仅在 $b+1-a-m-n>0$ 时收敛，因此当该不等式不成立时，(4.23) 的右端就是左端的解析延拓，而猜想也就转变为（数值上的）真命题。

此外，还存在其他表示形式，为上述结论提供了可信依据。在数据库条目（F.6）中令 $b=m$ 和 $c:=b$——参见附录 F——将得到与 (4.23) 等价的表示形式，不过需要注意的是，数据库条目（F.6）本身是数据库条目 251 的 Thomae 派生式，而后者是通过实验确定的。然而，所有这些推测和实验随后引出了一个明显的悖论：如果 $b=a$，则 (4.23) 的左端是发散的，而右端并不发散。其解决办法在于，由 ${}_2F_1\left(m,n;1;1\right)$ 和 $\lim_{b\to a}{}_3F_2\left(m,n,a;\,b,1;1\right)$ 所表示的发散级数意味着两个不同的事物。关于 Karp 和 Prilepkina 的工作（2.19），请参阅前文讨论，其中提到了另一个类似的注意事项。

继续来说，(4.23) 的上参数 $m>1$ 和 $n>1$ 与第二个下参数（单位元）之差始终是一个正整数，因此可通过使用任意 KBGT 变换，将等式左侧化为终止和。例如，应用 Karlsson 变换（2.5）后，我们得到

$$
{}_3F_2\left(m,n,a;b,1;1\right) = \frac{\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(b\right)}{\Gamma\left(m\right)\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(b-m\right)\Gamma\left(b-a\right)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma\left(m+k\right)\Gamma\left(a+k\right)\Gamma\left(b-k-m-a\right)}{\Gamma\left(k+1\right)^2\,\Gamma\left(n-k\right)}\,.
\tag{4.24}
$$

由于对称性，交换 $n\leftrightarrow m$ 后，(4.24) 仍然成立。将交换前后 (4.24) 的右端相等，这一对称性便立即导出以下

恒等式

$$\frac{(-1)^m\ {}_3F_2\left(a,m,1-n;1,a-b+m+1;1\right)}{\Gamma\left(b-m\right)\Gamma\left(a-b+m+1\right)}=\frac{(-1)^n\ {}_3F_2\left(a,n,1-m;1,a-b+n+1;1\right)}{\Gamma\left(b-n\right)\Gamma\left(a-b+n+1\right)}\,. \tag{4.25}$$

令 $b=n+1$，并令 $n\geq m$，得到求和式

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma\left(m+k\right)\Gamma\left(a+k\right)(-1)^k}{\Gamma\left(k+m+a-n\right)\Gamma\left(k+1\right)^2\,\Gamma\left(n-k\right)}=(-1)^{n+1}\ , \tag{4.26}$$

该式用超几何记号表示，确定了终止和

$${}_3F_2\left(1-n,a,m;1,a-n+m;1\right)=\frac{(-1)^{n+1}\,\Gamma\left(a-n+m\right)\Gamma\left(n\right)}{\Gamma\left(m\right)\Gamma\left(a\right)},\qquad n\geq m\,, \tag{4.27}$$

这是 Saalsch¨utz 定理（2.3）的一个零平衡终止变体。

4.4 “独立研究价值”

摘自文献，并且“具有独立研究价值”：对于 $m+1-a-n>0$，Kalmykov 和 Karp [29, 定理 1] 推导出

$$\begin{aligned}&{}_3F_2\left(a,b,c+n;c,b+1+m;1\right)\\&\quad=\frac{(-1)^n\,\Gamma\left(1-a\right)\Gamma\left(b+1+m\right)\Gamma\left(m+c-a\right)\Gamma\left(1-b\right)\Gamma\left(1-c-n\right)\Gamma\left(c+n-b-m\right)}{\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(1-b-m\right)\Gamma\left(1+b+m-a\right)\Gamma\left(1-c\right)\Gamma\left(c-b\right)\Gamma\left(1+m\right)}\\&\quad\times{}_3F_2\left(-m,1-c-n,a-b-m;1-b-m,1-m+a-c;1\right)\end{aligned} \tag{4.28}$$

对应于 KRGT 变换的一个特殊情形，并再次独立且有效地对一个非终止级数求和。简单考察可知，式（4.28）的两边无法通过任何 Thomae 变换相互转换。在（4.28）中令 $a=b+m$，立即得到闭式

$${}_3F_2\left(b,c+n,b+m;c,b+1+m;1\right)=\frac{(-1)^n\,\Gamma\left(b+1+m\right)\Gamma\left(1-b\right)\Gamma\left(1-c-n\right)\Gamma\left(c+n-b-m\right)}{\Gamma\left(c-b-m\right)\Gamma\left(1-c\right)\Gamma\left(1+m\right)}\,, \tag{4.29}$$

若 $b<1-n$、 $n\geq 0$，则收敛；进而，若 $c=b+1$，我们得到

$${}_3F_2\left(b,b+m,b+1+n;b+1,b+1+m;1\right)=\ -\frac{\Gamma\left(b+1+m\right)b\,\Gamma\left(-b-n\right)\Gamma\left(m\right)}{\Gamma\left(m-n\right)\Gamma\left(1+m\right)}\,. \tag{4.30}$$

在 Gasper 的专门恒等式 (2.9) 中令 $c=b+1$，并注意同时考虑 $n<m$ 和其他情形，即可得到与 (4.30) 类似的形式，从而得出（准闭合形式）恒等式

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a,b,b+1+n;b+1+m,b+1;1\right) &= \frac{\Gamma\left(b+1+m\right)\Gamma\left(1-a\right)\Gamma\left(1+n\right)\Gamma\left(b+1\right)}{\Gamma\left(b+1-a\right)\Gamma\left(1+m\right)\Gamma\left(b+1+n\right)} \\
&+ \frac{\Gamma\left(b+1+m\right)\Gamma\left(-a+1\right)\Gamma\left(b+1\right)\left(-1\right)^{n}}{\Gamma\left(b+1+n\right)\Gamma\left(b\right)} \\
&\times \sum_{k=1+n}^{m} \frac{\left(-1\right)^{k}\,\Gamma\left(b+k\right)\Gamma\left(k\right)}{\Gamma\left(1-k+m\right)\,\Gamma\left(1+k\right)\Gamma\left(1-a+b+k\right)\Gamma\left(k-n\right)}\,. \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

特别值得关注的是，(4.28) 的右端与 Karlsson/Rosengren 变换 (2.5) 和 (2.10) 中对应的一端均不相同，因此依次令相应两端相等，对于 (2.5)，可得

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(-m,a,b+n;b,c;1\right) &= {}_3F_2\left(-n,1-c-m,b-a;1-a-n,1+b-c;1\right) \\
&\times \frac{\left(-1\right)^{m}\,\Gamma\left(1-b-n\right)\Gamma\left(c-b\right)\Gamma\left(1-a\right)\Gamma\left(1-c-m\right)\Gamma\left(c-a+m-n\right)}{\Gamma\left(c-b-n\right)\Gamma\left(1-a-n\right)\Gamma\left(1-c\right)\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(1-b\right)}\,, \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

对于 (2.10)，则可得

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(-n,a,b;c,1-c+b+a+m-n;1\right) \\
&= \frac{\Gamma\left(c-b+n-m\right)\Gamma\left(c-b-a-m\right)\Gamma\left(c-a+n-m\right)\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(c-b-a-m+n\right)\Gamma\left(c-b-m\right)\Gamma\left(c-a-m\right)\Gamma\left(c+n\right)} \\
&\qquad \times {}_3F_2\left(-m,c-b-a-m,-n;c-a-m,-b+c-m;1\right) \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

在重新定义变量之后。

注 10。 在 (4.33) 中令 $m=0$，即可得到 Saalsch¨utz 定理 (2.3) 本身。令$m=1$，则可得下文的 (5.3)，这也证明了 [33, Eq.5]，中引用、但未证明的恒等式，并在下文的 (5.3) 中得到解决。除此之外，(4.33) 还推广了 Saalsch¨utz 定理，其参数超额等于 $m+1$，与下文的 (5.2) 等价。它还给出了与 Karp 和 Prilepkina [14, Eq. 2.12] 所推导的 $p=1$ 对应的情形。[4]

类似 KRGT 的恒等式显然还存在许多其他置换，包括九种 Thomae 变换、反转以及 Rao 等人的变换。此外，Karp 和 Prilepkina 已表明，[37] 除了传统的三部分变换（本文仅使用了其中的 (3.1)）之外，还存在其他不属于“Bailey 宇宙”的三部分恒等式。

[4]在该恒等式中，符号（$-q$）$_q$ 应为（-1）$^q\Gamma$（$q+1$）。

5 极限情形、特殊情形与扩展

在接下来的小节中，我们将探讨迄今为止所推导出的更一般恒等式的特殊情形、扩展情形和极限情形。

5.1 基于 (3.20)

在第 (3.1.3) 节中，介绍了恒等式 (3.20)。该结果可以写成超几何形式：

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(1-m,e-m,1+b-a-n;1+b-m,1+e-a-m;1\right)\\
&=\frac{(-1)^{n+m}\,\Gamma(a)\,\Gamma(1+a-e)\,\Gamma(b-a)\,\Gamma(e-b)\,\Gamma(1+b-m)}{\Gamma(1+a-m)\,\Gamma(e+n-b-m)\,\Gamma(b)\,\Gamma(1+b-a-n)\,\Gamma(a+m-e)}\\
&\quad\times{}_3F_2\left(1-n,a,1+a-e;1+a-b,1+a-m;1\right)\,. \qquad (5.1)
\end{aligned}
$$

重新定义变量后（具体而言，$e:=e+m$，$b:=b+a+n-1$，$a:=-a+e+1$，$m:=m+1$，$a:=c$，$e:=a$ 按从左到右的顺序排列），写成标准形式后，(5.1) 变为

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(-m,a,b;c,a+b+n-m-c;1\right)\\
&=(-1)^{n+1}\,\frac{\Gamma(c)\,\Gamma(1-c+a)\,\Gamma(b+n-1)\,\Gamma(1+m-n-b+c)\,\Gamma(n-m+b-c+a)}{\Gamma(m+c)\,\Gamma(1-c+a-m)\,\Gamma(-b+c)\,\Gamma(b-c+a+n)\,\Gamma(b)}\\
&\times{}_3F_2\left(1-n,1-c+a,1-m-c;2-b-n,1-c+a-m;1\right) \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

于是我们立即得到 Saalschütz 定理 (2.3) 的一个 n–平衡推广，它是 (4.33) 的变换类比；当 $n=1$ 时可化简为 (2.3)。若 $n=2$，则得到

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(-m,a,b;c,a+b-m-c+2;1\right)=\frac{\Gamma(b-m-c+a+2)\,\Gamma(m-1-b+c)\,\Gamma(1-c+a)\,\Gamma(c)}{\Gamma(2-m-c+a)\,\Gamma(b-c+a+2)\,\Gamma(m+c)\,\Gamma(c-b)}\\
&\quad\times\left(-c^2+(-m+b+a+2)\,c-(1-m+b)\,a+(m-1)\,(b+1)\right)\,, \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

这与 [33, 式5]一致。Qureshi 和 Malik [38], 给出了 $n=2$，3 和 4 时 (5.2) 的具体示例，并承认他们使用了“复杂且冗长的代数计算”，其性质“繁琐”。

至此为止的推理表明，我们现在应对 (5.1) 两边分别应用 Thomae 派生式，以寻找其他有用的恒等式。在考虑的各种可能性中，第三个 Thomae 变换 (B.5) 得到

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(a+m,b,c;c+n,a+1;1\right)=\frac{\Gamma(1-b+n-m)\,\Gamma(c+n)}{\Gamma(n)\,\Gamma(1+n-m-b+c)}\\
&\quad\times{}_3F_2\left(1-m,c,1+a-b;1+c+n-m-b,a+1;1\right) \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

一个与 Karp 和 Kalmykov 推导出的恒等式 (4.28) 等价的恒等式。在 (5.4) 中设定 $a = 0$，然后$c{:=}\, a$，得到（受约束的）挑战 (3.22) 的一个特殊情形，以及 (4.28) 的一个极限情形，即

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a,b,m;1,a+n;1\right) &= \frac{\Gamma\left(1+n-b-m\right)\Gamma\left(a+n\right)}{\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(1+a+n-m-b\right)}{}_3F_2\left(1-m,a,1-b;1,1+a+n-m-b;1\right) \\
&= \frac{\Gamma\left(m\right)\Gamma\left(1+n-b-m\right)\Gamma\left(a+n\right)}{\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(1-b\right)\Gamma\left(n\right)}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\left(-1\right)^k\,\Gamma\left(a+k\right)\Gamma\left(1-b+k\right)}{\Gamma\left(m-k\right)\Gamma\left(1+k\right)^2\,\Gamma\left(1-m-b+a+n+k\right)}\,,
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

右端的等式是终止的 n–平衡和。下一小节将探讨含有 $e = 1$ 的两个恒等式 (5.5) 和 (3.22) 之间的关系。

5.1.1 欧拉型和的求值

虽然计算过程颇为繁琐，但可以证明，对 (3.22) 中的极限$e \to 1$ 求值，确实能将该恒等式化为 (5.5)。应用此极限后，(3.22) 中的最后一项（含有 4F3(1)）由于存在项 $1/\Gamma(e-m)$ 而消失，其余各项则需要取极限。完成这一步后，将 (5.5) 右端与对 (3.22) 取极限后的右端相等，最终得到以下欧拉型和

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m}\frac{\left[\psi\left(1-k+m\right)-\psi\left(1+k-b-a\right)\right]\Gamma\left(1+k-b-a\right)}{\Gamma\left(1-m-b+k\right)\Gamma\left(1-a-m+k\right)\Gamma\left(1-k+m\right)^2\,\Gamma\left(k+1\right)} \\
&\quad= \frac{\Gamma\left(1-a+m\right)\Gamma\left(m+1-b\right)\Gamma\left(1-b-a\right)}{\Gamma\left(1-b\right)^2\,\Gamma\left(1-a\right)^2\,\Gamma\left(1+m\right)^2} \\
&\quad\times\left[\psi\left(a\right)+\psi\left(b\right)+\psi\left(1+m\right)-\psi\left(1-b-a\right)-\psi\left(a-m\right)-\psi\left(b-m\right)\right]\,,
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

历经计算机化简的重重繁难过程后，终于得到结果。推导过程及一个相关的和见附录 D.2；关于可化为 pFq(1) 的欧拉型和的分析，见 [39]。

5.2 (3.8)的极限情形

如前所述（第 4.3.1 节），在对应于 (3.5) 的特殊情形 $c = n$ 下，求值 (3.8) 的极限情形$c = b + m$ 颇有意思。从右侧的形式可以看出，直接代入是无效的，因此必须求一个极限。求出该极限后，可得到一个关于 ${}_3F_2(a,\ b,\ n;\ a+n,\ b+m;\ 1)$ 的复杂恒等式——其完整表达式见

(E.1)。另一个值得关注的是特殊情形 $a = j$ 以及 $m \geq n$。这同样需要进一步求极限，最终得到如下形式的恒等式：

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(b, j, n; j+n, b+m; 1\right) = & \frac{\pi\left(-1\right)^j \Gamma\left(b+m\right)\Gamma\left(j+n\right)}{\sin\left(\pi\, b\right)\Gamma\left(n-b+j\right)} \\
& \times \left(H\left(m, n, j, b\right) + \left(-1\right)^n \Gamma(1-b)\left[T_1(m, n, j, b) + T_2(m, n, j, b)\right]\right)
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

其中 $H(m, n, j, b)$ 的定义见 (E.2)，并且

$$
T_1(m, n, j, b) \equiv \frac{-1}{\Gamma\left(b+m-n\right)\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(j\right)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(-1\right)^k \Gamma\left(n+m-1-k\right)\Gamma\left(b-1+m-k\right)}{\Gamma\left(b-j+m-k\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(m-k\right)\Gamma\left(n-k\right)}, \tag{5.8}
$$

$$
T_2(m, n, j, b) \equiv \frac{1}{\Gamma\left(m\right)} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\Gamma\left(m+k\right)}{\Gamma\left(j-k\right)\Gamma\left(k+1\right)^2\,\Gamma\left(b+m+1-j-n+k\right)\Gamma\left(n-k\right)}\,. \tag{5.9}
$$

由于 (5.7) 的形式自然地表明我们应考虑 $b = p$ 为正整数的情形，因此我们看到，乘以 $\Gamma(1-b)$ 的项在 $b = p$ 时必须消失，因为 (5.7) 的左端收敛，且参数超额等于 $m > 0$，并且项 $H(m, n, j, b)$ 不可能对 $(b-p)^{-1}$ 阶（见 (E.2)）作出贡献以抵消该发散。

5.2.1 $(b-p)^{-1}$ 项的系数

对于 $m \geq n$，这一要求给出恒等式

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{J} \frac{\Gamma\left(m+k\right)}{\Gamma\left(j-k\right)\Gamma\left(k+1\right)^2\,\Gamma\left(p+k\right)\Gamma\left(n-k\right)} = & \frac{\Gamma\left(m\right)}{\Gamma\left(p-1+j\right)\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(j\right)} \\
& \times \sum_{k=0}^{P} \frac{\left(-1\right)^k \Gamma\left(n+m-1-k\right)\Gamma\left(-2+p+j+n-k\right)}{\Gamma\left(p-1+n-k\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(m-k\right)\Gamma\left(n-k\right)}
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

其中 $J =$ 为 $\min(j-1, n-1)$，$P =$ 为 $\min(m, n, p-1+n) - 1$。这等价于终止和之间的超几何变换：

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(-n, -j, m; 1, p; 1\right) = & \frac{\Gamma\left(p\right)\Gamma\left(n+m\right)\Gamma\left(p+j+n\right)}{\Gamma\left(1+n\right)\Gamma\left(p+n\right)\Gamma\left(m\right)\Gamma\left(p+j\right)} \\
& \times {}_3F_2\left(1-m, -n, 1-(p+n); 1-(p+j+n), 1-(m+n); 1\right)
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

其中变量已重新定义为 $p := p - m - 1 + j + n$，接着是$n := n+1$，$j := j+1$。

5.2.2 (5.7)的极限情形和特殊情形

现在可以对 $b = p$ 取有限但仍一般的值，进而求值 (5.7)，但这会导致大量具体情形，取决于 m，n，j，p 之间不等式的诸多置换，其中许多情形已由 Prudnikov 等人在 [6, 第 7.7 节4],中列出，并且都是挑战问题的变体。不过，若放宽可能情形的一般性，便可得到更简单的求值，同时仍能推广其他地方给出的结果。例如，对于 $j = 1$ 且 b 取非整数值的情形，(5.7) 可化简为

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(1,b,n;b+m,1+n;1\right) &= \frac{n\,\Gamma\left(b+m\right)\Gamma(1-b)}{\Gamma\left(n-b+1\right)\Gamma\left(b+m-n\right)} \\
&\times\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(-1\right)^{n+k}\,\Gamma\left(n+m-1-k\right)\left(\psi\left(b+m-k-1\right)-\psi\left(n-k\right)\right)}{\Gamma\left(n-k\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(m-k\right)}\right. \\
&\left.+\sum_{k=0}^{m-n-1}\frac{\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(m-1-k\right)}{\Gamma\left(n+k+1\right)\Gamma\left(m-n-k\right)}\right). \qquad (5.12)
\end{aligned}
$$

类似地，$j = 2$ 和 $m \geq n$的情形变为

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(2,b,n;b+m,2+n;1\right) &= -\frac{\pi\,\Gamma\left(b+m\right)\Gamma\left(2+n\right)}{\Gamma\left(n-b+2\right)\Gamma\left(b+m-n\right)\sin\left(\pi\,b\right)\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(b\right)} \\
&\times\left(\sum_{k=n}^{m-1}\frac{\Gamma\left(-n+1+k\right)\left(b+m-k-2\right)\Gamma\left(n+m-1-k\right)}{\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(m-k\right)}+\left(-1\right)^{n}\left(2-b-m+n\right)\right. \\
&\left.+\left(-1\right)^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(-1\right)^{k}\left(b+m-k-2\right)\Gamma\left(n+m-1-k\right)\left(\psi\left(b+m-k-2\right)-\psi\left(n-k\right)\right)}{\Gamma\left(n-k\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(m-k\right)}\right). \qquad (5.13)
\end{aligned}
$$

承载毛皮 此外，在极限情形 $b \to 1$ 下，对 (5.12) 求值，其中 $m \geq n$，我们得到 n

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2(1,\ 1,\ n;\ 1+m,\ 1+n;\ 1) \\
&= n\left(\frac{\Gamma\left(1+m\right)\left(-1\right)^{n}}{\Gamma\left(1+m-n\right)\Gamma\left(n\right)}\left(-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(-1\right)^{k}\,\psi\left(1,m-k\right)\Gamma\left(n+m-1-k\right)}{\Gamma\left(m-k\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(n-k\right)}\right.\right. \\
&\quad\left.+\gamma^{2}+\left(\psi\left(m\right)+\psi\left(n\right)\right)\gamma+\psi\left(1+m-n\right)\left(\psi\left(m\right)+\psi\left(n\right)-\psi\left(1+m-n\right)\right)\right) \\
&\quad\left.-m\left(\psi\left(1+m-n\right)+\gamma\right)\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\Gamma\left(n+m-1-k\right)\left(-1\right)^{k}}{\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(m-k\right)\Gamma\left(n-k\right)\left(n-1-k\right)}\right). \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

注11。

- 在（从左到右排序的）映射 $m := j$、 $a := n$、 $e := b + m$下，(E.2)（或者说 (5.7)）是 (3.7) 的极限情形；

• (5.12) 和 (5.14) 是 [25], 中第25条的极限情形，而 (5.13) 则推广了该条目（参见 [32, 定理 1]）；

• 对于 (5.14) 中的情形 $n > m$，只需在右端交换 m 和 n；

• 在极限情形 $b \to 1$ 下，(5.12) 中括号括起来的各项之和必须为零，这是因为存在因子 $\Gamma(1-b)$。将其写成 $m > n$ 的超几何形式后，可得到

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(1,1,1-m+n;1+n,2-m;1\right) &= \frac{(-1)^n\,\Gamma\left(1+n\right)\Gamma\left(m-n\right)}{\Gamma\left(m-1\right)} \\
&\times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k\left(\psi\left(n-k\right)-\psi\left(m-k\right)\right)\Gamma\left(n+m-1-k\right)}{\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(m-k\right)\Gamma\left(n-k\right)},
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

一个也可以通过其他方法独立验证的恒等式。

• 通过实验观察到，对于更一般的情形 $p \Rightarrow b$，(5.11) 在数值上仍然成立；该情形恰好与数据库条目 251 的一个 Thomae 派生式相吻合。比较两式的右端，可得到大量终止级数的变换。例如

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(-j,-m,a;-(j+m),n+1+a;1\right) \\
&\quad= \frac{\Gamma\left(m+n+1\right)\Gamma\left(n+a+1+m+j\right)\Gamma\left(n+1+a\right)\Gamma\left(1+j\right)}{\Gamma\left(1+n\right)\Gamma\left(a+1+m+n\right)\Gamma\left(1+m+j\right)\Gamma\left(n+1+a+j\right)} \\
&\quad\times {}_3F_2\left(-m,-n,-a-(m+n);-a-(m+j+n),-(m+n);1\right),
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

这是挑战问题的一个特殊情形，其两边都与Thomae无关。

5.3 (3.22) 的特殊情形

5.3.1 确定一个特殊情形 ${}_4F_3(1)$

经过变量的有序重新定义（$m := n$ 然后 $a := m$）后，(3.22) 的左边变为 ${}_3F_2(m,\ n,\ b;\ e,\ m+n;\ 1)$，这是一个已知求和公式（见 (3.7)），因此我们能够求解
通过计算该恒等式中的极限 $a \to n$，可得到相应右端所出现的 4F3(1)。经过冗长的计算，对于 $m \geq n$，我们最终得到一个可求和的

左端（3.22）的形式，即

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(m,n,b;e,m+n;1\right)=\\
&\frac{\Gamma\left(e\right)^2\,\Gamma\left(m+n\right)\left(\pi\,\cot\left(\pi\left(b-e\right)\right)-\psi\left(e-m\right)\right)\left(-1\right)^m\Gamma\left(1-e\right)\Gamma(1-b)}{\Gamma\left(n+m-b\right)\Gamma\left(e-n\right)\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(m\right)^2\,\Gamma\left(1-n-m+b\right)\Gamma\left(1+n-e\right)}\\
&\times\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(-1\right)^k\,\Gamma\left(1-n-m+b+k\right)\Gamma\left(n+m-1-k\right)\Gamma\left(m\right)}{\Gamma\left(m-k\right)\Gamma\left(1+k\right)\Gamma\left(n-k\right)\Gamma\left(1-m+e-n+k\right)}\\
&+\frac{\left(-1\right)^{m+n}\,\pi\,\Gamma\left(m+n\right)\Gamma\left(e\right)}{\Gamma\left(n+m-b\right)\Gamma\left(e-n\right)}\\
&\times\left(\frac{\csc\left(\pi\,b\right)}{\Gamma\left(1-e+b\right)\Gamma\left(n\right)^2}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\left(\psi\left(1-e+b+k\right)-\psi\left(1+k\right)\right)\left(-1\right)^k\,\Gamma\left(1-e+b+k\right)\Gamma\left(n+k\right)}{\Gamma\left(b+1+k-m\right)\Gamma\left(m-k\right)\Gamma\left(1+k\right)^2}\right.\\
&\left.-\frac{\csc\left(\pi\,e\right)}{\Gamma\left(m\right)\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(e-m\right)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma\left(-b+1+k\right)\left(-1\right)^k\,\psi\left(m-k\right)\Gamma\left(n+m-1-k\right)}{\Gamma\left(m-k\right)\Gamma\left(1+k\right)\Gamma\left(n-k\right)\Gamma\left(2-e+k\right)}\right).
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

注记 12。• 对于情形 $n>m$，只需将（5.17）右侧的 m 与 n 互换；

• 常见的情况是（例如（3.20）），在求（3.7）中的极限 $a\to n$ 时，出现了一个阶为 $(a-n)^{-1}$ 的项，这表明该项的系数必须恒等于零，因为在此条件下级数收敛。由此得到变换恒等式，其中 $e-n>0$

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(1-m,n,1+b-e;1,1-m+b;1\right)\\
&\quad=\frac{\Gamma\left(m+n-1\right)\Gamma\left(e-1\right)\Gamma\left(1-m+b\right)}{\Gamma\left(m\right)\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(e-m\right)\Gamma\left(b\right)}{}_3F_2\left(1-n,1-m,1-b;2-e,2-m-n;1\right)
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

这大大简化了（5.17）的推导。

将（5.17）代入（3.22），并结合 $a=n$，即可求出该恒等式中的 $4F3$**(1)**，从而在重新定义 $b:=b+m-1$，$e:=e+m$ 后，得到超几何函数 ${}_4F_3$**(1，1，** b**，** $e+m$**;** $b+m$**，** $n+1$**，** $e+1$**; 1)** 的一个复杂有限级数表示

将结果化为标准形式。对于 n的一般取值，该恒等式较为繁复；对于情形 $n=1$，$m\geq1$ 我们得到

$$
\begin{aligned}
&{}_4F_3\left(1,1,b,e+m;2,b+m,e+1;1\right)=\frac{e\left(b+m-1\right)\left(\psi\left(e\right)-\psi\left(e+m-1\right)+\psi\left(b+m-1\right)\right)}{\left(b-1\right)\left(e+m-1\right)}\\
&-\frac{\Gamma\left(e+1\right)\Gamma\left(b+m\right)\Gamma\left(m\right)}{\left(b-1\right)\Gamma\left(e+m\right)\Gamma\left(b-e\right)}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\left(-1\right)^k\,\Gamma\left(b+k-e\right)\psi\left(1+k\right)}{\Gamma\left(b+k\right)\Gamma\left(1+k\right)\Gamma\left(m-k\right)}.
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

注 13. • 恒等式 (5.19) 是通过先对基本恒等式求导得到的

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k\,\Gamma(b+k-e)}{\Gamma(b+k)\,\Gamma(1+k)\,\Gamma(m-k)}=\frac{\Gamma(b-e)\,\Gamma(e+m-1)}{\Gamma(m)\,\Gamma(e)\,\Gamma(b+m-1)} \tag{5.20}$$

关于变量 e，得到

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k\,\psi(b+k-e)\,\Gamma(b+k-e)}{\Gamma(b+k)\,\Gamma(1+k)\,\Gamma(m-k)}\\&\quad=\frac{(\psi(e)+\psi(b-e)-\psi(e+m-1))\,\Gamma(e+m-1)\,\Gamma(b-e)}{\Gamma(m)\,\Gamma(e)\,\Gamma(b+m-1)}\end{aligned} \tag{5.21}$$

然后关于变量 b，得到

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k\,\Gamma(1+k-e)\,\psi(1+k)}{\Gamma(1+k)^2\,\Gamma(m-k)}=\frac{\pi\,(\psi(e)-\psi(e+m-1)+\psi(m))\,\Gamma(e+m-1)}{\sin(\pi e)\,\Gamma(e)^2\,\Gamma(m)^2} \tag{5.22}$$

在极限 $b\to 1$ 下；

• 若 $e=n,\ n>0$ 在（5.22）中，我们得到

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{\psi(1+k)}{\Gamma(n-k)\,\Gamma(m-k)\,\Gamma(1+k)^2}=\frac{(\psi(n)-\psi(n+m-1)+\psi(m))\,\Gamma(n+m-1)}{\Gamma(n)^2\,\Gamma(m)^2}, \tag{5.23}$$

其中 $N\equiv\min(m-1,\ n-1)$。在（5.22）中令 $e=0$，并取 $m:=m+1$，得到欧拉型和

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\psi(k+1)=-\frac{1}{m}. \tag{5.24}$$

5.3.2 （5.19）的极限情形

若 m=1，则（5.19）化简为

$${}_3F_2(1,1,b;2,b+1;1)=\frac{b(\gamma+\psi(b))}{b-1}, \tag{5.25}$$

[18, 式 3.13(42)]，的一种特殊情形，而它本身又是著名的 [18, 式 3.13(41)] 一般形式（$1+c-a-b>0$）的一种特殊情形：

$${}_3F_2(a,b,1;c,2;1)=\frac{(c-1)}{(a-1)(b-1)}\left(\frac{\Gamma(c-1)\Gamma(c-a-b+1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}-1\right); \tag{5.26}$$

另见下文的（5.41）。

在 (5.19) 中，也考虑特殊情形 $b=1$；这涉及一个与前面的计算类似的极限，最终我们得到

$$
\begin{aligned}
&{}_4F_3\left(1,1,1,e+m;2,e+1,1+m;1\right)\\
&\quad=\frac{m\,e\,\Gamma\left(m\right)^2\,\Gamma\left(e\right)^2\sin\left(\pi\,e\right)}{\pi\,\Gamma\left(e+m\right)}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\left(-1\right)^k\,\psi\left(1+k\right)^2\,\Gamma\left(1-e+k\right)}{\Gamma\left(1+k\right)^2\,\Gamma\left(m-k\right)}\\
&\quad-\frac{m\,e\left(\left[\psi\left(e\right)-\psi\left(e+m-1\right)+\psi\left(m\right)\right]^2-\psi\left(1,e\right)-\psi\left(1,m\right)+\psi\left(1,e+m-1\right)\right)}{e+m-1},
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

从而得到更简单的特殊情形，例如

$$
{}_4F_3\left(1,1,1,e+2;2,3,e+1;1\right)=\frac{\pi^2\,e-6\,e+6}{3\,e+3}\,,
\tag{5.28}
$$

若 $m=2$，则有此结果。我们还注意到，(5.27) 既是对 Karp 和 Prilepkina [40] 所研究恒等式的特殊化，也是对它们的推广。

5.3.3 (3.22) 的极限情形

作为上述方法的另一种选择，若先在 (3.22) 中令 $m=1$，再取 $n=1$，然后令 $a=n$，经过涉及极限情形的大量计算后，我们得到

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(1,b,n;e,n+1;1\right)&=\frac{n\,\Gamma\left(b-n\right)\Gamma\left(e\right)}{\Gamma\left(e-n\right)\Gamma\left(b\right)}\left[\psi\left(e-n\right)-\psi\left(e-b\right)+\psi\left(b\right)\right]\\
&-\frac{n\,\left(e-1\right)\Gamma\left(b-n+1\right)\Gamma\left(e\right)}{\Gamma\left(1+b\right)\Gamma\left(1+e-n\right)}{}_4F_3\left(1,1,e,1+b-n;2,1+b,1+e-n;1\right)\\
&-\frac{n\,\Gamma\left(1+n-e\right)\Gamma\left(1-b\right)}{\Gamma\left(1-b+n\right)\Gamma\left(1-e\right)}\psi\left(n\right)\,.
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

由于借助（3.7）可以识别（5.29）的左侧，并将其转换为求和形式

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(1,b,n;e,n+1;1\right)&=\frac{\left(-1\right)^n\,n\,\pi\left(e-1\right)}{\sin\left(\pi\,e\right)\Gamma\left(e-n\right)\Gamma\left(1-b+n\right)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\Gamma\left(1-b+k\right)}{k\,\Gamma\left(2-e+k\right)}\\
&-\frac{\left(-1\right)^n\,n\,\Gamma\left(1-b\right)\Gamma\left(e\right)\left(-\psi\left(e-1\right)+\psi\left(e-b\right)\right)}{\Gamma\left(e-n\right)\Gamma\left(1-b+n\right)}\,,
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

于是可以求解（5.29）得到

$$
{}_4F_3\left(1,1,b,e+n-1;2,e,b+n;1\right)=\frac{(1-e)\sin\left(\pi\,b\right)\Gamma\left(b+n\right)}{\sin\left(\pi\,e\right)\left(b-1\right)\Gamma\left(e+n-1\right)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\Gamma\left(2+k-b-n\right)}{k\,\Gamma\left(3-e-n+k\right)}
$$

$$
+\frac{(1-e)\left(b+n-1\right)}{\left(b-1\right)\left(e+n-2\right)}\left(\psi\left(n\right)+\psi\left(e+n-2\right)-\psi\left(b+n-1\right)-\psi\left(e-1\right)\right),\tag{5.31}
$$

从而得到一些有趣的特殊情形，尤其是相对于 Karp 和 Prilepkina [40] 研究的一般情形而言。也就是说，若 $n=2$，则

$$
{}_4F_3\left(1,1,b,e+1;2,e,b+2;1\right)
$$

$$
=\frac{(1+b)\left(e-1\right)\gamma}{e\left(b-1\right)}+\frac{(1+b)\left(e-1\right)\psi\left(b\right)}{e\left(b-1\right)}+\frac{(1+b)\left(b^2-b\,e+e-1\right)}{b\,e\left(b-1\right)}\tag{5.32}
$$

并且如果 $n=3$，那么

$$
{}_4F_3\left(1,1,b,e+2;2,e,b+3;1\right)
$$

$$
=\frac{(e-1)\left(b+2\right)\left(\gamma+\psi\left(b\right)\right)}{\left(b-1\right)\left(e+1\right)}+\frac{\left(b^2+3\,b\,e+2\,e\right)\left(1-e+b\right)\left(b+2\right)}{2\left(e+1\right)e\,b\left(1+b\right)}.\tag{5.33}
$$

此外，如果 $e=m$ 且 $m,\ n\geq 2$，那么

$$
{}_4F_3\left(1,1,b,m+n-1;2,m,b+n;1\right)
$$

$$
=\frac{\left(-1\right)^n\left(1-m\right)\sin\left(\pi\,b\right)\Gamma\left(b+n\right)}{\pi\left(b-1\right)\Gamma\left(m+n-1\right)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\left(-1\right)^k\,\Gamma\left(2+k-b-n\right)\Gamma\left(m+n-k-2\right)}{k}
$$

$$
+\frac{(1-m)\left(b+n-1\right)\left[\psi\left(n\right)+\psi\left(n-2+m\right)-\psi\left(m-1\right)-\psi\left(b+n-1\right)\right]}{\left(b-1\right)\left(n+m-2\right)}\tag{5.34}
$$

并且，如果 $m=1,\ n\geq 2$ 那么 4F3(1) 可化简为 3F2(1)，从而得到

$$
{}_3F_2\left(1,b,n;2,b+n;1\right)=\frac{b+n-1}{\left(1-b\right)\left(n-1\right)}+\frac{\Gamma\left(b+n\right)}{\left(b-1\right)\left(n-1\right)\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(b\right)},\tag{5.35}
$$

与大量数据库条目的特殊情形相吻合，包括已知的（见式 (5.25)）特殊情形 $b\to 1$

$$
{}_3F_2\left(1,1,n;2,1+n;1\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n}{\left(1+k\right)\left(n+k\right)}=\frac{n\left(\gamma+\psi\left(n\right)\right)}{n-1}.\tag{5.36}
$$

5.4 基于 ${}_4F_3\left(1,1,e,d;2,2,2;1\right)$

我们从已知恒等式 [19, 式 (7.1)] 开始

$$
\begin{aligned}
{}_4F_3\left(1,1,e,d;2,2,2;1\right) = & -\frac{2\,\gamma+\psi\left(e-1\right)+\psi\left(2-d\right)}{\left(e-1\right)\left(d-1\right)} \\
& -\frac{\sin\left(\pi\,e\right)\Gamma\left(e\right)\Gamma\left(1-d\right)}{\Gamma\left(1+e-d\right)\left(e-1\right)^3\,\pi}{}_3F_2\left(e-1,e-1,e-1;e,1+e-d;1\right)\,. \qquad (5.37)
\end{aligned}
$$

令 $e=a+1$ 和 $d=3-a-b$ 取值为

$$
\begin{aligned}
{}_4F_3\left(1,1,a+1,3-a-n;2,2,2;1\right) = & -\frac{2\,\gamma+\psi\left(a\right)+\psi\left(a-1+n\right)}{a\left(2-a-n\right)} \\
& +\frac{\sin\left(\pi a\right)\Gamma\left(1+a\right)\Gamma\left(a+n-2\right)}{\pi\,\Gamma\left(2\,a+n-1\right)a^3}{}_3F_2\left(a,a,a;1+a,2\,a-1+n;1\right) \qquad (5.38)
\end{aligned}
$$

并注意，(5.38) 右侧的 3F2(1) 与 Watson 定理（见附录A）相邻，即

$$
\begin{aligned}
& {}_3F_2\left(a,a,a;1+a,2\,a-1+n;1\right) = W_{1,n}(a,a,a) \\
& = \frac{a\,\Gamma\left(2\,a+n-1\right)\Gamma\left(n\right)}{2\,\Gamma\left(a\right)^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(-1\right)^k\left(2\,a-1+2\,k\right)\left(\psi\left(1,\frac{a+k}{2}\right)-\psi\left(1,\frac{1+a+k}{2}\right)\right)\Gamma\left(2\,a-1+k\right)}{\Gamma\left(n-k\right)\Gamma\left(2\,a+n+k-1\right)\Gamma\left(1+k\right)}\,. \qquad (5.39)
\end{aligned}
$$

将上述结果代入 (3.22)，最终得到一个新的数据库恒等式 (F.12)，这是 Miller/Paris挑战的一个非常特殊的情形。

注 14。 由于 (5.37) 的左侧在交换 $e\leftrightarrow d$ 时具有对称性，而右侧则没有，因此不妨在 (5.37) 中令 $d=a+1$ 和 $e=3-a-b$ 取值，并重复上述计算，最终会得到相同的结果，尽管这需要相当强大的计算能力。

在 (5.39) 中令 $a=1$，得到恒等式

$$
{}_3F_2\left(1,1,1;2,1+n;1\right) = n\Gamma\left(n\right)^2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(-1\right)^{k+1}\left(\frac{1}{2}+k\right)\left(\psi\left(1,1+\frac{k}{2}\right)-\psi\left(1,\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)\right)}{\Gamma\left(n-k\right)\Gamma\left(1+n+k\right)}, \qquad (5.40)
$$

这可以与已知恒等式 [18, Eq. 3.13(43)]进行比较

$$
{}_3F_2\left(1,1,1;2,c;1\right) = (c-1)\psi(1,c-1) \qquad c>1\,, \qquad (5.41)
$$

从而得到这个（新的? ）恒等式

$$\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j\left(j+\frac{1}{2}\right)\left(\psi\left(1,1+\frac{j}{2}\right)-\psi\left(1,\frac{1}{2}+\frac{j}{2}\right)\right)}{\Gamma(n-j)\,\Gamma(1+n+j)}=-\frac{\psi(1,n)}{\Gamma(n)^2}\,. \tag{5.42}$$

作为比较，在 (F.12) 中令 $n=1$ 可得到已知恒等式

$${}_3F_2(a,1,1;a+1,a+1;1)=-\frac{a^2\left(\psi\left(1,\frac{1}{2}+\frac{a}{2}\right)-\psi\left(1,\frac{a}{2}\right)\right)}{2} \tag{5.43}$$

它与 Whipple 和 Dixon 的定理在两个方向上都相邻一个正单位。

6 其他奇异恒等式

在接下来的章节中，我们回顾近期有关 3F2(1) 的文献新增成果。其中包括对所谓 3F2(1) 类型奇异求和的研究。本文旨在说明，许多此类恒等式都可以通过运用前几节介绍的方法轻松推导并加以推广。

6.1 Chen 和 Chu [30]

在一系列论文中，受朝倉、大坪和寺杣的工作启发 [41]（他们研究了 Miller/Paris 挑战中的一个子集，即 ${}_3F_2(a,\ b,\ x;\ a+b,\ x+1;1)$），Chen 和 Chu 研究了情形 $a=y,\ b=1-y$ 并指出，这由此为 $x=1/2$导出了大量闭式，其中 y 取特定的分数值。Chu [42] 将这些结果称为“奇异”结果，这与早期研究相呼应；在该研究中，~ 700 列出了若干具体实例，其中一些与 Krupnikov 和 K¨olbig [8, 表中的恒等式重合。这里我们将说明，只需将 Chen 和 Chu 的结果识别为与沃森恒等式 (A.3) 相邻的特殊情形，便可重新推导并推广这些结果——而这恰好与 Asakura 等人的出发点一致。

6.1.1 Chen 和 Chu（基础情形）

在所讨论的第一篇论文中，Chu 和 Chen [30] 指出，Asakura 等人的推导需要“长达五页的冗长证明”。随后，他们给出了一个简化证明，其中涉及 ${}_3F_2\left(y,1-y,_{12};\mathbf{1},_{32};1\right)$的积分表示，篇幅约两页，证明了——

roduces the four exe Asakura 等人提出的恒等式，他们考虑 $y=\{1/2,1/3,1/4,1/6\}$

以得到:

$$ {}_3F_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2};1,\frac{3}{2};1\right)=\frac{4\,G}{\pi}; \tag{6.1} $$

$$ {}_3F_2\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{2};1,\frac{3}{2};1\right)=\frac{3\sqrt{3}\,\ln(2)}{\pi}; \tag{6.2} $$

$$ {}_3F_2\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{2};1,\frac{3}{2};1\right)=\frac{4\,\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{\pi}; \tag{6.3} $$

$$ {}_3F_2\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2};1,\frac{3}{2};1\right)=\frac{3\sqrt{3}\,\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{2\,\pi}. \tag{6.4} $$

这里，我们注意到，所讨论的基本元素可视为与 Watson 恒等式 (A.3) 相邻的一个特殊情形；Chu 本人早在 [3] 年前就以终止和的形式求出了它:

$$ {}_3F_2\left(y,1-y,1/2;1,\frac{3}{2};1\right)=\lim_{c\to\frac{1}{2}}W_{1,0}(y,1-y,c)\,. \tag{6.5} $$

现在出现了一个复杂之处，因为直接将 $c=1/2$ 代入 (6.5) 会在求值过程中产生一个例外情形，因此必须采用一个简单的极限。这样做之后，只需几行推导，我们便得到推广式

$$ {}_3F_2\left(\frac{1}{2},y,1-y;1,\frac{3}{2};1\right)=\frac{1}{2\,y-1}-\left(\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{2}\right)-\psi\left(\frac{y}{2}\right)\right)\frac{\sin(\pi\,y)}{\pi\,(2\,y-1)}\,. \tag{6.6} $$

为重现 (6.1)，我们对 (6.6) 中的 $y\to 1/2$ 求极限，得到

$$ {}_3F_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2};1,\frac{3}{2};1\right)=\frac{2\,G}{\pi}+\frac{\pi^2-\psi\left(1,\frac{3}{4}\right)}{4\,\pi}\,, \tag{6.7} $$

考虑到已知恒等式 [43]，即可化简为 (6.1)

$$ \psi\,(1,3/4)=\pi^2-8\,G\,. \tag{6.8} $$

其余化简都很直接，只需根据 Gauss 著名的一般规则 [44, 式（2.21）]，对已知的双伽马恒等式进行求值:

$$ \psi\left(\frac{p}{q}\right)=-\gamma-\frac{\pi\,\cot\left(\frac{\pi\,p}{q}\right)}{2}-\ln(q)+2\sum_{n=1}^{\lfloor\frac{q}{2}\rfloor}\cos\left(\frac{2\,\pi\,n\,p}{q}\right)\ln\left(2\,\sin\left(\frac{\pi\,n}{q}\right)\right) \tag{6.9} $$

and

$$ \begin{aligned}\psi\left(\frac{p}{q}\right)=&-\gamma-\frac{\pi\,\cot\left(\frac{\pi\,p}{q}\right)}{2}-\ln(q)+2\sum_{n=1}^{\lfloor\frac{q}{2}\rfloor-1}\cos\left(\frac{2\,\pi\,n\,p}{q}\right)\ln\left(2\,\sin\left(\frac{\pi\,n}{q}\right)\right)\\&+\cos\left(\frac{2\,\pi\,\lfloor\frac{q}{2}\rfloor\,p}{q}\right)\ln\left(2\,\sin\left(\frac{\pi\,\lfloor\frac{q}{2}\rfloor}{q}\right)\right)\end{aligned} \tag{6.10} $$

分别根据 q 是奇数还是偶数。对于正在讨论的其他特殊情形，我们则有

$$\psi\left(1/6\right)-\psi\left(2/3\right)=-2\,\ln\left(2\right)-\frac{2\,\pi\,\sqrt{3}}{3},$$

$$\psi\left(5/8\right)-\psi\left(1/8\right)=\left(\pi-2\,\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\sqrt{2} \tag{6.11}$$

and

$$\psi\left(1/12\right)-\psi\left(7/12\right)=-2\,\pi+2\,\sqrt{3}\,\ln\left(2-\sqrt{3}\right),$$

c分别对应于（6.6）中选择 $y=1/3,\ y=1/4,\ y=1/6$.

对于 y 的其他选择，我认为（6.6）比 Asakura 等人以及 Chen 和 Chu 得出的表达式更为基础，因为一般有理数自变量的双伽马函数表达式，大多不会像此处所展示的那样轻易化简，而这一性质也会影响其推导方法的易处理程度。由此，这一观察引出了以下提议：

定义15。 Chu [42]所引入的“奇异”一词，用于描述 3F2(1) 的特例，适用于所有分数参数（例如 $y=\pi p/q$）对应的角度 y 可仅用直尺和圆规作出，因而可使用（6.9）和（6.10）进行分析的情形。否则，请参见 Murty和Saradha [45]。

注16。 在2023年，Chu 重新定义了“奇异”一词（见 [46, 第 2]页），使其基本上指代挑战问题，即上参数与下参数之差为负整数。

备注 17。 我测试了 [42], 中列出的700个例子中的一小部分，结果发现它们全都是与 DWW中某个情形相邻的特殊情形，因此都是可求和的。然而，重要的是要问：如何界定用基本常数表示3F2(1)？如果y 用一个特殊有理值表示，那么上面列出的范例已尽可能地接近基本常数；在其他情况下，对于y的一般取值，或许可以将双伽马函数（例如$\psi(y)$）视为基本常数。类似地，Qureshi和Shadab [47, 第（12）式]研究了形如（5.25）的问题，从而重新发现了一个用 $\psi(p/q)$表示3F2(1)的求和公式族。同样，他们仅针对 p 和 q的特定取值，利用（6.9）和（6.10）得出一组特殊情形，这些情形或许符合所提出的“奇异”定义；但他们忽略了这样一个事实：存在无穷多个 p/q 的取值，使得 $\psi(p/q)$无法用基本常数表示。在这种情况下，用 $\psi(p/q)$表示的求值仍然颇有用处。

6.1.2 Chen 和 Chu 扩展

在其论文 [30, 节 3], 的扩展中，Chen和Chu考察了上一节讨论的函数的相邻情形，并列出了一张数值表。具体而言，在 $m \le n$的条件下，他们研究了函数

$$ {}_3F_2(y, 1-y, x+m; 1, 1+x+n; 1)\,. $$

将 $x := x-m$ 和 $n := n-m$ 代入后，这个扩展可化简为更简单的形式

$$ {}_3F_2(y, 1-y, x; 1, 1+x+n; 1)\,, $$

一个再次与 Watson 定理 (A.3) 相邻的函数，其中 $n \ge -1$。采用前面讨论过的相同方法，这里我们令 $x = 1/2$ 并求得

$$ {}_3F_2(y, 1-y, 1/2; 1, 5/2+n; 1) = \lim_{c \to \frac{1}{2}} W_{2n+3,0}\left(y, 1-y, c\right)\,. \tag{6.12} $$

经过一些涉及极限求值的化简后，我们最终得到

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left(y, 1-y, 1/2; 1, 5/2+n; 1\right) &= \frac{4^{2\,n+3}\sin\left(y\,\pi\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}+n\right)^2}{\pi^2} \\ &\times \left((y-n-2)\sum_{k=0}^{2\,n+3} \frac{(-1)^k\left(\psi\left(1-\frac{y}{2}-\frac{k}{2}\right)+\psi\left(\frac{y}{2}-n-1+\frac{k}{2}\right)\right)\Gamma\left(\frac{y}{2}+\frac{k}{2}\right)^2\Gamma\left(1-2\,y-k\right)}{\Gamma\left(5-2\,y-k+2\,n\right)\Gamma\left(\frac{y}{2}-n-1+\frac{k}{2}\right)^2\Gamma\left(2\,n+4-k\right)\Gamma\left(k+1\right)} \right. \\ &\left. - \sum_{k=0}^{2\,n+2} \frac{(-1)^k\,\Gamma\left(-2\,y-k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{2}+\frac{k}{2}\right)^2\left(\psi\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{2}-\frac{k}{2}\right)+\psi\left(\frac{y}{2}-n-\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\right)\right)}{\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(2\,n+3-k\right)\Gamma\left(4-2\,y-k+2\,n\right)\Gamma\left(\frac{y}{2}-\frac{1}{2}-n+\frac{k}{2}\right)^2} \right)\,. \end{aligned} \tag{6.13} $$

情形 $n = 0$ 得到

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left(y, 1-y, \frac{1}{2}; 1, \frac{5}{2}; 1\right) &= \frac{3}{\pi\left(2\,y-3\right)\left(4\,y^2-1\right)} \\ &\times \left(\left(\left(2\,y^2-2\,y-1\right)\left(\psi\left(\frac{y}{2}\right)-\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{2}\right)\right)+2\,y-1 \right)\sin\left(\pi y\right)+\pi\left(2\,y^2-2\,y-1\right) \right)\,; \end{aligned} \tag{6.14} $$

情形 $n = -1$ 重现了 (6.6)，前面的评论仍然适用。

6.1.3 应用于挑战问题

由于（6.13）的左边是挑战问题（3.2）的一种特殊情形，这里我们考虑采用（6.13）中的参数的（3.2），并令两者的右边相等,

其中 $n=0$ 如（6.14）所示。求解得恒等式

$$ {}_3F_2\left(y,y,y-\frac{3}{2};2\,y,\frac{1}{2}+y;1\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+y\right)4^y\left(\left(\frac{1}{2}-y^2+y\right)\left(\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{2}\right)-\psi\left(\frac{y}{2}\right)\right)+y-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(2\,y+1)\,\Gamma(y)}, \tag{6.15} $$

其左侧与 Watson 恒等式 [3], with $m=0,\ n=3$ 相邻。

6.1.4 扩展

对于 $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{Z}$，Chu 最近的一篇论文 [46] 给出了一般形式 ${}_3F_2\left(1+a,\ c,\ \frac{1}{2}+e;\ \frac{3}{4}+b,\ \frac{5}{-4}+d;\ _1\right)$ 的求值通过类似的方法，并列出了在 $a,\ b,\ c,\ d$ 的特定取值下的奇异示例。在一项相关研究中，Chen 和 Chu [48] 考虑了更一般的情形 ${}_3F_2(n,\ j,\ k-y;\ p+x,\ q-x;\ 1)$ 子分为四类。若令 $x:=x-p$ 并重新定义 $p+q=m$，在不失一般性的前提下消去一个参数，结果表明，情形 $k=0$ 和 $y=1/2$ 等价于 Chen 和 Chu 的 A 类，并且与 Whipple 定理相邻。具体而言，参见附录A，若 $m-n-j+1/2>0$,

$$ {}_3F_2\left(n,j,-1/2;x,m-x;1\right)=\lim_{b\to-\frac{1}{2}}\lim_{a\to n}\Omega_{n+j-1,m}\left(a,b,m-x\right)\,, \tag{6.16} $$

这里需要取极限，因为 (6.16) 是一个特殊情形。例如，如果 $j=1,n=$2$,m=3$，由 (6.16) 可得

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left(1,2,-1/2;x,3-x;1\right)&=\frac{4\left(-1+x\right)^2\left(-2+x\right)^2\csc\left(\pi\,x\right)\pi}{\left(1-2\,x\right)\left(3-2\,x\right)\left(5-2\,x\right)}\\ &+\frac{4\left(-2+x\right)^2\left(-1+x\right)^2\left(\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\right)-\psi\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\left(-5+2\,x\right)\left(-1+2\,x\right)\left(-3+2\,x\right)}+\frac{2\left(-2+x\right)\left(-1+x\right)}{\left(-5+2\,x\right)\left(-3+2\,x\right)}\,, \end{aligned} \tag{6.17} $$

对于 x 的某些有理数值，将会出现奇异实例，如前文所述。Chen 和 Chu 选取的、分别对应于 $x=\{3/2,5/2,9/2,1/3\}$ 的特殊情形如下:

$$ {}_3F_2\left(-\frac{1}{2},1,2;\frac{3}{2},\frac{3}{2};1\right)=-\frac{G}{4}+\frac{3}{8}, \tag{6.18} $$

$$ {}_3F_2\left(-\frac{1}{2},1,2;\frac{1}{2},\frac{5}{2};1\right)=-\frac{9\,G}{8}+\frac{3}{16}, \tag{6.19} $$

$$ {}_3F_2\left(-\frac{1}{2},1,2;-\frac{3}{2},\frac{9}{2};1\right)=-\frac{35}{9}, \tag{6.20} $$

$$ {}_3F_2\left(-\frac{1}{2},1,2;\frac{1}{3},\frac{8}{3};1\right)=-\frac{800}{273}\ln\left(2\right)+\frac{20}{91}, \tag{6.21} $$

其中，化简过程中用到了 (6.8) 和 (6.11)

s.

6.2 Chu 和 Wang 的奇异恒等式

在他们 2007年的著作中，Chu 和 Wang [5] 推导出了二项和三项邻接关系。其中许多关系与挑战问题密切相关，但并未解决该问题。他们的四个基本邻接关系列于附录A（见 (C.14)–(C.17)）。在研究中，Chu 和 Wang [5, 第2节及后续章节] 改变了参数的不同组合，并将其应用于四个基本关系，从而得到一系列邻接关系，其中一些被他们称为“奇异”。为了更深入地了解这些奇异恒等式的来源，我们只需指定一个参数，考察它对某个恒等式的影响，并以挑战问题为模板考虑其结果。具体而言，在 (C.17) 中，令 $f \to a+1$，即

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a,b,c;e,a+1;1\right) = \lim_{f\to a+1}\Bigg\{ & \frac{1}{(a+1-f)\,(1+a-e)} \\
\times \Bigg[& (1-e)\,(1-f)\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}a,b-1,c-1\\ e-1,f-1\end{matrix}\,\middle|\,1\right) + a\,(1+a+c+b-e-f)\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}a+1,b,c\\ e,f\end{matrix}\,\middle|\,1\right)\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{6.22}
$$

并注意到，方括号内的项的组合在该极限下必须为零，这一点很容易验证，因为二者都化为高斯超几何函数(1)。然而，如果我们改为在求值极限之前，明确考察式 (6.22) 的级数展开，就会发现出现了一项 $(a+1-f)^{-1}$ 阶的项，而在取极限时它当然必须为零。这便产生了各种“奇特”和“奇异”的恒等式（见下文）。不过首先，作为该展开式的一部分，我们注意到 $(a+1-f)^{0}$ 阶的项也给出了一个有趣的恒等式：如果$1+e-b-c>0$ 那么

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a,b,c;e,a+1;1\right) = {} & \frac{(c+b-e)\,a\,\Gamma(e)}{\Gamma(c)\,\Gamma(b)\,(1+a-e)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(c+k)\,\Gamma(b+k)\,\psi(a+k+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(e+k)} \\
& + \frac{a\,\Gamma(e)}{(1+a-e)\,\Gamma(c-1)\,\Gamma(b-1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(c+k)\,\Gamma(b+k)\,\psi(a+k+1)}{\Gamma(k+2)\,\Gamma(e+k)} \qquad (6.23) \\
& + \frac{a\,\Gamma(-c-b+e)\,\Gamma(e)}{\Gamma(e-c)\,\Gamma(e-b)\,(1+a-e)} + \frac{(e-1)\,a\,\psi(a)}{1+a-e}, \qquad (6.24)
\end{aligned}
$$

这或许还能进一步化简。

通过直接进行机器计算，$(a+1-f)^{-1}$ 项的系数为零，由此得到奇异恒等式

$$
{}_4F_3\left(1,b,c,\frac{c\,b+b+c-2\,e+1}{c+b-e};2,e,\frac{c\,b-e+1}{c+b-e};1\right) = \frac{e-1}{e-c\,b-1}\,, \tag{6.25}
$$

可以写成略加简化、但同样奇异的形式

$$
{}_4F_3\left(1,b,c,e;2,\frac{(e-c-1)\,b-1+(e-1)\,c}{e-2},e-1;1\right) = \frac{(c-e+1)\,b-(e-1)\,(c-1)}{(e-1)\,(c-1)\,(b-1)} \tag{6.26}
$$

通过应用变量变换 $e := ((b+c)\ e - (c+1)\ (b+1))\ /(e-2)$。这类形式源于计算伪影，通常出现在将两个求和合并而不是展开时。因此，如果我们首先展开形如以下形式的求和项，恒等式（6.26）还可以进一步简化

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_{k+1} - f_{-1}$$

从而得到一个与（6.26）等价的恒等式

$${}_3F_2\left(a, b, c; a-1, \frac{a\,(1+c+b) - (c+1)\,(b+1)}{a-1}; 1\right) = 0, \tag{6.27}$$

在重新定义变量之后。

注 18。为了理解这类奇异恒等式是如何产生的，考虑一个典型的求和

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k\,(b)_k\,(\alpha\,k+\beta)}{(c)_k\,\Gamma\,(k+1)} = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k\,(b)_k\,k}{(c)_k\,\Gamma\,(k+1)} + \beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k\,\Gamma\,(k+1)} \tag{6.28}$$

它可以 用两种不同的方式表示，分别如左边和右边所示 s

$$\beta\,{}_3F_2\left(a, b, \frac{\alpha+\beta}{\alpha}; c, \frac{\beta}{\alpha}; 1\right) = \frac{\alpha\,a\,b}{c}\,{}_2F_1\,(b+1, a+1; c+1; 1) + \beta\,{}_2F_1\,(a, b; c; 1)\ , \tag{6.29}$$

由此展示了这一类“奇异”恒等式的由来。这让人想起文献中被称为“奇异”的已知恒等式（参见 [25,参考文献 3，以及例如 4],条目 91]）：

$${}_3F_2\left(a, b, c; a+2, \frac{(a+1)\,(b+c-1) - c\,b}{a}; 1\right) = \frac{(a+1)\,\Gamma\left(\frac{(a+1)(b+c-1)-c\,b}{a}\right)\Gamma\left(\frac{(c-1)(1-b)+a}{a}\right)}{\Gamma\left(\frac{a\,c+(b-1)(-c+1)}{a}\right)\Gamma\left(\frac{a\,b+(b-1)(-c+1)}{a}\right)} \tag{6.30}$$

由于 Chu、Gessel 和 Stanton。

6.3 Campbell 和 Abrarov

我们继续讨论 Campbell 和 Abrarov [49]，在这里可以展示前文讨论的许多原理。

6.3.1 定理 8

在他们的论文中，Campbell 和 Abrarov 得到了恒等式 [49, 式（16）和（17）]

$$\pi\,\ln(2)-\frac{16}{15}\,{}_3F_2\!\left(1,1,\frac{3}{2};\frac{7}{4},\frac{9}{4};1\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{1/2}{n}\,2^{-n}\,\pi\,\Gamma(n+1)\left(h(\frac{n}{2})+2\,\ln(2)\right)}{2\,\Gamma\!\left(\frac{n}{2}+1\right)^2} \tag{6.31}$$

其中 $h(\frac{n}{2})$ 是定义如下的调和级数

$$h(\frac{n}{2})=\psi\!\left(\frac{n}{2}+1\right)+\gamma\,, \tag{6.32}$$

并感叹道：“Mathematica 无法计算该 ${}_3F_2$ 级数.....”。现在将证明，该特定的 ${}_3F_2$ 是一个已知恒等式的特殊情形，因此可以求值；由此可以确定该级数的简化形式。不过，我们首先注意到，(6.31) 的右侧可以展开为

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{1/2}{n}\,2^{-1-n}\,\pi\,\Gamma(n+1)\left(h(\frac{n}{2})+2\,\ln(2)\right)}{\Gamma\!\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}\\&\quad=\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}\,h(\frac{n}{2})}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-n\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}+\frac{\pi^{\frac{3}{2}}\,\ln(2)}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-n\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}\end{aligned} \tag{6.33}$$

并且，借助 Maple,

$$\frac{\pi^{\frac{3}{2}}\,\ln(2)}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-n\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}=(4-\pi)\ln(2)\;. \tag{6.34}$$

将所有结果与 (6.32) 结合起来，最终得到恒等式

$${}_3F_2\!\left(1,1,\frac{3}{2};\frac{7}{4},\frac{9}{4};1\right)=\frac{15\,\pi^{\frac{3}{2}}}{64}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}\,\psi\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-n\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}-\frac{15\,(\pi-4)\,\gamma}{32}+\frac{15\,\ln(2)}{4}\,. \tag{6.35}$$

现在注意到，(6.35) 左侧的超几何函数是 Whipple 定理的一个相邻特殊情形，具体来说，

$${}_3F_2\!\left(1,1,\frac{3}{2};\frac{7}{4},\frac{9}{4};1\right)=\lim_{b\to\frac{3}{2}}\lim_{a\to1}\Omega_{1,0}(a,b,7/4) \tag{6.36}$$

如（A.2）中所定义。由于在求取极限后， [3] （6.36）右侧有闭式有限求和表达式可用，因此我们得到

$$ {}_3F_2\left(1,1,\frac{3}{2};\frac{7}{4},\frac{9}{4};1\right) = -\frac{15\sqrt{2}\,\operatorname{arctanh}\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)}{8} + \frac{15}{2}\,. \tag{6.37} $$

这与 Campbell 和 Abrarov [49, 定理 8] 中引用的结果一致；他们利用 Mathematica 求得了一个等价积分。经过重新排序和简化，最终得到欧拉型恒等式

$$ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}\,\psi\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-n\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^2} = \frac{-8\sqrt{2}\,\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)+32+2\,\pi\,\gamma-8\,\gamma-16\,\ln(2)}{\pi^{\frac{3}{2}}}\,, \tag{6.38} $$

它可以写成一般的欧拉级数形式

$$ \begin{aligned} \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-2\,n}\,\psi\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2\,n-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} &= 2\gamma\left(\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)+4\left(3\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)\ln(2) \\ &\quad -4\sqrt{2}\left(\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)+2\right)+16 \end{aligned} \tag{6.39} $$

通过将 (6.38) 左侧拆分为偶数项和奇数项。参见附录 D.3。

备注 19。 Maple（“simplify”）和 Mathematica（“FullSimplify”）为何都无法根据最新的 WZ 方法对 (6.37) 左侧的超几何函数求值（见 [21]），这很可能是因为需要谨慎处理极限，因此最终的求值中包含双伽马函数（即，反双曲正切 是一个极限双伽马函数值）。双伽马函数的存在意味着相应的表达式不符合被归类为“超几何恒等式”的标准，因此相关的 WZ 算法无效。

6.3.2 定理 15

在定理 15 中，Campbell 和 Abrarov 探讨了“那些看似无法写出闭式表达式的 3F2(1) 级数的求值”。他们的恒等式

$$ \frac{{}_3F_2\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}-a,\frac{3}{2}-a;1,\frac{5}{2}-a;1\right)}{{}_3F_2\left(-\frac{1}{2},a,1-a;\frac{1}{2},\frac{3}{2};1\right)} = \frac{4\,\Gamma\left(\frac{5}{2}-a\right)\Gamma(a)}{\pi^{\frac{3}{2}}} \tag{6.40} $$

给出了一个这样有趣的结果；若将其改写为两部分变换的形式，则更为有趣。

$$ {}_3F_2\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}-a,\frac{3}{2}-a;1,\frac{5}{2}-a;1\right) = \frac{4\,\Gamma\left(\frac{5}{2}-a\right)\Gamma(a)}{\pi^{\frac{3}{2}}}\,{}_3F_2\left(-\frac{1}{2},a,1-a;\frac{1}{2},\frac{3}{2};1\right)\,. \tag{6.41} $$

经观察可知，(6.41) 是 Thomae恒等式 (B.7) 的一个特殊情形。此外，(6.41) 中出现的两个 3F2(1) 都是 Chu [3] 列出的已知结果的特殊情形。具体而言，左侧是与 Watson定理 (A.3) 相邻的一个特殊情形（见 [25, Entry 5]），其中 $m=1,\quad n=2,\quad c=3/2,\quad b\to 3/2-a$ 和 $a:=1/2-a$ 因此

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}-a,\frac{3}{2}-a;1,\frac{5}{2}-a;1\right)=\lim_{b\to\frac{3}{2}-a}W_{2,-2}(a,b,3/2)\\
&=\frac{(2\,a-1)\,\Gamma\left(\frac{5}{2}-a\right)\Gamma(a)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\cos(\pi\,a)}{\pi}\left(\psi\left(\frac{3}{4}-\frac{a}{2}\right)-\psi\left(\frac{5}{4}-\frac{a}{2}\right)-\frac{4\,a}{(2\,a-1)^2}\right)-1\right).
\end{aligned}
\tag{6.42}
$$

分母函数随后可由 (6.41) 得出，也可根据以下观察得出：它是 Whipple 定理 (A.2) 的一个特殊情形（见 [25, 条目 13]），最终得到

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(-\frac{1}{2},a,-a+1;\frac{1}{2},\frac{3}{2};1\right)=\lim_{b\to-\frac{1}{2}}\Omega_{0,2}(a:=1-a,b,1/2)\\
&=\frac{\left(a-\frac{1}{2}\right)}{2}\left(\left(\psi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{2}\right)-\psi\left(\frac{3}{4}+\frac{a}{2}\right)+\frac{a-1}{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2}\right)\cos(\pi\,a)+\pi\right).
\end{aligned}
\tag{6.43}
$$

将 $a=1/4$ 代入 (6.41) 将得到一个等价的恒等式，与 Campbell 和 Abrarov 的推论 (4) 等价，并有助于理解他们接下来的评论；将 $a=3/4$ 代入 (6.42) 则会得到他们的推论 (5)。

6.3.3 定理16

与 上一节类似，Campbell 和 Abrarov 的定理 (16) 等价于

$$
{}_3F_2\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}-\alpha,\frac{5}{2}-\alpha;2,\frac{7}{2}-\alpha;1\right)=\frac{4\,\left(\frac{5}{2}-\alpha\right)\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)}{3\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)\pi^{\frac{3}{2}}}{}_3F_2\left(-\frac{3}{2},\alpha,1-\alpha;-\frac{1}{2},\frac{3}{2};1\right)
\tag{6.44}
$$

而且，令人惊讶的是，将附录B中所述的任何独立 Thomae关系应用于（6.44）的左侧，都无法重现（6.44）。然而，如果将 Thomae关系（B.3）应用于（6.44）的右侧，就会出现一个需要进行极限计算的特殊情形。具体而言，

$$
{}_3F_2\left(-\frac{3}{2},\alpha,1-\alpha;-\frac{1}{2},\frac{3}{2};1\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^2\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(0)\,\Gamma\left(\frac{5}{2}-\alpha\right)}{}_3F_2\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}-\alpha,\frac{3}{2}-\alpha;0,\frac{5}{2}-\alpha;1\right),
\tag{6.45}
$$

3F2(1) 的第四个参数中出现“0”，以及系数中的 Γ(0)，表明需要取极限。在这个具体例子中，将（B.3）应用于（6.45）的左侧，其中第四个参数为 $-1/2 := e$，然后将极限 $e \to -1/2$ 取到右侧，便可重现与（6.44）等价的结果。因此，从这个意义上说，（6.44）确实满足一个 Thomae 关系。详细过程留给读者作为练习。

考虑各个组成部分后，我们发现，(6.44) 的左端与 Watson 定理（[25, 条目 (6)]，其中 $m = 1,\ n = 3$）相邻，经化简并取极限后，

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2} - a, \frac{5}{2} - a; 2, \frac{7}{2} - a; 1\right) = \lim_{b \to \frac{5}{2} - a} W_{3,-3}\left(a := \frac{1}{2} - a, b, c = \frac{5}{2}\right) \\
&= -\frac{2\left(a - \frac{1}{2}\right)\Gamma(a)}{3\,\Gamma\left(-\frac{5}{2} + a\right)\sqrt{\pi}} \left(\frac{\pi}{\cos(\pi\, a)} + \psi\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2}\right) - \psi\left(\frac{3}{4} + \frac{a}{2}\right) + \frac{-2\,a^2 + \frac{1}{4}\,a + a^3 + 1}{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \left(a - \frac{3}{2}\right)\left(a + \frac{1}{2}\right)}\right)
\end{aligned}
\tag{6.46}
$$

化简为

$$
{}_3F_2\left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}; 2, \frac{13}{4}; 1\right) = \frac{15\sqrt{\pi}\,\ln\left(17 - 12\sqrt{2}\right)}{128\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} + \frac{61\sqrt{\pi}\,\sqrt{2}}{32\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^2} \tag{6.47}
$$

当 $a = 1/4$ 时，这等价于 Campbell 和 Abrarov 推论（6）。同样，右端函数可由 (6.44) 和 (6.47)，或由 Whipple 定理 [25, 条目 (13)]，其中 $m = 0,\ n = 3$ 得到，从而有

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(1 - a, -\frac{3}{2}, a; -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1\right) = \lim_{b \to -\frac{3}{2}} \Omega_{0,3}\left(a := 1 - a, b, -\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(a - \frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{4} + a^2\right)\left(\left(\psi\left(\frac{3}{4} + \frac{a}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2}\right)\right)\cos(\pi\, a) - \pi\right) \\
&+ \frac{(-4\,a^3 + 8\,a^2 - a - 4)}{8\,a - 4}\cos(\pi\, a)\ ,
\end{aligned}
\tag{6.48}
$$

化简为

$$
{}_3F_2\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1\right) = -\frac{15\,\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)}{64} + \frac{61\sqrt{2}}{64} \tag{6.49}
$$

当 $a = 1/4$ 时。

6.3.4 定理 17

按照前几节的相同方法，我们发现，Campbell 和 Abrarov 定理（17）写作

$$
{}_3F_2\left(1 - a, a, b; \frac{3}{2}, b + 1; 1\right) = \frac{2\,b\,\cos(\pi\, a)\,{}_3F_2\left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} - b; \frac{5}{2} - a, a + \frac{3}{2}; 1\right)}{(2\,a - 3)\,(2\,a - 1)\,(2\,a + 1)} \tag{6.50}
$$

对应于 Thomae 关系（B.4）。若令 $a=b=1/4$，我们便可从 [25, 条目 17] 找到相应的 3F2(1)，它与 Dixon 定理（A.1）相邻，具体而言

$$ {}_3F_2\left(1,\frac{5}{4},\frac{3}{2};\frac{7}{4},\frac{9}{4};1\right)=\lim_{c\to 1}X_{1,1}\left(\frac{5}{4},\frac{3}{2},c\right)=-\frac{15}{2}-\frac{15}{8}\left(\psi\left(\frac{1}{8}\right)-\psi\left(\frac{5}{8}\right)\right), \tag{6.51} $$

结合式 (6.11)，这等价于 Campbell和Abrarov推论 (7)。

注 20. 此外，尽管在 $b=n$ 为非负整数的情况下，式 (6.50) 中出现的两个 3F2(1) 都无法通过数据库 [25]，求值，但我们根据 [25,条目 26], 得到恒等式

$$ \begin{aligned} {}_3F_2\left(a,n,1-a;\frac{3}{2},n+1;1\right)&=\frac{\Gamma(-a-n+1)\,\Gamma(n+1)\,\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma(n+1-a)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-n\right)}\\ &+\frac{\Gamma(a-n)\,\Gamma(n+1)\,\pi}{4\,\Gamma(-a+1)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma\left(-k-a\right)(-1)^k}{\Gamma\left(-a+\frac{3}{2}-k\right)\Gamma\left(n-k\right)\Gamma\left(a+1+k-n\right)}, \end{aligned} \tag{6.52} $$

从而将无穷和化为终止和。或者，如果 $a=m$ 为正整数，我们根据 [25, 条目 (33)]

$$ {}_3F_2\left(m,b,1-m;\frac{3}{2},b+1;1\right)=\frac{(-1)^m\;b\Gamma\left(b-\frac{1}{2}\right)\Gamma(m)}{4\,\Gamma(b+m)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b+k\right)}{\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+b-m+k\right)} \tag{6.53} $$

以及式 (6.50) 中相应的恒等式。

6.4 Mirzoev和Safonova

经过长达数页的详尽分析，Mirzoev和Safonova [50] 求出了两个值得关注的求和

$$ {}_3F_2\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{2},\frac{a}{2}+\frac{1}{2},\frac{1}{2};1,\frac{3}{2};1\right)\ \text{and}\ \ {}_3F_2\left(1-a,1+a,\frac{1}{2};2,\frac{3}{2};1\right) $$

采用积分表示和特殊和。由于这两个求和的推广都与Watson定理相邻 [3], ，我们可以通过写出以下内容来扩展Mirzoev和Safonova的解

$$ \begin{aligned} &{}_3F_2\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{2},\frac{a}{2}+\frac{1}{2},c;2\,c,\frac{3}{2};1\right)=W_{1,0}\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{2},\frac{a}{2}+\frac{1}{2},c\right)\\ &=\frac{2\,\Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right)^2}{a\,(2\,c-1)}\left(-\frac{\cos\left(\frac{\pi(1+a)}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{a}{4}+c\right)\Gamma\left(-\frac{1}{4}+\frac{a}{4}+c\right)}+\frac{\sin\left(\frac{\pi(1+a)}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{4}+c\right)\Gamma\left(-\frac{1}{4}-\frac{a}{4}+c\right)}\right) \end{aligned} \tag{6.54} $$

and

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(1-a,1+a,c;2\,c+1,\frac{3}{2};1\right)=W_{0,1}\left(1-a,1+a,c\right)\\
&=\frac{\Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right)^2}{2\,c-1}\left(-\frac{\cos\left(\frac{\pi\,a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+c+\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+c-\frac{a}{2}\right)}+\frac{2\,\sin\left(\frac{\pi\,a}{2}\right)}{a\,\Gamma\left(\frac{a}{2}+c\right)\Gamma\left(-\frac{a}{2}+c\right)}\right).
\end{aligned}
\tag{6.55}
$$

现在计算极限 $c\to 1/2$ 在（6.54）和（6.55）中的值是直接的，由此可得

$$
{}_3F_2\left(\frac{1}{2},-\frac{a}{2}+\frac{1}{2},\frac{a}{2}+\frac{1}{2};1,\frac{3}{2};1\right)=\frac{1}{a}+\frac{\sin\left(\frac{\pi(1+a)}{2}\right)}{\pi\,a}\left(\psi\left(\frac{1}{4}+\frac{a}{4}\right)-\psi\left(\frac{3}{4}+\frac{a}{4}\right)\right)
\tag{6.56}
$$

and

$$
{}_3F_2\left(\frac{1}{2},1+a,-a+1;\frac{3}{2},2;1\right)=\frac{1}{a}+\frac{\sin\left(\pi\,a\right)}{a^2\,\pi}\left(\psi\left(\frac{a}{2}\right)a-\psi\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)a+1\right),
\tag{6.57}
$$

之后，对 p 和 q 取选定值并设置 $a=p/q$，即可得到与前文讨论的类似奇异恒等式，这些恒等式等价于 Mirzoev 和 Safonova 得出的结果。值得探讨的是，对于 Mirzoev 和 Safonova 同样考察的两个 4F3(1) 级数，是否也存在等价的分析。

6.5 Zaidi 和 Almuthaybiri

Zaidi 和 Almuthaybiri 最近发表的一篇论文 [51] 除了其他内容外，还提供了一个教学示例，展示了如何简化复杂推导。作者用约 15 页的篇幅计算了 3F2(1) 的三个实例：

$$
K(a)\equiv{}_3F_2\left(1-a,1,1+a,;1+a,a+2;1\right),\qquad a>1/2;
\tag{6.58}
$$

$$
G(a)\equiv{}_3F_2\left(1-a,1,2+a,;1+a,3+a;1\right),\qquad a>1/2;
\tag{6.59}
$$

$$
H(a)={}_3F_2\left(1/2-n,1,2\,n+1;3/2+n,2\,n+2;1\right),\qquad n=0,1\ldots.
\tag{6.60}
$$

以下是一些评论：

- (6.58) 和 (6.59) 中指定的极限应为 $a>0$；

• 在 (6.58) 中，由于参数 $c=e$ （见 (1.1)），3F2(1) 可直接化简为高斯超几何函数(1)，并立即得到 Zaidi 和 Almuthaybiri 的结果

$$ {}_3F_2\left(1-a,1,1+a;1+a,2+a;1\right)={}_2F_1\left(1,1-a;2+a;1\right)=\frac{1+a}{2\,a}\,,a>0, \tag{6.61} $$

根据高斯（1812）提出的一个著名定理；

• (6.59) 中的函数 $G(a)$ 满足 Karlsson 恒等式 (2.5)，其中 $n=1$，因此只需一行便可立即重现 Zaidi 和 Almuthaybiri 结果的等价形式

$$ {}_3F_2\left(1,2+a,1-a;a+3,1+a;1\right)=\frac{(2+a)\left(2\,a^2+a+1\right)}{2\,a\,(2\,a+1)\,(1+a)}\,; \tag{6.62} $$

• (6.60) 中的函数 $H(a)$ 恰好与 Dixon 定理 (A.1) 相邻，但先考察它的 Thomae 派生式并注意到以下事实，可以得到更简单的求值：

$$ \begin{aligned} &{}_3F_2\left(\frac{1}{2}-n,1,2\,n+1;\frac{3}{2}+n,2\,n+2;1\right)\\ &\quad=\frac{\Gamma\left(2\,n+1\right)\Gamma\left(2\,n+2\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+3\,n\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)}\,{}_3F_2\left(\frac{1}{2}+n,\frac{1}{2}-n,\frac{1}{2}-n;\frac{3}{2}+n,\frac{3}{2}+n;1\right) \end{aligned} \tag{6.63} $$

应用 Thomae 算子 (B.10) 后。(6.63) 右侧的函数是恒等式 (3.6) 的一个特殊情形，由此得到

$$ \begin{aligned} &{}_3F_2\left(\frac{1}{2}+n,\frac{1}{2}-n,\frac{1}{2}-n;\frac{3}{2}+n,\frac{3}{2}+n;1\right)\\ &=\lim_{h\to\frac{1}{2}}\left(\frac{\left(2\,n+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-2\,n-h\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+3\,n\right)\Gamma\left(h+n+1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)\Gamma\left(2\,n+2\right)}\right.\\ &\times\sum_{k=0}^{2\,n}\frac{\Gamma\left(-k-n-\frac{1}{2}\right)(-1)^k}{\Gamma\left(h+n-k\right)\Gamma\left(2\,n+1-k\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-2\,n-h+k\right)}\\ &\left.+\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}-3\,n\right)\Gamma\left(h-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+3\,n\right)\Gamma\left(h+n+1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)}{\Gamma\left(h+2\,n+\frac{1}{2}\right)^2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)^2}\right) \end{aligned} \tag{6.64} $$

这里再次需要求极限，因为这是一个特殊情况。借助计算机求解式（6.64）中的极限是一个直接明了的练习，最终可以得到一个

由 Zaidi 和 Almuthaybiri 寻求的一般结果的更简洁形式：

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(\frac{1}{2}-n,1,2\,n+1;\frac{3}{2}+n,2\,n+2;1\right)\\
&\quad=-\frac{2\,(-1)^n\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)^2}{\pi}\sum_{k=0}^{2\,n-1}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-3\,n\right)\Gamma\left(k+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-n+k\right)\Gamma\left(2+k\right)}\\
&\quad-\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)^3(-1)^n}{\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+3\,n\right)}\left(\psi\left(1/2+n\right)-\psi\left(1+n\right)-2\,\ln\left(2\right)\right)\,.
\end{aligned}
\tag{6.65}
$$

恒等式 (6.65) 在数值上再现了 Zaidi 和 Almuthay-biri 所引用的结果，适用于 $n=1$, $n=2$ 这几种情况；但对于 $n=3$ 这种情况则不一致，而我们得到了正确的恒等式

$$
{}_3F_2\left(1,7,-\frac{5}{2};8,\frac{9}{2};1\right)=\frac{518231}{831402}-\frac{70}{138567}\,\ln\left(2\right),
\tag{6.66}
$$

一个经数值验证的结果；

- 需要指出的是，作者的参考文献 25 引用了一篇早已被证实（见 [52]）有误、绝不应被引用的论文。

6.6 Campbell、D'Aurizio 和 Sondow

在一篇专门研究 ${}_3F_2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4};\frac{1}{2},1;1\right)$ 求值的论文 -[53] 中，与这些性质相关

关于帕贝洛斯（参见该词条），Campbell、D'Aurizio 和 Sondow 遗憾地指出，当时的计算机代数程序（Maple 和 Mathematica）无法求出那个特定的和[5]。在考虑这种可能性后，他们发现"Watson定理不能直接应用"于所讨论的和，但遗憾的是，他们忽略了它可能与 Watson 定理相邻这一点，随后便着手为该求值给出五个彼此独立的证明。在此，我为他们的成果再添一项：通过证明，对于 c的一般取值，在 $a=1/2-s,\quad b=1/2+s$ 且相邻参数为 $m=0,\quad n=2$时，利用 Chu 恒等式可求出一个更一般的和，该恒等式适用于 Watson 相邻情形（见附录 A 、第 6.4 节和 [3]）：

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(c,\frac{1}{2}-s,\frac{1}{2}+s;\frac{1}{2},2\,c+2;1\right)=W_{0,2}(1/2-s,1/2+s,c)\\
&\quad=\frac{4\,\Gamma\left(\frac{5}{2}+c\right)^2}{(c+1)\,(2\,c+1)\,(2\,c+3)^2}\left(\frac{(1-2\,s+2\,c)\cos\left(\frac{\pi(2\,s+1)}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}-\frac{s}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{s}{2}+c\right)}+\frac{\sin\left(\frac{\pi(2\,s+1)}{4}\right)(1+2\,s+2\,c)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{s}{2}+c\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{s}{2}+c\right)}\right).
\end{aligned}
\tag{6.67}
$$

[5]这一观察直到今天仍然成立。

求出极限 $c \to -1/2$后，(6.67)可得

$$ {}_3F_2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-s,\frac{1}{2}+s;\frac{1}{2},1;1\right)=2\,s+\frac{2\,\cos\left(\pi\,s\right)}{\pi}\left(s\,\psi\left(\frac{1}{4}+\frac{s}{2}\right)-s\psi\left(\frac{3}{4}+\frac{s}{2}\right)+1\right). \tag{6.68} $$

令 $s=1/4$ 并利用 (6.10)，即

$$ \psi\left(\frac{7}{8}\right)-\psi\left(\frac{3}{8}\right)=\left(\pi-2\,\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)\sqrt{2}\,, \tag{6.69} $$

(6.68) 得到

$$ {}_3F_2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4};\frac{1}{2},1;1\right)=\frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}}{\pi}\,, \tag{6.70} $$

这是一个“奇异”恒等式，与 Campbell、D'Aurizio 和 Sondow 给出的几种证明一致。

6.7 Xiaoxia Wang

2013年，Xiaoxia Wang [54], “受到 Chu 和 Wang 的研究启发；他们针对终止级数的这一模式建立了类似 Whipple 的公式”

$$ {}_3F_2\left(-m,m+\epsilon+\delta,x;1+\epsilon,\delta+2\,x;1\right), \tag{6.71} $$

其中 ϵ 且 δ 为整数，$|\delta|\le 5$ 且 $0\le\epsilon\le 5$，通过运用 Gould–Hsu 反演技术（参见相关内容）拓展了这项研究。为此，他们进行了三页的分析，推导出适用于更大范围的 ϵ和 δ的闭合一般表达式，其特征由 $\epsilon=2t$和 $\epsilon=2t+1$给出，**其中 t 也是整数** 且 $\epsilon+\delta=1$。此后，这项研究又拓展至 $|\epsilon+\delta|\le 2$，并给出了实例。对于 m 为偶数的情况，Wang 得到

$$ {}_3F_2\left(x,-m,1+m;1+2\,j,1-2\,j+2\,x;1\right)=\frac{\left(j-x\right)\left(\frac{1}{2}-j\right)_{\frac{m}{2}}\left(1-x+j\right)_{\frac{m}{2}}}{\left(2\,j-x\right)\left(1+j\right)_{\frac{m}{2}}\left(x+\frac{1}{2}-j\right)_{\frac{m}{2}}} \tag{6.72} $$

为清晰起见，变量 t 已被替换为 j。

此处我们指出，模板求和式 (6.71) 本身就是一个更一般但仍为终止和的特殊情形，其特征是具有一组扩展的参数。可以看出，它与 Whipple 定理（见 (A.2)）相邻。简言之，我们有

$$ {}_3F_2\left(a,x,k-a;1+2\,t+n,2\,x+p-2\,t;1\right)=\Omega_{k-1,n+p}\left(a,x,2\,x-2\,t+p\right) \tag{6.73} $$

其中，按照 Wang 的记号，我们将 $-m:=a$, $\epsilon+\delta=k$, $\delta:=p-2t$ 和 $\epsilon:=n+2t$ 进行了推广，引入了一个新的独立变量 k，并且不再要求 m、ϵ 和

t 为整数。(6.73) 的完整求值过程相当冗长，因此 relegated to 附录 E.3。现在考虑 $n=0$, $p=1$, $k=1$ 的情形；这对应于 Wang 定理 3 的推广，通过将计算机辅助代入直接代入 (E.5)，得到

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a,x,1-a;1+2\,t,1-2\,t+2\,x;1\right) &= \frac{\pi\,4^{-x}\,\Gamma\left(1-2\,t+2\,x\right)\Gamma\left(1+2\,t\right)}{2t-x} \\
&\times\left(-\frac{1}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}-t-\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}+x-t\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}+t+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+t-\frac{a}{2}\right)}\right. \\
&\left.+\frac{1}{\Gamma\left(\frac{a}{2}+t\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+t-\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(1+x-\frac{a}{2}-t\right)\Gamma\left(-t+\frac{a}{2}+\frac{1}{2}+x\right)}\right), \qquad (6.74)
\end{aligned}
$$

这里我们强调，a 和 t 都不必是整数，并注意到，交换 $a\leftrightarrow 1-a$时，(6.74) 保持对称。引入整数 q，其中 $q=m/2$ 用 Wang 所用的变量表示；当 $a=-2q$、$t=j$ 和 $j-q\leq 0$ 时，我们得到更简洁的形式

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(x,-2\,q,2\,q+1;1+2\,j,1-2\,j+2\,x;1\right) \\
&\quad=-\frac{\pi\,4^{-x}\,\Gamma\left(1-2\,j+2\,x\right)\Gamma\left(1+2\,j\right)}{\left(2\,j-x\right)\Gamma\left(x-j+\frac{1}{2}+q\right)\Gamma\left(x-j-q\right)\Gamma\left(j+\frac{1}{2}-q\right)\Gamma\left(1+q+j\right)}. \qquad (6.75)
\end{aligned}
$$

当 $a=-2q-1$ 时，再次使用 $t=j$，若 $j-q\leq 0$，我们得到，

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(x,-2\,q-1,2\,q+2;1+2\,j,1-2\,j+2\,x;1\right) \\
&\quad=\frac{\pi\,4^{-x}\,\Gamma\left(1-2\,j+2\,x\right)\Gamma\left(1+2\,j\right)}{\left(2\,j-x\right)\Gamma\left(j-q-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+q+j\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+x+q-j\right)\Gamma\left(x-j-q\right)}. \qquad (6.76)
\end{aligned}
$$

前者等价于 (6.72)。需要注意的是，Wang 的解 (6.72) 在 $m/2-|t|\geq 0$ 时也不成立（在 Wang 的记号中，t 是整数）。

我们还考虑 [54, 式(4)]

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(x,-m,1+m;2+2\,j,2\,x-2\,j;1\right) \\
&\quad=\frac{\left(1+2\,j\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-j+\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(1-x+j+\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(1+j\right)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}-j\right)}{2\left(1+2\,j-x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-j\right)\Gamma\left(1-x+j\right)\Gamma\left(1+\frac{m}{2}+j\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+x+\frac{m}{2}-j\right)}, \qquad (6.77)
\end{aligned}
$$

其中，原变量 t 已改写为 $t:=j$，以便于理解。(6.77) 对 m 的偶数取值成立，此外还要求 $j<m/2$。对应于 m 奇数取值的情况给出

在 [54]中。对于 a, t 和 x 的一般取值，我们在 (E.5) 中设定 $n = 1, p = 0, k = 1$，并完成 d

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a, x, 1-a; 2+2\,t, 2\,x-2\,t; 1\right) &= \frac{\pi\, 4^{-x}\Gamma\left(2\,x-2\,t\right)\Gamma\left(2+2\,t\right)}{1+2\,t-x} \\
&\times \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{a}{2}-t+x\right)\Gamma\left(1+t-\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(t+\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-t+x-\frac{a}{2}\right)} \right. \\
&\left. -\frac{4}{\Gamma\left(\frac{a}{2}-t-\frac{1}{2}+x\right)\Gamma\left(x-\frac{a}{2}-t\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+t-\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(t+\frac{a}{2}+1\right)} \right)
\end{aligned}
\tag{6.78}
$$

将其化约为一种推广性，即 $[54,$ Eq.(4)$]$，在 $a = m$ 为偶数或奇数时，这两部分的推广，以及 $t = j$。

7 总结

事实证明，多年来发展起来并常用于 3F2(1) 分析的核心恒等式，可以用比以往所知简单得多的方法推导出来。随后，若将相关技巧应用于这些常用恒等式本身，而非其推导过程，便能以同样简单的方式发展出推广和扩展。尽管在 Miller/Paris 挑战问题本身上取得了一些进展，但通过放宽基本规则，我们推导出了若干看似全新的有用恒等式，并为两项近期新增的结果（即 (3.5) 和 (3.7)）找到了更简单的推导方法。这两项结果丰富了分析学家常用的工具。

关于 Krattenthaler 和 Rivoal 意义上的奇异求值，我们在不满足 Thomae 变换的双部分超几何 3F2(1) 变换列表中增添了许多例子，并指出当涉及终止级数时，级数反转也应纳入这类变换之中。关于 Chu、Chen 等人意义上的奇异求值，我们证明，奇异性在于某些参数取有理数值，这些数值可映射到相应三角函数能够化简为简单无理基本常数的角度。另一方面，通过认识到许多此类情形与 DWW 中至少一个结果相邻，因而可求和，他们提出的例子仍可用双伽马函数表示求和。对于一般的 p/q，不可约的 $\psi(p/q)$ 实例是否能被恰当地称为“奇异”，则见仁见智。

在最后一节中，重新回顾了精选的近期论文，以说明其中包含的推导可以利用本文介绍的方法加以简化和推广。

8 致谢

感谢 Roy Hughes 教授（新南威尔士大学）让我注意到论文[53]，并为我获取了论文 [50] 的副本。

本文完全由作者独立完成，未获得任何资助机构的资金投入。

参考文献

[1] W.N. Bailey。《广义超几何级数》。剑桥数学与数学物理丛书。剑桥大学出版社，1935年。[2] Mohamed M. Awad、Medhat A. Rakha 和 Asmaa O. Mohammed。广义化 Watson定理对 3F2(1) 级数的推广。《欧洲纯粹与应用数学杂志》，18，2025年。[3] Wenchang Chu。带有两个额外整数参数的 Watson-Whipple-Dixon 延拓 3F2 级数的解析公式”。《计算数学》，81:467–479，2012年。https://doi.org/10.1090S0025-5718-2011-02512-3。[4] Christian Krattenthaler 和 Tanguy Rivoal。我们如何避开 Thomae关系？《日本数学会杂志》，58(1):183 – 210，2006年。[5] Wenchang Chu 和 Xiaoxia Wang。Abel方法、分部求和与超几何相邻关系。《积分变换与特殊函数》，18(11):771– 807，2007年。[6] A.P. Prudnikov、Yu. A. Brychkov 和 O.I. Marichev。《积分与级数：更多特殊函数》，第3卷。Gordon and Breach科学出版社，纽约，1986年。[7] L.J. Slater。《广义超几何函数》。剑桥大学出版社，1966年。[8] E.D. Krupnikov 和 K.S. K¨olbig。广义超几何函数的一些特殊情形 ${}_{q+1}F_q$。《计算与应用数学杂志》，78:79–95，1996年。[9] Earl D. Rainville。《特殊函数》。Chelsea Publishing Company，1960年。[10] George E. Andrews、Richard Askey 和 Ranjan Roy。《特殊函数，《数学及其应用百科全书》第71卷》。剑桥大学出版社，英国剑桥，2000年。[11] Minton B.M. 单位自变量的广义超几何函数。*J. Math. Phys.*，11(4):1375–6，1970年。

[12] Karlsson P.W. 具有整数参数差的超几何函数。*J. Math.Phys.*，12(2):270–271，1971年。[13] George Gasper。基本超几何级数的求和公式。*Siam J. Math.Anal.*，12(2):196–200，1981年。[14]D. B. Karp 和 E. G. Prilepkina。Karlsson–Minton 求和定理的推广及 Miller–Paris 第一个变换的一些推论。《积分变换与特殊函数》，29(12):955–970，2018年。https://doi.org/10.1080/10652469.2018.1526793，也可从 https://arxiv.org/abs/1806.03434 获取。[15] Hjalmar Rosengren。Karlsson-Minton型超几何函数的约化公式。*Const. Approx*，20:525–548，2004年。https://doi.org/10.1007/s00365-003-0541- 6，也可从 https://arxiv.org/abs/math/0202232 获取。[16]Maria Weber 和 A. Erd´elyi。关于Rodrigues公式的有限差分类比。*TheAmerican MathematicalMonthly*，59(3):163–168，1952。https://doi.org/10.1080/00029890.1952.11988094。[17] K Srinivasa Rao、J Van der Jeugt、J Raynal、R Jagannathan 和 V Rajeswari。终止型 3F2(1) 级数的群论基础。《物理学杂志*A*：数学与广义》，25(4):861–876，1992年2月。https://doi.org/10.1088/0305-4470/25/4/023。[18] Luke Y。《特殊函数及其逼近》，第I卷，《数学在科学与工程中的应用》第53卷。Academic Press，1969年。[19] Michael Milgram。超几何主题的变体。*J. Class. Anal.*，2018年。`https://dx.doi.org/10.7153/jca-2018-13-01`。[20]W A Beyer、J D Louck 和 P.R. Stein。广义超几何级数若干恒等式的群论基础。*J. Math. Phys.*，28(3)，1987年3月。https://doi.org/10.1063/1.527634。[21] Marko Petkov˘sek、Herbert S. Wilf 和 Doron Zeilberger。$A=B$。A.K.Peters. Ltd.，1997年。`https://www2.math.upenn.edu/~wilf/Downld.html`。[22] John M. Campbell 和 Paul Levrie。关于具有自由下参数的二项超几何递推，2024年。[23] John M. Campbell。一个基于Wilf–Zeilberger方法的巴塞尔问题解及其应用。*Discrete Math. Lett.*，10:21–27，2022年。https://doi.org/10.47443/dml.2022.030。[24] Michael Milgram。关于超几何 3F2(1)——综述。`https://arxiv.org/pdf/1011.4546`。

[25]M. S. Milgram. 447 个超几何 3F2(1) 的实例。*ArXiv* 预印本，2011年5月。“ https://arxiv.org/abs/1105.3126; also https://www.researchgate.net/publication/51891949”。[26] A. R. Miller 和 R. B. Paris。具有整数参数差的克劳森级数 ${}_3F_2(1)$ 及超几何函数 ${}_2F_2(x)$ 的变换。《积分变换与特殊函数》，23(1):21–33，2012年。[27] Gottschalk J.E. 和 E.N. Maslen。单变量广义超几何函数的约化公式。《物理学杂志*A*：数学与广义》，21(9):1983，1988年。[28] M. A. Shpot 和 H. M. Srivastava。具有单位自变量和负整数参数差的克劳森型超几何函数 ${}_3F_2$ 。《应用数学与计算》，259:819–827，2015年5月。另见 ArXiv 预印本，1411.2455v3，2015年4月15日，doi/10.1016/j.amc.2015.03.031。[29]S.I.Kalmykov 和 D.B.Karp。库默尔函数乘积之和的新恒等式。《西伯利亚电子数学报告》，15:267–276，2018年。https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.025。[30] Marta Na Chen 和 Wenchang Chu。某些特殊 3F2(1) 级数的求值。《名古屋数学杂志》，249:107–118，2023年。https://doi.org/10.1017/nmj.2022.23。[31] Allen R. Miller 和 H. M. Srivastava。单位自变量广义超几何级数的 Karlsson–Minton 求和定理。《积分变换与特殊函数》，21(8):603–612，2010年。https://doi.org/10.1080/10652460903497259。[32] Michael Milgram。对 Rao 等人一篇论文、拉马努金的一条记录及一个新的 3 F2(1) 的评论。《计算与应用数学杂志》，201:1–2，2007年。 https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.01.025。[33] E.W. Weisstein。Saalsch¨utz 定理。https://mathworld.wolfram.com/SaalschuetzsTh

定理.html。

[34] https://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/ Hypergeometric4F3/03/02/02/.[35] Kwang-Wu Chen. 克劳森级数 3F2(1) 的整数参数差. 对称性, 13(10), 2021年. https://doi.org/10.3390/sym13101783.[36] Krattenthaler C., Srinivasa Rao K. 角动量系数的群论方面、超几何变换及其对称性。载于：《科学中的对称性 *XI*》，由 *Gruber B.*、*Marmo G.*、*Yoshinaga N.* 编。施普林格, 2004. 可从 http://www.mat.univie.ac.at/ Kratt/artikel/bregenz1.html 获取。

[37]Dmitrii Karp 和 Elena Prilepkina. 单位自变量平移一位的超几何函数：群论研究. 《数学》, 8(11), 2020年. https://doi.org/10.3390/math8111966.[38]M.I. Qureshi 和 S.H. Malik. 一些终止的 k-平衡克劳森超几何求和定理. 《国际应用与计算数学杂志》, 9(59), 2023年. https://doi.org/10.1007/s40819-023-01536-0.[39] Asena Çetinkaya 和 Dmitrii Karp. 可转换为超几何级数的双伽马级数. 载于《经典超几何函数及其推广》。关于超几何的一切小型专题研讨会，正交多项式、特殊函数及其应用第16届国际研讨会（OPSFA-16），加拿大魁北克省蒙特利尔，2022年6月13日至17日。关于超几何函数和 q- 级数的美国数学会特别专题会议，2022 年美国数学会秋季西部分区会议，美国犹他州盐湖城，2022年10月22日至23日。关于超几何函数、 q-级数及其推广的美国数学会特别专题会议，2023年美国数学会春季东部分区线上会议，2023年4月1日至2日，第3–23页。美国罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2025年。另可从 https://arxiv.org/pdf/2304.04102 获取。[40] Dmitrii Karp 和 Elena Prilepkina. 具有整数参数差的超几何函数 ${}_4F_3(1)$. 2022年. https://arxiv.org/abs/2202.04388.[41] Masanori Asakura、Noriyuki Otsubo 和 Tomohide Terasoma. 超几何函数特殊值的代数几何研究 ${}_3F_2$. 《名古屋数学杂志》, 236:47–62, 2019年. https://doi.org/10.1017/nmj.2018.36.[42]Wenchang Chu. 在 π、$\sqrt{2}$ 和 $\log(1+\sqrt{2})$ 中求得的七百个奇异 ${}_3F_2$ -级数. 《当代数学》, 2(4):327–98, 2021年. https://doi.org/10.37256/cm.2420211066.[43] K¨olbig K.S. 多伽马函数 $\psi^{(k)}(x)$，针对 $x = 1/4$ 和 $x = 3/4$. 《计算与应用数学杂志》, 75:43–46, 1996年.[44] Mark W. Coffey. 双伽马函数和多伽马函数的积分与级数表示. arXiv 预印本, 2010年7月. https://doi.org/10.48550/arXiv.1008.0040.[45]M. Ram Murty 和 N. Saradha. 双伽马函数的超越值. 《数论杂志》, 125:298–318, 2007年. https://mast.queensu.ca/murty/murty- saradha.pdf.[46] Wenchang Chu. 奇异 3F2 级数的更多闭式公式. 《公理》, 12(3), 2023年. https://www.mdpi.com/2075-1680/12/3/291.[47] M.I. Qureshi 和 Mohammad Shadab. 单位自变量克劳森超几何函数的一些求和定理 . 《应用与应用数学》, 13:469–478, 2020年. http://pvamu.edu/aam.

[48] Marta Na Chen 和 Wenchang Chu. 通过 Kummer 变换和 Thomae 变换得到的四类非终止型 3F2(1)级数。*Ars Combinatoria*，158:3–10，2024年。https://doi.org/10.61091/ars158-01.

[49] John Campbell 和 Sanjar Abrarov. 拉马努金主定理的一个类似结果。2018年。`https://hal.science/hal-01897255/document`。

[50] K.A. Mirzoev 和 T.A. Safonova. 关于高斯定理中欧拉双伽马函数在有理点处的取值。圣彼得堡数学杂志，35(2):311–325，2024年。https://doi.org/10.1090/spmj/1806.

[51]Abdelhamid Zaidi 和 Saleh Almuthaybiri. 超几何函数 ${}_3F_2(1)$ 若干子族的显式求值及特定分数阶积分。*AIMSMathematics*，10(3):5731–5761，2025年。https://www.aimspress.com/article/doi/10.3934/math.2025264.

[52] Milgram M. “关于单位自变量的 ${}_3F_2$ 超几何函数的新两项关系式的评论”。计算与应用数学杂志，196：437–438，2006年。

[53]John M. Campbell、Jacopo D’Aurizio 和 Jonathan Sondow。帕贝洛斯的超几何函数。《美国数学月刊》，127(1)：23–32，2020年1月。https://www.jstor.org/stable/10.2307/48661441。

[54] Xiaoxia Wang。五种终止型 3F2 求和公式模式。积分变换与特殊函数，24(5)：392–400，2013年。https://doi.org/10.1080/10652469.2012.697065。

A 附录：Dixon/Whipple/Watson（$m = n = 0$）及其邻接对应式

以下分别是与 Watson/Whipple/Dixon 相邻的三个关系，由 Chu [3] 求值，并由整数 m 和 n 的非零取值定义：

Dixon

$$X_{m,n}(a,b,c) = {}_3F_2(a,b,c;1+a-b+m,1+a-c+n;1) \tag{A.1}$$

Whipple：

$$\Omega_{m,n}(a,b,c) = {}_3F_2(a,b,1-a+m;c,1+2\,b-c+n;1) \tag{A.2}$$

Watson：

$$W_{m,n}(a,b,c) = {}_3F_2\left(a,b,c;2\,c+n,\frac{1}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{m}{2};1\right) \tag{A.3}$$

B 附录：非平凡的 Thomae 关系

B.1 非终止情形

注意到 Hardy 的一个定理（由 Krattenthaler 和 Rivoal 给出），即可轻松得到非终止型 3F2(1) 的九个非平凡 Thomae 变换 [4, 式 (2.3)]:

定理 21. 设

$$s = a + b + c - e - f\,. \tag{B.1}$$

则函数

$$\frac{1}{\Gamma(s)\,\Gamma(2\,e)\,\Gamma(2\,f)}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}2a-s, 2b-s, 2c-s\\ 2e, 2f\end{matrix}|1\right) := \frac{1}{\Gamma(-s)\,\Gamma(e)\,\Gamma(f)}\,{}_3F_2\left(\begin{matrix}a, b, c\\ e, f\end{matrix}|1\right) \tag{B.2}$$

是 $\{a, b, c, e, f\}$ 中置换的对称函数，其中符号“$:=$”表示左侧有序符号多变量替换：$a := s$, $c := -c/2$, $c := c + a - 2e - 2f$, $b := -b/2$, $b := b + a - 2e - 2f$, $e := e/2$, $f := f/2$。

推论 22. 对 $\{a, b, c, e, f\}$ 中置换应用 (B.2) 所得的集合是封闭的。

完整写出后，Thomae 变换如下:

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2(a,b,c;e,f;1) \\
&= \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(f)\,\Gamma(e)}{\Gamma(c)\,\Gamma(e+f-b-c)\,\Gamma(e+f-a-c)} \\
&\qquad \times {}_3F_2(-s,f-c,e-c;e+f-b-c,e+f-a-c;1)\ ; && \text{(B.3)} \\
&= \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(f)\,\Gamma(e)}{\Gamma(b)\,\Gamma(e+f-b-c)\,\Gamma(e+f-b-a)} \\
&\qquad \times {}_3F_2(-s,e-b,f-b;e+f-b-c,e+f-b-a;1)\ ; && \text{(B.4)} \\
&= \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(e)}{\Gamma(e-a)\,\Gamma(e+f-b-c)} \times {}_3F_2(a,f-b,f-c;f,e+f-b-c;1)\ ; && \text{(B.5)} \\
&= \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(f)}{\Gamma(f-a)\,\Gamma(e+f-b-c)} \times {}_3F_2(a,e-c,e-b;e,e+f-b-c;1)\ ; && \text{(B.6)} \\
&= \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(f)\,\Gamma(e)}{\Gamma(a)\,\Gamma(e+f-a-c)\,\Gamma(e+f-b-a)} \\
&\qquad \times {}_3F_2(-s,e-a,f-a;e+f-b-a,e+f-a-c;1)\ ; && \text{(B.7)} \\
&= \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(e)}{\Gamma(e-b)\,\Gamma(e+f-a-c)} \times {}_3F_2(b,f-c,f-a;f,e+f-a-c;1)\ ; && \text{(B.8)} \\
&= \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(f)}{\Gamma(f-b)\,\Gamma(e+f-a-c)} \times {}_3F_2(b,e-c,e-a;e,e+f-a-c;1)\ ; && \text{(B.9)} \\
&= \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(e)}{\Gamma(e-c)\,\Gamma(e+f-a-b)} \times {}_3F_2(c,f-a,f-b;f,e+f-b-a;1)\ ; && \text{(B.10)} \\
&= \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(f)}{\Gamma(f-c)\,\Gamma(e+f-b-a)} \times {}_3F_2(c,e-a,e-b;e,e+f-b-a;1)\ . && \text{(B.11)}
\end{aligned}
$$

注 23。 这些变换源于对（B.2）左侧变量之间进行所有可能的非平凡交换置换：在 $\{e,f\} \leftrightarrow \{a,b,c\}$ 之间逐个交换（6 种可能）以及成对交换（3 种可能）。这些变换汇总于下文的表 1 中；用群论置换矩阵表示时，见 Beyer 等人 [20, 第 III 节]。

请注意，除非 $e-c=-n$ 或 $f-c=-n$ 中的一个使其终止，否则（B.3）的右端会发散；这正是 Minton 恒等式（2.4）的最初依据——参见附录（D.1）

方程编号	交换
(B.3)	$\{e, f\} \leftrightarrow \{a, c\}$
(B.4)	$\{e, f\} \leftrightarrow \{a, b\}$
(B.5)	$\{e\} \leftrightarrow \{a\}$
(B.6)	$\{f\} \leftrightarrow \{a\}$
(B.7)	$\{e, f\} \leftrightarrow \{b, c\}$
(B.8)	$\{e\} \leftrightarrow \{c\}$
(B.9)	$\{f\} \leftrightarrow \{c\}$
(B.10)	$\{e\} \leftrightarrow \{b\}$
(B.11)	$\{f\} \leftrightarrow \{b\}$

表 1：每种 Thomae 变换与 (B.2) 右侧变量互换之间的对应关系。

B.2 终止情形

为完整起见，现重现 Rao、Van der Jeugt、Raynal、Jagannathan 和 Rajeswari（RJRJR）[17]的 7 个基本变换如下：

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(-n, a, b; d, e; 1\right) \\
&= \frac{(d-a)_n}{(d)_n}\, {}_3F_2\left(-n, a, e-b; e, 1+a-d-n; 1\right), && \text{(B.12)} \\
&= (-1)^n \frac{(1-\sigma)_n}{(d)_n}\, {}_3F_2\left(-n, e-b, e-a; e, \sigma-n; 1\right), && \text{(B.13)} \\
&= \frac{(d-a)_n (e-a)_n}{(d)_n (e)_n} {}_3F_2\left(-n, a, 1-\sigma; 1+a-d-n, 1-e+a-n; 1\right), && \text{(B.14)} \\
&= \frac{(d-a)_n (b)_n}{(d)_n (e)_n}\, {}_3F_2\left(-n, e-b, 1-d-n; 1-b-n, 1+a-d-n; 1\right), && \text{(B.15)} \\
&= (-1)^n \frac{(1-\sigma)_n (b)_n}{(d)_n (e)_n}\, {}_3F_2\left(-n, e-b, d-b; 1-b-n, \sigma-n; 1\right), && \text{(B.16)} \\
&= (-1)^n \frac{(d-a)_n (d-b)_n}{(d)_n (e)_n}\, {}_3F_2\left(-n, 1-\sigma, 1-d-n; 1+b-d-n, 1+a-d-n; 1\right), && \text{(B.17)} \\
&= (-1)^n \frac{(a)_n (b)_n}{(d)_n (e)_n}\, {}_3F_2\left(-n, 1-d-n, -e-n+1; 1-b-n, 1-a-n; 1\right), && \text{(B.18)}
\end{aligned}
$$

其中 $\sigma \equiv -a-b+e+d+n$。其余变换可通过对 $\{a, b\}$ 和 $\{d, e\}$ 中的元素进行初等置换得到。(B.18)体现了级数反转。

C 附录：相邻关系选编

本附录列出了 3F2(1) 的若干连续关系。前四个摘自 Rainville 的著作 [9, 第 82]页：

$$ {}_3F_2\left(a,b,c;e,f;1\right)=\frac{a}{a-b}\,{}_3F_2\left(b,c,a+1;e,f;1\right)-\frac{b}{a-b}\,{}_3F_2\left(a,c,b+1;e,f;1\right) \tag{C.1} $$

$$ {}_3F_2\left(a,b,c;e,f;1\right)=\frac{(1-e)}{a-e+1}{}_3F_2\left(a,b,c;f,e-1;1\right)+\frac{a}{a-e+1}{}_3F_2\left(b,c,a+1;e,f;1\right) \tag{C.2} $$

$$ {}_3F_2\left(a,b,c;e,f;1\right)=-\frac{U_2}{s}\,{}_3F_2\left(a,b,c;e,f+1;1\right)-\frac{U_1}{s}\,{}_3F_2\left(a,b,c;f,e+1;1\right) \tag{C.3} $$

$$ {}_3F_2(a,\ b,\ c;\ e,\ f;\ 1)\ =-W_1\ \ {}_3F_2(b,\ \ c,\ \ a+1;\ \ f,\ \ e+1;\ 1)\ -W_2\ \ {}_3F_2\left(b,c,a+1;e,f+1;1\right) \tag{C.4} $$

其中

$$ U_1=\frac{(a-e)\,(b-e)\,(c-e)}{e\,(f-e)}\,, \tag{C.5} $$

$$ U_2=\frac{(a-f)\,(b-f)\,(c-f)}{f\,(e-f)}\,, \tag{C.6} $$

$$ W_1\equiv\frac{(b-e)\,(c-e)}{e\,(f-e)}\,, \tag{C.7} $$

$$ W_2\equiv\frac{(b-f)\,(c-f)}{f\,(e-f)} \tag{C.8} $$

且 $s\equiv a+b+c-e-f$。

摘自一份久已失传的资料，当 $z=1$ 时有效:

$$ {}_3F_2\left(a,b,c;e,f;z\right)={}_3F_2\left(a-1,b,c;e,f;z\right)+\frac{b\,c\,z}{e\,f}\,{}_3F_2\left(a,b+1,c+1;e+1,f+1;z\right) \tag{C.9} $$

and

$$ {}_3F_2\left(a,b,c;e,f;z\right)={}_3F_2\left(a,b,c;e+1,f;z\right)+\frac{a\,b\,c\,z}{e\,(e+1)\,f}\,{}_3F_2\left(a+1,b+1,c+1;e+2,f+1;z\right)\,. \tag{C.10} $$

摘自 Karp 和 Prilepkina[14,定理 3。4],

$$
{}_3F_2\left(a,b,c+n;b+p,c;1\right)=\frac{\left(b+p-1\right)\left(p-a-1\right)}{\left(p-1\right)\left(b+p-a-1\right)}{}_3F_2\left(a,b,c+n;b+p-1,c;1\right)
$$

$$
+\frac{a\,b\left({}_3F_2\left(a+1,b+1,c+n;b+p,c;1\right)-\frac{(c+n)}{c}{}_3F_2\left(a+1,b+1,c+n+1;b+p,c+1;1\right)\right)}{\left(p-1\right)\left(b+p-a-1\right)} \tag{C.11}
$$

引自 Krattenthaler 和 Rivoal [4,公式 (1.1) 和 (1.2)]

$$
{}_3F_2\left(1+a,b+1,c;\ a+2\,b+1,2\,a+b+1;1\right)
$$

$$
=\frac{2\left(a+b\right)}{2\,a+2\,b-c}{}_3F_2\left(a,b,c;a+2\,b+1,2\,a+b+1;1\right) \tag{C.12}
$$

and

$$
{}_3F_2\left(a,b,c;a+1,c+\frac{a\left(a-c+1\right)}{b-1}+1;1\right)=\frac{\left(a-b+2\right)\left(a^2-a\,c+b\,c+a-c\right)}{\left(a+1\right)\left(a^2-a\,b-a\,c+b\,c+2\,a-c\right)}
$$

$$
\times{}_3F_2\left(c,a+1,b-1;a+2,c+\frac{a\left(a-c+1\right)}{b-1};1\right). \tag{C.13}
$$

根据 Chu 和 Wang, [5,方程（1a）-（4a）]:

$$
{}_3F_2\left(a,b,c;e,f;1\right)=\frac{\left(\left(a+1-f\right)e+c\,b\right)}{\left(a+1-f\right)e}{}_3F_2\left(a+1,b,c;e+1,f;1\right)
$$

$$
+\frac{\mathfrak{s}\ \left(a+1\right)c\,b}{e\left(a+1-f\right)\left(e+1\right)f}{}_3F_2\left(a+2,b+1,c+1;2+e,f+1;1\right); \tag{C.14}
$$

$$
=\frac{\left(1+c+b-f\right)\left(1-f\right)}{\left(1+c-f\right)\left(1+b-f\right)}{}_3F_2\left(a-1,b,c;e,f-1;1\right)
$$

$$
+\frac{\mathfrak{s}\,c\,b}{\left(1+c-f\right)\left(f-b-1\right)e}{}_3F_2\left(a,b+1,c+1;e+1,f;1\right); \tag{C.15}
$$

$$
=\frac{\left(e\,f-a\left(1+c+b\right)\right)}{e\,f}{}_3F_2\left(a,c+1,b+1;e+1,f+1;1\right)
$$

$$
-\frac{a\,\mathfrak{s}\left(c+1\right)\left(b+1\right)}{\left(e+1\right)\left(f+1\right)e\,f}{}_3F_2\left(a+1,b+2,c+2;2+e,2+f;1\right); \tag{C.16}
$$

$$
=\frac{\left(1-e\right)\left(1-f\right)}{\left(1+a-e\right)\left(a+1-f\right)}{}_3F_2\left(a,c-1,b-1;e-1,f-1;1\right)
$$

$$
+\frac{a\,\mathfrak{s}}{\left(1+a-e\right)\left(a+1-f\right)}{}_3F_2\left(a+1,c,b;e,f;1\right), \tag{C.17}
$$

其中 $\mathfrak{s}=1+a+c+b-e-f$。关于大量后续邻接恒等式，请参阅 [5] 和第6.2节。

D 附录：证明

D.1 Minton 的证明（式(2.4)）及其推广

定理24。 对于所有正整数 m、 n，以下结论成立：

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(-m,a,c+n;c,n+a-m;1\right) &= (-1)^m\,\frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(n+a-m\right)\Gamma\left(1+m\right)}{\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(a\right)} \\
&\quad+\frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(n+a-m\right)\Gamma\left(1+n\right)}{\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(a-m-c\right)}\sum_{k=1+m}^{n}\frac{\Gamma\left(-c+a-m+k\right)(-1)^k}{\Gamma\left(1+n-k\right)k\,\Gamma\left(a+k\right)\Gamma\left(k-m\right)}\,.
\end{aligned}
\tag{D.1}
$$

证明。 在下文中，我们要求 a,c 不是整数，并从代换后的 (B.3) 开始：

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(-m,a,c;e,f;1\right) &= \frac{\Gamma\left(e\right)\Gamma\left(f\right)\Gamma\left(e+f-a+m-c\right)}{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(e+f+m-c\right)\Gamma\left(e+f-a-c\right)} \\
&\quad\times{}_3F_2\left(e-c,f-c,e+f-a+m-c;e+f+m-c,e+f-a-c;1\right)
\end{aligned}
\tag{D.2}
$$

令 $e=c-n$、 $c:=c+n$ 和 $f=s+n+a-m$，得到

$$
{}_3F_2\left(a,-m,c+n;c,s+n+a-m;1\right) = (-1)^m\,\frac{\sin\left(\pi\,s\right)\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(s+n+a-m\right)\Gamma\left(1+n\right)}{\Gamma\left(c+n\right)\pi\,\Gamma\left(a-m+s-c\right)}
\tag{D.3}
$$

$$
\times\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma\left(s-c+a-m+k\right)\Gamma\left(s+k\right)\Gamma\left(1-s+m-k\right)}{\Gamma\left(1+n-k\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(s+a+k\right)}\,.
\tag{D.4}
$$

请注意，由于分母中的因子 $\Gamma(1+n-k)$，求和的上限已降至 n。现在我们将求和拆分为两部分，得到

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(a,-m,c+n;c,s+n+a-m;1\right) &= \frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(s+n+a-m\right)(-1)^m\,\Gamma\left(1-s+m\right)}{\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(1-s\right)\Gamma\left(s+a\right)} \\
&\quad+\frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(s+n+a-m\right)\Gamma\left(1+n\right)}{\Gamma\left(c+n\right)\Gamma\left(a-m+s-c\right)}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Gamma\left(s-c+a-m+k\right)\Gamma\left(s+k\right)(-1)^k}{\Gamma\left(1+n-k\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(s+a+k\right)\Gamma\left(s+k-m\right)}
\end{aligned}
\tag{D.5}
$$

并考虑两种情况。如果 $s=0$ 和 $m \geq n$，则（D.5）中的求和由于因子 $1/\Gamma(k-m)$ 而恒为零。如果 $s=0$ 和 $m<n$，则只有当$k<m<n$时，（D.5）中的求和才为零。综合这两种可能性，得到（D.1）。由于当下限超过上限时，求和为零，因此（D.1）涵盖了这两种情况。

推论 25。 现在考虑 $s=p$ 为正整数的情形。通过与上述相同的推理，我们得到

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(-m,a,c+n;c,p+n+a-m;1\right) &= \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(p+n+a-m)\,\Gamma(1+n)}{\Gamma(c+n)\,\Gamma(a-m+p-c)} \\
&\times \sum_{k=1-p+m\geq 0}^{n} \frac{\Gamma(p-c+a-m+k)\,\Gamma(p+k)\,(-1)^k}{\Gamma(1+n-k)\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(p+a+k)\,\Gamma(p-m+k)}\,.
\end{aligned}
\tag{D.6}
$$

请注意，由于记号上的一个特殊之处，当 $p=0$ 时，(D.6) 不会化简为(D.1) 。

D.2 (5.6) 的证明

在极限 $e \to 1$ 下，令 (5.5) 和 (3.22) 的右端相等，我们得到

$$
\begin{aligned}
{}_3F_2\left(-m,a,b;1,a+b-m;1\right) = & -\frac{(-1)^m\,\Gamma(1+m)\,\Gamma(a+b-m)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} \\
&\times \sum_{k=0}^{m} \frac{\left[2\,\psi(1-k+m)-\psi(1-a-m+k)-\psi(1-m-b+k)\right)\Gamma(1-b-a+k)}{\Gamma(1-m-b+k]\,\Gamma(1-a-m+k)\,\Gamma(1-k+m)^2\,\Gamma(k+1)} \\
&+(-1)^m\,\frac{\left[2\,\psi(1+m)-\psi(b-m)-\psi(a-m)\right]\Gamma(1-b-a)\,\Gamma(a+b-m)}{\Gamma(b-m)\,\Gamma(a-m)\,\Gamma(1-b)\,\Gamma(1+m)\,\Gamma(1-a)}\,,
\end{aligned}
\tag{D.7}
$$

在适当重新定义变量以将结果转换为标准形式之后。由于 (D.7) 的左侧是一个已知的平衡度为 1 的 Saalsch¨utzian 求和（见 (2.3)with$c=1$），我们可以求解 (D.7)，从而计算该求和

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m} \frac{(2\,\psi(1-k+m)-\psi(1-a-m+k)-\psi(1-m-b+k))\,\Gamma(1-b-a+k)}{\Gamma(1-m-b+k)\,\Gamma(1-a-m+k)\,\Gamma(1-k+m)^2\,\Gamma(k+1)} \\
&\quad = -\frac{\sin(\pi b)\,\sin(\pi a)\,\Gamma(a)^2\,\Gamma(b)^2\,\Gamma(1-b-a)\,[\psi(a-m)-2\,\psi(1+m)+\psi(b-m)]}{\pi^2\,\Gamma(b-m)\,\Gamma(a-m)\,\Gamma(1+m)^2} \\
&\quad - \frac{\sin(\pi(a+b))\,\Gamma(a)^2\,\Gamma(b)^2\,\Gamma(1-b-a)}{\pi\,\Gamma(b-m)\,\Gamma(a-m)\,\Gamma(1+m)^2}\,.
\end{aligned}
\tag{D.8}
$$

此外，(D.8) 左侧所包含的基本对象也是一个已知的、终止的、 1–平衡求和的特例（见 (2.3)），即

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(1-b-a)}{\Gamma(1-b-m)\,\Gamma(1-a-m)\,\Gamma(m+1)^2}\;{}_3F_2\left(-m,-m,1-a-b;1-b-m,1-a-m;1\right)\\
&=\sum_{k=0}^{m}\frac{\Gamma(1-b-a+k)}{\Gamma(1-m-b+k)\,\Gamma(1-a-m+k)\,\Gamma(1-k+m)^2\,\Gamma(k+1)}\\
&=\frac{\Gamma(1-b-a)\,\Gamma(m+1-b)\,\Gamma(-a+m+1)}{\Gamma(1-b)^2\,\Gamma(1-a)^2\,\Gamma(1+m)^2}\,,
\end{aligned}\tag{D.9}$$

因此，先对 (D.9) 关于 a 求导，再关于 b 求导，并乘以适当的因子后加到 (D.8) 上，即可得到 (5.6)。

注 26。 由于已知一个 2-平衡的 Saalschütz 求和式（见 (5.3)），因此可以利用 (5.5) 中的 $n=2$ 重复上述推导，最终得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m}\frac{\left[\psi(k-a-b)-\psi(1-k+m)\right]\Gamma(k-a-b)}{\Gamma(1-m-b+k)\,\Gamma(1-a-m+k)\,\Gamma(1-k+m)^2\,\Gamma(k+1)}\\
&=\frac{\Gamma(1-b-a)\,\Gamma(m-b)\,\Gamma(m-a)}{\Gamma(1-b)^2\,\Gamma(1-a)^2\,\Gamma(1+m)^2}\left(1-\frac{a\,b}{(a+b)^2}+\left(m-\frac{a\,b}{a+b}\right)\right.\\
&\left.\times\left[\psi(a+1-m)+\psi(b+1-m)+\psi(1-b-a)-\psi(a)-\psi(b)-\psi(1+m)\right]\right)\,.
\end{aligned}\tag{D.10}$$

D.3 (6.39) 的证明

将左　　侧修改后的 (6.38) 拆分为偶部和奇部，得到

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-n\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+x\right)} &= \frac{8}{3\,\pi\,\Gamma\left(x-\frac{1}{2}\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\,\Gamma\left(n-\frac{3}{4}\right)\sqrt{2}\,\Gamma\left(n-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(x-\frac{1}{2}\right)}{32\,\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(x-\frac{1}{2}+n\right)}\\
&\quad+\frac{2\,\Gamma(x)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{1}{4}+x\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+x\right)}-\frac{8}{3\,\pi\,\Gamma\left(x-\frac{1}{2}\right)}-\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(x)}\,,
\end{aligned}\tag{D.11}$$

其中基本恒等式

$${}_2F_1\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4};x;1\right)=\frac{2^{2\,x-\frac{3}{2}}\,\Gamma(x)^2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}+2\,x\right)}\tag{D.12}$$

已被雇用　　loyed。对（D.11）关于 x 求导，然后令 $x=1$，得到

$$\pi^{\frac{3}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}\,\psi\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-n\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n-\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{4}\right)\psi\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2}}+\left(\frac{16}{3}-24\sqrt{2}\right)\ln(2) \tag{D.13}$$

$$+\left(2\,\pi-4\sqrt{2}+\frac{8}{3}\right)\gamma+16\sqrt{2}\,. \tag{D.14}$$

稍作重新排列和简化即可得到结果（6.39）。

E 附录：冗长恒等式

以下小节列出了一些冗长恒等式，以供参考。

E.1 参见第 5.2 节，当 $c=b+m$ 和 $m\geq n$ 时，（3.8）的特殊情形为

$$\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(a,b,n;a+n,b+m;1\right)=\\
&\frac{\Gamma\left(1-a+b-n\right)\sin\left(\pi\,a\right)\Gamma\left(b+m\right)\Gamma\left(a+n\right)}{\pi\,\Gamma\left(m\right)\Gamma\left(b\right)}\left[\psi\left(b+m-n\right)-\psi\left(a\right)+\pi\cot\left(\pi\left(a-b\right)\right)\right]\\
&\quad\times\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(-1\right)^{k}\Gamma\left(m+k\right)\Gamma\left(1-a+k\right)}{\Gamma\left(k+1\right)^{2}\,\Gamma\left(b+m+1-a-n+k\right)\Gamma\left(n-k\right)}\\
&+\frac{\Gamma\left(1-b\right)\Gamma\left(b+m\right)\Gamma\left(a+n\right)}{\Gamma\left(a-b+n\right)\Gamma\left(b+m-n\right)\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(n\right)}\sum_{k=0}^{m-n-1}\frac{\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(a-b-m+1+k+n\right)\Gamma\left(m-1-k\right)}{\Gamma\left(k+n+1\right)\Gamma\left(m-k-n\right)\Gamma\left(2-b-m+k+n\right)}\\
&+\frac{\Gamma\left(b+m\right)\Gamma\left(a+n\right)\sin\left(\pi\,a\right)\Gamma\left(1-a+b-n\right)}{\pi\,\Gamma\left(m\right)\Gamma\left(b\right)}\\
&\quad\times\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(-1\right)^{k}\Gamma\left(1-a+k\right)\Gamma\left(m+k\right)}{\Gamma\left(k+1\right)^{2}\,\Gamma\left(b+m+1-a-n+k\right)\Gamma\left(n-k\right)}\left[\psi\left(k+1\right)-\psi\left(b+m+1-a-n+k\right)\right]\\
&+\frac{\left(-1\right)^{n}\Gamma\left(b+m\right)\Gamma\left(a+n\right)\Gamma\left(1-b\right)}{\Gamma\left(a-b+n\right)\Gamma\left(b+m-n\right)\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(n\right)}\\
&\quad\times\sum_{k=0}^{M}\frac{\left(-1\right)^{k}\Gamma\left(n+m-1-k\right)\Gamma\left(a-b-m+1+k\right)}{\Gamma\left(n-k\right)\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(m-k\right)\Gamma\left(2-b-m+k\right)}\left[\psi\left(a-b-m+1+k\right)-\psi\left(n-k\right)\right]
\end{aligned} \tag{E.1}$$

其中 $M=$ 最小值$(n-1,\ \ m-1)$。

E.2 恒等式(5.7) 的一个元素，完整形式。

$$
\begin{aligned}
H\left(m,n,j,b\right) &= \frac{(-1)^{n}}{\Gamma\left(b\right)\Gamma\left(m\right)}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{\left(\psi\left(b+m+1-j-n+k\right)-\psi\left(k+1\right)\right)\Gamma\left(m+k\right)}{\Gamma\left(b+m+1-j-n+k\right)\Gamma\left(n-k\right)\Gamma\left(k+1\right)^{2}\Gamma\left(j-k\right)} \\
&- \frac{1}{\Gamma\left(b\right)\Gamma\left(b+m-n\right)\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(j\right)}\sum_{k=0}^{m-n-1}\frac{\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(m-1-k\right)\Gamma\left(b+m-n-k-1\right)}{\Gamma\left(b-j+m-n-k\right)\Gamma\left(n+k+1\right)\Gamma\left(m-n-k\right)} \\
&- \frac{(-1)^{n}\left(\psi\left(b+m-n\right)-\psi\left(j\right)\right)}{\Gamma\left(1+b-j-n\right)\Gamma\left(b+m-j\right)\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(j\right)} \\
&\qquad \times\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k}\,\Gamma\left(b+1-j-n+k\right)\Gamma\left(n+m-1-k\right)}{\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(m-k\right)\Gamma\left(n-k\right)\Gamma\left(b+1+k-n\right)} \\
&+ \frac{(-1)^{n}}{\Gamma\left(b\right)\Gamma\left(b+m-n\right)\Gamma\left(n\right)\Gamma\left(j\right)} \\
&\times\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k}\left(\psi\left(n-k\right)-\psi\left(b+m-j-k\right)\right)\Gamma\left(n+m-1-k\right)\Gamma\left(b+m-k-1\right)}{\Gamma\left(b+m-k-j\right)\Gamma\left(n-k\right)\Gamma\left(m-k\right)\Gamma\left(k+1\right)}
\end{aligned}
\tag{E.2}
$$

E.3 参见第 6.7 节

以下基于 [3]，以完全一般的形式求出第 6.7 节中所求的惠普尔求和：

具体而言，若 $k \geq 1+n+p$，则

$$
\begin{aligned}
&{}_{3}F_{2}\left(a,x,k-a;1+2\,t+n,2\,x+p-2\,t;1\right) = \\
&\quad -\frac{2^{2\,k-2\,a}\,\Gamma\left(1+a-k\right)\Gamma\left(n+p+1\right)\Gamma\left(k-n-p\right)\Gamma\left(2\,x+p-2\,t\right)\Gamma\left(1+2\,t+n\right)}{4\,\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(1-a+2\,t+n\right)\Gamma\left(2\,x+p-a-2\,t\right)} \\
&\quad \times\sum_{i=0}^{n+p}\frac{(-1)^{i}\,\left(2\,x-4\,t-1-2\,n+2\,i\right)\Gamma\left(1+4\,t+n-2\,x-p-i\right)}{\Gamma\left(1+i\right)\Gamma\left(n+p-i+1\right)\Gamma\left(2+4\,t+2\,n-2\,x-i\right)}S_{1}(i)\,.
\end{aligned}
\tag{E.3}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
S_{1}\left(i\right) \equiv &\sum_{j=0}^{k-1-n-p}\frac{(-1)^{j}\,\Gamma\left(x-t+\frac{p}{2}-\frac{a}{2}+\frac{i}{2}+\frac{j}{2}\right)\Gamma\left(t-\frac{a}{2}+n+\frac{p}{2}-\frac{i}{2}+\frac{j}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+j\right)\Gamma\left(k-n-p-j\right)\Gamma\left(2\,x-k+1+n+p+j\right)} \\
&\times\frac{\left(2\,x-2\,k+1+2\,n+2\,p+2\,j\right)\Gamma\left(2\,x-2\,k+1+2\,n+2\,p+j\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+t+\frac{p}{2}+\frac{a}{2}-\frac{i}{2}+\frac{j}{2}-k+n\right)\Gamma\left(1+\frac{a}{2}-t+\frac{p}{2}+\frac{i}{2}+\frac{j}{2}+x-k\right)}\,.
\end{aligned}
\tag{E.4}
$$

如果 $k<1+n+p$，那么

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(a,x,k-a;1+2\,t+n,2\,x+p-2\,t;1\right)=-(-1)^{n+p}\,2^{2\,p-2\,a+2\,n}\,\Gamma\left(n+p+1\right)\\
&\times\frac{\Gamma\left(2+n+p-k\right)\Gamma\left(2\,x-2\,t+p\right)\Gamma\left(1-a\right)\Gamma\left(1+2\,t+n\right)\Gamma\left(x-k+1+n+p\right)}{\Gamma\left(2\,x+p-2\,t-a\right)\Gamma\left(1-a+2\,t+n\right)\Gamma\left(x\right)\Gamma(1-a+n+p)}\\
&\times\sum_{i=0}^{n+p}\frac{(-1)^i\left(2\,x-4\,t-1-2\,n+2\,i\right)\Gamma\left(1+4\,t+n-2\,x-p-i\right)}{\Gamma\left(2+4\,t+2\,n-2\,x-i\right)\Gamma\left(1+i\right)\Gamma\left(n+p-i+1\right)}S_2(i)\,.
\end{aligned}
\tag{E.5}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
S_2(i)\equiv&\sum_{j=0}^{1+n+p-k}\frac{\Gamma\left(x-t+\frac{p}{2}-\frac{a}{2}+\frac{i}{2}+\frac{j}{2}\right)\Gamma\left(t+n-\frac{a}{2}+\frac{p}{2}-\frac{i}{2}+\frac{j}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+j\right)\Gamma\left(2+n+p-k-j\right)\Gamma\left(2\,x-k+1+n+p+j\right)}\\
&\times\frac{(2\,x-1+2\,j)\Gamma\left(2\,x-1+j\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}-t-n-\frac{p}{2}+\frac{i}{2}+\frac{j}{2}+x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+t-\frac{p}{2}+\frac{a}{2}-\frac{i}{2}+\frac{j}{2}\right)}\,.
\end{aligned}
\tag{E.6}
$$

F 附录：数据库的精选新增内容

以下列出了最初在 [25] 中介绍的数据库的一些新增内容。

$$
470:\quad {}_3F_2(a,b,b;b+1,b-n+2;1)=\frac{(-1)^n\,b\pi\csc(\pi a)\,\Gamma(n-1)\,\Gamma(b-n+2)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b-a+1)} \tag{F.1}
$$

$$
471:\quad {}_3F_2(a,b,2-n;b+1,2-n+a;1)=\frac{\Gamma(n-1)\,\Gamma(b+1)\,\Gamma(a-b)\,\Gamma(2-n+a)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b-1+n)\,\Gamma(a-n-b+2)} \tag{F.2}
$$

$$
472:\quad {}_3F_2(a,b,b-1+n;b+1,b+1;1)=\frac{\Gamma(n-1)\,\Gamma(b+1)^2\,\Gamma(-a+1)}{\Gamma(b-a+1)\,\Gamma(b-1+n)} \tag{F.3}
$$

$$
473:\quad {}_3F_2(a,b,c;b-n,c+1;1)=\frac{\Gamma(-a+1)\,\Gamma(c+1-b+n)\,\Gamma(-b+1)\,\Gamma(c+1)}{\Gamma(c+1-b)\,\Gamma(c+1-a)\,\Gamma(n+1-b)} \tag{F.4}
$$

474: ${}_3F_2(a,b,-n;\ c,1+a+b-c-n;\ 1)$

$$
=\frac{\Gamma(1+b-c)\,\Gamma(1+a-c)\,\Gamma(1+a+b-c-n)\,\Gamma(-c-n+1)}{\Gamma(b-c-n+1)\,\Gamma(1+a-c-n)\,\Gamma(-c+b+1+a)\,\Gamma(-c+1)} \tag{F.5}
$$

482: ${}_3F_2(a,\ b,\ n;\ c,\ b+1-m;\ 1) = \dfrac{\Gamma\ (m)\ \Gamma\ (c)\ \Gamma\ (b+1-m)}{\Gamma\ (b-m+1-n)\ \Gamma\ (c-a)\ \Gamma\ (b)\ \Gamma\ (n)}$

$$\times \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\Gamma\ (b-n-m+1+j)\ \Gamma\ (-a+c-n-m+1+j)\ \Gamma\ (n+m-1-j)}{\Gamma\ (1+j)\ \Gamma\ (m-j)\ \Gamma\ (1+c-n-m+j)} \tag{F.6}$$

483: ${}_3F_2(a,\ b,\ c;\ c+n,\ 1+c-m;\ 1)$

$$= \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(1+c-m)\,\Gamma(n+1-a+c-b-m)\,\Gamma(c+n)}{\Gamma(1+c-b-m)\,\Gamma(1-a+c-m)\,\Gamma(c-a+n)\,\Gamma(c-b+n)\,\Gamma(n)}$$
$$\times \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\Gamma\,(1-b+c-m+j)\,\Gamma\,(1-a+c-m+j)\,\Gamma\,(n+m-1-j)}{\Gamma\,(1+j)\,\Gamma\,(m-j)\,\Gamma\,(1+c-m+j)} \tag{F.7}$$

485: ${}_3F_2\ (a,\ b,\ a-m+1-n;\ c,\ 1+a-m;\ 1)$

$$= \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(c)\,\Gamma(c-b-a+n)\,\Gamma(1+a-m)}{\Gamma(a-m+1-n)\,\Gamma(c-a)\,\Gamma(m-1-a+c+n)\,\Gamma(a)\,\Gamma(n)}$$
$$\times \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\Gamma\,(a-m+1-n+j)\,\Gamma\,(c-a+j)\,\Gamma\,(n+m-1-j)}{\Gamma\,(1+j)\,\Gamma\,(m-j)\,\Gamma\,(1-b+c-m+j)} \tag{F.8}$$

$$486: \quad {}_3F_2(b, a+n, c+m; 1+a, c+1; 1) = \begin{cases} 0 & 0 < 2-b-m-n \\ \infty & \textit{otherwise} \end{cases} \tag{F.9}$$

$$487: \quad {}_3F_2(1, a, b; 2, c; 1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(-b+c-a+1) - \Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)\,(c-1)}{(a-1)\,(b-1)\,\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \tag{F.10}$$

491: ${}_3F_2\ (b,\ -n,\ a+n;\ b+1,\ 1+a;\ 1) = -\ (-1)^{\ n}\,\Gamma\ (b+1)\ \Gamma\ (b-a)$
$\Gamma\ (1+a)\ \Gamma\ (n+1)\ \Gamma\ (a+n)\ \Gamma\ (b+n+1)\ \Gamma\ (1+b-a-n)$ (F.11)

$$494: \quad {}_3F_2\,(a, 1, 1; 1+a, a+n; 1) = -\frac{a\,\Gamma\,(a+n)\,\Gamma\,(a+n-1)}{2\,\Gamma\,(a)^2}$$
$$\times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k\,(2\,a+2\,k-1)\left(\psi\left(1, \frac{1+a+k}{2}\right) - \psi\left(1, \frac{a+k}{2}\right)\right)\Gamma\,(2\,a+k-1)}{\Gamma\,(n-k)\,\Gamma\,(2\,a+n+k-1)\,\Gamma\,(1+k)} \tag{F.12}$$