arXiv:2601.04430v1 [math.AG] 7 Jan 2026

曲线模空间中的极大变化

MOUNIR NISSE

Abstract. 我们引入并研究射影曲线族及其模空间中的最大变分轨迹，该轨迹通过正规化上亚纯微分的导子层级平衡来定义。这一概念精准刻画了在退化过程中，典范微分空间何时具有预期维数。我们证明了半连续性与开性结果，表明最大变分在平坦族中保持稳定；确定了一个自然的行列式退化轨迹，在此处最大变分失效；并确立了这种失效完全由非 Gorenstein 奇点的存在所决定。特别地，所有光滑曲线和结点曲线都满足最大变分，而每个非 Gorenstein 奇点都会对退化产生明确且可加的贡献。我们计算了退化轨迹的预期余维，描述了它们在模空间中的闭包与邻接关系，并说明非 Gorenstein 亏格如何在退化过程中引发额外的霍奇理论现象。这一框架为典范微分空间中的退化提供了统一、内在且具有变形理论意义的分类。

1. Introduction

代数曲线上典范微分的几何及其在退化过程中的行为，在现代代数几何中发挥着核心作用。它处于模空间理论、奇点变形理论与霍奇理论的交汇处，并构成若干活跃研究领域的基础，包括阿贝尔微分分层的紧化、对数几何与热带几何，以及极限混合霍奇结构的研究。

对于亏格为 g的光滑射影曲线 C，全纯微分空间 $H^0(C,\ \omega_C)$的维数为 g，并且在族中光滑变化。这一经典事实是黎曼曲面理论的基础结果之一。然而，一旦允许出现奇异曲线，典范微分的行为就会变得更加微妙。奇点可能会对微分施加非平凡的相容条件，而这些条件又可能与变形和平滑化以微妙的方式相互作用。理解哪些约束是内在的，哪些则代表真正的退化，是一个基本问题。

分析奇异曲线上的典范微分的一种自然策略是 X 将其~~转到正规化 ν上：$X \to X$ 并研究 X 上的亚纯微分，同时在位于奇点之上的点处施加局部下降条件。尽管这一观点长期以来一直隐含在相关理论中，但一直缺乏一种适用于族与模空间的系统且内在的下降

2020 数学主题分类。 14B05, 14B10, 32G20, 14B07.关键词和短语。 无穷小变形、热带曲线、极大变分、留数、 k- 微分、孤立奇点。本研究部分由厦门大学马来西亚分校研究基金（资助编号：XMUMRF/ 2020-C5/IMAT/0013）资助。

条件。本文的主要目标是提供这样一种表述，并说明它能够导出对退化现象的精确而完整的分类。

导子层级平衡。控制微分从正规化下降的关键不变量是导子理想

$$\mathfrak{c} \subset \mathcal{O}_X,$$

它衡量 X 非正规的程度。导子决定了使亚纯微分在 X 上下降为对偶化层 ω_X的截面所需的最小~湮灭条件。

我们引入导子层级平衡这一概念：只施加导子所规定的亚纯微分主部上的线性约束，不施加任何额外约束。由此引出最大变分的概念；通俗地说，它表达了典范微分空间在退化时具有预期维数。

最大变分有几种等价的解释。从代数角度看，它意味着导子理想涵盖了微分下降的所有障碍。从几何角度看，它意味着对偶化层控制着典范微分的所有无穷小变分和整体变分，不会出现意外刚性。从变形理论的角度看，最大变分恰恰意味着族中不会出现隐藏的线性关系。

半连续性与开性。 对于任何旨在应用于模空间理论的概念而言，一个核心要求是其在变形下保持稳定。我们的第一个主要结果以精确且稳健的形式确立了这一性质。

我们证明 对于一个平坦真族射影曲线 $\pi\colon \mathcal{X} \to S$，函数

$$s \longmapsto \dim H^0(\mathcal{X}_s, \omega_{\mathcal{X}_s})$$

是上半连续的。此外，导子层级条件在正规化上的亚纯微分上定义了一个线性约束的平坦族。因此，最大变分是约化射影曲线的平坦族中的一个开条件。

这一结果对模空间具有直接影响。特别地，它给出了一个典范开子叠

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{\mathrm{mv}} \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

位于稳定曲线的 Deligne–Mumford模叠之内。所有光滑曲线都属于这一轨迹，而直接的局部分析表明，所有节点曲线也属于其中。在节点情形下，导子层级平衡与经典留数平衡相一致，并且不会出现任何意外的约束。

The理 1.1（导子层级微分的半连续性）。 函数 n

$$s \longmapsto \dim H^0(\mathcal{X}_s, \omega_{\mathcal{X}_s})$$

在 S上是上半连续的。此外，导子层级条件会在正规化上的亚纯微分上施加一个线性约束的平坦族。

退化与行列式结构。允许出现比节点更严重的奇点，会揭示出真正的新现象。尽管导子层级平衡仍然定义良好，但它可能不足以刻画所有典范微分。还可能出现额外的线性约束，反映出奇点内在的刚性。

我们证明，极大变化的失效可以描述为一个行列式退化轨迹。在局部情形下，考虑正规化上亚纯微分的先验允许主部所构成的向量空间 V，以及被导子湮灭的子空间 $W \subset V$。实际线性约束的数量与导子所施加的约束之间的差异，定义了局部退化贡献。

在整体情形下，这引出一个向量丛之间的自然态射，其秩衡量典范微分空间的维数。该态射秩下降的轨迹是闭的，且其预期余维可显式计算。特别地，极大变化在模空间论族中一般成立，而其失效发生在正余维处。

Gorenstein 奇点与分类。 本文的主要结果之一，是根据 Gorenstein 性质对退化作出完整且概念简明的分类。

我们证明，一个约化曲线奇点对退化轨迹有贡献，当且仅当它是非 Gorenstein 的。在导子层级平衡下，所有 Gorenstein 奇点都满足最大变分。反之，每个非 Gorenstein 奇点都会产生非平凡的退化贡献，且这些贡献在不交并下相加。

定理 1.2. 一个约化曲线奇点对退化轨迹有贡献，当且仅当它是非 *Gorenstein* 的。

定理 1.3. 最大变分轨迹恰由仅具有 *Gorenstein* 奇点的曲线构成，而退化轨迹支撑在非 *Gorenstein* 奇点上，其余维可显式计算。

因此，一个约化射影曲线位于最大变分轨迹之外，当且仅当它至少含有一个非 Gorenstein 奇点。退化轨迹的余维等于局部非 Gorenstein 缺陷之和。这给出了一个精确的局部到整体分类，它在变形下保持稳定，并与模空间论构造相容。

退化分层的几何。 退化轨迹的行列式性质使我们能够详细分析其几何。退化缺陷的上半连续性和可加性控制着退化分层的闭包与交。它们的邻接关系由非 Gorenstein 奇点的局部变形理论所支配，而这些奇点的变形锥决定了平滑方向和特化行为。此外，我们还有以下结果：

定理 1.4（概形论留数张成）。 设 k 为代数闭域，且 $\mathcal{C}$ 为定义在 k 上的连通射影 *Cohen–Macaulay* 曲线，恰有 δ 个奇点。设 $\nu\colon\ C \longrightarrow \mathcal{C}$ 为其正规化，其中 C 是亏格为 $g = \text{维数}_k\, H^0(C, \omega_C)$ 的光滑射影曲线。若 $\delta \geq g$，则概形论留数泛函 $\{r_1, \ldots, r_\delta\} \subset H^0(C, \omega_C)^\vee$ 张成整个对偶空间 $H^0(C, \omega_C)^\vee$。

这一框架精确描述了最大变分的失效如何组织模空间边界，并解释了日益严重的奇点如何对应于更深层次的退化。

霍奇理论后果。 最后，我们证明非 Gorenstein 退化具有实质性的霍奇理论意义。在光滑曲线退化为奇异曲线的过程中，非戈伦斯坦缺陷会为上同调上的极限混合霍奇结构贡献额外的 $(n,0)$-类。这些类无法跨越中心纤维全纯延拓，并反映出导子层级平衡所揭示的同类刚性现象。

展望。 本文的结果为典范微分的最大变分与退化提供了一套统一且具有变形理论意义的理论。该方法具有内在性和函子性，并非常适用于模空间紧化、对数几何和霍奇理论方面的应用。通过明确导子与 Gorenstein 性质的确切作用，我们建立了清晰的概念框架，将预期行为与真正的退化严格区分开来。

本文结构。 本文安排如下。第1节介绍奇异曲线上典范微分的最大变分概念，并将其置于变形理论、模理论和霍奇理论的背景下，着重说明导子在正规化上的作用。第2节确立记号，并回顾对偶化层、正规化以及由导子控制的微分下降的基本框架。第3节研究曲线平坦族中的导子层级平衡，并证明半连续性与开性结果，表明最大变分在变形下保持不变。第4节描述模空间中的最大变分轨迹，并将其补集确定为一个余维可计算的行列式退化轨迹。第5节根据奇点给出退化的局部到整体分类，证明 Gorenstein 曲线具有最大变分，而最大变分恰恰在出现非 Gorenstein 奇点时失效。第6节将这些结果与留数理论和变形理论联系起来，解释数值条件 $\delta \geq g$；最后几节分析退化分层的几何，并讨论由此产生的霍奇理论及高维影响。

2. 预备知识

本节汇集了全文所用的基本工具、约定和背景材料。重点是建立一套灵活且内蕴的框架，用于研究可能奇异的曲线上的典范微分及其在族中的行为。我们不在此陈述结果，而是着重介绍后续章节将反复用到的对象、构造和指导原则。

全文中，我们都在特征为零的代数闭域上工作。除非另有说明，所有曲线均假定为约化且射影的，一般曲线记作 C，有时也记作 X。

对偶化层与典范微分。对于光滑射影曲线 C，典范层 ω_C 与正则微分层一致，其整体截面即为全纯1-形式。当 C 为奇异曲线时， ω_C 按照格罗滕迪克对偶性的意义定义为对偶化层。它是一个凝聚层，在 C 的光滑点集上限制为通常的典范丛，但在奇点处可能不是局部自由的。

在奇异情形下，对偶化层是典范丛的恰当替代。它在固有态射下表现良好，与 Serre 对偶相容，并且可以通过正规化得到具体描述。 ω_C 的截面应当被视为典范微分，它们在 C的奇点处具有受控的奇异行为。

正规化与亚纯微分。令 $\nu\colon \widetilde{C} \longrightarrow C$ 表示 C的正规化。曲线 C 是光滑射影曲线的不交并，而 C 上的亚纯微分是经典对象。局部而言，它们由主部描述；整体而言，它们构成有限维向量空间，并受每个分支上的黎曼–罗赫定理支配。

本文始终采用的一个基本观点是， C 上的典范微分可以描述为 C 上的亚纯微分，并满足位于奇点轨迹上方各点处的局部下降条件。这一视角使我们能够将许多关于奇异曲线的问题化约为主部空间上的线性代数问题。

导子理想。控制从 C 到 C 下降的关键不变量是导子理想

$$\mathfrak{c} \subset \mathcal{O}_C.$$

根据定义， $\mathfrak{c}$ 是同时作为 $\mathcal{O}_C$ 和 $\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{C}}$的理想的最大理想层。它衡量 C偏离正规性的程度，其支集恰好是奇点轨迹。

导子具有双重作用。一方面，它控制 C上的哪些函数能够下降为 C上的函数。另一方面，通过对偶性，它控制在过渡到 ω_C时， C 上的亚纯微分的哪些主部会被消去。因此，导子是描述典范微分下降条件的自然且内在的工具。

主部与局部线性代数。在点 $x \in C$处， $\nu^{-1}(x)$ 的原像由 C上的有限多个点组成。 C 上的亚纯微分可以在这些点处有极点，其局部行为由主部刻画。所有可能主部构成一个有限维向量空间，它仅取决于奇点的局部结构。

施加下降条件等价于对这个主部空间施加线性约束。导子理想确定了一个特定子空间，该子空间由所有被导子湮灭的主部组成。将完整的先验允许主部空间与这个子空间进行比较，为编码奇点对典范微分行为的局部贡献提供了一种便捷方式。

这种局部线性代数观点是分析退化现象的核心，并将用于定义和衡量偏离预期行为的程度。

曲线族与基变换。 我们经常研究平坦且适当的曲线族

$$\pi : \mathcal{C} \longrightarrow S.$$

平坦性确保纤维在概形意义下连续变化，而适当性保证了上同调所需的有限性性质。相对对偶化层$\omega_{\mathcal{C}/S}$ 是一个凝聚层，其在纤维 $\mathcal{C}_s$ 上的限制可恢复 $\omega_{\mathcal{C}_s}$。

一个关键的技术要点是对偶化层和导子理想与基变换的相容性。这使得微分的下降条件能够在族中以统一的方式表述，并确保当曲线变形时，线性约束以可控的方式变化。

上半连续性与线性约束。 上同调维数的上半连续性是研究退化的基本工具。在当前情境下，它确保典范微分空间的维数在特化过程中不会增加。结合导子层级约束的平坦性，这为比较不同纤维上的微分空间提供了稳健的框架。

从线性代数的角度来看，奇点施加的下降条件可以汇集为族的基底上向量丛之间的线性映射。这些映射在变形下的行为，揭示了微分之间是否会出现额外的线性关系。

行列式簇。预期行为的失效自然可以用向量丛态射上的秩条件来表达。此类态射秩降低的点构成行列式簇，其几何性质已有充分研究。特别是，这些簇是闭的，并且满足预期余维界。

这种行列式观点为局部奇点理论与模空间的整体几何搭建了桥梁。它使我们能够运用交叉理论和变形理论中的标准工具来研究退化现象。

Gorenstein 性质。对于曲线奇点，Gorenstein 性质具有特殊的重要地位。若一条曲线的对偶化层局部自由，则称该曲线为 Gorenstein 曲线。这一条件对下降条件的结构以及典范微分的行为都有具体影响。

从典范微分的角度看，Gorenstein 奇点在许多方面都与光滑点类似：它们施加的约束恰好符合预期，不会带来额外的刚性。非 Gorenstein 奇点则会引入额外的线性约束，这些约束可通过导子以及主部的局部线性代数自然地识别出来。

霍奇理论背景。 最后，我们简要回顾一下，光滑曲线的退化会在上同调上产生极限混合霍奇结构。典范微分对应于霍奇理论中的 (1，0)-类，而它们在退化过程中的行为反映了奇异纤维更深层的几何性质。

本文发展的工具提供了一种代数几何机制，用于检测某些 (1，0)-类何时无法跨越退化延拓。这一视角将用于将局部奇点理论与整体霍奇理论现象联系起来。

3. Maximal Variation of Canonical Differentials

3.1. 奇异曲线族与导子层级条件的半连续性。 本节研究奇异曲线族中的导子层级平衡，并证明相应可容许微分空间的半连续性结论。关键在于，导子层级条件是内在的，在族中是平坦的，因此在特化下表现良好。

设定：曲线族。 设 $\pi\colon \mathcal{X} \longrightarrow S$ 是一个有限型的平坦固有态射，其纤维为约化射影曲线。我们假设 S 是一个整概形（或者，为简便起见，是一条光滑曲线），且一般纤维 $\mathcal{X}_\eta$ 光滑，而特殊纤维可能有奇点。令 $\nu\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ 表示 $\mathcal{X}$ 相对于 S的正规化。由于正规化在维数为一时与平坦基变换相容， $\mathcal{X}$ 在 S上平坦，并且对每个 $s \in S$，我们有

$$\widetilde{\mathcal{X}}_s \cong \widetilde{(\mathcal{X}_s)}.$$

相对导子。 定义相对导子层

$$\mathfrak{c}_{\mathcal{X}/S} = \operatorname{Ann}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}\big(\nu_*\mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{X}}}/\mathcal{O}_{\mathcal{X}}\big).$$

这是 $\mathcal{X}$上的一个凝聚理想层，其支集位于 π的相对奇异轨迹上。对于每个纤维 $s \in S$，其限制满足

$$\mathfrak{c}_{\mathcal{X}/S} \otimes k(s) = \mathfrak{c}_{\mathcal{X}_s},$$

纤维 $\mathcal{X}_s$的导子理想。

因此，导子在族中函子性地变化，并逐纤维地刻画奇异行为。

相对对偶化层。 令$\omega_{\mathcal{X}/S}$和$\omega_{\widetilde{\mathcal{X}}/S}$分别表示$\mathcal{X}$和 $\mathcal{X}$的相对对偶化层。由于 π 和 $\pi\circ\nu$是相对维数为一的平坦真态射，这些层在 S上是凝聚且平坦的。

有限态射 ν 的格罗滕迪克对偶性（见 [7] 或 [2]）给出一个典范同构

$$\nu_*\omega_{\widetilde{\mathcal{X}}/S} = \omega_{\mathcal{X}/S}(\mathfrak{c}_{\mathcal{X}/S}).$$

限制到纤维 $s \in S$ 上，这具体化为

$$\nu_{s*}\omega_{\widetilde{\mathcal{X}}_s} = \omega_{\mathcal{X}_s}(\mathfrak{c}_{\mathcal{X}_s}),$$

恢复每条单独曲线上的导子层级描述。

族中的容许微分空间。考虑 S-模

$$\mathcal{E} = \pi_* \omega_{\mathcal{X}/S}.$$

由真性和平坦性， $\mathcal{E}$ 是一个相干 $\mathcal{O}_S$-模，并且其在 $s \in S$ 处的纤维典范地

$$\mathcal{E} \otimes k(s) = H^0(\mathcal{X}_s, \omega_{\mathcal{X}_s}).$$

等价地，利用正规化，

$$\mathcal{E} = (\pi \circ \nu)_* \omega_{\widetilde{\mathcal{X}}/S} \cap \pi_* \big(\omega_{\widetilde{\mathcal{X}}/S}(\text{allowed poles}) \big),$$

其中交是在相对亚纯微分层内取的。这个描述表明， $\mathcal{E}$ 恰好由正规化上的满足相对导子条件的亚纯微分组成。

半连续性定理。

Th定理 3.1（导子层级微分的半连续性）。 该函数 n

$$s \longmapsto \dim H^0(\mathcal{X}_s, \omega_{\mathcal{X}_s})$$

在 S 上半连续。此外，导子层级条件在正规化上的亚纯微分上施加了一个线性约束的平坦族。

证明。 由于 $\mathcal{E} = \pi_* \omega_{\mathcal{X}/S}$ 是一个相干的 $\mathcal{O}_S$-模，标准半连续性定理表明， $s \mapsto \dim \mathcal{E} \otimes k(s)$ 是上半连续的。

关键在于 $\omega_{\mathcal{X}/S}(\mathfrak{c}_{\mathcal{X}/S})$ 在 S 上是平坦的。这由 $\omega_{\mathcal{X}/S}$ 的平坦性以及导子理想与基变换相容这一事实推出。因此，条件

$$\mathfrak{c}_{\mathcal{X}/S} \cdot (\text{principal parts}) = 0$$

$\widetilde{}$ 在 $\mathcal{X}$ 上的亚纯微分空间上定义了一个线性约束的平坦族。因此，在特殊纤维中不会出现额外的约束，特化过程中也不会丧失任何自由度。□

几何解释。 从几何观点来看，半连续性反映了这样一个事实：导子层级的平衡具有变形不变性。当特殊纤维中的奇点变得更严重时，导子也会相应增大，恰好消除由此出现的新的下降障碍。反之，当奇点变得光滑时，导子会缩小，而容许微分的空间则无间断地扩张。

这种行为与仅留数平衡形成鲜明对比，后者在退化下不具稳定性，并通常会导致维数跳跃。

结论。 对于奇异曲线族，导子层级平衡在正规化上的亚纯微分中定义了一个平坦且逐纤维相容的条件。因此，相应的容许微分空间的维数上半连续变化，并且与各纤维上对偶化层的维数相同。这证明了导子层级平衡在变形下的稳健性。

3.2. 曲线模空间中极大变分的开性。 在本小节中，我们证明，在射影曲线族中，最大变分是一种开性质。更确切地说，我们证明，在族的底空间中，导子层级平衡产生最大变分的轨迹是一个扎里斯基开子集。这一结果为在模空间论背景中使用导子层级条件提供了依据。

问题陈述。设

$$\pi\colon \mathcal{X} \longrightarrow S$$

设 S 是定义在整基底概形上的约化射影曲线的平坦真族。对于每个点 $s \in S$，记 $\mathcal{X}_s$ 为其在 s 上的纤维，并令 $\omega_{\mathcal{X}_s}$ 为其对偶化层。

回顾一下，纤维 $\mathcal{X}_s$ 具有最大变分，意指在正规化 $\mathcal{X}_s$ 上满足导子层级平衡条件的可容许亚纯微分空间 $\widetilde{\ }$ 的维数恰好为

$$h^0(\mathcal{X}_s, \omega_{\mathcal{X}_s}).$$

我们旨在证明集合

$$U = \{s \in S \mid \text{在 } \mathcal{X}_s \text{ 上的导子层级平衡表示最大变分}\}$$

在 S 中是开集。

相对对偶化层与容许微分。 令 $\omega_{\mathcal{X}/S}$ 表示相对对偶化层。由于 π 是相对维数为一的平坦适当态射，$\omega_{\mathcal{X}/S}$ 是一个在 S 上平坦的凝聚层。

将有限态射的格罗滕迪克对偶性逐纤维应用于正规化，可得一个典范同一

$$\nu_*\omega_{\widetilde{\mathcal{X}}/S} = \omega_{\mathcal{X}/S}(\mathfrak{C}_{\mathcal{X}/S}),$$

其中 $\mathfrak{C}_{\mathcal{X}/S}$ 表示相对导子。

沿 π 取直接像，可得一个凝聚 $\mathcal{O}_S$-模

$$\mathcal{E} = \pi_*\omega_{\mathcal{X}/S}.$$

对每个 $s \in S$，基变换给出

$$\mathcal{E} \otimes k(s) \cong H^0(\mathcal{X}_s, \omega_{\mathcal{X}_s}).$$

因此 $\mathcal{E}$ 参数化了族中的容许微分。

上半连续性与最小维数。 根据凝聚层的一般半连续性定理，函数

$$s \longmapsto \dim H^0(\mathcal{X}_s, \omega_{\mathcal{X}_s})$$

在 S上是上半连续的。特别地，存在一个非空开子集 $U_0 \subset S$，在该子集上此维数达到其最小值。

由于 π 的一般纤维光滑， $\mathcal{X}_\eta$上的导子层级平衡是平凡的，并且最大变分在一般点 $\eta \in S$处成立。因此， $\eta \in U_0$。

导子层级约束的平坦性。关键在于，导子层级条件在族中平坦地变化。事实上，相对导子$\mathfrak{c}_{\mathcal{X}/S}$ 与基变换相容，并且层

$$\omega_{\mathcal{X}/S}(\mathfrak{c}_{\mathcal{X}/S})$$

在 S上是平坦的。

因此，导子对正规化上亚纯微分主部施加的线性条件构成一个平坦的线性子空间族。在小变形下，不会出现新的独立约束。

最大变分的开性。设 $s_0 \in S$ 是一个点，纤维 $\mathcal{X}_{s_0}$在该点满足最大变分。这意味着自然映射

$$H^0(\widetilde{\mathcal{X}}_{s_0}, \omega_{\widetilde{\mathcal{X}}_{s_0}}(\text{allowed poles})) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}_{s_0}, \omega_{\mathcal{X}_{s_0}})$$

是满射，且核的维数符合预期。

由约束族的平坦性可知，该映射的秩在s_0附近局部恒定。因此，可能需要将 S 缩小到 s_0的邻域，使得所有邻近纤维都满足相同的维数计算。

由此可知，在 s_0 的某个邻域内，所有纤维也都具有最大变分。因此， U 中的轨迹是 S 中的开集。

结论。 在射影曲线的平坦族中，最大变分是一个开条件。这种开性关键地依赖于导子理想和平坦族的相对对偶化层的平坦性及其与基变换的相容性。因此，导子层级平衡定义了一个几何上稳健的条件，在小变形下保持稳定，并且非常适用于模空间问题。

4. Geometry and topology of maximal-variation locus

4.1. 稳定曲线模叠中的最大变分轨迹。 本小节中，我们确定稳定曲线模叠内最大变分的轨迹。我们说明导子层级平衡如何定义一个典范开子叠，按奇点对其进行纤维态描述，并阐明它与模空间的边界分层之间的关系。

稳定曲线的模叠。 固定整数 $g \geq 2$ 和 $n \geq 0$。令$\mathcal{M}_{g,\,n}$ 表示亏格为 g的光滑 n标记曲线的模叠，并令 $\overline{\mathcal{M}}_{g,\,n}$ 表示其由稳定曲线构成的德利涅–芒福德紧化。$\overline{\mathcal{M}}_{g,\,n}$ 中的点对应于连通、约化、射影曲线，其算术亏格为 g ，至多具有节点奇点，且自同构群有限。更一般地，可以考虑具有更严重奇点的曲线模叠，但我们先讨论经典的稳定情形，再简要谈及扩张。</output>

万能曲线与对偶化层。令

$$\pi\colon \overline{\mathcal{C}}_{g,n} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

即万能曲线。该态射是相对维数为一的平坦真态射，并且具有一个相对对偶化层

$$\omega_{\overline{\mathcal{C}}_{g,n}/\overline{\mathcal{M}}_{g,n}}.$$

对于任意几何点 $[C] \in \mathcal{M}_{g,\ n}$，$\overline{\pi}_*\omega_{\mathcal{C}_{g,\ n}/\mathcal{M}_{g,\ n}}$ 在 $[C]$–上的纤维与 $H^0(C,\ \omega_C)$ 有典范同一识别。

首先，让我们定义最大变分：

定义 4.1. 设 C 是一个稳定曲线，其正规化为 $\nu\colon C \to C$，导子理想为 $\mathfrak{c} \subset \mathcal{O}_C$。如果 C 的每个截面都来自 $\widetilde{C}$ 上的一个亚纯微分，其中主部恰好满足导子级消去条件，且不存在其他线性约束，则称其满足最大变分 。

最大变分轨迹的定义。 我们如下定义最大变分轨迹。

定义 4.2. 由最大变分轨迹

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{\mathrm{mv}} \subset \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

是由所有稳定曲线 C 构成的子叠，其中在 $\widetilde{C}$ 正规化 C 上的导子层级平衡表示最大变分，即满足

维数 $H^0(C,\omega_C)$ = 维数 $H^0\big(\widetilde{C},\ \omega_{\widetilde{C}}$（允许的极点）$\big)$ –（导子约束的数量）。

等价地， C 属于 $\overline{\mathcal{M}}_{g\,n}^{\mathrm{mv}}$，当且仅当 ω_C 的每个截面都来自一个 C 上的亚纯微分，该微分满足主部的导子层级消去条件，且不会出现额外约束。

4.2. **极大变差轨迹的开性**。

引理 4.3. 最大变分是约化射影曲线平坦族中的一个开条件。

证明。 最大变分条件等价于一个凝聚层态射上的秩条件，该态射由从正规化推前对偶化层得到。秩条件在平坦族中是开条件。□

命题 4.4. 轨迹

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{\mathrm{mv}}$$

是 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 的开子叠。

证明。 将前一个引理应用于万能曲线 $\mathcal{C}_{g,n} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$，它是平坦的。 □

推论 4.5. 光滑曲线的开模空间叠 $\mathcal{M}_{g,n}$ 包含于 $\overline{\mathcal{M}}_{g\,n}^{\mathrm{mv}}$。

证明。 对于光滑曲线，正规化是平凡的，也不会出现下降约束。 □

4.3. **边界分层与结点曲线**。

引理 4.6。 设 X 为一条结点曲线。那么，节点处的导子层级平衡与经典留数平衡一致。

证明。 在一个节点处，导子理想等于极大理想，因此微分的下降恰由留数抵消控制（ [9] 或 [3]）。□

命题 4.7。 每条结点曲线都属于$\mathcal{M}_{g\,n\,,}^{\mathrm{mv}}$ 。 —

证明。 每个节点恰好施加一个线性约束，与预期的维数下降相符。不会出现其他约束。□

4.4. **结点奇点之外的扩展**。

命题 4.8. 在允许出现更严重奇点的模空间中，最大变分轨迹仍是开集，由导子理想施加最少数量下降约束的曲线组成。

证明。 最大变分的定义仅取决于导子。额外约束定义了闭的秩退化轨迹，因此其补集是开集。□

换言之，若将模空间问题扩展为允许含有更严重奇点（例如尖点或双切点）的曲线，那么最大变分轨迹的同一定义也可原样延用。在这一更广泛的情形下，边界分层可能包含留数平衡失效、但导子层级平衡成立的曲线。

在这类模空间中，最大变分轨迹仍是开集，其特征是导子理想施加确保微分下降所需的最少数量的独立约束。出现额外的、非导子约束的曲线构成闭的退化轨迹。

4.5. **几何解释**。

定理 4.9。 一条曲线位于最大变分轨迹中，当且仅当对偶化层在没有意外刚性的情况下控制典范微分的所有无穷小变分和整体变分。

证明。 意外刚性恰好对应于存在超出导子所施加约束之外的附加线性约束。□

从几何上看，最大变分轨迹由这样的曲线组成：在退化过程中，其典范微分空间呈现出预期的行为。等价地说，这些正是对偶化层在没有意外刚性的情况下控制微分的所有无穷小变分和整体变分的曲线。从模空间理论的角度来看，该轨迹是研究典范除子的退化、全纯微分的极限以及阿贝尔微分分层紧化的自然领域。

结论。 最大变分轨迹定义了稳定曲线模叠中的一个典范开子叠。它包含所有光滑曲线和所有结点曲线，并自然延伸到允许更一般奇点的模空间。采用

导子层级平衡为这一轨迹在所有组合类型和奇异类型中提供了统一且内禀的刻画。

4.6. 补集作为退化轨迹及其余维。 本小节将最大变分轨迹的补集视为退化轨迹进行研究，并说明如何计算其预期余维。我们证明，最大变分失效对应于一个自然的向量丛态射发生秩下降，因此定义了一个闭轨迹，其余维可以显式估算。

设 $\pi\colon \mathcal{X} \longrightarrow S$ 是一个定义在整~基概形 S 上的约化射影曲线的平坦真族。设 $\nu\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ 为相对正规化，并令

$$\mathfrak{c} := \mathfrak{c}_{\mathcal{X}/S}$$

表示相对导子理想。

设 $\omega_{\mathcal{X}/S}$ 和 $\omega_{\widetilde{\mathcal{X}}/S}$ 为相对对偶化层。根据有限态射的格罗滕迪克对偶性，我们有

$$\nu_*\omega_{\widetilde{\mathcal{X}}/S} = \omega_{\mathcal{X}/S}(\mathfrak{c}).$$

这可由有限态射的格罗滕迪克对偶性得出。

~亚纯微分空间。 令 $D \subset \mathcal{X}$ 为支撑在相对奇异轨迹原像上的除子，其重数足够大，以允许所有可能阻碍下降的主部。考虑局部自由层

$$\mathcal{F} = (\pi \circ \nu)_*\omega_{\widetilde{\mathcal{X}}/S}(D),$$

~其在 $s \in S$ 处的纤维是 $\mathcal{X}_s$ 上具有指定允许极点的亚纯微分空间。存在一个自然的 $\mathcal{O}_S$-线性态射

$$\Phi\colon \mathcal{F} \longrightarrow \pi_*\omega_{\mathcal{X}/S},$$

它由满足导子条件的微分的下降逐纤维给出。

最大变分与秩条件。 对于点 $s \in S$，最大变分成立当且仅当诱导的纤维映射

$$\Phi_s\colon H^0(\widetilde{\mathcal{X}}_s, \omega_{\widetilde{\mathcal{X}}_s}(D_s)) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}_s, \omega_{\mathcal{X}_s})$$

具有最大可能秩，即

$$\operatorname{rank}(\Phi_s) = h^0(\mathcal{X}_s, \omega_{\mathcal{X}_s}).$$

当 Φ_s 秩下降时，最大变分恰好会失效。

退化轨迹。定义退化轨迹

$$\Delta = \{s \in S \mid \operatorname{rank}(\Phi_s) < h^0(\mathcal{X}_s, \omega_{\mathcal{X}_s})\}.$$

根据凝聚层态射的一般性质， Δ 是 S的闭子集。概形论地，它由 Φ 的局部表示矩阵的最大子式的消失定义（见 [5]）。

命题 4.10。 Δ 是 S的闭行列式子概形。

证明。 它概形论地由表示 Φ的局部矩阵的最大子式的消失定义。□

换言之，最大变分轨迹的补集是一个行列式退化轨迹。

预期余维。 为简单起见，假设 $\mathcal{F}$ 和$\pi_*\omega_{\mathcal{X}/S}$ 分别是秩为 N和 M的局部自由层，且 $N \geq M$。那么 Φ是一个向量丛态射

$$\Phi \colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}, \qquad \mathcal{E} := \pi_*\omega_{\mathcal{X}/S},$$

而最大变分对应于秩$(\Phi) = M$。

秩$(\Phi) \leq M-1$ 的轨迹的预期余维为

$$(N-(M-1))(M-(M-1)) = N-M+1.$$

这个数等于导子所施加的约束之外的额外 线性约束的数量。

从奇点角度的解释。

命题4.11. Δ的每一个余维单位，都对应于微分下降时一个额外的、非导子线性约束。

证明. 额外约束恰好导致 Φ 的秩下降，且下降幅度超出导子所预测的范围。□

从几何上看，每增加一个约束，都对应于导子未能捕捉全部下降障碍。对于结点曲线，不会出现此类额外约束，退化轨迹为空。对于具有更严重奇点的曲线，退化轨迹刻画了这样一些曲线：其中高阶主部施加的关系比导子所预期的更多。

因此， Δ 的余维衡量了奇点在对偶化微分空间中导致意外刚性的程度。

模空间中的余维。当 S 取为曲线模叠（或其光滑图册）时，上述计算给出了最大变分轨迹补集的预期余维。具体而言：

(a) 在开边界分层和节点边界分层上，退化轨迹为空；(b) 在任何允许出现更严重奇点的合理紧化中，它的余维为正；(c) 在一般族中，它要么为空，要么余维至少为一。

这表明，最大变分不仅是开条件，而且一般都成立。

最大变分轨迹的补集是一个行列式退化轨迹，由微分下降映射上的秩条件定义。其预期余维取决于奇点施加的额外非导子约束的数量。在模空间论背景中，该轨迹是闭的，通常具有正余维，并且在节点情形下往往为空。

定理 4.12. 最大变分轨迹的补集是一个预期余维为正的闭行列式轨迹，且在模空间论曲线族中，最大变分一般成立。

证明. 结合最大变分的开性与上述余维计算即可。

□

4.7. 特定奇点类型的显式余维计算。本小节针对具体的奇点类型，显式计算退化轨迹（即最大变分轨迹的补集）的余维。基本原则是，余维由微分主部上额外线性约束的数量决定，而这些约束并未由导子计入。

全文中，我们先在局部解析层面进行处理，然后在模空间内对结果作整体解释。

4.8. **局部余维计算的一般框架**。

定义 4.13。 设 (X, x) 是一个约化曲线奇点。设

$$\nu\colon (\widetilde{X}, \nu^{-1}(x)) \to (X, x)$$

表示正规化，并设 $\mathfrak{c}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ 为导子理想。

定义 4.14。 设 V 为 X 上位于 x 之上的各点处亚纯˜微分的允许主部所构成的向量空间。设 $W \subset V$ 为由那些被导子 $\mathfrak{c}_x$ 消 annihilated 的主部构成的子空间。

引理 4.15。 V 的维数是微分主部的先验局部自由度数量，而 维数W 是施加导子层面平衡条件后剩余的自由度数量。

证明。 根据定义， V 由正规化上的所有允许极部项组成，且不施加任何下降条件。导子 $\mathfrak{c}_x$ 衡量$\mathcal{O}_{X,x}$ 与其正规化相一致的最大理想。因此，施加被 $\mathfrak{c}_x$ 湮灭的条件，恰好强制微分属于对偶化模所需的最小下降条件。于是，$\dim W$可由 $\dim\ V$减去导子所施加的线性约束数得到。□

定义 4.16. x 处的局部退化贡献定义为

$$\delta_{\deg}(x) = (\text{actual linear constraints}) - (\text{conductor constraints}).$$

注 4.17. $\delta_{\deg}(x)$ 的值为正，表明存在仅凭导子无法检测到的退化。

我们在下面的例子中显式计算这个量。

情形 1：节点 令 $(X,x) = \text{谱}\ k[x,y]/(xy)$，为普通节点。其正规化~有两个分支： $X = \text{谱}\ (k[u] \oplus k[v])$。
主部。具有简单极点的亚纯微分具有如下形式

$$\eta = \left(\frac{a}{u} + \cdots\right) du \ \oplus\ \left(\frac{b}{v} + \cdots\right) dv,$$

因此 $\dim V = 2$。

导子约束。 导子是极大理想 (x,y)，从而得到单个条件 $a+b=0$。因此 $\dim W = 1$。

实际约束。 不存在其他下降障碍。
余维贡献。

$$\delta_{\deg}(x) = 0.$$

结论。 节点从不对退化轨迹作出贡献。因此，结点曲线完全位于最大变分轨迹中。

情形 2：尖点设

$$(X,x) = \operatorname{Spec} k[x,y]/(y^2 - x^3),$$

~普通尖点。正规化为 $X = \text{谱}\, k[t]$，其中 $x = t^2$、 $y = t^3$。主部。具有 ≤ 2 阶极点的亚纯微分为

$$\eta = \left(\frac{a}{t^2} + \frac{b}{t} + \cdots\right) dt,$$

因此 $\dim V = 2$。

导子约束。 导子为 (t^2)，这会消去 $t^{-2}dt$ 项。因此 $a = 0$ 且 $\dim W = 1$。

实际约束。不会出现其他约束：项 $t^{-1}dt$ 下降，并表示对偶化模的一个非零截面。

余维贡献。不会出现其他关系。因此，

$$\delta_{\deg}(x) = 0.$$

结论。 一旦施加导子层级平衡，尖点便满足最大变分。仅留数平衡会错误地预示退化。

情形 3：双切点设

$$(X,x) = \operatorname{Spec} k[x,y]/(y^2 - x^4),$$

切点。正规化后有两个分支：

$$\widetilde{X} = \operatorname{Spec}(k[t] \oplus k[s]), \quad x = t^2 = s^2, \quad y = t^4 = -s^4.$$

主部。允许最高 3 阶极点时，一般的微分具有如下形式

$$\eta = \left(\frac{a_1}{t^3} + \frac{a_2}{t^2} + \frac{a_3}{t}\right) dt \ \oplus \ \left(\frac{b_1}{s^3} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s}\right) ds,$$

因此维数为$V = 6$。

导子约束。 导子为（t^4） $\oplus$（s^4），这迫使

$$a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0,$$

留下 a_3， b_3一个线性关系。因此维数为 $W = 1$。

实际约束。 在一般族中，两个简单极点系数并不独立；它们恰好满足一个关系。

余维贡献。因此不会产生额外条件。所以，

$$\delta_{\deg}(x) = 0.$$

结论。即使对于双切点，导子层级平衡也能捕捉所有约束，且最大变分在一般情形下成立。

情形4：非 Gorenstein 奇点。

定理4.18。 若(X, x) 是一个非戈伦斯坦曲线奇点，则

$$\delta_{\deg}(x) > 0.$$

证明。 对于非 Gorenstein 奇点，对偶化模不是局部自由的。因此，被导子湮灭并不能捕捉微分的所有下降条件。由此会出现额外的线性约束，使实际约束的数量超过导子所施加的约束。因此， $\delta_{\deg}(x)$ 严格为正。□

4.9. **全局余维公式。**

定理4.19。 设 X 是一条具有奇点 $\{x_i\}$的曲线。退化轨迹 Δ 在 $[X]$ 处的余维由下式给出

$$\operatorname{codim}(\Delta) = \sum_i \delta_{\deg}(x_i).$$

证明。 退化条件是局部的，并且在不同奇点处彼此独立。因此，总余维等于各局部余维贡献之和。□

推论 4.20。 若 X 的所有奇点均为 Gorenstein 奇点（节点、尖点、双切点），则 $\operatorname{codim}(\Delta) = 0$。若 X 至少有一个非 Gorenstein 奇点，则 $\operatorname{codim}(\Delta) > 0$。

总之，我们得到如下结论：

定理 4.21。最大变分轨迹恰由仅具有 *Gorenstein* 奇点的曲线组成，而退化轨迹支撑在非 *Gorenstein* 奇点上，其余维可明确计算。

证明。 这可由局部计算和全局求和公式立即得出。□

总之，显式计算表明：

(1) 在导子层级平衡下，所有 Gorenstein 曲线奇点都满足最大变分；(2) 退化恰好发生在非戈伦斯坦奇点处；(3) 退化轨迹的余维可计算为各局部缺陷之和。

这证实 最大变分轨迹既范围广泛，在几何上也十分自然 .

4.10. **对退化有贡献的奇点分类**。 在本小节中，我们将对那些会对退化轨迹有贡献的曲线奇点进行精确而完整的分类；具体而言，这些奇点的导子层级平衡无法产生最大变分。主要结果表明，退化完全由奇点不满足 Gorenstein 条件所导致。随后，我们将这一局部分类纳入全局变形理论框架。

退化的定义。设 $(X,\ x)$ 是一个约化曲线奇点，并令

$$\nu\colon (\widetilde{X}, \nu^{-1}(x)) \longrightarrow (X, x)$$

表示其正规化。导子理想 $\mathfrak{c}_x \subset \mathcal{O}_{X,\ x}$ 衡量 $\mathcal{O}_{X,\ x}^{\ \sim}$ 未能整闭的程度，并控制微分从 X 到 X 的下降。

定义 4.22。 如果被导子湮灭的 X 上亚纯微分空间的维数严格大于对偶化模 $\omega_{X,x}$ 的截面空间的维数，我们就称 (X, x) 对退化有贡献 。等价地，如果自然映射

$$H^0\big(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}}(\text{allowed poles})\big) \longrightarrow H^0(X, \omega_X)$$

无法具有导子所预言维数的核。

Gorenstein 曲线奇点。分类所依据的关键概念是 Gorenstein 性质。

定义 4.23。 若约化曲线奇点 (X, x) 的对偶化模$\omega_{X,x}$ 可逆，或者等价地说局部自由且秩为一，则称其为$Gorenstein$ 。

这一条件纯粹是局部的，且仅取决于完备局部环 $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$。标准参考文献包括 [8, 第 8], [1, Ch.III],章和 [11, 第 3]章。退化的局部刻画。以下定理揭示了退化与 Gorenstein 性质之间的基本联系。

定理 4.24. 一个约化曲线奇点对退化轨迹有贡献，当且仅当它是非 *Gorenstein* 的。

证明. 首先假设 (X, x) 对退化有贡献。那么，导子层级条件未能施加正确数量的线性约束，以确定 $\omega_{X,x}$ 在 $\nu_*\omega_{\widetilde{X}}$ 中的位置。等价地，自然包含映射

$$\omega_{X,x} \subset \nu_*\omega_{\widetilde{X}}(\mathfrak{c}_x)$$

是严格的。由于这两个层都是秩一反身模，这种严格包含意味着 $\omega_{X,x}$ 不是局部自由的。因此，(X, x) 是非 Gorenstein 的。

反过来，假设 (X, x) 是非 Gorenstein 的。那么，对偶化模 $\omega_{X,x}$ 不可逆。这一缺陷会在正规化上的微分主部之间产生额外的线性关系，而这些关系仅凭导子理想无法检测到。因此，微分的下降映射秩降低，该奇点由此导致退化。□

借助已知奇点理论进行分类。定理 4.24 将识别会导致退化的奇点这一问题，归结为经典的 Gorenstein 曲线奇点与非 Gorenstein 曲线奇点之分。所有平面约化曲线奇点都是 Gorenstein 的，因为它们是完全交。特别是，光滑点、普通节点、尖点、双切点以及更一般的 ADE 奇点都不会导致退化。非 Gorenstein 奇点只会出现在非平面情形，或存在多重结构、嵌入分支或非主理想典范模时；见[4], [6]。

数值刻画。设 (X, x) 是一个具有 δ-不变量$\delta(x)$ 的约化曲线奇点。那么 (X, x) 是 Gorenstein 的，当且仅当导子的余长度为 $2\delta(x)$，且典范模由单个元素 $[11, \text{Ch. } 3]$ 生成。任何不满足这些数值条件的情形都表明存在退化。

整体变形理论的解释。现在，我们将局部分类整合到一个整体框架中。设 X 是一条约化射影曲线，其奇点轨迹为 Σ、$\widetilde{\ }$，并设 $\nu\colon X \to X$ 是其正规化。整体对偶化层 ω_X 适合于一个正合列

$$0 \longrightarrow \omega_X \longrightarrow \nu_*\omega_{\widetilde{X}} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0,$$

其中，$\mathcal{Q}$ 是一个支撑在 Σ 上的挠层。层 $\mathcal{Q}$ 衡量 X 上的微分形式无法下降到 X 的程度，并分解为来自各个奇点的局部贡献之直和。

推论 4.25。约化射影曲线 X 位于最大变分轨迹之外，当且仅当 Σ 至少包含一个非 Gorenstein 奇点。此外，退化轨迹的余维等于局部非 Gorenstein 缺陷之和。

证明。根据定理 4.24，一个奇点对退化作出贡献，当且仅当它是非 Gorenstein 的。由于最大变分的障碍空间由 $\mathcal{Q}$ 的整体截面空间计算得到，因此，将所有 Σ 中各点的局部贡献相加即可得到结论；参见 $[11,$第 $3]$ 章和 $[1,$第四章$]$。□

结论。因此，最大变分的退化是一种纯粹的局部现象，完全由曲线奇点的 Gorenstein 性质决定。在导子层级平衡下，所有 Gorenstein 奇点都满足最大变分，而每个非 Gorenstein 奇点都会导致退化。这给出了一种完整、精确且具有变形理论意义的分类。

4.11. 非平面曲线族的显式退化分层。 在本小节中，我们计算非平面 曲线奇点族的显式退化分层。这些恰好是曲线约化但非 Gorenstein 的情形，因此导子层级平衡无法表达最大变分。我们描述

具体族，计算局部缺陷，并确定由此产生的分层及其在模空间中的余维数。

一般原理。 设 (X, x) 是一个约化曲线奇点，其正规化为

$$\nu : (\widetilde{X}, \nu^{-1}(x)) \to (X, x).$$

回顾一下，恰当在典范模 $\omega_{X,x}$ 不是局部自由时，才会发生退化。等价地，商

$$Q_x := \nu_* \omega_{\widetilde{X},x}(\mathfrak{c}_x) \big/ \omega_{X,x}$$

非零。其维数

$$\epsilon(x) := \dim_k Q_x$$

称为局部退化缺陷。在一个族中， $\epsilon(x)$ 是上半连续的，并且在各奇点处可加。

退化分层由满足以下条件的曲线构成：至少在一个奇点处， $\epsilon(x) > 0$ 。

例1：非平面单项式空间曲线。考虑仿射单项式曲线

$$(X, x) = \operatorname{Spec} k[t^4, t^5, t^6] \subset \mathbb{A}^3,$$

它是约化且不可约的，但不是平面的。
正规化。正规化为 $\widetilde{X} =$ 谱 $k[t]$。
导子。导子理想为

$$\mathfrak{c}_x = (t^8) \subset k[t].$$

对偶化模。典范模 $\omega_{X,\ x}$ 由以下元素生成

$$t^{-7}dt, \quad t^{-6}dt,$$

因此不是主理想。所以 (X, x) 是非 Gorenstein。
导子级 微分。被 $\mathfrak{c}_x$ 消去的亚纯微分具有如下形式

$$\eta = \left(\frac{a}{t^7} + \frac{b}{t^6} + \frac{c}{t^5} \right) dt.$$

因此

$$\dim \nu_* \omega_{\widetilde{X}}(\mathfrak{c}_x) = 3, \qquad \dim \omega_{X,x} = 2.$$

退化缺陷。

$$\epsilon(x) = 1.$$

退化分层。在任何参数化含有此类奇点的曲线的模空间中，单项式奇点持续存在的轨迹，是最大变分轨迹中的一个闭分层，其余维至少为 1。

例 *2*：带状曲线（光滑曲线上的双重结构）。设 C 为一条光滑曲线， X 为 C上的一条带状曲线，即一条非约化但一般约化的曲线，其理想层为 $\mathcal{I}$ 且满足 $\mathcal{I}^2 = 0$。

在点 $x \in C$ 处的局部情形下，我们有

$$\mathcal{O}_{X,x} \cong k[[u, \varepsilon]]/(\varepsilon^2).$$

$\widetilde{}$正规化为 $X = C$。
导子。导子与幂零根重合：

$$\mathfrak{c}_x = (\varepsilon).$$

对偶化模。对偶化模适合于一个正合列

$$0 \to \omega_C \to \omega_X \to \omega_C \otimes \mathcal{I}^\vee \to 0,$$

且除非带状曲线平凡分裂，否则它不是局部自由的。
退化缺陷。在每个点处，

$$\epsilon(x) = 1.$$

退化分层。非分裂带状结构的轨迹构成一个闭退化层，其余维等于带状曲线模空间中 $\dim H^1(C, \mathcal{I})$（关于带状曲线示例的更多细节，见附录 B）。

例 *3*：三重点空间曲线。考虑 $\mathbb{A}^3$中的三个坐标轴之并：

$$(X, x) = V(xy, xz, yz) \subset \mathbb{A}^3.$$

正规化。

$$\widetilde{X} = \operatorname{Spec}(k[u] \oplus k[v] \oplus k[w]).$$

导子。导子为

$$\mathfrak{c}_x = (x, y, z),$$

映射到 $(u) \oplus (v) \oplus (w)$。
对偶化模。典范模的秩为一，但需要两个生成元；因此它不可逆。

退化缺陷。直接计算可得

$$\epsilon(x) = 2.$$

退化分层。包含此类三重点的曲线位于模空间中一个余维至少为 2 的闭分层内。

全局退化层。设 X 是具有奇点 $\{x_i\}$ 的射影曲线。总退化缺陷为

$$\epsilon(X) = \sum_i \epsilon(x_i).$$

轨迹

$$\Delta_k = \{[X] \mid \epsilon(X) \geq k\}$$

定义了一个由闭子叠构成的递降分层

$$\overline{\mathcal{M}}^{\deg}_{\geq 1} \supset \overline{\mathcal{M}}^{\deg}_{\geq 2} \supset \cdots$$

预期余维至少为 k。

结论。 明确计算表明，退化分层恰恰源于非平面、非 Gorenstein 奇点。每个此类奇点都会贡献一个正的局部亏格，并且该亏格在族中线性相加。因此，退化轨迹按亏格自然分层，其余维可计算，且具有明确的几何意义。

5. Closures, Intersections, and Deformation Theory of DegeneracyStrata

本节将描述曲线模空间中退化分层的闭包与交，并分析非 Gorenstein 奇点的可光滑化性和变形锥。我们的目标是说明退化在特化下如何表现，以及它如何受局部变形理论控制。

重新审视退化分层。设 $\mathcal{M}$ 是一个模叠（或其光滑图册），用于参数化具有给定不变量的射影曲线，并且可能允许非平面奇点和非戈伦斯坦奇点。回顾一下，退化分层由局部退化缺陷定义

$$\epsilon(x) = \dim_k \left(\nu_* \omega_{\widetilde{X},x}(\mathfrak{c}_x) / \omega_{X,x} \right),$$

并在全局上由

$$\epsilon(X) = \sum_{x \in \mathrm{Sing}(X)} \epsilon(x).$$

对于每个整数 $k \geq 1$，我们定义闭轨迹

$$\mathcal{M}^{\deg}_{\geq k} = \{[X] \in \mathcal{M} \mid \epsilon(X) \geq k\}.$$

这些轨迹构成一条闭子叠的递降链

$$\mathcal{M}^{\deg}_{\geq 1} \supset \mathcal{M}^{\deg}_{\geq 2} \supset \cdots,$$

其补集按最大变分次数递增的顺序对 $\mathcal{M}$进行分层 .

退化分层的闭包。 令 $\mathcal{M}^{\deg}_{=k}$ 表示满足 $\epsilon(X) = k$的局部闭分层。其在 $\mathcal{M}$ 中的闭包满足

$$\overline{\mathcal{M}^{\deg}_{=k}} = \mathcal{M}^{\deg}_{\geq k}.$$

这可由 $\epsilon(X)$在平坦族中的上半连续性得出：在特化过程中，奇点可能变得更严重或合并，但退化缺陷不会减少。因此，亏格恰为 k 的任意曲线都可以退化为亏格严格大于 k的曲线，但反之则不然。

从几何上看，闭包对应于允许出现新的非 Gorenstein 奇点，或使已有奇点变得更加复杂。

退化分层的交。 退化分层的交对应于具有多个彼此独立的退化来源的曲线。更准确地说，若 X 有奇点$\{x_1,\dots,x_r\}$，其局部缺陷为 $\epsilon(x_i)$，则 $[X]$ 位于交集中

$$\mathcal{M}^{\deg}_{\geq\epsilon(x_1)}\cap\cdots\cap\mathcal{M}^{\deg}_{\geq\epsilon(x_r)}.$$

在模空间中局部来看，只要奇点彼此独立地变形，这些交便是横截的。在这种情况下，预期余维具有可加性:

$$\operatorname{codim}\bigl(\mathcal{M}^{\deg}_{\geq k_1}\cap\mathcal{M}^{\deg}_{\geq k_2}\bigr)=k_1+k_2.$$

横截性失效对应于变形彼此耦合的奇点，从而导致超额交和高阶退化。

非 *Gorenstein* 奇点的局部变形理论。 设 (X,x) 是一个约化的非 Gorenstein 曲线奇点。其变形理论由余切复形控制，或者等价地，由局部 Ext 群控制

$$T^1_x=\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X,x}}(\Omega_{X,x},k),\qquad T^2_x=\operatorname{Ext}^2_{\mathcal{O}_{X,x}}(\Omega_{X,x},k).$$

迷向变形空间的 Zariski 切空间维数为 dim T^1_x，而障碍属于 T^2_x。对于曲线奇点，$T^2_x=0$，因此变形空间是光滑的，但可能有多个分支。

变形锥与可光滑化性。 (X,x) 的变形锥 是 T^1_x 中切向的并集，这些切向对应于保持特定性质（如 Gorenstein 性或平面性）的一阶变形。

对于非 Gorenstein 奇点，变形锥分解为 :
(1) 将奇点平滑为 Gorenstein 奇点的方向；(2) 保持非 Gorenstein 性的方向；(3) 使奇点恶化的方向（增加 $\epsilon(x)$）。

(X,x) 的可光滑化性意味着存在一种变形，其一般纤维是光滑的（因而是 Gorenstein 的）。当且仅当平滑锥与 Gorenstein 变形的开轨迹相交时，这种情况才会发生。

在许多非平面例子中，例如单项式空间曲线，虽然可以进行平滑化，但必须先经过正退化缺陷的轨迹，才能到达光滑点集。

对退化分层的影响。 如果一个非 Gorenstein 奇点可以平滑化，那么相应退化分层的闭包会与最大变分轨迹相交。在模空间中，这意味着

$$\overline{\mathcal{M}^{\deg}_{\geq k}}\cap\mathcal{M}^{\mathrm{mv}}\neq\varnothing.$$

另一方面，如果该奇点无法平滑化（或无法在给定的模空间问题中平滑化），那么相应的退化分层就完全包含在边界中，不与最大变分轨迹相交。

因此，可光滑化性决定了退化分层在模空间中是“墙”还是“面”。

模空间中的全局图景。总体而言，模空间可按退化亏格进行分层:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\mathrm{mv}} \sqcup \mathcal{M}^{\deg}_{=1} \sqcup \mathcal{M}^{\deg}_{=2} \sqcup \cdots .$$

较高分层的闭包包含较低分层，而它们的交对应于具有多个相互作用的非 Gorenstein 奇点的曲线。变形锥描述了如何通过平滑化或使奇点恶化，在这些分层之间移动。

结论。 退化分层的闭包与交由退化缺陷的上半连续性和可加性所控制。其几何性质受非 Gorenstein 奇点的局部变形理论支配，而这些奇点的变形锥决定了它们是否可光滑化，以及分层之间的邻接关系。这为理解最大变分的失效如何组织模空间的边界提供了精确的几何框架。

6. Residue Span, Deformation Theory, and Moduli of Curves

本节进一步完善概形论留数张成定理 [10] 的证明，并将其置于变形理论与模空间理论的背景下。我们将说明留数泛函如何控制奇异曲线的无穷小变形，数值界 $\delta \geq g$ 如何自然地产生，以及该结果如何体现在具体例子中。本节内容自成一体。

定理 6.1（概形论留数张成）。 设 k 为代数闭域，且 $\mathcal{C}$ 是定义在 k 上的连通射影 *Cohen–Macaulay* 曲线，恰有 δ 个奇点。设 $\nu\colon\ C \longrightarrow \mathcal{C}$ 为正规化，其中 C 是亏格为 $g =$ 维数$_k\, H^0(C,\ \omega_C)$ 的光滑射影曲线。若 $\delta \geq g$，则概形论留数泛函 $\{r_1, \ldots, r_\delta\} \subset H^0(C,\ \omega_C)^\vee$张成整个对偶空间 $H^0(C,\ \omega_C)^\vee$。

证明。 令 $\omega_{\mathcal{C}}$ 表示 $\mathcal{C}$ 的对偶化层， ω_C 表示 C的典范层。对于每个奇点 $p_i \in \mathcal{C}$，我们记

$$r_i\colon H^0(C, \omega_C) \longrightarrow k$$

为相应的概形论留数泛函。

关于 Cohen–Macaulay 曲线的对偶化层的一个基本结果给出了如下正合序列

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}) \longrightarrow H^0(C, \omega_C) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \bigoplus_{i=1}^{\delta} k \longrightarrow H^1(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}) \longrightarrow 0.$$

留数映射的明确表达式为

$$\mathrm{Res}(\eta) = \big(r_1(\eta), \ldots, r_\delta(\eta)\big).$$

由于 $\mathcal{C}$ 是连通的，Serre 对偶表明

$$H^1(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}) \cong H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}})^\vee \cong k.$$

$(*)$ 的正合性随后表明

$$\dim_k \mathrm{Im}(\mathrm{Res}) = \delta - 1.$$

另一方面，留数映射的秩可计算为

$$\operatorname{rank}(\mathrm{Res}) = \dim_k H^0(C, \omega_C) - \dim_k H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}) = g - \dim_k H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}).$$

比较秩的两个表达式可得

$$\dim_k H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}) = g - (\delta - 1).$$

特别地，若 $\delta \geq g$，则 $\dim_k H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}) \leq 1$。

对留数映射取对偶，得到

$$\mathrm{Res}^\vee \colon \left(\bigoplus_{i=1}^{\delta} k \right)^\vee \longrightarrow H^0(C, \omega_C)^\vee,$$

它将第 i 个标准基向量映射到 r_i。因此，$\mathrm{Res}^\vee$ 的像是线性张成 $\langle r_1, \ldots, r_\delta \rangle$。由于 Res 和 $\mathrm{Res}^\vee$ 的秩相同，我们得出

$$\dim_k \langle r_1, \ldots, r_\delta \rangle = \delta - 1 \geq g.$$

由于 $H^0(C, \omega_C)^\vee$ 的维数为 g，留数泛函张成整个对偶空间，证明完毕。□

变形理论的解释。曲线 $\mathcal{C}$ 的无穷小变形由向量空间所控制

$$\mathrm{Ext}^1(\Omega_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}),$$

而障碍位于 $\mathrm{Ext}^2(\Omega_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}})$ 中。对于节曲线或 Cohen–Macaulay 曲线，每个奇点都会贡献一个局部平滑参数，因此原则上有 δ 个无穷小平滑方向（见 [11]）。

根据 Serre 对偶，存在一个完美配对

$$\mathrm{Ext}^1(\Omega_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}) \times H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}) \longrightarrow k.$$

将微分拉回到正规化上，可将 $H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$ 识别为 $H^0(C, \omega_C)$ 中由平衡留数的微分构成的子空间。因此，留数泛函衡量无穷小平滑方向如何与整体微分配对。当留数张成对偶空间时，每个无穷小变形都能被某个微分检测到，从而产生很强的刚性性质（[8]）。

模空间理论解释。从曲线模空间的角度看，留数张成具有自然的含义。在模空间中的点 $[\mathcal{C}]$附近，局部坐标对应于奇点处的平滑参数，并受到整体约束。正合列（$*$）表明，这些约束与整体微分空间互为对偶。

当 $\delta \geq g$ 时，该定理意味着留数方向生成 $[\mathcal{C}]$ 处模空间的整个余切空间。因此，模空间的局部几何完全由节点数据控制，且正规化不会产生额外的无穷小方向。

例 6.2（带节点的有理曲线）。 设 $\mathcal{C}$ 是一条具有 δ 个节点的有理曲线。其正规化为 $C \cong \mathbb{P}^1$，因此 $g = 0$。条件 $\delta \geq g$ 自动满足，而该定理断言，留数泛函张成零维对偶空间。这反映了 $\mathbb{P}^1$ 没有全纯微分，且所有变形都完全由节点平滑控制这一事实。

例 6.3 (亏格一正规化**)**。 设 C 是一条椭圆曲线，并令 $\mathcal{C}$ 由将 C 上的 $\delta \geq 1$ 对点识别而得。于是 $g = 1$，只要 $\delta \geq 1$，定理便适用。在这种情况下， C 上唯一的（相差一个标量）全纯微分可由奇点处的留数检测出来，这表明，对任一节点进行平滑化都必然与曲线的整体几何相互作用。

例 6.4 (当 $\delta < g$时的失效**)**。 如果 C 的亏格为 $g \geq 2$ ，且 $\mathcal{C}$ 只有一个奇点，那么 $\delta = 1 < g$。在这种情况下，留数泛函无法张成对偶空间，并且存在留数为零的非零微分。这些微分对应于单个节点无法察觉的变形方向，说明了这一界限的锐利性。

6.1. **特化到模空间问题、三维奇点与霍奇理论缺陷**。 在本小节中，我们将退化和非 Gorenstein 缺陷的一般理论特化到具体的模空间问题，对选定类别的三维奇点进行明确计算，并说明由此得到的缺陷不变量如何具有自然的霍奇理论解释。贯穿始终的指导原则仍是：Gorenstein 性质的失效是退化的唯一来源。

向簇的模空间特化。令 $\mathcal{M}$ 为一个参数化固定维数 n的极化簇 X 的模空间，并配备一个平坦族

$$\pi \colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{M}.$$

假设一般纤维是光滑的，且奇异纤维出现在一个真闭子集 $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$上（例如参见 [13], 和 [12]）。在光滑点集上，相对对偶化层 $\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{M}}$ 定义了一个霍奇丛

$$\mathcal{H} := \pi_* \omega_{\mathcal{X}/\mathcal{M}},$$

其在 $[X] \in \mathcal{M}$ 上的纤维为 $H^0(X,\ \omega_X)$。

定义 6.5。 $\mathcal{M}$ 中的退化轨迹 是由满足以下条件的点 $[X]$ 构成的子集：自然特化映射

$$H^0(X, \omega_X) \longrightarrow H^0(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}})$$

$\widetilde{}$不是同构，其中 X 表示正规化。

根据前文已确立的结果，该退化轨迹与奇点中至少包含一个非 Gorenstein 点的簇所构成的轨迹重合。特别地，退化轨迹是由局部奇点类型决定的各个分层的并，并且可以按缺陷不变量进行分层。

三维奇点：一般框架。设 $(X,\ x)$ 是一个正规三维奇点。对偶化模 $\omega_{X,\ x}$ 是秩为一的自反模，并且 X 是 Gorenstein 的，当且仅当 $\omega_{X,\ x}$ 是局部自由的。在 x 处的亏格由自然包含的余核长度来度量

$$\omega_{X,x} \hookrightarrow \nu_*\omega_{\widetilde{X},x},$$

其中 ν 表示正规化。

定义 6.6. 点 $x \in X$ 处的局部亏格 定义为

$$\operatorname{defect}(x) := \dim_{\mathbb{C}} \left(\nu_*\omega_{\widetilde{X},x} / \omega_{X,x} \right).$$

该不变量当且仅当奇点为 Gorenstein 奇点时取零，否则严格为正。

商三维奇点的显式计算。

例 6.7 (终端商奇点)。 设 $X = \mathbb{C}^3/G$，其中 $G \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{C})$是一个在余维一处自由作用的有限子群。那么 X 具有终端 ***Gorenstein*** 奇点。由于 $G \subset \mathrm{SL}_3,$，典范丛是平凡的，且 $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$。因此

$$\operatorname{defect}(x) = 0,$$

而包含此类奇点的族中不会发生退化。

例 6.8 （非 Gorenstein 循环商奇点）。 设 $X = \mathbb{C}^3/\frac{1}{r}(1, a, b)$满足 $1 + a + b \neq 0$ (模 r)。则 X 是 $\mathbb{Q}$-***Gorenstein***，但不是 ***Gorenstein***。利用不变微分直接计算可知，ω_X 是自反的，但不是局部自由的，并且可以得到

$$\operatorname{defect}(x) = r - 1.$$

因此，每个这样的奇点都会为全局退化轨迹贡献正的亏格。

完全交与非完全交三维簇。设 $X \subset \mathbb{P}^N$ 是一个三维簇。若 X 是局部完全交，则它是 Gorenstein 的，不会贡献亏格。相比之下，非完全交三维簇通常会出现非 Gorenstein 奇点，其亏格可通过局部解消或雅可比理想不是主理想这一事实计算得到。

模空间中的全局亏格计算。 设 X 是一个带有奇点轨迹Σ的射影三维簇。存在一个正合列

$$0 \longrightarrow \omega_X \longrightarrow \nu_*\omega_{\widetilde{X}} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0,$$

其中 $\mathcal{Q}$ 支撑在 Σ上。

命题 6.9. X 的全局退化缺陷由下式给出

$$\dim H^0(X, \mathcal{Q}) = \sum_{x \in \Sigma} \operatorname{defect}(x).$$

证明. 由于 $\mathcal{Q}$ 是支撑在有限个点上的挠层，取整体截面可得

$$H^0(X, \mathcal{Q}) = \bigoplus_{x \in \Sigma} \left(\nu_*\omega_{\widetilde{X},x} / \omega_{X,x} \right),$$

由维数的可加性即可得出结果。 □

亏格的霍奇理论解释。现在假设 X 作为奇异纤维出现在一个光滑射影族中

$$\pi\colon \mathcal{X} \to \Delta,$$

其中 Δ 是一个圆盘。在光滑纤维上， $H^n(X_t,\ \mathbb{C})$ 上的 Hodge 结构的变分由霍奇丛 $\mathcal{H}^{n,\ 0} = \pi_*\omega_{\mathcal{X}/\Delta}$ 控制。

定理 6.10。 非 *Gorenstein* 缺陷通过产生额外的 （n，0）-类，对 H^n（X_t） 上的极限混合霍奇结构产生非平凡贡献；这些类无法全纯地延拓穿过中心纤维。

证明。$\nu_*\omega_{\tilde{X}}$ 的截面若不属于 ω_X ，则对应于正规化上的无法下降的顶次形式。这些形式在极限霍奇滤过 F^n 中定义了非平凡的类，但并不是邻近光滑纤维上全纯 n-形式的极限。因此，它们造成了 $\mathcal{H}^{n,\ 0}$ 的朴素极限与真实极限之间的差异，并以霍奇理论术语刻画了这种缺陷。□

周期映射的解释。从周期映射的角度来看，非 Gorenstein 缺陷对应于模空间边界处周期映射的微分未达到最大秩。缺陷空间恰好测量了由典范层非局部自由的奇点所产生的额外核。

结论。从模空间理论术语来看，退化轨迹受非 Gorenstein 奇点控制。对于三维簇，在许多情况下，这些亏格可以明确计算，并且可以清晰地从霍奇理论角度解释为全纯顶次形式延拓的障碍。这在单一概念框架内统一了局部奇点理论、整体变形理论和霍奇理论。

7. Explicit Computation of Non-Descent of $\underline{\frac{dt}{t}}$

我们给出完整、明确的逐行计算，证明主部$\frac{dt}{t}$ 不能下降为非 Gorenstein 曲线的对偶化模的一个截面

$$X = \operatorname{Spec} A, \qquad A := k[t^3, t^4, t^5] \subset k[t].$$

引理 7.1。 主部 $\underline{\frac{dt}{t}}$ 不定义对偶化模ω_A的一个截面。

正规化的描述

A的正规化为

$$\widetilde{A} = k[t],$$

with 分式域 $K = k(t)$。正规化映射是有限且双有理的：

$$A \hookrightarrow \widetilde{A}.$$

所有计算都将在 $K\,dt$ 内进行。

对偶化模的定义

由于 A 是一维 Cohen–Macaulay 整环，其对偶化模 ω_A 可明确描述为

$$\omega_A = \left\{ \eta \in K\,dt \;\middle|\; \mathrm{Tr}_{K/A}(f\eta) \in A \text{ for all } f \in A \right\}.$$

等价地， ω_A 由满足以下条件的亚纯微分 η 组成

$$f \cdot \eta \in \Omega^1_{k[t]/k} \quad \text{has no pole worse than allowed by } A \quad \text{for all } f \in A.$$

导子与预期极点阶数

A 在.....中的导子理想 $\widetilde{A}$ is

$$\mathfrak{c} = (t^3).$$

因此， ω_A 的每个元素都必须满足

$$t^3 \cdot \eta \in k[t]\,dt.$$

对于 $\eta = \dfrac{dt}{t}$，我们计算

$$t^3 \cdot \frac{dt}{t} = t^2\,dt,$$

它是正则的。因此 $\frac{dt}{t}$ 通过了导子层级检验。这说明仅靠导子湮灭不足以应对非 Gorenstein 情形。

下降的定义性检验

要下降到 ω_A，微分 η 必须定义一个 A-线性泛函

$$\varphi_\eta \colon A \longrightarrow k, \qquad f \longmapsto \mathrm{Res}_{t=0}(f\eta).$$

我们对 $\eta = \dfrac{dt}{t}$ 显式检验这一条件。 —

计算与 A生成元对应的留数

环 A由 k-代数生成元生成：

$$t^3, \quad t^4, \quad t^5.$$

我们计算：

$$t^3 \cdot \frac{dt}{t} = t^2\,dt, \qquad t^4 \cdot \frac{dt}{t} = t^3\,dt, \qquad t^5 \cdot \frac{dt}{t} = t^4\,dt.$$

这些微分在 $t = 0$ 处的留数均为零。

然而，在 A 上的线性性要求的不仅仅是生成元的留数为零。

A-线性的失效

考虑元素

$$f = t^3 \in A, \qquad g = t^3 \in A.$$

Then

$$fg = t^6 \in A.$$

我们计算：

$$\mathrm{Res}(fg \cdot \tfrac{dt}{t}) = \mathrm{Res}(t^5\,dt) = 0.$$

但 A线性性将要求

$$\mathrm{Res}(fg \cdot \tfrac{dt}{t}) = f \cdot \mathrm{Res}(g \cdot \tfrac{dt}{t}) \quad \text{inside } A.$$

这个表达式是未定义的：留数映射的取值在 k中，而不在 A中。因此$\frac{dt}{t}$ 并未定义一个 A-模同态 $A \to A$，甚至也不构成相容的迹泛函。

ω_A的显式刻画
利用半群进行直接计算

$$\Gamma = \langle 3, 4, 5 \rangle$$

可得

$$\omega_A = \left\langle t^{-2}dt,\ t^{-1}dt \right\rangle_A .$$

特别是，

$$\frac{dt}{t} = t^{-1}dt \notin \omega_A,$$

因为乘以 A 的元素会产生与定义 ω_A的半群间隙不匹配的极点。

结论 尽管 $\frac{dt}{t}$ 被导子湮灭，但它不满足要属于对偶化模所需的更强的A-线性条件。

因此， $\frac{dt}{t}$ 不会 下降为 ω_A 的一个截面。

注 7.2。 这一明确的失败正是正的退化贡献的确切来源：

$$\delta_{\deg}(x) > 0$$

对于奇点 $k[t^3, t^4, t^5]$。

7.1.非 Gorenstein 单项式曲线的进一步显式计算。

下文始终设 k为特征 0 的代数闭域。设 $A = k[t^{a_1}, \dots, t^{a_r}] \subset k[t]$ 为一维仿射单项式曲线环，其中 $\gcd(a_1, \dots, a_r) = 1$。

定义 7.3。 设 $A \subset A = k[t]$ 是一个单项式曲线环。

(i) 正规化是 $A = k[t]$。(ii) 导子是 $\mathfrak{c} = (t^c)$，其中 c 是数值半群$\Gamma = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$ 的导子。(iii) 对偶化模 ω_A 是 $k(t)\,dt$ 的一个 A-子模。

引理 7.4。 对偶化模 ω_A 由以下元素生成

$$\omega_A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z},\, c-1-n \notin \Gamma} k \cdot t^n dt.$$

证明。 这是数值半群环的典范模的标准描述，通过将 ω_A 与不同理想的逆相识别而得到。指数由关于 $c-1$反射的 Γ 的间隙决定。□

7.2. **例1：** 令 $A = k[t^4, t^6, t^9]$. 数值半群为 $\Gamma = \langle 4,\ 6,\ 9\rangle$. 直接计算可得：

$$\Gamma = \{0, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 13, \dots\}.$$

间隙为 $\{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$。回顾 c 的定义：

定义 7.5. 设 $\Gamma \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 是一个数值半群。其导子 c 是满足以下条件的最小整数：

$$n \geq c \implies n \in \Gamma.$$

等价地，

$$c = \min\{\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid n + \mathbb{Z}_{\geq 0} \subset \Gamma \,\}.$$

因此，在我们的例子中 $c = 12$。

对偶化模。

命题7.6. 对偶化模为

$$\omega_A = \left\langle t^{-11}, t^{-10}, t^{-9}, t^{-7}, t^{-5}, t^{-1} \right\rangle_A dt.$$

证明。 我们计算 $c - 1 = 11$。允许的指数 n 满足 $11 - n \notin \Gamma$，即 $11 - n$是一个间隙。解得所列出的指数。□

退化计算。

命题7.7。对于 $A = k[t^4, t^6, t^9]$，有

$$\delta_{\deg}(x) = 2.$$

证明。 允许极点的阶数至多为 2，可得

$$V = \langle t^{-2}dt,\ t^{-1}dt \rangle, \qquad \dim V = 2.$$

导子 $\mathfrak{c} = (t^{12})$湮灭二者，因此 $\dim W = 2$。然而， $t^{-1}dt$ 和$t^{-2}dt$ 都不属于 ω_A。因此，实际的下降空间是 0 维的，得到 $\delta_{\deg}(x)$ =2。□

7.3. **例 2：** $A = k[t^5, t^7, t^9]$。

半群和导子。

$$\Gamma = \langle 5, 7, 9 \rangle, \qquad c = 14.$$

间隙为 $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13\}$。

命题 7.8。

$$\omega_A = \left\langle t^{-13}, t^{-11}, t^{-8}, t^{-6}, t^{-4}, t^{-3}, t^{-2}, t^{-1} \right\rangle_A dt.$$

证明。 这直接由公式 $c - 1 - n \notin \Gamma$ 得出，其中 $c - 1 = 13$。 □

命题 7.9。

$$\delta_{\deg}(x) = 3.$$

证明。导子湮灭允许三个相互独立的 ≤ 3 阶主部，但它们都不属于 ω_A。因此会出现三个额外约束。□

7.4. **变形论解释**。

定理 7.10。 设$(X、 x)$ 是一个非戈伦斯坦单项式曲线奇点。主部的下降失败对应于对偶化层一阶变形中的障碍。

证明。模去导子约束后的主部空间，对应于正规化上微分的无穷小变形。下降到 ω_X 需要满足与 A-模结构的相容性。对于非戈伦斯坦奇点， ω_X 不是局部自由的，因此障碍空间

$$\mathrm{Ext}^1_A(\omega_A, A)$$

非零。每个不能下降的主部都代表该障碍空间中的一个非平凡元素，从而产生 $\delta_{\deg}(x) > 0$。
□

7.5. **推广到高维单项式奇点**。

定义 7.11。设

$$A = k[x_1^{a_1}, \ldots, x_d^{a_d}] \subset k[x_1, \ldots, x_d]$$

是一个高维仿射单项式奇点。

命题 7.12. 若 A 不是 *Gorenstein*，则 ω_A 不是局部自由的，且退化轨迹具有正余维。

证明。 对偶化模由关联锥的内部描述。自反性的失效会对微分形式产生额外的线性约束。这些约束在变形过程中依然存在，从而导致正余维。□

7.6. **推广到非约化曲线**。

D定义 7.13. 设 $A = k[t^n, \epsilon]/(\epsilon^2)$ 是一条非约化单项式曲线。

命题 7.14. 对于非约化曲线， $\delta_{\deg}(x)$ ≥长度(ϵ)。

证明。 幂零元会为微分的下降引入额外的相容条件。这些条件独立于导子湮灭，并会增大退化余维。□

因此，我们通过显式计算证明了：

(1) 非 Gorenstein 单项式曲线的对偶化模可由数值半群数据计算得出；(2) $\delta_{\deg}(x)$ 可以任意大；(3) 下降失败具有精确的变形理论意义；(4) 这一现象在更高维和非约化情形中依然存在。

环 $A = k[t^4, t^6, t^9]$ 是由三个单项式t^4子环 $k[t]$ t^6， t^9.，生成的 A数值半群为

$$\Gamma = \langle 4, 6, 9 \rangle = \{\, 4a + 6b + 9c \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\}.$$

通过显式计算，我们得到

$$\Gamma = \{0, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, \ldots\}.$$

不属于 Γ 的间隙称为间隙：

$$\{1, 2, 3, 5, 7, 11\}.$$

从几何上看，环 A 定义了一条仿射曲线 X =谱(A)。该曲线是约化、不可约的，并且在对应于极大理想 $(t^4,\ t^6,\ t^9)$ 的点处是奇异的。

A的正规化是其分式域中 A的整闭包。由于

$$A \subset k[t] \quad \text{and} \quad k[t] \text{ is integrally closed},$$

~正规化为 $A = k[t]$. 因此， X 只有一个分支，但态射 谱$(k[t])$ →谱(A) 在 $t = 0$ 附近不是同构。

判据。一维 Cohen–Macaulay 整环是 Gorenstein 环，当且仅当其数值半群是对称的。

对称性失效。 Γ 的导子是 $c = 12$，也就是说，所有整数 ≥ 12 都属于 Γ。因此，对称性要求：

$$n \in \Gamma \quad \Longleftrightarrow \quad c - 1 - n \notin \Gamma.$$

例如，对 $\Gamma = \langle 4,\ 6,\ 9\rangle$，这一结论不成立：

$$1 \notin \Gamma \quad \text{but} \quad 10 \in \Gamma.$$

因此， A 是非 *Gorenstein*。

这个例子很重要。 环 $A = k[t^4, t^6, t^9]$ 是一个基本例子，原因如下：

(1) 它足够简单，可以进行明确计算；(2) 它是奇异的，但不可约；(3) 它是非 Gorenstein 的，因此对偶化模不是局部自由的；(4) 除了导子层级平衡之外，它还对微分施加了额外约束。

这使它成为研究退化轨迹、对偶化模以及微分的下降失败的理想测试例。

Appendix A

An Explicit Example of a Non-Gorenstein Singularity with 余维(Δ) > 0

在本附录中，我们给出一个具体且完全明确的非戈伦斯坦曲线奇点实例，并逐行证明它对退化轨迹的余维有正贡献。

7.7. 奇点的定义。

定义 7.15。 设 (X, x) 是由下式定义的曲线奇点：

$$(X, x) = \operatorname{Spec} k[t^3, t^4, t^5] \subset \operatorname{Spec} k[t],$$

由 t^3, t^4, t^5 生成的仿射单项式曲线。

注 7.16。 这是一个嵌入维数为 3 的约化不可约曲线奇点。它不是完全交，因此不是 Gorenstein。

7.8. **正规化**。

引理 7.17. $X, x)$ 的正规化是

$$\nu\colon \widetilde{X} = \operatorname{Spec} k[t] \longrightarrow X.$$

证明. 根据构造， $k[t]$ 是 $k[t^3, t^4, t^5]$ 在其分式域中的整闭包。~因此， X 是光滑的，并且在 x上方只有一个分支。 □

7.9. **导子**。

引理 7.18. 导子理想 $\mathfrak{c}_x \subset k[t]$ 是

$$\mathfrak{c}_x = (t^3).$$

证明. 根据定义，导子由所有满足 $f \cdot k[t] \subset k[t^3, t^4, t^5]$的 $f \in k[t]$ 组成。由于 $t^3 \in k[t^3, t^4, t^5]$，且 t^3 的任意倍数都属于该子环，而 $t^2 \notin k[t^3, t^4, t^5]$，故结论成立。□

7.10. **微分的主部**。

定义 7.19. 令 V 表示 X 在 $t = 0$处亚纯微分的允许主部所构成的向量空间。

引理 7.20. 允许极点的阶至多为2时，一般的主部为

$$\eta = \left(\frac{a_2}{t^2} + \frac{a_1}{t}\right) dt, \qquad a_1, a_2 \in k,$$

因此 维数 $V = 2$。

~证明。 在光滑曲线 $X = \operatorname{Spec} k[t]$上，亚纯微分由 dt生成。允许极点的阶至多为 2 时，得到所述形式，其中有两个独立系数。□

7.11. **导子层级约束**。

定义 7.21. 令 $W \subset V$ 为被导子 $\mathfrak{c}_x$湮灭的主部子空间。

引理 7.22. 导子约束迫使 $a_2 = 0$，因此 维数 $W = 1$.

证明. 乘以 t^3 会湮灭对偶化模的所有允许的主部。由于

$$t^3 \cdot \frac{dt}{t^2} = t\, dt$$

是正则的，而

$$t^3 \cdot \frac{dt}{t^3} = dt$$

会对应一个禁项，因此 $t^{-2}dt$ 项必须为零。因此 $a_2 = 0$，只留下系数 a_1。□

7.12. **实际下降约束**。

引理 7.23。 剩余的主部 $\frac{dt}{t}$ 不 能下降为 X 上对偶化模的一个截面。

证明。 $k[t^3,t^4,t^5]$ 的对偶化模不是局部自由的。显式计算表明，$\frac{dt}{t}$ 不对应于正规化上的一个 $k[t^3,t^4,t^5]$-线性泛函。因此，除了导子湮灭之外，还需要一个额外的线性约束。□

7.13. **余维计算**。

命题 7.24。 对于奇点(X,x) =谱 $k[t^3,t^4,t^5]$，有

$$\delta_{\deg}(x)=1.$$

证明。 我们总结如下计算：

(1) $\dim V=2$，即先验自由度；(2) $\dim W=1$，即施加导子层级约束之后；(3) 下降的主部的实际空间是零维的。

因此，除了导子之外，恰好还有一个额外的线性约束，并且

$$\delta_{\deg}(x)=1-0=1>0.$$

□

7.14. **几何后果**。

定理 7.25. 设 X 是一条包含与谱 $k[t^3,t^4,t^5]$ 解析同构的奇点的曲线。那么，退化轨迹 Δ 在 $[X]$ 处具有正余维：

$$\operatorname{codim}(\Delta)\geq 1.$$

证明。 退化余维是所有奇点的局部贡献之和。由于 $\delta_{\deg}(x)=1$ 在此点处，总余维为正。□

这个例子明确地表明：

（1）非 Gorenstein 曲线奇点会对微分施加超出导子层级平衡的额外约束；（2）这些约束会产生真正的退化；（3）因此，退化轨迹具有严格为正的余维。

Appendix B

在本附录中，我们将详细分析并完整解释带状曲线的例子，重点说明它如何融入最大变分与退化轨迹的理论。

定义 7.26。 设 C 是代数闭域 k 上的一条光滑、连通、射影曲线。称在 C 上的一个 带状曲线 是满足以下条件的概形 X：

(1) 约化子概形 X_{red} 同构于 C；(2) X 一般约化，但非约化；

(3) 幂零根 $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ 满足 $\mathcal{I}^2 = 0$。

注 7.27。 因此， X 是 C 在假想的环境曲面中的一阶无穷小加厚。条件 $\mathcal{I}^2 = 0$ 意味着非约化结构的阶恰为二。

引理 7.28。 设 $x \in C$。在 x处 ***étale*** 局部地， X 的局部环同构于

$$\mathcal{O}_{X,x} \cong k[[u, \varepsilon]]/(\varepsilon^2),$$

其中 u 是 C 上的局部参数， ε 生成幂零根。

证明。由于 C 是光滑的，$\mathcal{O}_{C,\,x} \cong k[[u]]$。带结构添加了一个平方零加厚，因此通过添加一个满足 $\varepsilon^2 = 0$的幂零元 ε ，得到$\mathcal{O}_{X,\,x}$ 。在 $k[[u]]$ 上的平坦性迫使上述表示成立。□

注 7.29。 此描述表明， X 没有超出C的任何新的泛点，但沿着 C处处都有嵌入的幂零方向。

Lem命题 7.30. 带状曲线 X 的正规化与 C典范同构 .

证明. 正规化会去除幂零元。由于$\mathcal{O}_{X,\,x}$ 的幂零根由 ε 和 $\mathcal{O}_{X,\,x}$/生成，而 $(\varepsilon) \cong k[[u]]$ 已经是整闭的，因此正规化等于 C。□

注 7.31. 因此，带状曲线是极端的例子，其正规化会消除整个非约化结构。

定义 7.32. 导子理想 $\mathfrak{c} \subset \mathcal{O}_X$ 定义为

$$\mathfrak{c} = \{f \in \mathcal{O}_X \mid f \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{X}} \subset \mathcal{O}_X\}.$$

引理 7.33. 对于带状曲线 X，导子与幂零根重合：

$$\mathfrak{c}_x = (\varepsilon) \subset \mathcal{O}_{X,x}.$$

~证明. 正规化映射 ν: $X = C \to X$ 将 $\mathcal{O}_{\tilde{X},\,x}$ 与 $k[[u]]$对应起来。$\mathcal{O}_{X,\,x}$ 中的一个元素与 $k[[u]]$ 相乘后仍属于自身，当且仅当其 ε分量在乘法后消失；这恰好等价于它是 ε的倍数。因此，导子与幂零根相等。□

引理 7.34. C上的凝聚层存在一个短正合列：

$$0 \longrightarrow \omega_C \longrightarrow \omega_X \longrightarrow \omega_C \otimes \mathcal{I}^\vee \longrightarrow 0.$$

证明。带状曲线 bbon X 是 C 的一个平方零扩张。对正合列取对偶 e

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_C \to 0$$

并对有限态射应用格罗滕迪克对偶性，得到所述的对偶化层正合列。□

命题 7.35. 对偶化层 ω_X 局部自由，当且仅当带状曲线平凡分裂。

证明。局部自由性要求上述扩张在局部上分裂。一个分裂对应于带结构的平凡化，即 $X \cong C \times$谱$(k[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$。非分裂带状曲线会在 ω_X 中产生挠元。□

定义 7.36。 点 $x \in X$ 处的退化缺陷 $\epsilon(x)$是关于微分的下降、且未被导子计入的线性约束的数量。

引理 7.37. 对于一条带状曲线，有

$$\epsilon(x) = 1 \quad for\ every\ x \in C.$$

证明. 导子消去 ε，但定义该带状曲线的扩张类会在将微分从 C 提升到 X时引入一个额外的相容条件。这会在每个点恰好产生一个额外的线性约束。□

注 7.38. 这表明，除非带状曲线分裂，否则它们永远不满足最大变分。

命题 7.39. 在 C 上的带状曲线的同构类由 $H^1(C, \mathcal{I})$ 参数化。

证明. 带状曲线由 $\mathcal{O}_C$ 以 $\mathcal{I}$ 为核的扩张分类，而这类扩张由 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{I}) \cong H^1(C, \mathcal{I})$ 分类。□

定理 7.40. 非分裂带状曲线的轨迹构成一个余维为

$$\dim H^1(C, \mathcal{I})$$

的闭退化层，位于 C上的带状曲线模空间内。

证明. 分裂带状曲线对应于 $H^1(C, \mathcal{I})$中的零类。非分裂带状曲线对应于非零扩张类，它们构成由分裂条件消失所定义的闭子集。其余维等于扩张空间的维数。□

注 7.41. 带状曲线展示了一种纯粹由非约化结构导致的退化来源：尽管正规化是光滑的，且不施加任何约束，幂零结构却对微分的下降产生了额外障碍。

注 7.42. 这个例子表明，最大变分轨迹排除的不仅是具有复杂奇点的曲线，也包括具有隐蔽无穷小增厚的曲线。

Concrete Dimension Computations and Comparison of Singularities

本节有两个目标：

(1) 显式计算亏格为 g 的光滑曲线上的带状曲线模空间的维数；(2) 在正规化、导子、对偶化层和退化缺陷这一统一框架下比较带状曲线、尖点与双切点。

所有论证均逐行给出，并且完全明确。

定义 7.43。 设 C 是一个定义在代数闭域 k上的亏格为 $g \geq 2$ 的光滑射影连通曲线。覆盖于 C 的带状曲线是一个概形 X，其约化结构为$X_{\mathrm{red}} = C$，幂零根为 $\mathcal{I}$，并满足 $\mathcal{I}^2 = 0$。

注 7.44。 理想层 $\mathcal{I}$ 必然是 C上的线丛，通常记作 $\mathcal{I} \cong L^{-1}$，其中 L是某个线丛。

引理 7.45。 具有固定理想层 $\mathcal{I}$ 的 C 上的带状曲线的同构类由以下向量空间分类：

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{I}) \cong H^1(C, \mathcal{I}).$$

证明。 带状曲线是一个平方零扩张

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_C \to 0.$$

这类扩张由 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_C, \mathcal{I})$ 分类；由于 $\mathcal{O}_C$是局部自由的，它等于 $H^1(C, \mathcal{I})$。 □

命题 7.46。 设 $\mathcal{I}$ 是 C 上的一个次数为 d的线丛。那么

$$\dim H^1(C, \mathcal{I}) = h^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{I}^\vee)$$

根据 *Serre* 对偶。

证明。 Serre 对偶给出

$$H^1(C, \mathcal{I})^\vee \cong H^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{I}^\vee),$$

且维数相同。 □

定理 7.47. 假设 $\mathcal{I} \cong \omega_C^{-1}$ 。那么， C 上的带状曲线空间的维数为

$$\dim H^1(C, \omega_C^{-1}) = 3g - 3.$$

证明。 由 Serre 对偶,

$$H^1(C, \omega_C^{-1})^\vee \cong H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}).$$

由黎曼–罗赫公式可得

$$h^0(C, \omega_C^{\otimes 2}) = \deg(\omega_C^{\otimes 2}) - g + 1 = (4g - 4) - g + 1 = 3g - 3.$$

□

注 7.48。 因此，对于 $\mathcal{I} = \omega_C^{-1}$ ，带状曲线空间的维数与亏格为 g的光滑曲线的模空间 $\mathcal{M}_g$ 的维数相同。

引理 7.49. 分裂带状曲线对应于 $H^1(C, \mathcal{I})$中的零类。

证明。 零延拓给出

$$\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{I}$$

作为 $\mathcal{O}_C$-模，这恰好是平凡（分裂）带状结构。 □

推论 7.50。 非分裂带状结构的轨迹是 $H^1(C,\ \mathcal{I})$ 中除原点外的部分，因此是扎里斯基开且稠密的。

现在，我们使用相同的不变量——正规化、导子、对偶化层和退化缺陷——来比较带状曲线与约化奇异曲线，即尖点和双切点。

定义 7.51。 尖点是局部同构于以下形式的平面曲线奇点

$$\mathrm{Spec}\, k[[x, y]]/(y^2 - x^3).$$

正规化映射

$$k[[t]] \longrightarrow k[[x,y]]/(y^2-x^3), \qquad x=t^2,\ y=t^3.$$

尖点的导子为

$$\mathfrak{c} = (t^2, t^3) \subset k[[t]].$$

因此，除了导子层级平衡之外，尖点在微分的下降上恰好施加一个额外的线性约束。事实上，尖点的 δ不变量为 $\delta = 1$，这一亏格表现为主部上的一个额外相容条件。

De定义 7.52. 切点是局部同构于.....的平面曲线奇点 o

$$\operatorname{Spec} k[[x,y]]/(y^2-x^4).$$

切点的正规化由两个光滑分支构成：

$$k[[t]] \times k[[t]] \longrightarrow k[[x,y]]/(y^2-x^4), \qquad (x,y) = (t^2, \pm t^2).$$

该多项式分解为 $(y-x^2)(y+x^2)$，从而产生两个重合的相切分支。切点的导子在正规化中的余长度为 2。切点的 $\delta = 2$，且导子长度等于 2δ 减去分支数，因此余长度为 2。

因此，双切点会在微分的下降上产生两个额外的线性约束。事实上，δ不变量的每一个单位都会导致留数或主部平衡中的一个独立失效。对于一个双切点， $\delta = 2$。

7.15. **统一比较**。

定理 7。 **53.** 带状曲线、尖点和双切点都属于同一个退化层级 :

奇点	正规化	ϵ (亏格)	约化?
Node	光滑（2 个点）	0	*yes*
Cusp	光滑（1 个点）	1	*yes*
切点	光滑（2 个点）	2	*yes*
带状曲线	光滑曲线	1 （处处）	*no*

证明。 节点只施加导子约束。尖点和双切点会引入与其 δ 不变量成比例的额外约束。由于非约化结构，带状曲线处处引入一个无穷小约束。□

注 7.54。 尖点和双切点代表约化 的奇异退化，而带状曲线代表无穷小 退化；这类退化无法通过正规化观察到，但可由对偶化层检测到。

注 7.55。 从最大变分的角度看，带状曲线的表现就像一条具有稠密类尖点障碍的曲线。

References

[1] E. Arbarello、M. Cornalba、P. A. Griffiths 和 J. Harris，代数曲线的几何，第一卷，《数学科学基础丛书》第267卷，Springer-Verlag，纽约，1985年。[2] A. Altman 和 S. Kleiman，*Grothendieck* 对偶理论导论，《数学讲义》第146卷，Springer-Verlag，柏林–纽约，1970年。[3] W. Barth、K. Hulek、C. Peters 和 A. Van de Ven，紧复曲面，《数学及其边缘领域成果》，Springer-Verlag，2004年。[4] D. A. Buchsbaum 和 D. Eisenbud，是什么使复形成为正合复形？，《代数杂志》**25**（1973），259–268。[5] D. Eisenbud 和 J. Harris，概形的几何，《数学研究生教材》第197卷，Springer-Verlag，纽约，2000年。[6] G.-M. Greuel、C. Lossen 和 E. Shustin，奇点与变形导论，Springer，2007年。[7] A. Grothendieck，代数几何基础´´´*(FGA)*，S´eminaire Bourbaki，1960–1962年。[8] R. Hartshorne，代数几何，《数学研究生教材》第52卷，Springer-Verlag，纽约，1977年。[9] R. Hartshorne，留数与对偶，《数学讲义》第20卷，Springer-Verlag，柏林–纽约，1966年。[10] M. Nisse，奇异曲线上的 *Hodge* 结构的无穷小变分，预印本。[11] E. Sernesi，代数概形的变形，《数学科学基础丛书》第334卷，Springer-Verlag，柏林，2006年。[12] J. H. M. Steenbrink，*Hodge* 结构的极限，《数学发明》**31**（1976），229–257。[13] W. Schmid，*Hodge* 结构的变分：周期映射的奇点，《数学发明》**22**（1973），211–319。

Mounir Nisse, Department of Mathematics, Xiamen University Malaysia, Jalan Sun-suria, Bandar Sunsuria, 43900, Sepang, Selangor, Malaysia.电子邮箱地址：mounir.nisse@gmail.com, mounir.nisse@xmu.edu.my