arXiv:2601.04477v1 [math.RA] 8 Jan 2026

关联单项式代数的增长及其在 Manturov 群中的应用

XIANGUI ZHAO

Abstract. 众所周知，结合代数与其关于次数字典序的关联单项式代数具有相同的增长和 Gelfand-Kirillov 维数（GK维数）。本文主要研究代数的 GK维数与其关于某个单项式序的关联单项式代数的 GK维数之间的关系。我们给出了单项式序的充分条件，使得这两个代数具有相同的 GK维数。我们的结果推广了这一著名结论，并有若干应用。特别地，作为一项应用，我们研究正整数 $n > k$ 对应的 Manturov 群（k，n）的增长。我们证明，对所有 $n > 1$，Manturov（1，n）群的增长为 0；Manturov（2，3）群的增长为 2；并且对所有 $n > k \geq 3$，Manturov 群（k，n）都包含一个秩为 2 的自由子群，因此具有指数增长。

1. Introduction and main results

设 $\mathbb{F}$ 是一个域。除非另有明确说明，本文中的所有代数均假定为定义在 $\mathbb{F}$ 上的结合含幺代数。

Gelfand 和 Kirillov 为代数引入的增长概念 [18]，以及 Milnor 为群引入的增长概念[29]，是研究代数、模、群、拟群等的非常有用且强大的工具。Gelfand-Kirillov 维数（简称 GK 维数）是刻画增长的一个数值特征。代数 A 的 GK 维数定义为

$$\mathrm{GKdim}(A) := \sup_{V} \limsup_{n\to\infty} \log_n \dim \sum_{i=0}^{n} V^i$$

其中，上确界取遍 A 的所有有限维子空间 V。注意，GKdim(A) 是代数 A 的不变量，但不是环 A的不变量（详情见 [33]）。关于代数、模和群的 GK 维数的基本性质及应用，感兴趣的读者可参阅 [23]。关于其他代数结构的 GK 维数（及其应用）的最新研究，例如可参阅 [7, 4, 32, 6, 30, 5, 24]。

设 $A = \mathbb{F}\langle X\rangle/I$，其中 $\mathbb{F}\langle X\rangle$ 是由有限集 X 生成的自由结合代数，而 I 是 $\mathbb{F}\langle X\rangle$ 的一个理想。假设 $<$ 是 X^* 上的一个 单项式序（定义 2.1），其中 X 是由 X 生成的自由幺半群。对于 $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle$，我们将 f（即 f 的 首单项式）定义为 f 的表达式中相对于 $<$ 的最大单项式（其系数非零）。我们通过令 J 为由 I 生成的 $\mathbb{F}\langle X\rangle$ 的理想，将一个单项式理想 J 与 I 关联起来：$= \{f \mid f \in I\}$。于是，我们称 $A = A_< = \mathbb{F}\langle X\rangle/J$ 为 A 关于 $<$ 的 关联单项式代数。一个~标准结果是，相对于 X^* 上的 次数字典序（定义见例 2.2），A 和 A 具有相同的增长函数（因而具有相同的 GK维数）；参见例如 [8, 注 4.1], ，或有限表示情形下的 157] 页 [23,。

Date: 2026年1月9日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 16P90、16Z10、20F05、20F10。

Key words and phrases. 增长率、Gelfand-Kirillov维数、Gr¨obner-Shirshov基、字问题。

~ ~代数 A 相较于 A 具有一些优势，例如， A 为分析其增长提供了一个更具体的框架。注意，次数字典序是单项式序的一个特殊例子。于是，下面的问题便很自然了。

问题 1.1。 对于 X^* 上的任意单项式序 $<$，相应的单项式代数$\sim A_<$ 是否与 A 具有相同的增长和 *GK* 维数?

例 3.5 表明，上述问题的一般答案是否定的。我们研究单项式序的充分条件，使得 A 与 A 具有相同的增长。我们的一个主要结果如下所述。

定理 1.2。 设 A 是由有限集 X 生成的代数，且 $<$ 是 X^* 上的单项式序。假设存在一个次数为 $d=$次数$(f)\geq 1$ 的实多项式 $f(x)$，使得对于所有满足 $|u|\gg 0$ 的 u、$v\in X^*$，

$$u<v \implies |u|\leq f(|v|),$$

其中 $|u|$ 表示 u 的长度。则

$$\mathrm{GKdim}(\widetilde{A_<})\leq \mathrm{GKdim}(A)\leq d\,\mathrm{GKdim}(\widetilde{A_<}).$$

定理 1.2 有两个直接应用。首先，如果 $<$是加权次数字典序 （在第3节中定义），则由定理 1.2 可得，GKdim(A) =GKdim(A)（推论 3.8），这推广了上文提到的标准结果。其次，定理 1.2 还给出了关于一元多项式代数上 Ore 扩张的 GK维数的二分性（推论3.9）。这种二分性类似于 [36, 定理 1.2]中关于二元多项式代数上的广义Weyl代数的 GK 维数的二分性，也类似于 [19] 中关于单微分环上的单模的 GK 维数的二分性。然而，推论3.9 给出的二分性不能推广到多于一个变量的多项式代数上的 Ore 扩张（见例3.10）。

我们还将定理 1.2应用于研究 Manturov（k,n）-群 G_n^k （定义于第3节，也称为 n股 k自由辫群）在正整数 $n>k$下的增长。Manturov（k,n）-群由 Manturov [25, 26] 于2015年引入，它们自然地作为描述 n 个粒子动力系统的群出现。事实证明，Manturov群与辫群、几何、拓扑和动力系统 [26, 21, 27]密切相关。感兴趣的读者可参阅综述 [28] ，以了解有关 G_n^k的更多背景和应用；有关 G_n^k的一些最新结果，请参阅 [2, 1, 22] 。

回顾 [23, 第 140] 页，若群 G的群代数 $\mathbb{F}G$ 具有 GK维数 d，则称该群的增长等于 d ，其中 d 为实数。我们关于 Manturov群增长的主要结果如下。

Th定理 1.3。 设 G_n^k 是整数 $n>k\geq 1$ 对应的 *Manturov* （k, n）群。那么以下成立。

（*i*）对于所有 $n>1$，群 G_n^1 的增长等于 0。（*ii*）群 G_3^2 的增长等于 2，并且是 $\mathbb{Z}^2$ 的有限扩张。（*iii*）对于所有 $n>k\geq 3$，群 G_n^k 包含一个秩为 2 的自由子群，因此具有指数增长。

我们通过相对于次数字典序特别构造的 G_3^2 无限Gr¨obner-Shirshov 基，分析 $\mathbb{F}G_3^2$ 的增长。值得注意的是，Bai and Chen [3, 定理 3] （另见 [1,定理 1]）为 $\mathbb{F}G_3^2$ 构造了一个相对于某种序的有限Gr¨obner-Shirshov 基，但这种序不满足定理 1.2 中的假设。因此，Bai and Chen 给出的 Gr¨obner-Shirshov 基无法直接用于计算 $\mathbb{F}G_3^2$ 的 GK维数（见注 3.6）。正如 [27], 所指出的， G_n^k 的字问题“极其重要”。以下对象的字问题

仍未解决：除 G_n^k 、 G_n^2、 G_4^3 和 G_5^4 之外的所有对象（见 [17]）。对于 G_n^2、 G_4^3 和 G_5^4，字问题已通过几何方法或借助与其他群的联系得到解决（见 [27, 17]）。本文实际上通过使用特别构造的 $\mathbb{F}G_3^2$ 无限 Gr¨obner-Shirshov 基，给出了纯代数方法来解决 G_3^2 的字问题（推论 4.3）。值得一提的是，Gr¨obner-Shirshov 基理论是解决群、半群、结合代数、李代数等对象的字问题的有力工具，相关研究论文已有许多，例如见 [31, 11, 16, 14, 13]。

目前我们尚不知道 G_n^2 关于 $n \geq 4$ 的增长情况（见猜想 4.7）。

本文其余部分安排如下。第2节介绍 Gr¨obner-Shirshov 基的基本概念和事实。随后，我们在第3节研究关联单项式代数的增长，并证明定理 1.2。最后，在第4节将这些代数方法应用于研究 Manturov 群的增长，并证明定理 1.3。

2. Preliminaries

本节简要介绍结合代数和半群的 Gr¨obner-Shirshov 基。更多详情请参阅 [31, 10], 或综述文章 [12]。

设 $\mathbb{F}$ 是一个域， $\mathbb{F}\langle X\rangle$ 是由 X生成的、定义在 $\mathbb{F}$ 上的自由结合代数， X^* 是由 X生成的自由幺半群，其中空字是单位元 1。 X^* 中的元素称为字或单项式，而 $\mathbb{F}\langle X\rangle$ 中的元素称为（非交换）多项式。我们将字 w 的长度 （或次数）记为 $|w|$。对于子集 $S \subseteq X^*$，记作 $S^{\leq n} := \{u \in S \mid |u| \leq n\}$。

我们始终假设集合 X 是良序集。

设 X^* 是一个良序集，且 $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle$。记 f 为 f 的首一单项式，即 f 中（系数非零的）最大单项式。对于子集 $R \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle$, 记 $\bar{R} := \{\bar{r} \mid r \in R\}$。如果 f 的系数为 1，则称 f 为首一；如果 R 中的所有元素都是首一的，则称 $R \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle$ 为首一。记 $\mathbb{F}R$ 为由 R 张成的 $\mathbb{F}\langle X\rangle$ 的子空间，并记 Id(*R*) 为由 R 生成的 $\mathbb{F}\langle X\rangle$ 的理想。

定义 2.1。 $<$ 上的单项式序是 X^* 上的良序，并且对于 u、 $v \in X^*$,

$$u < v \implies w_1uw_2 < w_1vw_2, \text{ for all } w_1, w_2 \in X^*.$$

例 2.2. X^* 上的单项式序的一个标准例子是次数字典序（简称 *deg-lex* 序），它首先按次数（长度）比较两个字，然后按字典序比较。

单项式序的另一个例子是加权次数字典序（定义见第3节），它是次数字典序的推广。

例 2.3. 对于 $1 \neq u \in X^*$，令 $u' := \max u$ 为出现在 u 中的最大字母。则 u 有唯一分解

$$u = u_0u'u_1u'u_2 \cdots u_{n_u-1}u'u_{n_u},$$

其中 $u_i \in (X \setminus \{u'\})^*$ 对于 $0 \leq i \leq n_u$ 和 $n_u \in \mathbb{N}^*$成立。令 $\mathrm{wt}(u) = (u', n_u, u_0, u_1, \ldots, u_n)$。对于 $1 \neq v \in X^*$，令 $1 < v$，并且当 $\mathrm{wt}(u) < \mathrm{wt}(v)$ 按字典序排列时，令 $u < v$ ，其中对于$0 \leq i \leq u_n$ ， $u_i < v_i$ 当且仅当

$$u_i = 1 < v_i, \text{ or } u_i, v_i \neq 1 \text{ and } \mathrm{wt}(u_i) < \mathrm{wt}(v_i) \text{ recursively.}$$

这种序称为 X^* 上的塔序 。很容易验证，塔序是单项式序。

设 $<$ 是 X^* 上的单项式序。假设 f 和 g 是 $\mathbb{F}\langle X\rangle$ 中的两个首一多项式。我们将 f 和 g 的两种合成定义如下。

(i) 若 w 是一个字，使得对于某个 $a, b \in X^*$，有 $|f| + |g| > |\overline{w}|$，则称多项式 $(f, g)_w := fb - ag$ 为关于 w 的 f 和 g 的交叠组合。(ii) 若对于某个 $a, b \in X^*$，有 $w = f = agb$，则称多项式 $(f, g)_w := f - agb$ 为关于 w 的 f 和 g 的包含组合。

字 w 在每种情况下都称为合成 $(f, g)_w$ 的歧义。

设 $S \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle$ 是首一的。若多项式 $p \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ 模 (S, w)平凡，则称其为模 $(S, w)p \equiv 0$ 平凡，并记作 p，如果它可以写成有限和

$$p = \sum \alpha_i a_i s_i b_i, \text{ each } \alpha_i \in \mathbb{F}, a_i, b_i \in X^*, \ s_i \in S, \ a_i \overline{s_i} b_i < w.$$

更一般地，对于 $p, q \in \mathbb{F}\langle X\rangle$，记作

$$p \equiv q \mod (S, w)$$

如果 $p - q \equiv 0$ 模 (S, w)。

定义 2.4。设 $S \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle$ 是首一的。如果 $f, g \in S$ 的所有合成 $(f, g)_w$ 模 (S, w)均为平凡的，那么称 S 为 $\mathbb{F}\langle X\rangle$ 中关于 $<$ 的 *Gr¨obner-Shirshov* 基，或称为理想 $\mathrm{Id}(S)$的 Gr¨obner-Shirshov 基，或称为商代数$\mathbb{F}\langle X\rangle/\mathrm{Id}(S) = \mathbb{F}\langle X|S\rangle$的 Gr¨*obner-Shirshov* 基。

以下组合-菱形引理最初由Shirshov [31]针对李代数证明。Bokut [10] 将Shirshov的方法专门应用于结合代数（另见Bergman [9]），并得到以下引理。对于交换代数的情形，该引理称为布赫伯格定理 [15]。

引理 2.5。**（组合-菱形引理）**设 $S \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle$ 为一个首一集合，且 $<$ 为 X^*上的单项式序。则以下陈述等价。

(i) S 是关于 $<$的 $\mathrm{Id}(S)$ 的*Gr¨obner-Shirshov*基。*(ii)* 对所有 $0 \neq f \in \mathbb{F}\langle X\rangle$、 $f \in \mathrm{Id}(S)$ $\Longrightarrow f = asb$，其中存在 $s \in S$ 和 a、$b \in X^*$。*(iii)* $\mathrm{Irr}(S)$: $= \{u \in X^* \mid u \neq asb, s \in S, a, b \in \overline{X}^*\}$ 是代数 $\mathbb{F}\langle X|S\rangle$.的一个 $\mathbb{F}$-基

给定 $u \in X^*$ 和 $R \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle$，若 u 相对于 R是正规 的，或 u 是 R-正规的，则称$u \in \mathrm{Irr}(R)$。若对所有 $f \in S$ 以及 f中系数非零的所有单项式 u，都有 u相对于 $S \setminus \{f\}$是正规，则称 Gr¨obner-Shirshov 基 S 是约化的 。根据 [12, 定理 3]，对于固定的单项式序， $\mathbb{F}\langle X\rangle$ 的每个理想都有唯一的约化 Gr¨obner-Shirshov 基。在本文将 Gr¨obner-Shirshov 基用于应用时，我们通常使用约化的 Gr¨obner-Shirshov 基。

不失一般性，我们总是假设约化的 Gr¨obner-Shirshov 基 R 不包含满足$f \in X$ 和 $f - f \in \mathbb{F}\langle X \setminus \{f\}\rangle$的多项式 f。这一假设意味着 $X \subseteq \mathrm{Irr}(R)$。

设 $G = \mathrm{sgp}\langle X \mid S\rangle$ 是一个由生成元 X 和定义关系 $S = \{u_i = v_i \mid i \in I\}$ 表示的半群，其中指标集为 I。我们将半群关系 $u = v$ （$u, v \in X^*$）与代数关系 $u - v = 0$ 以及多项式（二项式）$u - v \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ 等同起来。于是，半群代数 $\mathbb{F}G$ 具有表示 $\mathbb{F}G = \mathbb{F}\langle X \mid S\rangle$。由于二项式的每个合成仍然是二项式，根据 Shirshov 算法，存在由二项式组成的 Gr¨öbner-Shirshov 基 R，其对应于 $\mathbb{F}G$，满足 $G = \mathrm{sgp}\langle X \mid R\rangle$。此外， R 与域 $\mathbb{F}$ 无关。我们也称 R 为半群 G 的 Gr¨öbner-Shirshov 基。

引理 2.6. 设 $G =$半群$\langle X \mid S\rangle$ 是一个半群，并设 R 是 G 的 *Gröbner-Shirshov* 基。那么，不可约(R) 是 G 的标准形。

3. Growth of associated monomial algebras

本节中，除非另有说明，设 $A = \mathbb{F}\langle X \mid R\rangle = \mathbb{F}\langle X\rangle/I$ 是由有限集 X 生成的代数，其中 $I = \mathrm{Id}(R)$ 是 $\mathbb{F}\langle X\rangle$ 中由 $R \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle$ 生成的理想。特别地，若 $R \subseteq X^*$，则称 A 为单项式代数。用 $\mathcal{G}(A)$ 表示代数 A 的增长（定义见 [23, 第 6] 页）。

Definition 3.1. 令 J 为由 $\bar{I} = \{f \mid f \in I\}$生成的 $\mathbb{F}\langle X\rangle$ 的理想。我们称该单项式代数

$$\widetilde{A_<} = \mathbb{F}\langle X\rangle/J = \mathbb{F}\langle X \mid \bar{I}\rangle$$

为 A 关于 $<$的关联单项式代数。若不会引起混淆，我们用 A 代替 $A_<$。

注意，一般而言 $A = \mathbb{F}\langle X \mid I\rangle \neq \mathbb{F}\langle X \mid R\rangle$，且当 R 是 A的 Gröbner–Shirshov 基时，$A = \mathbb{F}\langle X \mid R\rangle$。更一般地，我们有以下引理。

Lemma 3.2. 设 R' 是关于单项式序 $<$ 的 A 的 *Gröbner-Shirshov* 基 X^*. *Then*

$$\widetilde{A_<} = \mathbb{F}\langle X \mid \bar{I}\rangle = \mathbb{F}\langle X \mid \overline{R'}\rangle.$$

证明。由于 $\mathrm{Id}(R') \subseteq \mathrm{Id}(I)$, 只需证明 $\mathrm{Id}(I) \subseteq \mathrm{Id}(R')$。设 $f \in \mathrm{Id}(I)$。那么 $f = f_1 g f_2$ 对某个 $f_1, f_2 \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ 和 $g \in I$成立。由于 R' 是 Gröbner-Shirshov 基，由引理 2.5可知，对某个 $r \in \overline{R'}$ 和 $a, b \in X^*$有 $g = arb$。因此 $f = \bar{f}_1 arb f_2 \in \mathrm{Id}(R')$。□

在引理3.2的假设下，由引理 2.5可知，$\mathrm{Irr}(R') = \mathrm{Irr}(R')$ 是$\sim A$ 和 A 的基，同时也是 A 和 A 的基，因此 A 和 A 作为向量空间彼此同构。然而，A 和$\sim A$ 的 GK维数不一定相同。关于 $\mathrm{GKdim}(A)$ 和$\widetilde{\mathrm{GKdim}}(A)$之间的关系，有如下引理。

引理 *3.3. </style>*设 $<$ 是 X^*上的单项式序。则以下结论成立。

(i) $\widetilde{\mathcal{G}}(A) \leq \mathcal{G}(A)$ 因此 GK 维数$(A) \leq$GK 维数(A)。*(ii)* 若 GK 维数$(A) = \infty$，则 GK 维数$(A) = \infty$。*(iii)* 若 A 有一个秩为 2 的自由子代数，则 A也有$\widetilde{A}$。

证明。(i) 设 $V = \mathbb{F} + \mathbb{F}X$，并设 R' 是关于 $<$的 A 的 Gröbner-Shirshov 基。那么，V 是 A 和 A的有限维生成子空间。我们将 V 记作 V_A（或分别记作$\sim V_{\widetilde{A}}$），以强调 V 被视为 A（或分别视为 A）的子空间。根据定义，$(V_A)^n$ 和 $(V_{\widetilde{A}})^n$，$n > 0$，都由以下集合张成

$$B_n := \{y_1 y_2 \dots y_n \mid y_i \in \{1\} \cup X, 1 \leq i \leq n\}.$$

对于每个 $y \in B_n$，如果 $y \notin$ 不可约(R')，那么 y 包含一个子词 $u \in \overline{R'}$，因此 $y = 0$ 属于$\widetilde{A}$代数 A。因此 $C_n := B_n \cap$不可约(R') 是 $(V_{\widetilde{A}})^n$ 的 $\mathbb{F}$-基。注意，C_n 在线性意义下独立于 $(V_A)^n$ 中。因此，对于所有 $n > 0$，$\dim(V_{\widetilde{A}})^n \leq \dim(V_A)^n$，从而 $\widetilde{\mathcal{G}}(A) \leq \mathcal{G}(A)$。所以GK 维数$(A) \leq$ GK 维数(A)。

(ii) 由第 (i) 部分可知，如果 A 含有一个秩2的自由子代数 B，那么作为 B 的子代数，代数 B 也自由o 代数。□

以下引理众所周知（例如参见 [8, 备注 4.1], ，或参见 [23, 第 157] 页关于有限表示情形的内容），它是定理 1.2 的特例。

引理 3.4。设 $<$ 是 X^*上的次数字典序。那么 GK 维数$(A) =$ GK 维数(A)。

下面的例子表明，引理 3.4 对任意单项式序不一定成立。

例 3.5. 设 $A=\mathbb{F}\langle x,\ y\mid xy=y^2x\rangle$。现在我们构造两个关于 X^* 上的两种单项式序的不同的 A 关联单项式代数，并证明这两个关联单项式代数具有不同的 GK维数。

设 $<_1$ 是 $\{x,y\}^*$ 上的次数字典序，其中 $y<_1 x$。那么 $xy<_1 y^2x$ 和 $R_1:=\{y^2x-xy\}$ 是 A 关于 $<_1$的 Gröbner-Shirshov 基。 A 关于 $<_1$ 的关联单项式代数为

$$\widetilde{A}_{<_1}=\mathbb{F}\langle x,y\mid y^2x=0\rangle=\mathbb{F}\,\mathrm{Irr}(y^2x),$$

其中

$$\mathrm{Irr}(y^2x)=\{y^sx^{i_0}yx^{i_1}y\cdots yx^{i_m}y^t\mid 0\le s\le 1,m\ge 0,t\ge 0,\ \text{each } i_j\ge 1\}.$$

对于任意（非交换）多项式 $g(z_1,\ z_2)\in\mathbb{F}\langle z_1,\ z_2\rangle$，有 $g(yx,\ yx^2)\in$不可约(y^2x)。因此， $\{yx,yx^2\}$ 在 $\widetilde{A}_{<_1}$中生成一个秩2的自由子代数。由此根据引理 3.3， A 也有一个秩2的自由子代数。特别地，根据引理 3.4,

$$\mathrm{GKdim}(A)=\mathrm{GKdim}(\widetilde{A}_{<_1})=\infty.$$

现在令 $<_2$ 为 $\{x,y\}^*$ 上的反塔序，其中 $y<_2 x$，即对于

$$u=y^{i_0}xy^{i_1}x\cdots y^{i_{n-1}}xy^{i_n}\in\{x,y\}^*,$$
$$v=y^{j_0}xy^{j_1}x\cdots y^{j_{m-1}}xy^{j_m}\in\{x,y\}^*,$$

我们规定：若

$$(n,i_n,i_{n-1},\dots,i_0)<(m,j_m,j_{m-1},\dots,j_0)\ \text{ lexicographically.}$$

那么容易验证， $<_2$ 是 $\{x,y\}^*$ 上的单项式序，且 $y^2x<_2 xy$。显然， $R_2:=\{xy-y^2x\}$ 是关于 $<_2$的 A 的 Gr¨obner-Shirshov 基。因此，关于 $<_2$ 的 A的关联单项式代数为

$$\widetilde{A}_{<_2}=\mathbb{F}\langle x,y\mid xy=0\rangle=\mathbb{F}\{y^ix^j\mid i,j\ge 0\}.$$

˜因此，GK 维数$(A_{<_2})=2$。 □

特别地，由例 3.5 可得如下注记。

注 3.6. 若 R 是关于反塔序（类似于 X^*上的塔序（例 2.3））的 A 的 Gr¨obner-Shirshov 基，则 GK 维数(A) 不一定等于 ˜GK 维数(A)。

现在我们可以证明定理 1.2，它是引理 3.4 的推广。

定理 *1.2* 的证明。 假设 R' 是关于 $<$的 A 的 Gr¨obner-Shirshov 基。空间 $V:=\mathbb{F}+\mathbb{F}X$ 是 A 和 $A=A_<$的有限维生成子空间。我们将 V 写作 V_A （或分别写作 $V_{\widetilde{A}}$），以强调我们将 V 视为 A （或分别视为 A）的子空间。

根据定义， $n\ge 0$ 的子空间 $(V_A)^n$ 由以下元素张成：

$$U:=\{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_t}\mid 0\le t\le n,\ x_{i_j}\in X\}.$$

W我们声称，每个 $u\in U$ 都是 A中的 R'-正规词的线性组合，且这些词都不是 great er than u。

该断言的证明。 我们通过对 u 进行归纳法来证明该断言。若 $u=1$，则该断言成立，因为1 ∈ 不可约(R')。假设 $u>1$，且该断言对小于 u 的字成立。若 $u\in$不可约(R')

则该断言成立，因为 u 本身就是所需的线性组合。假设 $u \notin$不可约(R')。那么存在 $f \in R'$ 和 $a, b \in X^*$，使得 $u = afb$。假设

$$f = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m,\ v_i \in X^*,\ v_1 > v_2 > \cdots > v_m,\ 0 \neq \alpha_i \in \mathbb{F},\ 1 \leq i \leq m.$$

于是，在代数 A中，我们有

$$u = a\overline{f}b = afb - a(f - \overline{f})b = -a(f - \overline{f})b = -\alpha_2 av_2 b - \alpha_3 av_3 b - \cdots - \alpha_m av_m b,$$

其中，对于 $2 \leq i \leq m$， $av_i b < av_1 b = u$ ，因为 $<$ 是单项式序。根据归纳假设，$av_i b$ 是 A中的线性组合，由对于 $2 \leq i \leq m$不大于 $av_i b$ 的 R'-正规词组成。因此， u 是 A中的线性组合，由不大于 $av_1 b = u$的 R'-正规词组成。故该断言成立。

由关于 $f(x)$的假设可知，不等式 $av_i b < u \in U$ 蕴含不等式$|av_i b| \leq f(|u|) \leq c|u|^d \leq cn^d$ ，其中某些 $c > 0$、 $2 \leq i \leq m$ 和 $|av_i b| \gg 0$满足该条件。因此，由上述断言可知，$(V_A)^n$ 包含于 $\mathbb{F}$不可约$(R')^{\leq cn^d}$中，即由集合不可约$(R')^{\leq cn^d} = \{v \in$ 不可约$(R') \mid |v| \leq cn^d\}$张成的空间。注意，对于所有$n \geq 0$，不可约$(R')^{\leq n}$ 是$(V_{\widetilde{A}})^n$ 的线性基。因此， $\mathbb{F}$不可约$(R')^{\leq cn^d} = (V_{\widetilde{A}})^{cn^d}$ 作为 $\mathbb{F}$-空间成立。于是，记 $d_A(n) :=$ 维$(V_A)^n$ 以及$d_{\widetilde{A}}(n) :=$ 维$(V_{\widetilde{A}})^n$，其中 $n \geq 0$,

$$d_A(n) \leq d_{\widetilde{A}}(cn^d),\ \forall n \gg 0. \tag{1}$$

因此

$$\begin{aligned}
\operatorname{GKdim}(A) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln d_A(n)}{\ln n} \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln d_{\widetilde{A}}(cn^d)}{\ln n} \quad \text{(by inequality (1))} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{\ln d_{\widetilde{A}}(cn^d)}{\ln(cn^d)} \cdot \frac{\ln(cn^d)}{\ln n} \right) \\
&= d \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln d_{\widetilde{A}}(cn^d)}{\ln(cn^d)} \\
&\leq d \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln d_{\widetilde{A}}(n)}{\ln n} \\
&= d \operatorname{GKdim}(\widetilde{A}).
\end{aligned}$$

~不等式 GKdim(A) ≤GKdim(A) 由引理 3.3 得出。证明完成。 □

定理 1.2 有以下推论。

推论 3.7。设 $<$ 是 X^* 上的单项式序，使得 $u < v$ 蕴含 $|u| \leq c|v|$，其中~ ~为某个固定实数 $c > 0$，且对所有 u、$v \in X^*$均成立。那么 $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(A)$，且 GK 维数$(A)$ = GK 维数(A)。

~证明。由引理 3.3 可得 $\mathcal{G}(A) \leq \mathcal{G}(A)$。令 $f(x) = cx$，并在定理~ ~1.2 中取 $d = 1$，由不等式 (1) 可得 $\mathcal{G}(A) \leq \mathcal{G}(A)$。因此 $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(A)$，进而~GK 维数$(A)$ =GK 维数(A). □

一个加权次数字典序 $<$ 在 X^* 上是次数字典序的推广。令 $\deg_w(x_i) = d_i \in \mathbb{N}^*$，其中 $x_i \in X$。对于非空字 $u = x_{i_1} \ldots x_{i_s} \in X^*$，我们称 $\deg_w(u) := d_{i_1} + \cdots + d_{i_s}$为其加权次数（若不会引起混淆，也简称次数）。在每个 X_m 上固定一个序：$=\{x_i \in X \mid \deg_w(x_i) = m\}$, $m \geq 1$。然后我们比较非空字

$$u = y_1 \cdots y_s,\ y_i \in X, 1 \leq i \leq s$$

and

$$v = z_1 \cdots z_t,\ z_j \in X, 1 \le j \le t$$

如下： $u < v$ 若 $\deg_w(u) < \deg_w(v)$，或者

$$\deg_w(u) = \deg_w(v) \text{ and } (y_1, \ldots, y_s) < (z_1, \ldots, z_t) \text{ lexicographically.}$$

对于所有非空字 u，令 $1 < u$。所得的序称为 X^* 上的加权次数字典序。容易验证，加权次数字典序是单项式序。

推论 3.8. 设 $<$ 是 X^* 上的加权次数字典序。则 $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(A)$，且GK 维数$(A) =$ GK 维数(A)。

证明。设 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，且 $\deg_w(x_i) = d_i \ge 1, 1 \le i \le m$。令 $d_0 := \max\{d_i \mid 1 \le i \le m\}$. 设 $u, v \in X^*$ 且 $u < v$。则 $\deg_w(u) \le \deg_w(v)$，因此

$$|u| \le \deg_w(u) \le \deg_w(v) \le d_0|v|.$$

现在，结论由推论 3.7 得出。 □

设 A 是一个 $\mathbb{F}$-代数， σ 是 A 的一个 $\mathbb{F}$-自同态。回忆一下，线性映射 $\delta : A \to A$ 若满足以下条件，则称为 σ-导子

$$\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b,\ \forall a, b \in A.$$

在自由左 A-模 $\oplus_{i=0}^{\infty} Ax^i$ 上，通过定义引入一种环结构

$$xa = \sigma(a)x + \delta(a),\ \forall a \in A.$$

所得的环记作 $A[x; \sigma, \delta]$，称为 A 上的斜多项式环 或*Ore* 扩张。Huh 和 Kim [20] 证明，GKdim$(A[x; \sigma, \delta])$ − GKdim(A) 的差可以是任意正自然数，甚至可以是无穷大（Zhao、Mo 和 Zhang [37] 证明了广义Weyl代数的 GK 维数也具有类似的病态行为）。关于 Ore 扩张的 GK 维数的更多结果，感兴趣的读者可参阅 [23, §12.3] 。

例 3.5 中的代数 A 是多项式代数 $\mathbb{F}[y]$上的 Ore 扩张，即 $A = \mathbb{F}[y][x; \sigma, \delta]$，其中 $\delta = 0$ 且 σ 是 $\mathbb{F}[y]$ 的一个自同态，定义为 $\sigma(y) = y^2$。

更一般地，我们有如下推论。回顾一下，代数的自同态 σ 若满足：对于每个包含单位元的有限维子空间 B ，都存在 U 的有限维子空间，使得 $\sigma(U) \subseteq U$，则称其为局部代数的。

推论3.9。 设 $A = \mathbb{F}[y][x; \sigma, \delta]$。则以下陈述等价。

(i) GK 维数$(A) = 2$。*(ii)* GK 维数$(A) < \infty$。*(iii)* 次数$(\sigma(y)) \le 1$。*(iv)* σ 是局部代数的。

证明。 (i) $\Longrightarrow$ (ii) 显然。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) 假设 $d =$ 次数$(\sigma(y)) \ge 2$。只需证明 GK 维数$(A) = \infty$。注意到$A = \mathbb{F}\langle x, y \mid xy = \sigma(y)x + \delta(y)\rangle$。令 $f := \sigma(y)x + \delta(y) - xy$，并令 $<$ 为 $\{x, y\}^*$ 上的加权次数字典序，其中 $\deg_w(x) = d_0 := \deg(\delta(y))$，且 $\deg_w(y) = 1$。于是 $\deg_w(y^d x) = d + d_0$，$\deg_w(xy) = d_0 + 1$，并且 $\deg_w(\delta(y)) = \deg(\delta(y)) \cdot \deg_w(y) = d_0$。因此

$$\overline{\sigma(y)x} = y^d x > xy > \overline{\delta(y)}$$

因此 $f = y^d x$。由于 f 与 f 本身之间不存在合成，因此集合 $\{f\}$ 是关于 $<$的 A 的 Gröbner-Shirshov 基。接着，根据引理 2.5， A 有一个基 Irr(f)，它由多项式组成

$$y^{j_1} x^{i_1} \cdots y^{j_m} x^{i_m} y^{j_{m+1}},\ \ y^k$$

其中 $0 \le j_1 < d$、 $1 \le j_s < d$ 对应 $2 \le s \le m$、 $j_{m+1} \ge 0$、 $m \ge 1$、 $i_t \ge 1$ 对应 $1 \le t \le m$，以及 $k \ge 0$。接着，与例 3.5 类似， $\{yx, yx^2\}$ 在 A中生成一个秩2的自由子代数。因此 GK 维数(A) $= \infty$。

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) 由于 $\{y^i \mid i \ge 0\}$ 是 $\mathbb{F}[y]$的线性基，因此$\mathbb{F}[y]$ 的每个有限维子空间都包含在某个有限维子空间 $W_m := \mathbb{F}\{1, y, \dots, y^m\}$ 中，其中 $m \ge 1$满足：若d :=deg(σ(y)) ≤ 1，则 $\sigma(W_m) \subseteq W_m$，因此 σ 是局部代数。

(iv) $\Longrightarrow$(i) 根据 [34, 定理 1.2] （另见 [23, 定理 12.3.3]），当且仅当 GKdim(A) $=$ GKdim($\mathbb{F}[y]$) $+ 1 = 2$时， σ 是局部代数。□

推论3.9表明，单变量多项式代数上的 Ore 扩张的 GK维数为 2 或 ∞。如下例所示，这种二分性无法推广到多变量多项式代数上的 Ore 扩张的 GK维数。

例3.10。 令 $A = \mathbb{F}[y, z][x;\ \sigma, \delta]$ 为一个 *Ore* 扩张，其中 $\delta(y) = \delta(z) = 0$。

(i) 如果 $\sigma = \mathrm{id}$ （即恒等映射），则 GK 维数(A) $= 3$。*(ii)* 如果 $\sigma(y) = y$ 且 $\sigma(z) = yz$，则 GK 维数(A) $= 4$。*(iii)* 如果 $\sigma(y) = y^2$ 且 $\sigma(z) = z$，则 GK 维数(A) $= \infty$。

证明。 (i) 在此情形下， $A = \mathbb{F}[x, y, z]$，因此 GK维数(A) $= 3$。

(ii) 注意到 $A = \mathbb{F}\langle x,\ y,\ z \mid xy - yx,\ xz - yzx,\ zy - yz\rangle$。令 $\Omega = \{y^i \mid i \ge 0\}$，它包含于 A的中心中。于是， A的局部化 $A\Omega^{-1}$ 是 [35, 例3.12]中研究的 GK维数为4的微分差分代数。由于 Ω 是包含于 A中心中的正则元的乘法封闭子集，根据 [23, 命题4.2]，可得 GK维数(A) $=$ GK维数($A\Omega^{-1}$) $= 4$。

(iii) 注意， $A = \mathbb{F}\langle x,\ y,\ z \mid R\rangle$，其中 $R = \{y^2x - xy, zx - xz, zy - yz\}$ 是关于 $\{x, y, z\}^*$ 上的次数字典序（其中 $x < y < z$）的 A 的约化 Gröbner-Shirshov 基。与例 3.5 中类似，我们得到 $\{yx, yx^2\}$ 在 A中生成一个秩2的自由子代数，因此 GK 维数(A) $= \infty$。□

4. Growth of Manturov groups

本节通过 Gröbner-Shirshov 基的方法研究 Manturov群的增长和 GK维数。

4.1. Manturov群的定义。我们首先回顾群 G_n^k 的定义，该定义来自[25, 26]。给定两个正整数 $n > k$，记 I_n^k 为由 $\{1, 2, \dots, n\}$中的 k 个互不相同的指标组成的所有集合的集合。显然， I_n^k的基数为 $\binom{n}{k}$。*Manturov*(k, n)-群 G_n^k 由如下生成元与关系定义。

(a) 生成元： G_n^k 有 $\binom{n}{k}$ 个生成元 a_m, $m \in I_n^k$。(b) 关系：对于 G_n^k，共有三类关系。(i)（对合关系） $a_m^2 = 1$，对所有 $m \in I_n^k$均成立。(ii)（远交换关系） $a_m a_{m'} = a_{m'} a_m$，对于任意 m, $m' \in I_n^k$ 且满足 $|m \cap m'| < k - 1$。(iii)（四面体关系）对于每个由指标 $u_1, \dots, u_{k+1} \in \{1, \dots, n\}$组成的 $(k+1)$ 元组 U，考虑 $k+1$ 个子集 $m^j = U \setminus \{u_j\} \in I_n^k$, $j = 1, \dots, k+1$。对于 U，我们关联如下关系：

$$a_{m^1} a_{m^2} \cdots a_{m^{k+1}} = a_{m^{k+1}} \cdots a_{m^2} a_{m^1}.$$

注意，如果 $n = k+1$ 或 $k = 1$，则不会出现远交换关系。在四面体关系中， $|m^i \cap m^j| = k - 1$ 对于 $i \ne j$，因此远交换关系不会

出现在这些 m^i 和 m^j中；对于两个仅顺序相反的元组 U 和 U'，我们得到相同的关系，因此群 G_n^k 总共有 $\binom{n}{k+1}_2^{(k+1)!}$ 个四面体关系。

例4.1. (i) 最小可能的 G_n^k 是 G_2^1，它有两个生成元，分别记为 a和 b。那么

$$G_2^1 = \mathrm{gp}\langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1, ab = ba\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

(ii) 更一般地，对于 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} G_n^1 &= \mathrm{gp}\langle a_i \mid a_i^2 = 1, a_t a_s = a_s a_t,\ 1 \leq i \leq n, 1 \leq s < t \leq n\rangle \\ &\simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2 \quad (n \text{ copies of } \mathbb{Z}_2). \end{aligned}$$

当 $k > 1$时，群 G_n^k 似乎很复杂。即使当 $k = 2$时，群 G_n^2 也是“深度非平凡”的 [27]。

4.2. **¨的Gröbner-Shirshov基、字问题、标准形和增长**。设$a = a_{12}$， $b = a_{13}$，以及 $c = a_{23}$。那么群G_3^2 有如下群表示

$$G_3^2 = \mathrm{gp}\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = 1, bca = acb, cab = bac, cba = abc\rangle,$$

这也是一个半群表示，即,

$$G_3^2 = \mathrm{sgp}\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = 1, bca = acb, cab = bac, cba = abc\rangle.$$

Bai and Chen [3, 定理 3]（另见 [1, 定理 1]）得到了 G_3^2 关于塔序的一个有限Gröbner-Shirshov基。然而，由注 3.6可知，关于塔序的Gröbner-Shirshov基不能直接用于计算 $\mathbb{F}G_3^2$的GK维数。下面的定理给出了 G_3^2关于次数字典序的一个无限Gröbner-Shirshov基。

定理 4.2. 设 $<$是 $\{a, b, c\}^*$ 上的次数字典序，且满足 $a < b < c$。则由下列关系组成的集合 R'是关于 $<$的 G_3^2 的 *Gr¨obner-Shirshov* 基：

(i) $x^2 - 1$, $x \in \{a, b, c\}$;

(ii) $bca - acb$;***(iii)*** $cab - bac$;

(iv) $cba - abc$;***(v)*** $b(ac)^m b - (ca)^m$, $m \geq 1$.

证明。 通过对 m作归纳法，可以证明 R' 中的关系 (v) 可由关系 (i)-(iv) 推出。因此 $G_3^2 = \mathrm{sgp}\langle a, b, c \mid R'\rangle$。现在只需证明 R' 中多项式的所有合成都平凡。

注意， R'中没有包含组合。 R' 中的交叠组合以及所有歧义 w 列举如下（例如，我们用 (ii)∧(iii) 表示关系 (ii) 和 (iii) 的交叠组合）：

- (i)∧(i)： $w = xxx$, $x = a, b, c$;
- (i)∧(ii)： $w = bbca$; (i)∧(iii)： $w = ccab$; (i)∧(iv)： $w = ccba$;
- (i)∧(v)： $w = bb(ac)^m b$, $m \geq 1$;
- (ii)∧(i)： $w = bcaa$;
- (ii)∧(iii)： $w = bcab$;
- (iii)∧(i)： $w = cabb$; (iii)∧(ii)： $w = cabca$; (iii)∧(v)： $w = cab(ac)^m b$, $m \geq 1$;

• (iv)∧(i): $w = cbaa$; (iv)∧(v): $w = cbac(ac)^{m-1}b$, $m \geq 1$;
• (v)∧(i): $w = b(ac)^m bb$, $m \geq 1$; (v)∧(ii): $w = b(ac)^m bca$, $m \geq 1$; (v)∧(iv): $w = b(ac)^{m-1}acba$, $m \geq 1$; (v)∧(v): $w = b(ac)^m b(ac)^l b$, $m,\ l \geq 1$。

容易验证，上述每个合成模$(R',\ w)$都是平凡的。我们在此列出几个典型例子，其余合成可以类似地验证。

$$\begin{aligned}(\mathrm{i})\wedge(\mathrm{v}):\quad & (b^2-1)(ac)^m b - b(b(ac)^m b-(ca)^m)\\ =&-(ac)^m b + b(ca)^m\\ \equiv&-(ac)^m b + (ac)^m b \qquad (\text{using (ii) } m \text{ times})\\ =&0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{v})\wedge(\mathrm{iv}):\quad & (b(ac)^m b-(ca)^m)a - b(ac)^{m-1}a(cba-abc)\\ =&-(ca)^m a + b(ac)^{m-1}aabc\\ \equiv&-(ca)^{m-1}c + b(ac)^{m-1}bc \qquad (\text{using (i)})\\ \equiv&-(ca)^{m-1}c + (ca)^{m-1}c \qquad (\text{using (v)})\\ =&0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{v})\wedge(\mathrm{v}):\quad h :=&(b(ac)^m b-(ca)^m)(ac)^l b - b(ac)^m(b(ac)^l b-(ca)^l)\\ =&-(ca)^m(ac)^l b + b(ac)^m(ca)^l.\end{aligned}$$

若 $m = l$，则 $h = 0$。若 $m > l$，则

$$\begin{aligned}h \equiv&-(ca)^{m-l}b + b(ac)^{m-l}\\ \equiv&-b(ac)^{m-l} + b(ac)^{m-l} \qquad (\text{using (iii) } m-l \text{ times})\\ =&0.\end{aligned}$$

若 $m < l$，则

$$\begin{aligned}h \equiv&-(ac)^{l-m}b + b(ca)^{l-m}\\ \equiv&-(ac)^{l-m}b + (ac)^{l-m}b \qquad (\text{using (ii) } l-m \text{ times})\\ =&0.\end{aligned}$$

因此，R' 是群 G_3^2的Gr¨obner-Shirshov基。 □

注意，R' 包含无穷多个关系。然而，给定一个字 $u \in \{a,b,c\}^*$，在 R' 中只有有限多个关系可用于约化 u。此外，如果 $u \notin$Irr(R')，则可以确定一个元素 $f = f - f' \in R'$，使得 $u = afb$，其中 f'、a、$b \in X^*$。我们可以进行约化 $u \longrightarrow u_1$，其中 $u_1 = af'b < u$ 作为字，而 $u_1 = u$ 作为 G_3^2中的元素。如果 $u_1 \notin$ Irr(R')，则我们可以继续进行约化 $u_1 \longrightarrow u_2$，使得 $u_2 < u_1$ 作为字，而$u_2 = u_1$ 作为 G_3^2中的元素。由于 $<$是一个良序，u 的约化链将在有限步内终止，即 $u \longrightarrow u_1 \longrightarrow u_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow u_k$，其中 $k \in \mathbb{N}$且 $u_k \in$Irr(R')。类似地，对于 $v \in X^*$，我们有 $v \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_l$，其中 $l \in \mathbb{N}$且 $u_l \in$Irr(R')。由于 Irr(R') 是群 G_3^2的标准形，我们得到：$u = v$ 在 G_3^2 中当且仅当 $u_k = v_l$作为字相等。也就是说，我们有如下推论（该推论也可由 Bai and Chen [3]得到的 Gr¨obner-Shirshov 基推出）。

推论 4.3. 群 G_3^2 的字问题是可解的。

若 u 是 v的子词，则写作 $u \sqsubseteq v$。以下引理给出了群 G_3^2的标准形。**推论 4.4.** 群 G_3^2 具有标准形

$$N := \{u \mid u \sqsubseteq (ab)^s(ac)^t, (ab)^s(cb)^t \text{ or } (ac)^s(bc)^t, \quad s,t \in \mathbb{N}\}.$$

证明。根据定理 4.2, R' 是 G_3^2的 Gr¨obner-Shirshov 基。因此，由引理 2.6，Irr(R') 是 G_3^2的标准形。因此，只需证明 N =Irr(R')。

注意，对于所有 s, $t \in \mathbb{N}$, $(ab)^s(ac)^t$, $(ab)^s(cb)^t$, $(ac)^s(bc)^t$ ∈Irr(R')。因此，$(ab)^s(ac)^t$, $(ab)^s(cb)^t$, $(ac)^s(bc)^t$的所有子词在 s, $t \in \mathbb{N}$时都属于 Irr(R')。因此 $N \subseteq$Irr(R')。

现在假设 $u \in$ Irr(R')。接下来，我们对 $|u|$使用归纳法证明 $u \in N$。若 $|u| = 1$, 2，则 $u \in \{a,b,c,ab,ac,ba,bc,ca,cb\} \subseteq N$。假设对于所有满足 $|u| = n \geq 2$ 的 u，都有 $u \in N$。我们考虑情形 $|u| = n+1$。写作 $u = vx$，其中 $|v| = n \geq 2$ 且 $x \in \{a,b,c\}$。根据归纳假设， $v \in N$。根据 v的首字母，我们有三种情形需要考虑。

（情形 1）假设 v的首字母是 a，即 $v = a\cdots$。

（情形 1.1）假设 $v = ab\cdots$。那么，对某个 s, $t \in \mathbb{N}$，有 $v \sqsubseteq (ab)^s(ac)^t$ 或 $v \sqsubseteq (ab)^s(cb)^t$，因此 v 是以下字之一:

$$\begin{aligned}
&v = (ab)^i \sqsubseteq (ab)^s, \ 1 \leq i \leq s,\\
&v = (ab)^i a \sqsubseteq (ab)^s(ac)^t, \ 1 \leq i \leq s,\\
&v = (ab)^i(ac)^j \sqsubseteq (ab)^s(ac)^t, \ 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t,\\
&v = (ab)^i(ac)^j a \sqsubseteq (ab)^s(ac)^t, \ 1 \leq i \leq s, 1 \leq j < t,\\
&v = (ab)^i(cb)^j c \sqsubseteq (ab)^s(cb)^t, \ 1 \leq i \leq s, 0 \leq j < t,\\
&v = (ab)^i(cb)^j \sqsubseteq (ab)^s(cb)^t, \ 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t.
\end{aligned}$$

容易验证，对于 v的每种可能取值， $u = vx \in N$ 都成立。例如，若 v =$(ab)^i$，注意到 $vb \notin$ Irr(R')，则有 $u = vx = va = (ab)^i a \in N$ 或 $u = vx = vc$ =$(ab)^i c \in N$；若 v =$(ab)^i(cb)^j$，则 va, $vb \notin$Irr(R')，因此 $u = vx = vc$ =$(ab)^i(cb)^j c \in N$。

（情形 1.2）假设 $v = ac\cdots$。那么，对某个 s, $t \in \mathbb{N}$，有 $v \sqsubseteq (ac)^s(bc)^t$。因此 v是以下字之一:

$$\begin{aligned}
&v = (ac)^i \sqsubseteq (ac)^s, \ 1 \leq i \leq s,\\
&v = (ac)^i a \sqsubseteq (ac)^s, \ 1 \leq i < s,\\
&v = (ac)^i(bc)^j \sqsubseteq (ac)^s(bc)^t, \ 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t,\\
&v = (ac)^i(bc)^j b \sqsubseteq (ac)^s(bc)^t, \ 1 \leq i \leq s, 0 \leq j < t.
\end{aligned}$$

不难验证，对于 v 的每种可能情况， $u = vx \in N$。

（情形 2）设 $v = b\cdots$。

（情形 2.1）假设 $v = ba\cdots$。那么，对于某个 $s, t \in \mathbb{N}$， $v \sqsubseteq (ab)^s(ac)^t$或 $v \sqsubseteq (ab)^s(cb)^t$。如果$|v| = 2$，那么 $v = ba$且 $u = bab, bac \in N$。假设 $|v| > 2$。那么 $v = bv'$，其中 $v' = a\cdots$且$|v'| \geq 2$。因此，根据情形 1.1， v' 是以下字之一:

$$\begin{aligned}
&v' = (ab)^i \sqsubseteq (ab)^s, \ 1 \leq i \leq s,\\
&v' = (ab)^i a \sqsubseteq (ab)^s(ac)^t, \ 1 \leq i \leq s,\\
&v' = (ab)^i(ac)^j \sqsubseteq (ab)^s(ac)^t, \ 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t,\\
&v' = (ab)^i(ac)^j a \sqsubseteq (ab)^s(ac)^t, \ 1 \leq i \leq s, 1 \leq j < t,\\
&v' = (ab)^i(cb)^j c \sqsubseteq (ab)^s(cb)^t, \ 1 \leq i \leq s, 0 \leq j < t,\\
&v' = (ab)^i(cb)^j \sqsubseteq (ab)^s(cb)^t, \ 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t.
\end{aligned}$$

类似地，可以检查对于 v' 的每一种可能性， $u = bv'x \in N$。

（情形 2.2）假设 $v = bc\cdots$。那么，对于某个 s， $t \in \mathbb{N}$， $v \sqsubseteq (ac)^s(bc)^t$。因此， v 是以下字之一：

$$v = (bc)^i \sqsubseteq (ac)^s(bc)^t,\ 1 \le i \le t,$$
$$v = (bc)^i b \sqsubseteq (ac)^s(bc)^t,\ 1 \le i < t.$$

容易验证，对于 v 的每种可能情况， $u = vx \in N$。

（情形 3）假设 $v = c\cdots$。与情形 1 和 2 类似，我们得到：若 $v = ca\cdots$，则 v 是以下字之一：

$$v = (ca)^i \sqsubseteq (ac)^s(bc)^t,\ 1 \le i < s,$$
$$v = (ca)^i c(bc)^j \sqsubseteq (ac)^s(bc)^t,\ 1 \le i < s, 0 \le j \le t,$$
$$v = (ca)^i c(bc)^j b \sqsubseteq (ac)^s(bc)^t,\ 1 \le i < s, 0 \le j < t;$$

并且，若 $v = cb\cdots$，则 v 是以下字之一：

$$v = (cb)^i \sqsubseteq (ac)^s(bc)^t,\ 1 \le i \le t,$$
$$v = (cb)^i c \sqsubseteq (ac)^s(bc)^t,\ 1 \le i \le t.$$

容易验证，对于 v 的每种可能情况， $u = vx \in N$。证明完毕。 □

推论 4.5。 *(i)* 群 G_3^2 的增长等于2 （即二次增长）。特别是 ，

GK 维数$(\mathbb{F}G_3^2) = 2$。*(ii)* 群 G_3^2 是 $\mathbb{Z}^2$的有限扩张。*(iii)* 群代数 $\mathbb{F}G_3^2$ 是劳朗级数环 $\mathbb{F}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$上的有限模。

证明。 (i) 设 $A := \mathbb{F}G_3^2 = \mathbb{F}\langle X \mid R'\rangle$，其中 $X = \{a, b, c\}$ 和 R' 是定理 4.2 中定义的 Gröbner-Shirshov 基（关于次数字典序）。由推论 3.8 可知

$$\mathrm{GKdim}(A) = \mathrm{GKdim}(\widetilde{A}) = \limsup_{n\to\infty} \log_n \sum_{i=0}^{n} f(i),$$

其中 $f(i) := \#\{\text{不可约}(R')\ |u| = i\}$，对 $0 \le i \le n$.

设 $u \in$ 不可约(R')且 $|u| = 2n > 0$。根据推论 4.4， u是 $(ab)^s(ac)^t$、$(ab)^s(cb)^t$ 或 $(ac)^s(bc)^t$ 的子词，其中某个 s， $t \in \mathbb{N}$。设 $u \sqsubseteq (ab)^s(ac)^t$。那么 u 的所有不同可能性如下：

$$(ba)^n, (ab)^n, (ab)^{n-1}ac, b(ab)^{n-2}(ac)a, \ldots, (ab)(ac)^{n-1}, b(ac)^{n-1}a, (ac)^n, (ca)^n.$$

因此，$\#\{u \mid u \sqsubseteq (ab)^s(ac)^t,\ |u| = 2n\} = 2n + 3$。类似地，我们有

$$\#\{u \mid u \sqsubseteq (ab)^s(cb)^t, |u| = 2n\} = \#\{u \mid u \sqsubseteq (ac)^s(bc)^t, |u| = 2n\} = 2n + 2.$$

因此，对于 $n > 0$,

$$f(2n) \ge \#\{u \mid u \sqsubseteq (ab)^s(ac)^t, |u| = 2n\} = 2n + 3,$$

and

$$\begin{aligned} f(2n) &= \#\{u \mid u \in \mathrm{Irr}(R'), |u| = 2n\} \\ &\le \#\{u \mid u \sqsubseteq (ab)^s(ac)^t, |u| = 2n\} + \#\{u \mid u \sqsubseteq (ab)^s(cb)^t, |u| = 2n\} \\ &\quad + \#\{u \mid u \sqsubseteq (ac)^s(bc)^t, |u| = 2n\} \\ &= 6n + 7. \end{aligned}$$

因此， $f(n) \sim n$ （请参见 [23, 第 5] 页，了解等价关系 $\sim$的定义）。因此

$$\mathrm{GKdim}(\mathbb{F}G_3^2) = \limsup_{n\to\infty} \log_n \sum_{i=0}^{n} f(i) = 2$$

且 G_3^2 的增长等于 2。

(ii) 根据格罗莫夫定理，多项式增长的群是几乎幂零群，即它有一个有限指数的幂零子群。幂零群的增长次数由 Bass-Guivarc'h公式 [23, 定理 11.14], 确定，该公式取决于下中心列中出现的阿贝尔群的无挠秩。于是很容易看出，具有二次增长的群实际上是秩2的几乎阿贝尔群，因此是$\mathbb{Z}^2$ 的有限扩张（见 [23, 第 196]页）。

(iii) 由 (ii) 可得。 □

4.3. **增长** G_4^3。 根据定义，Manturov群 G_4^3 具有如下半群表示

$$G_4^3 = \mathrm{sgp}\langle a, b, c, d \mid R\rangle,$$

其中 $a = a_{123}$、 $b = a_{124}$、 $c = a_{134}$、 $d = a_{234}$ 和 R 由以下关系组成:

(i) 对合关系： $x^2 = 1$、 $x \in \{a, b, c, d\}$。

(ii) 四面体关系： $xyzw = wzyx$，其中 $\{x, y, z, w\} = \{a, b, c, d\}$。

命题4.6。 *(i)* 群 G_4^3 有一个秩为 2 的自由子群。

(ii) GK 维数$(\mathbb{F}G_4^3) = \infty$.*(iii)* 对所有 $n > k \geq 3$，群 G_n^k 都有一个秩为 2 的自由子群。*(iv)* 对所有 $n > k \geq 3$，GK 维数$(\mathbb{F}G_n^k) = \infty$ 。

*Pr*证明。 (i) 根据 Bai and Chen [3, 定理 3] （另见 [1, 定理 1]），可知 G_4^3 有 a Gr¨obner-Shirshov 基[1]

$$\begin{aligned} S = \{&a^2-1, b^2-1, c^2-1, d^2-1,\\ &ba - cdabcd, bcda - adcb, bca - dacbd, bda - cadbc, dca - cdabcdcdb, dcda - cabdcdcb\} \end{aligned}$$

关于 $\{a, b, c, d\}^*$ 上带有 $a > b > c > d$的塔序。于是

$$\mathrm{Irr}(S) = \{u_0u_1 \cdots u_nv \mid n \geq 0, u_0 \in B_1, u_j \in B_2, 1 \leq j \leq n, v \in B_3\}$$

其中

$$\begin{aligned} B_1 &= \{1, a, ca, da, cda\},\\ B_2 &= \{ca, da, cda\},\\ B_3 &= \{x_1x_2 \cdots x_t \mid t \geq 0, x_i \in \{b, c, d\}, 1 \leq i \leq t, x_j \neq x_{j+1}, 1 \leq j \leq t-1\}. \end{aligned}$$

Fo对于任意多项式 $g(z_1, z_2) \in \mathbb{F}\langle z_1, z_2\rangle$，都有 $g(ca, da) \in$不可约(S)。因此 $\{ca, da\}$ 生成 es a 秩为2的自由子代数（分别为自由子群）在 $\mathbb{F}G_4^3$ 中（分别在 G_4^3中）。

(iii) 由 [25] 可知，对于每个 $l = 1, \ldots, n$，都存在一个从 G_n^k 到 G_{n-1}^{k-1}的满射群同态（称为指标遗忘同态） f_l 。根据 (i)， G_4^3 有一个秩为2的自由子群。因此， G_5^4 有一个秩为2的自由子群。对 $n \geq 4$进行归纳可得，对于所有 $n \geq 4$，G_n^{n-1}都有一个秩为2的自由子群。同样，从 G_n^k 到 G_{n-1}^k 的满射弦删除同态 [25] d_n 的存在意味着，对于所有$n \geq 4$， G_n^3 都有一个秩为2的自由子群。结合这两类同态可得，对于所有 $n > k \geq 3$， G_n^k 都有一个秩为2的自由子群。

部分 (ii) 和 (iv) 分别直接由 (i) 和 (iii) 得出。 □

[1]请注意，我们使用的记号与 [3], 中的记号不同，例如 $a = a_{234}$ 在 [3] 中，而 $a = a_{123}$ 在我们的论文中。不过，由于生成元的对称性，这种差异不会影响 G_4^3 的表示。

现在我们可以证明定理 1.3 了。

*Proo*定理 *1.3* 的(i) 根据例4.1， G_n^1 是一个有限群，因此对于所有 $n>1$。也就是说，对于 $n>1$， G_n^1 的增长等于 0。

(ii) 由推论 4.5 可得。(iii) 由命题4.6 可得。 □

4.4. 群的增长 G_n^2。 我们已经得到了除 $n\geq 4$ 对应的 G_n^2 以外所有曼图罗夫群 G_n^k 在 $n>k\geq 1$ 下的增长和 GK 维数。群 G_4^2 有 6 个生成元:

$$a=a_{12}, b=a_{13}, c=a_{14}, d=a_{23}, e=a_{24}, f=a_{34}.$$

根据定义,

$$G_4^2=\mathrm{gp}\langle a,b,c,d,e,f\mid R\rangle,$$

其中 R 由以下关系组成

(i) $a^2=b^2=c^2=d^2=e^2=f^2=1$, (ii) $fa=af,\ \ eb=be,\ \ dc=cd$,

(iii) $dba=abd,\ \ dab=bad,\ \ bda=adb$; $eca=ace,\ \ eac=cae,\ \ cea=aec$;

$fcb=bcf,\ \ fbc=cbf,\ \ cfb=bfc$; $fed=def,\ \ fde=edf,\ \ efd=dfe$.

据我们所知，为 G_4^2寻找一个约化的 Gr¨obner-Shirshov 基相当困难。目前我们还不知道 G_4^2的增长情况。我们提出以下猜想。

猜想 4.7. 群 G_4^2 含有一个秩为2的自由子群。

根据观察， $\{ab, ac\}$ 似乎在 G_4^2中生成一个秩为2的自由子群。如果猜想 4.7成立，那么由弦删除同态（参见命题4.6 (iii)的证明）可知，对于所有 $n\geq 4$， G_n^2 都含有一个秩为2的自由子群。

致谢。作者感谢匿名审稿人认真审阅本文并提出宝贵意见，这些意见提升了本文的可读性。本文的部分工作受到 L.A. Bokut 于华南师范大学所作系列报告（2016年）以及 V.O. Manturov 于香港举行的 ICAC 2017 会议上所作报告的启发。我们感谢 Bokut 和 Manturov 富有成果且富有启发性的讨论。作者感谢 Caiheng Li 以及南方科技大学数学系在其访问期间给予的热情接待。作者感谢 Yuxiu Bai、Yu Li、Wenchao Zhang、Zerui Zhang 和 Fangting Zheng 的有益讨论。

基金资助。作者获得了广东省基础与应用基础研究基金（项目编号：2023A1515011690、2022A1515110634）以及广东省教育厅特色创新项目（项目编号：2023KTSCX145）的部分资助。

References

[1] AlHussein, H.: Manturov (3,4)-群的 Anick复形、Hochschild上同调、Hilbert级数和 Poincare级数。 *J. Algebra Appl.*, **20** 2150134 2021 2, 10, 14 , ( ) AlHussein, H., Kolesnikov, P. S.: Manturov (

[2] 2,3 .. **61** 11 20 2020 2)-群的 Anick复形与 Hochschild上同调。 *Siberian Math. J.*, , – ( ) Bai, Y. X., Chen, Y. Q.: 群

[3] G_3^2 G_4^3 *preprint* 2 10 11 14 和 , , , 的 Grobner-Shirshov 基， , Bai, Y. X.,

[4] Chen, Y. Q., Zhang, Z. R.: 双交换代数的 Gelfand-Kirillov维数。 *Linear Multilinear Algebra Linear Multilinear Algebra* **70** 7623 7649 2022 , , – ( )

[5] 1 Bai, Z. Q., Chen, Y. Y., Liu, D. W., Sun, B. Y.: $GL_n(\mathbb{C})$ 的最小 Gelfand-Kirillov维数不可约表示。 *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, **40** 639 657 2024 1 , – ( )

[6] Bai, Z. Q., Xiao, W., Xie, X.: 最高权模的 Gelfand-Kirillov维数及伴随簇。*Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2023**, 8101–8142 (2023) 1

[7] **372** 107290 2020 1 Bao, Y. H., Ye, Y., Zhang, J. J.: 幺半群运算子的截断。 *Adv. Math.*, , ( ) Bell, J. P., 增长函数。载于《交换代数与非交换代数几何》，剑桥大学出版社，剑桥，[8] 2016 3, [9] Bergman, G. M.: 环论中的菱形引理。 *Adv. Math.*, **29** 178 218 1978 4 , – ( ) Bokut, L. A.: 到单结合代数中的嵌入。, , –[10] *Algebra Logic* **15** 73 90 (1976 3, 4) Bokut, L. A., Chaynikov, V. V., Shum, K. P.: 辫群的 Markov–Artin标准形定理。*Comm. Algebra*, **35** 2105 2115 2007 3 , – ( ) Bokut, L. A., Chen, Y. Q.:[11] [12] Grobner-Shirshov 基及其计算。 *Bull. Math. Sci.*, 4, 325–395 (2014年) 3, 4[13] Bokut, L. A., Chen, Y. Q., Zhang, Z. R.: 元平凡泊松代数的 Gr¨obner-Shirshov 基理论与字问题。 *São Paulo J. Math. Sci.*, **18** 569 597 2024 3 , – ( ) Bokut, L. A., Chen, Y. Q., Zhao, X. G.: 自由逆半群的 Grobner-Shirshov 基。[14] *Internat. J.* , , – ( ) *Algebra Comput.* **19** 129 143 2009 3 [15] Buchberger, B.: 关于寻找零维多项式理想模剩余类环的基元素的算法，因斯布鲁克大学，因斯布鲁克，1965 4 [16] Chen, Y. Q., Mo, Q. H.: 关于辫群 Artin–Markov标准形定理的注记。 *Southeast Asian Bull. Math.* **33** 403 419 2009 , , – ( ) 3 [17] Fedoseev, D. A., Karpov, A. B., Manturov, V. O.: 群 G_{k+1}^k 中的字问题与共轭问题。 *Lobachevskii J. Math.*, **41** 176 193 2020 3 , – ( ) Gelfand, I. M., Kirillov, A. A.: 关于与李代数的包络代数相关的域。[18] ´代数`，代数`。 *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **31** 5 19 1966 1 , – ( ) Gupta, A., Sarkar, A. D.: 单微分环上单模的 Gelfand-Kirillov维数二分性。 *Algebr. Represent. Theory*, **21** 579 587 2017 2 , –[19] ( ) Huh, C., Kim, C. O.: 自同构型斜多项式环的 Gelfand-Kirillov维数。[20] *Comm.* , , – ( ) *Algebra* **24** 2317 2323 1996 8 [21] Kim, S., Manturov, V. O.: 关于群 G_n^k、辫与布鲁尼安辫。 *J. Knot Theory Ramifications*, 25, 1650078 2016 2 ( ) Kim, S., Manturov, V. O.: 群 G_n^k、 $2n$边形铺砌与立方体堆叠。 *J. Knot Theory Ramifications* **34** 2540004 2025 2 , , ( ) Krause, G., Lenagan, T.: 《代数的增长与 Gelfand-Kirillov维数》，美国数学会，普罗维登斯，罗[22] [23] 得岛州，2000年 1, 2, 5, 8, 9, 14[24] Li, Y., Mo, Q. H., Zhang, W. C., Zhao, X. G.: brace代数的 Gelfand-Kirillov维数。 *Comm. Algebra*, 53 3833 3842 2025年 , – ( ) [25] Manturov, V. O.: 非 Reidemeister 结理论及其在动力系统、几何和拓扑中的应用。arXiv: 1501 05208, 2015 2, 9, 14 。Manturov, V. O., Nikonov, I. M.: 关于辫与群 G_n^k。 *J. Knot Theory Ramifications*, 24, [26] 1541009 (2015 2, 9) Manturov, V. O.: 群 G_n^2 [27] *Russian Math. Surveys* **72** 378 380 2017 2, 3, 10 与考克斯特群。, , – ( ) [28] Manturov, V. O., Fedoseev, D. A., Kim, S., Nikonov, I. M.: 关于群与: 流形、动力学与不变量研究。 *Bull. Math. Sci.*, **11** 2150004 2021 2 , ( ) Milnor, J.: 关于曲率与基本群的注记。 *J. Differential Geom.*, **2** 1 7 1968 1 , – ( ) Qi, Z. H., Xu, Y. J., Zhang, J. J., [29] [30] Zhao, X. G.: 非对称运算子的增长。 *Indiana Univ. Math. J.*, 72 651 697 2023年 , – ( )[31] Shirshov, A. I.: 李代数的一些算法问题。 *Sibirsk. Mat. Zh.*, **3** 292 296 1962 3, 4 , – ( ) *Israel J. Math.* **244** 467 [32] Tang, X., Zhang, J. J., Zhao, X. G.: Morita消去与斜型。, , –500 (2021 1) Wu, Q. S.: 基域扩张下的 Gelfand-Kirillov维数。 *Israel J. Math.*, **73** 289 296 1991 1 , – ( ) Zhang, J. J.: 关于斜多项式[33] [34] 扩张的 GK维数的注记。, , –374 (1997 9) Zhang, Y., Zhao, X. G.: 微分差分代数的 Gelfand-Kirillov维数。 *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** 363 [35] *LMS J. Comput.* , , – ( ) *Math.* **17** 485 495 2014 9 [36] Zhao, X. G.: 多项式代数与 Laurent多项式代数上的广义Weyl代数的增长。*Sci. China Math.*, **66** 887 906 2023 2 , – ( ) Zhao, X. G., Mo, Q. H., Zhang, Y.: 广义Weyl代数的 Gelfand-Kirillov维数。 *Comm. Algebra*, [37] 46 4403 4413 2018年 8 , – ( )

School of Mathematics and Statistics, Huizhou University, Huizhou, Guangdong 516007, China
Email address: zhaoxg@hzu.edu.cn