arXiv:2601.04495v1 [math.DG] 8 Jan 2026

强凸 K¨ahler-Berwald 度量的刻画

肖伟和钟春平*

中国厦门厦门大学数学科学学院，邮编 361005。

作者：wxiaomath@126.com；zcp@xmu.edu.cn；

摘要

设 $\boldsymbol{F}$： $\boldsymbol{T}^1{}^0\boldsymbol{M} \to [0,+\infty)$ 是复流形 $\boldsymbol{M}$ 上的强凸复芬斯勒度量，且 $\boldsymbol{J}$ 是复流形 $\boldsymbol{T}^1{}^0\boldsymbol{M}$上的典范复结构。我们给出了强凸 K¨ähler-Berwald 度量的几何刻画。特别地，我们证明了$\boldsymbol{J}$ 关于嘉当联络水平平行，当且仅当 $\boldsymbol{F}$是 K¨ähler-Berwald 度量。我们还证明，与 $\boldsymbol{F}$ 相关联的嘉当联络和 Chern-Finsler 联络重合，当且仅当 $\boldsymbol{J}$ 关于嘉当联络既水平平行又垂直平行。基于这些结果，我们给出了具有常全纯截面曲率的强凸 K¨ähler-Berwald 度量的刚性定理。

关键词： K¨ähler-Berwald 度量；嘉当联络；Chern-Finsler 联络

数学学科分类： 53C60，32Q99

1 引言与主要结果

复芬斯勒几何中对不变度量的研究揭示了一个根本性的二分现象。Zhong [17] 证明，在开单位球 $B_n \subset \mathbb{C}^n$上不存在 Aut(B_n)-不变的强伪凸复Finsler度量，除非它是伯格曼度量的常数倍。然而，在单位

*通讯作者：zcp@xmu.edu.cn

多圆盘 P_n ($n \geq 2$)上，存在无穷多个非厄米二次型的 Aut(P_n)-不变 K¨ähler-Finsler 度量。

后续研究对这些发现进行了推广。Lin 和 Zhong [11]刻画了可约有界对称域上所有强伪凸的不变度量 P_n，并证明它们都是 K¨ähler-Berwald 度量。对于秩为 $\mathfrak{R}_A$ rank($\mathfrak{R}_A$) ≥ 2 的不可约有界对称域，Ge 和 Zhong [8] 还构造了无穷多个 Aut($\mathfrak{R}_A$)-不变的 K¨ähler-Berwald 度量。此外，Zhong [18] 刻画了经典域上所有强伪凸的全纯不变度量，并证明它们都是 K¨ähler-Berwald 度量，且在全纯截面曲率方面与 Bergman 度量具有关键的共同性质。这些结果凸显了 K¨ähler-Berwald 流形在复芬斯勒几何中的核心作用。

本文旨在给出强凸 K¨ähler-Berwald 度量的几何刻画。设复流形 M 上有一个强凸复芬斯勒度量 F: $T^{1,0}M \to [0, +\infty)$，其典范复结构为 J(在 M)上) 和 $\boldsymbol{J}$(在 $T^{1,0}M$)。我们的方法是研究典范复结构 $\boldsymbol{J}$ 相对于与 F 相关联的嘉当联络 ∇ 的不同层次的平行性。我们发现，这种平行性体现出很强的刚性，因此引出对一类特殊复芬斯勒度量的研究，即所谓的 K¨ähler-Berwald 度量。

首先来看厄米情形。复流形 M 上的厄米度量 g 是定义在其底层光滑流形上的黎曼度量 J，且具有不变性：对所有实切向量 X 和 Y，均有 $g(JX, JY) = g(X, Y)$。局部地， g 可表示为 $g = 2\mathrm{Re}(g_{\alpha\bar{\beta}} dz^{\alpha} \otimes d\bar{z}^{\beta})$，其对应的实 $(1,1)$- 形式为 $\omega = ig_{\alpha\bar{\beta}} dz^{\alpha} \wedge d\bar{z}^{\beta}$。记 ∇ 为 g 的列维 - 奇维塔联络。N. Mok 在 [12], 中给出了厄米流形为 K¨ahler 流形的如下几何定义。

定义 1。**1** [12] 若厄米流形 (M, g) 的复化切向量场的类型在平行移动下保持不变，则称其为 K¨ahler 流形。

此外，N. Mok 证明了以下内容

命题1.2 ([12]) *Let (M, g) be a Hermitian manifold such that g is given by $2Re\left(g_{\alpha\bar{\beta}} dz^{\alpha} \otimes d\bar{z}^{\beta}\right)$ in local holomorphic coordinates (z^{α}). Then, (M, g) is Kähler iff one of the following equivalent conditions is satisfied:*

（*1*）复化切向量的类型在平行移动下保持不变；（*2*）对于沿光滑曲线 γ平行移动的任意平行（实）向量场 η ， $J\eta$ 也是平行的；（*3*） $\nabla J \equiv 0$，即几乎复结构 J 是平行的；（*4*） $\nabla\omega \equiv 0$，即厄米形式 ω 是平行的；（*5*） $d\omega \equiv 0$，即厄米形式 ω 是闭的；

（6）局部存在势函数 φ，使得 $g_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}$；（7）在每一点 $p \in M$ 处，都存在复测地线坐标（z^α），使得厄米度量 g 由厄米矩阵（$g_{\alpha\bar{\beta}}$）表示，并满足 $g_{\alpha\bar{\beta}}(p) = \delta_{\alpha\beta}$ 以及 $dg_{\alpha\bar{\beta}}(p) = 0$。

复芬斯勒几何中的 K¨ahler 条件研究始于 Royden 的工作 [13]。令 $\triangle(r)$ 表示以原点为中心、半径为 r 的开圆盘，并赋予其 Poincar´e 度量。假设对于任意 $(z;\ v) \in T^{1,0}M$ 都存在一个全纯映射 $\varphi : \triangle(r) \to M$，满足 $\varphi(0) = z$、$\varphi_*(0) = v$，且曲线 $\gamma(t) = \varphi(e^{i\theta}t)$ 是一条在 z 处与 $\mathbb{C} \cdot v$ 相切的测地线（此条件后来在 [3] 中称为*Royden*条件），Royden 证明了 F 沿此类映射必为弱 K¨ahler-芬斯勒度量 φ。关于 K¨ahler-芬斯勒度量的清晰重述及刻画，请参见 [1] 中的定理2.3.10。

在其研究中，[7],Chen、Liu 和 Zhao 考察了复流形 M 上典范复结构 J 相对于强凸弱 K¨ahler-Finsler 度量 F的实 Berwald 联络 ∇ 的弱平行性。他们证明，F 的实基本张量是 J-不变的，当且仅当 F 源自某个厄米度量。此外，他们研究了 J 与 F的实里奇曲率和复里奇曲率之间的关系，并指出，对于强凸 K¨ahler-Berwald 度量，实的和复的爱因斯坦度量概念是一致的。

M. Abate 和 G. Patrizio 对强凸复 Finsler 度量 [1]的嘉当联络和 Chern-Finsler 联络所做的经典研究，也为本文提供了进一步的启发。特别是，他们探讨了在实芬斯勒流形上是否存在一种典范联络，使其在 K¨ahler-Finsler 情形下与 Chern-Finsler 联络一致（见 [1], 第 122 页）。此外，他们指出，嘉当联络包含一些被认为在几何上并非必要的元素，因为这些元素对一阶和二阶变分公式没有贡献（见 [1],第 125 页）。

必须区分基流形的典范复结构 J（M 上的一个 (1，1) 阶张量）与复结构 $\boldsymbol{J}$（$T^{1,0}M$ 上的一个 (1，1) 阶张量）——强凸复芬斯勒度量 F 的几何本质上依赖于后者。本文通过研究相对于相应嘉当联络 ∇ 的 $\boldsymbol{J}$ 平行性，推导出刚性结果；这一方法建立在相对于 F 的实芬斯勒联络的平行性概念之上。我们的第一个主要结果是

定理 1 3 *Let F be a strongly convex complex Finsler metric。: $T^{1,0}M \to [0, +\infty)$ on a complex manifold M. Then $\nabla \boldsymbol{J} = 0$ iff the Cartan connection ∇ associated to F coincides with the Chern-Finsler connection D associated to F.*

在厄米几何中，若 h 是复流形M 上的厄米度量，且 $g = 2\mathrm{Re}\, h$ 是其关联的黎曼度量，并且典范

复结构 J 在 M 相对于 g的列维-奇维塔联络是平行的，则 h必定是 Kähler 度量。定理 1.3 将这一经典结果推广到了芬斯勒情形。

我们的第二个主要结果是

定理 1.4 *Let F be a strongly convex weakly Kähler-Finsler metric on a complex manifold M and $\sigma : [0,1] \to M$ a smooth regular curve in M. Then the following assertions are equivalent:*

(1) F 是强凸 *Kähler-Berwald* 度量；*(2)* $T_{\mathbb{R}}M$ 中复化向量的类型在沿 σ 相对于 ∇的平行移动下保持不变；*(3)* 对于沿 σ 相对于 ∇的任意平行实向量场 V， JV 相对于 ∇沿 σ 也平行；*(4)* 对所有 $X \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$， $\nabla_X \boldsymbol{J} \equiv 0$；

Remark 1.5 存在许多非平凡的（非厄米二次型）强凸 Kähler-Berwald 度量 [11, 17, 18]。因此，定理 1.4 给出了强凸 Kähler-Berwald 流形的几何刻画，并将命题 1.2 部分推广到了芬斯勒情形。

作为定理 1.3的一个应用，我们得到如下结果

定理 1.6 *Let F be a strongly convex complex Finsler metric on a complex manifold M. If $\nabla \boldsymbol{J} = 0$ and F has constant holomorphic sectional curvature $c \neq 0$ then F is necessary a Kähler-Einstein metric on M.*

利用定理 1.6，我们立即得到如下结果

定理 1.7 *Let F be a complete strongly convex complex Finsler metric on a simply connected complex manifold M. If $\nabla \boldsymbol{J} = 0$ and F has constant holomorphic sectional curvature $c \in \mathbb{R}$. Then*

(i) 若 $c < 0$, (M, F) 是一个 *Kähler* 流形，且与 $\mathbb{C}^n$ 中开单位球 B_n 全纯等距，其度量为伯格曼度量的常数倍，即

$$F^2(z;\, v) = -\frac{4}{c}\frac{(1-\|z\|^2)\|v\|^2 + |\langle z, v\rangle|^2}{(1-\|z\|^2)^2} \tag{1.1}$$

(ii) 若 $c = 0$, (M, F) 局部是复闵可夫斯基空间，且局部全纯等距于 $\mathbb{C}^n$ ，其复闵可夫斯基度量为 $F(z;\ v) = f(v)$；

(iii) 若 $c > 0$，(M, F) 是一个 *Kähler* 流形，全纯等距于复射影空间 $\mathbb{CP}^n$，其度量为 *Fubini–Study* 度量的一个常数倍，即

$$F^2(z;\ v) = \frac{4}{c}\frac{(1+\|z\|^2)\|v\|^2 - |\langle z, v\rangle|^2}{(1+\|z\|^2)^2}. \tag{1.2}$$

在 [3], 假设M, F是一个以复闵可夫斯基空间为模型的单连通完备复流形（$\mathbb{C}^n, f$），且F是 Kähler-Finsler，并满足 Royden 条件，且（M, F）具有常全纯截面曲率 c，Aikou [3] 实际上概述了上述定理的证明1.6。相比之下，我们的假设 $\nabla \boldsymbol{J} = 0$ 简单，并且纯粹是一个几何条件。此外，我们对定理 1.7 的证明主要基于刚性定理4.1，这与 Aikou 的方法有本质区别 [3]。

2 预备知识

2.1 复流形的实切丛与全纯切丛

本节回顾一些必要的记号和定义，可参见 [1, 4]。

设 M 为复维数为 n（≥ 2）的复流形，并令 $\pi : T_{\mathbb{R}}M \to M$ 为其切丛。记 $J: T_{\mathbb{R}}M \to T_{\mathbb{R}}M$ 为 M 上的典范复结构；在本文中，我们始终用 $i = \sqrt{-1}$ 表示虚数单位。我们还采用爱因斯坦求和约定：小写希腊字母指标的取值范围为 1 到 n，而小写罗马字母指标的取值范围为 1 到 $2n$，并且 $\alpha^* = \alpha + n$, $\beta^* = \beta + n$，等等。

设 $z = (z^1, \cdots, z^n)$ 为开集 $U \subset M$上的局部全纯坐标。令 $z^\alpha = x^\alpha + ix^{\alpha^*}$ 为 $\alpha = 1, \cdots, n$，我们得到 U上的相应实坐标 $x = (x^1, \cdots, x^{2n})$。$M$ 上的典范复结构 J 满足

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha^*}}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha^*}}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha = 1, \cdots, n.$$

将 J通过复线性延拓至复化切丛 $T_{\mathbb{C}}M$，我们得到分解 $T_{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$，其中 $T^{1,0}M$和 $T^{0,1}M$分别是全纯切丛和反全纯切丛。$T^{1,0}M$ 和 $T^{0,1}M$在 U上的局部标架分别为

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^n}\right\} \quad \text{and} \quad \left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}\right\}$$

分别为，其中

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}-i\frac{\partial}{\partial x^{\alpha^*}}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}+i\frac{\partial}{\partial x^{\alpha^*}}\right).$$

存在一个显式的 $\mathbb{R}$-同构，将 $T_{\mathbb{R}}M$与 $T^{1,0}M$联系起来，其定义为

$$_o : T_{\mathbb{R}}M \to T^{1,0}M,\ y\mapsto v=\frac{1}{2}(y-iJy),\quad \forall y=y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$$

and

$$^o : T^{1,0}M \to T_{\mathbb{R}}M,\ v\mapsto y=v+\bar{v},\quad \forall v=v^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\alpha}.$$

容易验证，若对$\alpha=1$设置 $v^\alpha=y^\alpha+iy^{\alpha^*}$，则 $y_o=v$ 和 $v^o=y$，$\cdots$，n。

向量 $v\in T^{1,0}_p M$可以写成 $v=v^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\alpha}|_{p}$。这在$\pi^{-1}(U)\subset T^{1,0}M$上诱导出全纯坐标 $(z;\ v)=(z^1,\ \cdots,\ z^n;\ v^1,\ \cdots,\ v^n)$，从而表明 $T^{1,0}M$ 是一个复维数为 $2n$的复流形。对 $\alpha=1,\ \cdots,\ n$设置$v^\alpha=y^\alpha+\sqrt{-1}y^{\alpha^*}$，我们定义

$$\frac{\partial}{\partial v^\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}-i\frac{\partial}{\partial y^{\alpha^*}}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar{v}^\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}+i\frac{\partial}{\partial y^{\alpha^*}}\right). \tag{2.1}$$

下文中，我们将复流形 $T^{1,0}M$上的典范复结构记为 $\boldsymbol{J}$，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)&=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha^*}},\quad \boldsymbol{J}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha^*}}\right)=-\frac{\partial}{\partial x^\alpha},\\ \boldsymbol{J}\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)&=\frac{\partial}{\partial y^{\alpha^*}},\quad \boldsymbol{J}\left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha^*}}\right)=-\frac{\partial}{\partial y^\alpha},\end{aligned} \tag{2.2}$$

对于 $\alpha=1,\ \cdots,\ n$。

本文所研究的实（分别为复）芬斯勒度量，在 M 的实（分别为全纯）切丛的零截面之外光滑。下文中，在不会引起混淆时，我们用 $\tilde{M}$ 表示 $T_{\mathbb{R}}M\setminus\{0\}$ 或 $\tilde{T^{1,0}M\setminus\{0\}}$。$T_{\mathbb{R}}M$ 的一个局部实标架为

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{2n}},\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^{2n}}\right\};$$

相应地，$T^{1,0}\tilde{M}$ 的一个局部全纯标架为

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial z^n},\frac{\partial}{\partial v^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial v^n}\right\}.$$

与 $T_{\mathbb{R}}M$ 和 $T^{1,0}M$ 类似，$T_{\mathbb{R}}\tilde{M}$ 与 $T^{1,0}\tilde{M}$ 之间存在一个自然的 $\mathbb{R}$-同构，其定义为

$$_o : T_{\mathbb{R}}\tilde{M} \to T^{1,0}\tilde{M}, \quad U \mapsto U_o = \frac{1}{2}(U - i\boldsymbol{J}U), \quad \forall U \in T_{\mathbb{R}}\tilde{M}$$

and

$$^o : T^{1,0}\tilde{M} \to T_{\mathbb{R}}\tilde{M}, \quad X \mapsto X^o = X + \overline{X}, \quad \forall X \in T^{1,0}\tilde{M}.$$

容易验证，

$$\frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_o, \quad i\frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha^*}}\right)_o, \quad \frac{\partial}{\partial v^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_o, \quad i\frac{\partial}{\partial v^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha^*}}\right)_o$$

或者等价地，

$$\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right)^o = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \left(i\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right)^o = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha^*}}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\right)^o = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \quad \left(i\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\right)^o = \frac{\partial}{\partial y^{\alpha^*}}.$$

2.2 强凸复芬斯勒度量

定义 2.1 [4] 光滑流形上的一个实（强凸）芬斯勒度量 M，其 n 实维数为 F：$T_{\mathbb{R}}M \to [0, +\infty)$ 满足

(i) F 为正且 C^∞ 在 $M = T_{\mathbb{R}}M \setminus \{0\}$上；(ii) 对所有 $(x;\ y)$，$F(x;\ \lambda y) = \lambda F(x;\ y) \in T_{\mathbb{R}}M$和 $\lambda > 0$；(iii) 实基本张量

$$(g_{jk}) := \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^j \partial y^k}\right)$$

在 M上正定。

定义 2。2 [1] 复维数为 n的复流形 M上的强伪凸复Finsler度量是一个函数 F: $T^{1,0}M \to [0, +\infty)$, 满足

(i) F为正且 C^∞ 在 $\tilde{M} = T^{1,0}M \setminus \{0\}$上；(ii) 对所有 $(z;\ v)$，$F(z;\ \lambda v) = |\lambda| F(z;\ v) \in T^{1,0}M$和 $\lambda \in \mathbb{C}$；(iii) 复基本张量

$$(G_{\alpha\bar{\beta}}) := \left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial v^\alpha \partial \bar{v}^\beta}\right)$$

在 M 上是厄米正定的。

设 F: $T^{1,0}M \to [0,+\infty)$ 是一个强凸复芬斯勒度量。它通过以下方式在 M 上诱导出一个实 Finsler 度量 $F_{\mathbb{R}}$

$$F_{\mathbb{R}}(y) := F(y_o) = F(v). \tag{2.3}$$

显然， $F_{\mathbb{R}}$ 是 J-不变的，即 $F_{\mathbb{R}}(Jy) = F_{\mathbb{R}}(y)$。

根据方程 (2.3)，为简便起见，若不致引起混淆，下文将不区分记号 F 和 $F_{\mathbb{R}}$。

2.3 实测地线

设 F: $T^{1,0}M \to [0,+\infty)$ 是复流形 M 上的强凸复芬斯勒度量，且 σ: $[a,b] \to M$ 是一条光滑曲线。根据 [1] 中推论 1.5.2 的证明， σ 是 F 的实测地线，当且仅当其满足以下微分方程

$$\ddot{\sigma}^k + \hat{\Gamma}^k_j(\sigma;\ \dot{\sigma})\dot{\sigma}^j = 0, \tag{2.4}$$

其中，系数 $\hat{\Gamma}^k_j$ 是实非线性联络 ∇: $\mathcal{X}(T_{\mathbb{R}}M) \to \mathcal{X}(T^*_{\mathbb{R}}M \otimes T_{\mathbb{R}}M)$ 的克里斯托费尔符号，该联络与 F 相关。更准确地说，

$$\hat{\Gamma}^k_j(x;\ y) := \frac{\partial \hat{\mathbb{G}}^k}{\partial y^j}, \tag{2.5}$$

其中

$$\hat{\mathbb{G}}^k := \frac{1}{4}g^{kl}\left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial x^a \partial y^l}y^a - \frac{\partial F^2}{\partial x^l}\right) \tag{2.6}$$

称为 F 的实测地线喷射系数。

方程（2.4）-（2.6）表明，实非线性联络系数 $\hat{\Gamma}^k_j$ 完全决定了 F 的实测地线。实非线性联络 ∇ 在去心切丛 M 上诱导出切丛的直和分解:

$$T_{\mathbb{R}}\tilde{M} = \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \oplus \mathcal{V}_{\mathbb{R}},$$

其中 $\mathcal{V}_{\mathbb{R}} = \ker d\pi$ 是实垂直丛，而 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 是由 ∇ 确定的实水平丛。这个分解在局部由适配标架刻画

$$\mathcal{H}_{\mathbb{R}} = \operatorname{span}\left\{\frac{\delta}{\delta x^1}, \cdots, \frac{\delta}{\delta x^{2n}}\right\}, \quad \mathcal{V}_{\mathbb{R}} = \operatorname{span}\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^{2n}}\right\},$$

其中 $\frac{\delta}{\delta x^j} := \frac{\partial}{\partial x^j} - \hat{\Gamma}^k_j \frac{\partial}{\partial y^k}$，对 j， $k = 1$， $\cdots$， $2n$。对偶丛 $\mathcal{H}^*_{\mathbb{R}}$ 和 $\mathcal{V}^*_{\mathbb{R}}$ 分别由 $\{dx^1, \cdots, dx^{2n}\}$ 和 $\{\delta y^1, \cdots, \delta y^{2n}\}$ 张成，其中 $\delta y^j := dy^j + \hat{\Gamma}^j_k dx^k$。

2.4 嘉当联络

设 F: $T^{1,0}M \to [0,+\infty)$ 是复流形 M 上的强凸复芬斯勒度量，并设 $g = \langle\cdot|\cdot\rangle$ 是由 F 在垂直丛 $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ 上诱导的自然黎曼度量。在局部坐标中，该度量表示为

$$g = g_{jk}(x;\, y)\delta y^j \otimes \delta y^k \tag{2.7}$$

so t对任意垂直向量场 $X = X^j \frac{\partial}{\partial y^j}$ 和 $Y = Y^k \frac{\partial}{\partial y^k}$ 在 $(\mathcal{V}_{\mathbb{R}})_{(x;\, y}$上取帽),

$$\langle X|Y\rangle = g_{jk}(x;\, y)X^j Y^k \quad \text{where} \quad g_{jk}(x;\, y) = g\left(\frac{\partial}{\partial y^j}, \frac{\partial}{\partial y^k}\right). \tag{2.8}$$

定理 2 3 *[1] Let F be a real Finsler metric on M and let $\langle\cdot|\cdot\rangle$ be the Rie-* 。, *mannian structure on $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ induced by F. Then there exists a unique real vertical connection*

$$\nabla : \mathcal{X}(\mathcal{V}_{\mathbb{R}}) \to \mathcal{X}(T^*_{\mathbb{R}}\tilde{M} \otimes \mathcal{V}_{\mathbb{R}})$$

satisfying the following properties:

(i) ∇是良好的；*(ii)* ∇与度量相容：对于任意 $X \in T_{\mathbb{R}}M$和 $V, W \in \mathcal{X}(\mathcal{V}_{\mathbb{R}})$,

$$X\langle V|W\rangle = \langle \nabla_X V|W\rangle + \langle V|\nabla_X W\rangle;$$

(iii) 垂直挠率为零： $\theta(V, W) = 0$ 对所有 $V, W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$均成立；*(iv)* 水平挠率是垂直的： $\theta(H, K) \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ 对所有 $H, K \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$均成立。

在局部坐标中，嘉当联络的联络 1-形式 $\hat{\omega}_j^k$由下式给出

$$\hat{\omega}_j^k = \hat{\Gamma}^k_{j;\,l}dx^l + \hat{\Gamma}^k_{jl}\delta y^l,$$

其中系数定义如下

$$\hat{\Gamma}^k_{j;\,l} = \frac{g^{ks}}{2}\left(\frac{\delta g_{sj}}{\delta x^l} - \frac{\delta g_{jl}}{\delta x^s} + \frac{\delta g_{ls}}{\delta x^j}\right), \quad \hat{\Gamma}^k_{jl} = \frac{1}{4}g^{ks}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^j \partial y^l \partial y^s}.$$

这些系数关于其下标对称： $\hat{\Gamma}^k_{j;\,l} = \hat{\Gamma}^k_{l;\,j}$ 和 $\hat{\Gamma}^k_{jl} = \hat{\Gamma}^k_{lj}$。此外，由于嘉当联络是良好的，根据 [1] 中的引理 1.2.2 可知，非线性联络系数满足

$$\hat{\Gamma}^k_j = \hat{\Gamma}^k_{l;\,j}y^l. \tag{2.9}$$

利用水平 Cartan 联络系数，可以引入沿光滑曲线 σ 的实向量场 $V \in \mathcal{X}(T_{\mathbb{R}}M)$ 的平行性： $[0,1] \to M$。然而，在实 Finsler 几何中，对于沿曲线的实向量场的平行移动，存在几种不同的定义。这些不同的定义源于对“平行性”的不同几何解释以及对

不同联络的使用。一般而言，在实芬斯勒流形上，这些定义并不等价；有关更多细节，请参阅 [1],[4] 。

定义 2.4 设 $V(t) = V^k(t)\frac{\partial}{\partial x^k}$ 是定义在光滑曲线 $\sigma: [0,1] \to M$ 上的实向量场。若局部满足以下条件，我们称 V 关于嘉当联络 ∇ 沿 σ 平行

$$\frac{\boldsymbol{D}V^k}{dt} := \frac{dV^k}{dt} + V^l \hat{\Gamma}^k_{l;\,j}(\sigma(t);\,\dot{\sigma}(t))\dot{\sigma}^j(t) = 0, \quad \forall k = 1, \cdots, 2n. \tag{2.10}$$

特别地， σ 自身是测地线当且仅当 $\dot{\sigma}$ 沿 σ 关于∇平行，这正是方程(2.4)，因为我们总有

$$\dot{\sigma}^l(t)\hat{\Gamma}^k_{l;\,j}(\sigma(t);\,\dot{\sigma}(t)) = \hat{\Gamma}^k_j(\sigma(t);\,\dot{\sigma}(t)).$$

Remark 2.5 根据上述定义，若 V_1 和 V_2 是定义在 σ 上的两个实向量场，并且关于嘉当联络 ∇沿 σ 平行，那么对于任意 a， $b \in \mathbb{R}$，$aV_1 + bV_2$ 也关于 ∇ 沿 σ 平行。

∇ 的挠率 $\theta \in \mathcal{X}(\wedge^2 T^*_{\mathbb{R}}\tilde{M} \otimes T_{\mathbb{R}}\tilde{M})$ 的局部表达式为：

$$\theta = \theta^j \otimes \frac{\delta}{\delta x^j} + \dot{\theta}^a \otimes \frac{\partial}{\partial y^a}, \tag{2.11}$$

其中

$$\begin{aligned}
\theta^j &= \hat{\Gamma}^j_{lc}\delta y^c \wedge dx^l, \\
\dot{\theta}^a &= \frac{1}{2}\left[\frac{\delta}{\delta x^j}(\hat{\Gamma}^a_k) - \frac{\delta}{\delta x^k}(\hat{\Gamma}^a_j)\right] dx^j \wedge dx^k + \left[\frac{\partial}{\partial y^b}(\hat{\Gamma}^a_k) - \hat{\Gamma}^a_{b;\,k}\right]\delta y^b \wedge dx^k.
\end{aligned}$$

∇的曲率算子 $\hat{\Omega} \in \mathcal{X}(\wedge^2 T^*_{\mathbb{R}}\tilde{M} \otimes T^*_{\mathbb{R}}\tilde{M} \times T_{\mathbb{R}}\tilde{M})$ 为

$$\hat{\Omega} = \hat{\Omega}^k_j \otimes \left[dx^j \otimes \frac{\delta}{\delta x^k} + \delta y^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^k}\right],$$

其中

$$\hat{\Omega}^k_j = d\hat{\omega}^k_j - \hat{\omega}^l_j \wedge \hat{\omega}^k_l.$$

∇ 在 $y \in M$ 处的水平旗曲率为

$$R_y(H,K) = \langle \hat{\Omega}(\hat{\chi}(y), H)K | \hat{\chi}(y)\rangle, \quad \forall H, K \in (\mathcal{H}_{\mathbb{R}})_y.$$

2.5 Chern-Finsler 联络

复芬斯勒几何的研究取决于引入一个复水平子丛 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} \subset T_{\mathbb{C}}M$ ，该子丛具有 $\boldsymbol{J}$ 不变性、共轭不变性，

并满足以下分解:

$$T_{\mathbb{C}}\tilde{M} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{V}_{\mathbb{C}}, \quad \text{and dually} \quad T^*_{\mathbb{C}}\tilde{M} = \mathcal{H}^*_{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{V}^*_{\mathbb{C}}.$$

这样的丛 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 使我们能够定义一个复非线性联络 $D_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$在 M。反过来，该联络确定一个复水平映射 $\Theta^{D_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}}$，其像恰好是原来的丛 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$。这就建立了复水平丛、复非线性联络和复水平映射 [1]之间的一一对应。注意，复水平丛完全由其（1，0）部分 $\mathcal{H}^{1,0}$确定，从而得到分解 $T^{1,0}\tilde{M} = \mathcal{H}^{1,0} \oplus \mathcal{V}^{1,0}$，其中 $\mathcal{V}^{1,0} = \ker d\pi \subset T^{1,0}\tilde{M}$。一般而言， $\mathcal{H}^{1,0}$可能并非来自强伪凸复 Finsler度量。

然而，对于给定的强伪凸复 Finsler 度量 $F : T^{1,0}M \to [0, +\infty)$，存在一种典范方法，可由 F 构造出 $\mathcal{H}^{1,0}$，从而得到相应的复水平丛 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}^{1,0} \oplus \mathcal{H}^{0,1}$。此丛称为与 F 的 Chern-Finsler 联络相关联的复水平丛。更准确地说， $\mathcal{H}^{1,0} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\delta_1, \cdots, \delta_n\}$，其中 $\delta_\mu = \frac{\partial}{\partial z^\mu} - \Gamma^\alpha_{;\mu}\frac{\partial}{\partial v^\alpha}$，对于 $\mu = 1, \cdots, n$，且系数

$$\Gamma^\alpha_{;\mu} = G^{\bar{\tau}\alpha}\frac{\partial^2 F^2}{\partial z^\mu \partial \bar{v}^\tau} \tag{2.12}$$

称为与 F 相关联的 Chern-Finsler 联络的复非线性联络系数。

令 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示由 F 在全纯垂直子丛 $\mathcal{V}^{1,0} \cong \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ 上诱导的 Hermitian 内积。对于任意 $V = V^\alpha \frac{\partial}{\partial v^\alpha}$、 $W = W^\beta \frac{\partial}{\partial v^\beta} \in (\mathcal{V}^{1,0})_{(z;v)}$，

$$\langle V, W \rangle = G_{\alpha\bar{\beta}}(z; v)V^\alpha \overline{W^\beta}. \tag{2.13}$$

定理 2.6 *[1] Let $F : T^{1,0}M \to [0, +\infty)$ be a strongly pseudoconvex complex Finsler metric on a complex manifold M and let $\langle \cdot, \cdot \rangle$ be the induced Hermitian structure on $\mathcal{V}^{1,0}$. Then there is a unique complex vertical connection*

$$D : \mathcal{X}(\mathcal{V}^{1,0}) \to \mathcal{X}(T^*_{\mathbb{C}}M \otimes \mathcal{V}^{1,0})$$

such that

(i) 对于所有 $X \in T^{1,0}\tilde{M}$ 以及 V、$W \in \mathcal{X}(\mathcal{V}^{1,0})$，

$$X\langle V, W \rangle = \langle D_X V, W \rangle + \langle V, D_{\overline{X}} W \rangle; \tag{2.14}$$

(ii) D 是良好的。

联络 D 定理 2.6 中的联络称为*Chern-Finsler* 联络 F的联络 1-形式 ω^α_β 如下

$$\omega^\alpha_\beta = \Gamma^\alpha_{\beta;\mu}dz^\mu + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\psi^\gamma,$$

其中 $\psi^\gamma = dv^\gamma + \Gamma^\gamma_{;\,\mu} dz^\mu$ 以及系数

$$\Gamma^\alpha_{\beta;\,\mu} = G^{\bar{\tau}\alpha}\delta_\mu(G_{\beta\bar{\tau}}), \quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = G^{\bar{\tau}\alpha}\frac{\partial}{\partial v^\gamma}(G_{\beta\bar{\tau}}) = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}. \tag{2.15}$$

分别称为 D 的水平联络系数和垂直联络系数，分别。若干重要的复芬斯勒度量类通过水平联络系数 $\Gamma^\alpha_{\beta;\,\mu}$ 定义：

- F 称为 *K¨ahler-Finsler* 度量（参见 [1], [6]），当且仅当

$$\Gamma^\alpha_{\beta;\,\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu;\,\beta} = 0, \tag{2.16}$$

  这等价于条件 $(\Gamma^\alpha_{\beta;\,\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu;\,\beta})\, v^\beta = 0$。
- F 称为弱 *K¨ahler-Finsler* 度量 [1]，如果

$$G_\alpha(\Gamma^\alpha_{\beta;\,\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu;\,\beta})v^\beta = 0; \tag{2.17}$$

- F 称为复伯瓦尔德度量 [2]，如果每个 $\Gamma^\alpha_{\beta;\,\mu}$ 仅依赖于基点 z;
- F 称为复局部闵可夫斯基度量，如果每个 $\Gamma^\alpha_{\beta;\,\mu}$ 局部仅依赖于纤维坐标 v。

复伯瓦尔德流形 (M, F) 也可通过其以复闵可夫斯基空间为模型 [3]这一性质来刻画。

定义 2.7 设 F: $T^{1,0}M \to [0, +\infty)$ 是复流形 M 上的强凸复芬斯勒度量。若 F既是 K¨ahler-Finsler 度量，又是复伯瓦尔德度量，则称 F为 *strongly convex Kähler-Berwald metric*，并称 (M, F) 为 *strongly convex Kähler-Berwald manifold*。

Remark 2.8 虽然 K¨ahler 度量代表了厄米几何中的最优对称性，但我们近期的研究 [8, 11, 17, 18] 揭示了复芬斯勒几何中的类似现象：在对称复流形上可容许的唯一不变强拟凸度量是 K¨ahler-Berwald 度量。这一事实确立了 K¨ahler-Berwald 度量作为芬斯勒几何中 K¨ahler 度量的自然对应物，并自然引出了如何在所有复芬斯勒度量中刻画它们这一问题。

令 $\langle\langle\cdot,\ \cdot\rangle\rangle$ 表示由 F 在 $\mathcal{V}^{1,\,0}$上诱导的对称积，其定义为：对于 $V = V^\alpha \frac{\partial}{\partial v^\alpha}$，$W = W^\beta \frac{\partial}{\partial v^\beta} \in (\mathcal{V}^{1,\,0})_{(z;\,v)}$，

$$\langle\langle V, W\rangle\rangle = G_{\alpha\beta}(z;\, v)V^\alpha W^\beta. \tag{2.18}$$

命题

2 9 *[1] Let F* $T^{1\ 0}M \to [0,+\infty$ *be a strongly convex complex Finsler*。：，**)** *metric on a complex manifold M. Then*

$$\langle V|W\rangle = Re[\langle V,W\rangle + \langle\langle V,W\rangle\rangle], \quad \forall V,W \in \mathcal{V}^{1,0}. \tag{2.19}$$

Remark 2.10 在应用上述恒等式（2.19）时，对称乘积 $\langle\langle V,\ W\rangle\rangle$ 可能会造成不便。幸运的是，以下引理 2.1可以克服这一缺点。

更准确地说，将实内积 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 以如下自然方式延拓到复化$\mathcal{V}_{\mathbb{C}} = \mathcal{V}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$：

$$\langle X_1 + iY_1|X_2 + iY_2\rangle = \langle X_1|X_2\rangle - \langle Y_1|Y_2\rangle + i(\langle X_1|Y_2\rangle + \langle Y_1|X_2\rangle). \tag{2.20}$$

此延拓（仍记为 $\langle\cdot|\cdot\rangle$）是 $\mathbb{C}$-双线性的。特别地，它在 $\mathcal{V}^{1、0}$ 和 $\mathcal{V}^{1、0}$上是 $\mathbb{C}$-双线性的，因为 $\mathcal{V}_{\mathbb{C}} = \mathcal{V}^{1、0} \oplus \mathcal{V}^{0、1}$。

以下引理在定理3.11 和定理 3.12的证明中起着关键作用。

Lemma 2.1 设 F：$T^{1,\ 0}M \to [0,+\infty)$ 是复流形 M 上的强凸复芬斯勒度量。则

$$\langle V,W\rangle = 2\langle V|\overline{W}\rangle, \quad \forall V,W \in \mathcal{V}^{1,0}. \tag{2.21}$$

Proof 设 V，$W \in \mathcal{V}^{1,\ 0}$ 可写为

$$V = X_o = \frac{1}{2}(X - i\boldsymbol{J}X), \quad W = Y_o = \frac{1}{2}(Y - i\boldsymbol{J}Y) \tag{2.22}$$

对于实垂直向量场 X，$Y \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$。将 $X = V^o$，$Y = W^o$，$\boldsymbol{J}X = (iV)^o$以及 $\boldsymbol{J}Y = (iW)^o$ 代入（2.19），可得

$$\begin{aligned}
\langle X|Y\rangle &= \mathrm{Re}\,[\langle V,W\rangle + \langle\langle V,W\rangle\rangle],\\
\langle \boldsymbol{J}X|\boldsymbol{J}Y\rangle &= \mathrm{Re}\,[\langle V,W\rangle - \langle\langle V,W\rangle\rangle],\\
\langle X|\boldsymbol{J}Y\rangle &= \mathrm{Im}\,[\langle V,W\rangle - \langle\langle V,W\rangle\rangle],\\
\langle \boldsymbol{J}X|Y\rangle &= -\mathrm{Im}\,[\langle V,W\rangle + \langle\langle V,W\rangle\rangle].
\end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned}
\langle X|Y\rangle + \langle \boldsymbol{J}X|\boldsymbol{J}Y\rangle &= 2\mathrm{Re}[\langle V,W\rangle],\\
\langle X|\boldsymbol{J}Y\rangle - \langle \boldsymbol{J}X|Y\rangle &= 2\mathrm{Im}[\langle V,W\rangle].
\end{aligned}$$

因此，

$$\langle X|Y\rangle + \langle \boldsymbol{J}X|JY\rangle + i\langle X|\boldsymbol{J}Y\rangle - i\langle \boldsymbol{J}X|Y\rangle = 2\langle V,W\rangle.$$

另一方面，利用延拓式（2.20），我们计算得

$$\langle V|\overline{W}\rangle = \frac{1}{4}\left\{\langle X|Y\rangle + \langle \boldsymbol{X}|\boldsymbol{J}Y\rangle + i\langle X|\boldsymbol{J}Y\rangle - i\langle \boldsymbol{J}X|Y\rangle\right\}.$$

比较这两个表达式即可得到所需的恒等式（2.21）。

□

Remark 2.11 通过水平映射 $\hat{\Theta}:\ \mathcal{V}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$，内积 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ 也可以延拓到复化 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} \neq :$。但一般而言，$\hat{},_{\circ}$ $\mathcal{H}^{1\,0} \oplus \mathcal{H}^{0\,1}$

3 关于嘉当联络的 $\boldsymbol{J}$ 平行性

本节主要研究强凸复芬斯勒流形（M, F）的性质，条件是复流形 $T^{1,\,0}M$ 上的典范复结构 $\boldsymbol{J}$ 相对于与 F 相关联的嘉当联络 ∇ 满足某种不同程度的平行性。

首先，我们得到关于 $\boldsymbol{J}$ 相对于 ∇平行性的以下充要条件。

定理 3.1 *Let F be a strongly convex complex Finsler。: $T^{1,}$ $^{0}M \to [0,+\infty)$ metric on a complex manifold M. Then $\nabla \boldsymbol{J} = 0$ iff*

$$\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*;\,j} = -\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,j}, \quad \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,j} = \Gamma^{\beta}_{\alpha;\,j}, \tag{3.1}$$

$$\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^* j} = -\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha j}, \quad \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^* j} = \hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha j}, \tag{3.2}$$

for all α, $\beta = 1, \cdots, n$ and $j = 1, \cdots, 2n$.

Proof 由于

$$(\nabla_X \boldsymbol{J})(Y) = \nabla_X(\boldsymbol{J}Y) - \boldsymbol{J}(\nabla_X Y)$$

˜对所有 $X \in T_{\mathbb{R}}M$ 和 $Y \in \mathcal{X}$（$\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$），条件 $\nabla \boldsymbol{J} = 0$ 等价于

$$\nabla_X(\boldsymbol{J}Y) = \boldsymbol{J}(\nabla_X Y) \tag{3.3}$$

对所有 $X \in T_{\mathbb{R}}\tilde{M}$ 和 $Y \in \mathcal{X}$（$\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$）。

取 $X = \frac{\delta}{\delta x^j}$、~~$Y = \frac{\partial}{\partial y^k}$~~并将它们代入（3.3），利用（2.2），可得

$$\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^j}}\left(\boldsymbol{J}\frac{\partial}{\partial y^k}\right) = \begin{cases} \hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,j}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}} + \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,j}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}, & k = \alpha, \\ -\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,j}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}} - \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,j}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}, & k = \alpha^* \end{cases} \tag{3.4}$$

and

$$\boldsymbol{J}\left(\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^j}}\frac{\partial}{\partial y^k}\right) = \begin{cases} \hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,j}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}} - \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,j}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}, & k = \alpha, \\ \hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*;\,j}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}} - \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,j}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}, & k = \alpha^*. \end{cases} \tag{3.5}$$

比较（3.4）和（3.5），可知（3.3）对所有 $X \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 和 $Y \in \mathcal{X}$（$\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$）成立，当且仅当（3.1）中的等式成立。

取 $X = \frac{\partial}{\partial y^j}$, ~~$Y = \frac{\partial}{\partial y^k}$~~并将它们代入（3.3）并利用（2.2），得到

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}}\left(\boldsymbol{J}\frac{\partial}{\partial y^k}\right) = \begin{cases} \hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^* j}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}} + \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^* j}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}, & k = \alpha, \\ -\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha j}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}} - \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha j}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}, & k = \alpha^* \end{cases} \tag{3.6}$$

and

$$\boldsymbol{J}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}}\frac{\partial}{\partial y^k}\right)=\begin{cases}\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha j}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}-\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha j}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}, & k=\alpha,\\ \hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^* j}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}-\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^* j}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}, & k=\alpha^*.\end{cases}\tag{3.7}$$

比较（3.6）和（3.7），可见（3.3）对所有 $X\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ 和 $Y\in\mathcal{X}(\mathcal{V}_{\mathbb{R}})$ 成立，当且仅当（3.2）成立。□

推论 3.1 *Let F be a strongly convex complex Finsler metric on a complex manifold M. If $\boldsymbol{J}$ is horizontal parallel with respect to ∇ namely $T^{1,0}M\to[0,+\infty)$, $\nabla_X\boldsymbol{J}=0$ for all $X\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, then*

$$\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*}=-\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha},\quad \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*}=\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha}\tag{3.8}$$

for $\alpha=1,\cdots,n$.

Proof 根据定理 3.1，$\nabla_X\boldsymbol{J}=0$ 对所有 $X\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 当且仅当等式 (3.1) 成立。由于 Cartan 联络系数关于下标对称，即$\hat{\Gamma}^{k}_{j;\,l}=\hat{\Gamma}^{k}_{l;\,j}$，并且满足$\hat{\Gamma}^{k}_{j;\,l}y^j=\hat{\Gamma}^{k}_{l}$。将等式 (3.1) 与 y^j收缩，立即得到 (3.8)。□

定义 3.2 设 $\boldsymbol{J}$ 是复流形 $T^{1,0}M$ 上的典范结构。实水平丛 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 称为 $\boldsymbol{J}$-不变的，如果

$$\boldsymbol{J}\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha}}\right)=\frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}},\quad \boldsymbol{J}\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}}\right)=-\frac{\delta}{\delta x^{\alpha}},\quad \alpha=1,\cdots,n.$$

命题 3.3 *[1] $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ is $\boldsymbol{J}$-invariant iff the equalities in (3.8) hold.*

Proof 事实上，

$$\boldsymbol{J}\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha}}\right)=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha^*}}-\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\beta^*}}+\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}},\quad \frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}}=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha^*}}-\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*}\frac{\partial}{\partial x^{\beta^*}}-\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}},$$
$$\boldsymbol{J}\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}}\right)=-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}-\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*}\frac{\partial}{\partial x^{\beta^*}}+\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}},\quad -\frac{\delta}{\delta x^{\alpha}}=-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}+\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\beta^*}}+\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}.$$

因此 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 当且仅当 $\boldsymbol{J}$-不变，且等式 (3.8) 成立。□

~设 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}=\mathcal{H}_{\mathbb{R}}\otimes\mathbb{C}$ 为 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 的复化水平丛。形式上，我们有

$$\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha}}\right)_o=\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha}}-i\boldsymbol{J}\frac{\delta}{\delta x^{\alpha}}\right),\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}}\right)_o=\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}}-i\boldsymbol{J}\frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}}\right),\alpha=1,\cdots,n.$$

一般而言，$\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha}}\right)_o\neq\delta_{\alpha}$ 和$\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}}\right)_o\neq i\delta_{\alpha}$正如 [1]第 114 页所指出的那样。然而，如果 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 是 $\overline{\boldsymbol{J}}$-不变的，那么我们就能得到一个复水平丛，记作 $\widetilde{\mathcal{H}}^{1,0}$。

为此，我们定义

$$\mathcal{N}^{\beta}_{;\,\alpha} := \hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha} + i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha} \tag{3.9}$$

and

$$\frac{\delta}{\delta z^{\alpha}} := \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} - \mathcal{N}^{\beta}_{;\,\alpha}\frac{\partial}{\partial v^{\beta}}, \quad \alpha = 1, \cdots, n. \tag{3.10}$$

命题 3.4 *If $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ is $\boldsymbol{J}$-invariant, then*

$$\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha}}\right)_o = \frac{\delta}{\delta z^{\alpha}} \quad \textit{and} \quad \left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}}\right)_o = i\frac{\delta}{\delta z^{\alpha}}, \tag{3.11}$$

or equivalently

$$\left(\frac{\delta}{\delta z^{\alpha}}\right)^o = \frac{\delta}{\delta x^{\alpha}} \quad \textit{and} \quad \left(i\frac{\delta}{\delta z^{\alpha}}\right)^o = \frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}}. \tag{3.12}$$

Proof 直接计算可得

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha}}\right)_o &= \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha}} - i\boldsymbol{J}\frac{\delta}{\delta x^{\alpha}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} - \hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}} - \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}} - i\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha^*}} - \hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}} + \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} - i\frac{\partial}{\partial x^{\alpha^*}}\right) - \left(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha} + i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta}} + i\left(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha} + i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} - i\frac{\partial}{\partial x^{\alpha^*}}\right) - \left(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha} + i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^{\beta}} - i\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}\right)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} - \left(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha} + i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial v^{\beta}} \\
&= \frac{\delta}{\delta z^{\alpha}}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}}\right)_o &= \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}} - i\boldsymbol{J}\frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^{\alpha^*}} - \hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}} - \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}} - i\left(-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} - \hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}} + \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[i\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} - i\frac{\partial}{\partial x^{\alpha^*}}\right) - \left(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*} + i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta}} - \left(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*} - i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[i\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} - i\frac{\partial}{\partial x^{\alpha^*}}\right) - i\left(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*} - i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta}} - \left(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*} - i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}\right] \\
&= i\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} - i\frac{\partial}{\partial x^{\alpha^*}}\right) - \left(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*} - i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^{\beta}} - i\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}\right)\right] \\
&= i\left[\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} - \left(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*} - i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*}\right)\frac{\partial}{\partial v^{\beta}}\right] \\
&= i\left[\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} - \left(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha} + i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial v^{\beta}}\right]
\end{aligned}$$

$$= i\frac{\delta}{\delta z^{\alpha}}.$$

□

设$\hat{\ }\Gamma^{k}_{j;\,l}$和$\hat{\ }\Gamma^{k}_{jl}$分别为$F$的水平和垂直嘉当联络系数。定义

$$\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma} := \hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma} + i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma} \quad \text{and} \quad \mathcal{N}^{\beta}_{\alpha\gamma} := \hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\gamma} + i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha\gamma}, \quad \alpha,\beta,\gamma = 1,\cdots,n. \tag{3.13}$$

Remark 3.5 由于$\hat{\Gamma}^{k}_{j;\,l} = \hat{\ }\Gamma^{k}_{l;\,j}$和$\hat{\Gamma}^{k}_{jl} = \hat{\ }\Gamma^{k}_{lj}$，显然

$$\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma} = \mathcal{N}^{\beta}_{\gamma;\,\alpha} \quad \text{and} \quad \mathcal{N}^{\beta}_{\alpha\gamma} = \mathcal{N}^{\beta}_{\gamma\alpha}. \tag{3.14}$$

命题 3.6 *If* $\nabla_X \boldsymbol{J} = 0$ *for all* $X \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, *then*

$$\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma} v^{\alpha} = \mathcal{N}^{\beta}_{;\,\gamma}; \tag{3.15}$$

if $\nabla_Y \boldsymbol{J} = 0$ *for all* $Y \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$, *then*

$$\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha\gamma} v^{\alpha} = 0. \tag{3.16}$$

Proof 事实上，由于 $v^{\alpha} = y^{\alpha} + iy^{\alpha^*}$,

$$\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma} v^{\alpha} = (\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma} y^{\alpha} - \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma} y^{\alpha^*}) + i(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma} y^{\alpha^*} + \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma} y^{\alpha}).$$

根据假设 $\nabla_X \boldsymbol{J} = 0$ 对所有 $X \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$，因此我们有（3.1）。于是

$$\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma} v^{\alpha} = (\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma} y^{\alpha} + \hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*;\,\gamma} y^{\alpha^*}) + i(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,\gamma} y^{\alpha^*} + \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma} y^{\alpha}) = \hat{\Gamma}^{\beta}_{\gamma} + i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\gamma} = \mathcal{N}^{\beta}_{;\,\gamma},$$

因为水平 Cartan 联络系数满足$\hat{\Gamma}^{k}_{j;\,l} y^{j} = \hat{\ }\Gamma^{k}_{l}$。类似地,

$$\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha\gamma} v^{\alpha} = (\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\gamma} y^{\alpha} - \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha\gamma} y^{\alpha^*}) + i(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\gamma} y^{\alpha^*} + \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha\gamma} y^{\alpha}).$$

根据假设 $\nabla_Y \boldsymbol{J} = 0$ 对所有 $Y \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$，因此我们有（3.2）。于是

$$\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha\gamma} v^{\alpha} = (\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\gamma} y^{\alpha} + \hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*\gamma} y^{\alpha^*}) + i(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*\gamma} y^{\alpha^*} + \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha\gamma} y^{\alpha}) = \hat{\Gamma}^{\beta}_{j\gamma} y^{j} + i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{j\gamma} y^{j} = 0,$$

因为垂直 Cartan 联络系数满足 $\hat{\ }\Gamma^{k}_{jl} y^{j} = 0$。

□

命题 3.7 *Let* F *be a strongly convex complex Finsler metric on a complex manifold* M. *Let* U_A *and* U_B *be local holomorphic coordinate neighborhoods on* M *with* $U_A \cap U_B \neq \emptyset$, *such that* $(z_A;\ v_A) = (z^1_A \cdots z^n_A\ \ v^1_A \cdots v^n_A$ *and* $z_B\ \ v_B = z^1_B \cdots z^n_B\ \ v^1_B \cdots v^n_B$ *are the induced holomorphic coordinates on* $\pi^{-1}U_A$ *and* $\pi^{-1}U_B \subset T^{1\,0}M$ *respectively. If* $\nabla \boldsymbol{J} = 0$, *then*

$$\left(\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}\right)_B = \frac{\partial z^{\mu}_A}{\partial z^{\alpha}_B}\frac{\partial z^{\nu}_A}{\partial z^{\gamma}_B}\left(\mathcal{N}^{\delta}_{\mu;\,\nu}\right)_A \frac{\partial z^{\beta}_B}{\partial z^{\delta}_A} - \frac{\partial z^{\mu}_A}{\partial z^{\alpha}_B}\frac{\partial z^{\nu}_A}{\partial z^{\gamma}_B}\frac{\partial^2 z^{\beta}_B}{\partial z^{\mu}_A \partial z^{\nu}_A}, \tag{3.17}$$

$$\left(\mathcal{N}^{\beta}_{;\,\gamma}\right)_B = \frac{\partial z^{\nu}_A}{\partial z^{\gamma}_B}\left(\mathcal{N}^{\delta}_{;\,\nu}\right)_A \frac{\partial z^{\beta}_B}{\partial z^{\delta}_A} - \frac{\partial z^{\nu}_A}{\partial z^{\gamma}_B}\frac{\partial^2 z^{\beta}_B}{\partial z^{\mu}_A \partial z^{\nu}_A} v^{\mu}_A, \tag{3.18}$$

$$\left(\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha\gamma}\right)_B = \frac{\partial z^{\mu}_A}{\partial z^{\alpha}_B}\frac{\partial z^{\nu}_A}{\partial z^{\gamma}_B}\left(\mathcal{N}^{\delta}_{\mu\nu}\right)_A \frac{\partial z^{\beta}_B}{\partial z^{\delta}_A}. \tag{3.19}$$

Proof 设

$$z^{\alpha}_A = x^{\alpha}_A + i x^{\alpha^*}_A, \quad z^{\alpha}_B = x^{\alpha}_B + i x^{\alpha^*}_B, \quad v^{\alpha}_A = y^{\alpha}_A + i y^{\alpha^*}_A, \quad v^{\alpha}_B = y^{\alpha}_B + i y^{\alpha^*}_B$$

对于 $\alpha = 1、\cdots、n$。则 $x_A = (x^1_A、\cdots、x^{2n}_A)$ 和 $x_B = (x^1_B、\cdots、x^{2n}_B)$ 分别是 U_A 和 U_B 上的局部实坐标，而 $(x_A、\ y_A) = (x^1_A、\cdots、x^{2n}_A;\ y^1_A、\cdots、y^{2n}_A)$、$(x_B;\ y_B) = (x^1_B、\cdots、x^{2n}_B;\ y^1_B、\cdots、y^{2n}_B)$ 分别是 $\pi^{-1}(U_A)$ 和 $\pi^{-1}(U_B)$ 上的诱导实坐标。在 $\pi^{-1}(U_A) \cap \pi^{-1}(U_B) \neq \emptyset$ 上进行坐标变换时，水平联络系数变换为

$$\left(\hat{\Gamma}^{b}_{a;\,c}\right)_B = \sum_{h,k=1}^{2n} \frac{\partial x^h_A}{\partial x^{\alpha}_B}\frac{\partial x^k_A}{\partial x^c_B}\left[\sum_{j=1}^{2n}\left(\hat{\Gamma}^{j}_{h;\,k}\right)_A \frac{\partial x^b_B}{\partial x^j_A} - \frac{\partial^2 x^b_B}{\partial x^h_A \partial x^k_A}\right]. \tag{3.20}$$

根据定义，$\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma} = \hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma} + i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma}$，结合式（3.20）可得

$$\left(\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}\right)_B = \sum_{h,k=1}^{2n} \frac{\partial x^h_A}{\partial x^{\alpha}_B}\frac{\partial x^k_A}{\partial x^{\gamma}_B}\left[\sum_{j=1}^{2n}\left(\hat{\Gamma}^{j}_{h;\,k}\right)_A \frac{\partial z^{\beta}_B}{\partial x^j_A} - \frac{\partial^2 z^{\beta}_B}{\partial x^h_A \partial x^k_A}\right]. \tag{3.21}$$

由于 z^{β}_B 在 $z^{\delta}_A = x^{\delta}_A + i x^{\delta^*}_A$ 中是全纯的，我们有

$$\frac{\partial z^{\beta}_B}{\partial x^{\delta}_A} = \frac{\partial z^{\beta}_B}{\partial z^{\delta}_A} \quad \text{and} \quad \frac{\partial z^{\beta}_B}{\partial x^{\delta^*}_A} = i\frac{\partial z^{\beta}_B}{\partial z^{\delta}_A}. \tag{3.22}$$

Thus

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2n}\left(\hat{\Gamma}^{j}_{h;\,k}\right)_A \frac{\partial z^{\beta}_B}{\partial x^j_A} &= \sum_{\delta=1}^{n}\left[\left(\hat{\Gamma}^{\delta}_{h;\,k}\right)_A \frac{\partial z^{\beta}_B}{\partial x^{\delta}_A} + \left(\hat{\Gamma}^{\delta^*}_{h;\,k}\right)_A \frac{\partial z^{\beta}_B}{\partial x^{\delta^*}_A}\right] \\ &= \sum_{\delta=1}^{n}\left[\left(\hat{\Gamma}^{\delta}_{h;\,k}\right)_A + i\left(\hat{\Gamma}^{\delta^*}_{h;\,k}\right)_A\right]\frac{\partial z^{\beta}_B}{\partial z^{\delta}_A}.\end{aligned}$$

利用（3.4），直接计算可得

$$\begin{aligned}&\sum_{h,k=1}^{2n}\frac{\partial x^h_A}{\partial x^{\alpha}_B}\frac{\partial x^k_A}{\partial x^{\gamma}_B}\sum_{\delta=1}^{n}\left[\left(\hat{\Gamma}^{\delta}_{h;\,k}\right)_A + i\left(\hat{\Gamma}^{\delta^*}_{h;\,k}\right)_A\right] \\ &= \sum_{\mu,\nu=1}^{n}\frac{\partial z^{\mu}_A}{\partial x^{\alpha}_B}\frac{\partial z^{\nu}_A}{\partial x^{\gamma}_B}\sum_{\delta=1}^{n}\left[\left(\hat{\Gamma}^{\delta}_{\mu;\,\nu}\right)_A + i\left(\hat{\Gamma}^{\delta^*}_{\mu;\,\nu}\right)_A\right] \\ &= \frac{\partial z^{\mu}_A}{\partial x^{\alpha}_B}\frac{\partial z^{\nu}_A}{\partial x^{\gamma}_B}\left(\mathcal{N}^{\delta}_{\mu;\,\nu}\right)_A.\end{aligned}$$

同理，

$$\sum_{h,k=1}^{2n}\frac{\partial x^h_A}{\partial x^{\alpha}_B}\frac{\partial x^k_A}{\partial x^{\gamma}_B}\frac{\partial^2 z^{\beta}_B}{\partial x^h_A \partial x^k_A} = \sum_{\mu,\nu=1}^{n}\frac{\partial z^{\mu}_A}{\partial x^{\alpha}_B}\frac{\partial z^{\nu}_A}{\partial z^{\gamma}_B}\frac{\partial^2 z^{\beta}_B}{\partial z^{\mu}_A \partial z^{\nu}_A}.$$

这就证明了（3.17）。将（3.17）与 $v_B^\alpha = v_A^\gamma \frac{\partial z_B^\alpha}{\partial z_A^\gamma}$ 收缩，得到（3.18）。

嘉当联络的垂直联络系数 $\hat{\Gamma}_{jk}^i$ 按如下方式变换 [1]

$$\left(\hat{\Gamma}_{ac}^b\right)_B = \sum_{h,k=1}^{2n} \frac{\partial x_A^h}{\partial x_B^a}\frac{\partial x_A^k}{\partial x_B^c}\left[\sum_{j=1}^{2n}\left(\hat{\Gamma}_{hk}^j\right)_A \frac{\partial x_B^b}{\partial x_A^j}\right].$$

利用 $\mathcal{N}_{\alpha\gamma}^\beta$ 在（3.14）中的定义，通过类似的论证可得（3.19）。 □

若对所有 $X \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$均有 $\nabla_X \boldsymbol{J} = 0$，则变换规则（3.17）表明$\mathcal{N}_{;\gamma}^{\beta}$ 是复非线性联络的系数。换言之，$\widetilde{\mathcal{H}}^{1,0}$是一个复水平丛，由 $\{\frac{\delta}{\delta z^1}, \cdots, \frac{\delta}{\delta z^n}\}$张成。现在我们定义

$$\delta v^\alpha = dv^\alpha + \mathcal{N}_{;\beta}^{\alpha} dz^\beta, \quad \alpha = 1, \cdots, n. \tag{3.23}$$

于是 $\{\delta v^\alpha\}$ 是对偶丛 $(\mathcal{V}^{1,0})^*$的一个局部标架。因此我们得到以下分解

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{C}}\tilde{M} &= \widetilde{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{V}_{\mathbb{C}} = \widetilde{\mathcal{H}}^{1,0} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}^{0,1} \oplus \mathcal{V}^{1,0} \oplus \mathcal{V}^{0,1}, \\ T_{\mathbb{C}}^*\tilde{M} &= \widetilde{\mathcal{H}}_{\mathbb{C}}^* \oplus \mathcal{V}_{\mathbb{C}}^* = (\widetilde{\mathcal{H}}^{1,0})^* \oplus (\widetilde{\mathcal{H}}^{0,1})^* \oplus (\mathcal{V}^{1,0})^* \oplus (\mathcal{V}^{0,1})^*. \end{aligned}$$

令 $\Theta_{\mathbb{C}}: \mathcal{V}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 为与 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \widetilde{\mathcal{H}}^{1,0} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}^{0,1}$相关联的复水平映射。局部地，

$$\Theta_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\right) = \frac{\delta}{\delta z^\alpha} \quad \text{and} \quad \Theta_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{v}^\alpha}\right) = \frac{\delta}{\delta \bar{z}^\alpha}, \quad \alpha = 1, \cdots, n.$$

令 $\hat{\Theta}: \mathcal{V}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 为实水平映射。由于 $^o: \mathcal{V}^{1,0} \to \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ 是一个 $\mathbb{R}$-同构，且 $\widetilde{\mathcal{H}}^{1,0}$ 是一个复水平丛，我们定义一个 $\mathbb{R}$-同构 $^\sharp: \widetilde{\mathcal{H}}^{1,0} \to \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 如下：

$$H^\sharp = \hat{\Theta}((\Theta_{\mathbb{C}}^{-1}(H))^o), \quad \forall H \in \widetilde{\mathcal{H}}^{1,0} \tag{3.24}$$

其逆映射 $^\sharp: \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \to \widetilde{\mathcal{H}}^{1,0}$ 定义如下：

$$H_\sharp = \Theta_{\mathbb{C}}((\hat{\Theta}^{-1}(H))_o), \quad \forall H \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}.$$

另一方面，$\mathcal{H}^{1,0}$ 是一个复水平丛；如 [1] 中所记，$\Theta: \mathcal{V}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 为与 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}^{1,0} \oplus \mathcal{H}^{0,1}$相关联的复水平映射。于是局部地

$$\Theta\left(\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\right) = \delta_\alpha \quad \text{and} \quad \Theta\left(\frac{\partial}{\partial \bar{v}^\alpha}\right) = \delta_{\bar{\alpha}}, \quad \alpha = 1, \cdots, n.$$

同样，我们可以定义一个 $\mathbb{R}$-同构 $^o: \mathcal{H}^{1,0} \to \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$，其定义为

$$H^o = \hat{\Theta}((\Theta^{-1}(H))^o), \quad \forall H \in \mathcal{H}^{1,0} \tag{3.25}$$

其逆映射为 $_o$: $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{H}^{1,0}$ ，定义为

$$H_o = \Theta((\hat{\Theta}^{-1}(H))_o), \quad \forall H \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}.$$

以下命题表明，如果 $\boldsymbol{J}$ 相对于 ∇是水平平行的，那么 $\boldsymbol{J}$ 与 $\hat{}\Theta$对易，且 $\sharp = _o$， $\sharp = ^o$。

命题 3 8 *Let F be a strongly convex complex Finsler: $T^{1,0}M \to [0,+\infty)$ metric on a complex manifold M. If $\nabla_X \boldsymbol{J} = 0$ for all $X \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ then*

$$\hat{\Theta} \circ \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J} \circ \hat{\Theta}, \quad \textit{and} \quad H^{\sharp} = H^o, \quad \forall H \in \widetilde{\mathcal{H}}^{1,0}.$$

Proof 事实上，

$$\hat{\Theta}\left(\boldsymbol{J}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}\right) = \hat{\Theta}\left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha^*}}\right) = \frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}} = \boldsymbol{J}\left(\hat{\Theta}\left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}\right)\right),$$
$$\hat{\Theta}\left(\boldsymbol{J}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha^*}}\right) = -\hat{\Theta}\left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}\right) = -\frac{\delta}{\delta x^{\alpha}} = \boldsymbol{J}\left(\hat{\Theta}\left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha^*}}\right)\right).$$

因此 $\hat{}\Theta$ 与 $\boldsymbol{J}$对易。

接下来，由于

$$\left(\frac{\delta}{\delta z^{\alpha}}\right)^{\sharp} = \hat{\Theta}\left(\left(\Theta_{\mathbb{C}}^{-1}\left(\frac{\delta}{\delta z^{\alpha}}\right)\right)^o\right) = \hat{\Theta}\left(\left(\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}\right)^o\right) = \hat{\Theta}\left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}\right) = \frac{\delta}{\delta x^{\alpha}},$$
$$\left(i\frac{\delta}{\delta z^{\alpha}}\right)^{\sharp} = \hat{\Theta}\left(\left(\Theta_{\mathbb{C}}^{-1}\left(i\frac{\delta}{\delta z^{\alpha}}\right)\right)^o\right) = \hat{\Theta}\left(\left(i\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}\right)^o\right) = \hat{\Theta}\left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha^*}}\right) = \frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}}.$$

或者等价地 y

$$\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha}}\right)_{\sharp} = \Theta_{\mathbb{C}}\left(\left(\hat{\Theta}^{-1}\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha}}\right)\right)_o\right) = \Theta_{\mathbb{C}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}\right)_o\right) = \Theta_{\mathbb{C}}\left(\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}\right) = \frac{\delta}{\delta z^{\alpha}},$$
$$\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}}\right)_{\sharp} = \Theta_{\mathbb{C}}\left(\left(\hat{\Theta}^{-1}\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}}\right)\right)_o\right) = \Theta_{\mathbb{C}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha^*}}\right)_o\right) = \Theta_{\mathbb{C}}\left(i\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}\right) = i\frac{\delta}{\delta z^{\alpha}}.$$

因此， $\sharp$ 和$\sharp$ 实际上分别是 ^{o} 和 $_o$ 在 $\widetilde{\mathcal{H}}^{1,0}$ 和 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$上的限制。

□

命题 3 9 *Let F be a strongly convex complex Finsler.: $T^{1,0}M \to [0,+\infty)$, metric on a complex manifold M. If $\nabla_X \boldsymbol{J} = 0$ for all $X \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ then*

$$\frac{\partial}{\partial \bar{v}^{\gamma}} \mathcal{N}^{\beta}_{;\alpha} \equiv 0, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma = 1, \cdots, n. \tag{3.26}$$

Proof 利用（2.5），（3.8）中的等式变为

$$\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha} = \frac{\partial \hat{\mathbb{G}}^{\beta}}{\partial y^{\alpha}} = \frac{\partial \hat{\mathbb{G}}^{\beta^*}}{\partial y^{\alpha^*}} = \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*}, \quad \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha} = \frac{\partial \hat{\mathbb{G}}^{\beta^*}}{\partial y^{\alpha}} = -\frac{\partial \hat{\mathbb{G}}^{\beta}}{\partial y^{\alpha^*}} = -\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*},$$

这意味着

$$\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}(\hat{\mathbb{G}}^{\beta} + i\hat{\mathbb{G}}^{\beta^*}) = -i\frac{\partial}{\partial y^{\alpha^*}}(\hat{\mathbb{G}}^{\beta} + i\hat{\mathbb{G}}^{\beta^*}), \tag{3.27}$$

或等价地

$$\frac{\partial}{\partial \bar{v}^{\alpha}}(\hat{\mathbb{G}}^{\beta}+i\hat{\mathbb{G}}^{\beta^*})=0. \tag{3.28}$$

由（3.27），可得

$$\mathcal{N}^{\beta}_{;\,\alpha}=\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha}+i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha}=\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}(\hat{\mathbb{G}}^{\beta}+i\hat{\mathbb{G}}^{\beta^*})=-i\frac{\partial}{\partial y^{\alpha^*}}(\hat{\mathbb{G}}^{\beta}+i\hat{\mathbb{G}}^{\beta^*}),$$

so

$$\mathcal{N}^{\beta}_{;\,\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}-i\frac{\partial}{\partial y^{\alpha^*}}\right)\left(\hat{\mathbb{G}}^{\beta}+i\hat{\mathbb{G}}^{\beta^*}\right)=\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}(\hat{\mathbb{G}}^{\beta}+i\hat{\mathbb{G}}^{\beta^*}). \tag{3.29}$$

于是（3 28）和（329）给出

$$\frac{\partial}{\partial \bar{v}^{\gamma}}\mathcal{N}^{\beta}_{;\,\alpha}=\frac{\partial^2}{\partial v^{\alpha}\partial \bar{v}^{\gamma}}(\hat{\mathbb{G}}^{\beta}+i\hat{\mathbb{G}}^{\beta^*})\equiv 0. \tag{3.30}$$

□

定理 3 10 *Let F be a strongly convex complex Finsler。: T^1. metric on a complex manifold M. If $\nabla \boldsymbol{J}=0$ then the extension $\nabla \quad \mathcal{X}\ \mathcal{V}_{\mathbb{C}} \rightarrow {}^0M \rightarrow [0,+\infty)$, : ( ) $\mathcal{X}(T^*_{\mathbb{C}}M\otimes\mathcal{V}_{\mathbb{C}})$ is a good complex vertical connection of type $(1,0)$ and we have*

$$\nabla_{\frac{\delta}{\delta z^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}=\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}\frac{\partial}{\partial v^{\beta}},\quad \nabla_{\frac{\delta}{\delta \bar{z}^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}=0$$

and

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial v^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}=\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha\gamma}\frac{\partial}{\partial v^{\beta}},\quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{v}^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}=0$$

and its conjugations.

Proof 注意到 $\nabla \boldsymbol{J}=0$ 意味着 $\nabla_X \boldsymbol{J}=0$ 对于任意 $X\in\mathcal{X}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ 。因此由推论 3.1，可得

$$\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*}=-\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha},\quad \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*}=\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha}$$

对于任意 $\alpha,\ \beta=1,\ \cdots,\ n$。这表明 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 是 $\boldsymbol{J}$-不变的。

将 ∇ 扩展到 $\mathcal{X}(\mathcal{V}_{\mathbb{C}})$（仍记为 ∇），如下所示:

$$\nabla_{X+iY}(V+iW):=\nabla_X V+i\nabla_X W+i\nabla_Y V-\nabla_Y W, \tag{3.31}$$

对于任意 $X,\ Y\in T_{\mathbb{R}}\tilde{M}$和 $V,\ W\in\mathcal{X}$（$\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$）。根据命题 3.4，有

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\delta}{\delta z^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}=&\frac{1}{4}\left(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*;\,\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma^*}-\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*;\,\gamma^*}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\\&+\frac{1}{4}\left(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma^*}-\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,\gamma^*}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}.\end{aligned}$$

利用$\hat{\Gamma}^{k}_{j;\,l}=\hat{}\Gamma^{k}_{l;\,j}$ 和 (3.1), 可得

$$\begin{aligned}\left(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}-i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,\gamma}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}\right)&=\left(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}-i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}\right)=2\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}\frac{\partial}{\partial v^{\beta}},\\\left(-i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*;\,\gamma}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}+\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}\right)&=\left(i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}+\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}\right)=2i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma}\frac{\partial}{\partial v^{\beta}},\\\left(-i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma^*}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}-\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,\gamma^*}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}\right)&=\left(i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma}+\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\gamma;\,\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}\right)=2i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma}\frac{\partial}{\partial v^{\beta}},\end{aligned}$$

$$\left(-\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*;\,\gamma^*}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}-i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma^*}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}\right)=\left(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma^*}\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}-i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\gamma;\,\alpha}\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}\right)=2\hat{\Gamma}^{\beta}_{\gamma;\,\alpha}\frac{\partial}{\partial v^{\beta}}.$$

Thus

$$\nabla_{\frac{\delta}{\delta z^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}=(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}+i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma})\frac{\partial}{\partial v^{\beta}}=\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}\frac{\partial}{\partial v^{\beta}}.$$

同理,

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\delta}{\delta\bar{z}^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}=&\frac{1}{4}\left(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*;\,\gamma}+i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma^*}+\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*;\,\gamma^*}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\\&+\frac{1}{4}\left(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,\gamma}+i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma^*}+\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,\gamma^*}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}.\end{aligned}$$

利用$\hat{\Gamma}^{k}_{j;\,l}=\hat{}\Gamma^{k}_{l;\,j}$和（3.1）再次可得

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}+\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*;\,\gamma^*}=0,\quad -\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*;\,\gamma}+\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma^*}=0,\\ \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma}+\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,\gamma^*}=0,\quad -\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,\gamma}+\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma^*}=0.\end{aligned}$$

Thus

$$\nabla_{\frac{\delta}{\delta\bar{z}^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}=0.$$

通过共轭运算，我们得到

$$\nabla_{\frac{\delta}{\delta\bar{z}^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial\bar{v}^{\alpha}}=\overline{\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}}\frac{\partial}{\partial\bar{v}^{\beta}},\quad \nabla_{\frac{\delta}{\delta z^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial\bar{v}^{\alpha}}=0.$$

同理,

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial v^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}=&\frac{1}{4}\left(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\gamma^*}-\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*\gamma^*}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\\&+\frac{1}{4}\left(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha\gamma^*}-\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*\gamma^*}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}.\end{aligned}$$

由于 $\nabla\boldsymbol{J}=0$ 还意味着 $\nabla_X\boldsymbol{J}=0$ 对于任意 $X\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$，利用等式$\hat{\Gamma}^{k}_{jl}=\hat{}\Gamma^{k}_{lj}$和（3.2），上式可简化为

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial v^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}=(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\gamma}+i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha\gamma})\frac{\partial}{\partial v^{\beta}}=\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha\gamma}\frac{\partial}{\partial v^{\beta}}.$$

最后,

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial\bar{v}^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}=&\frac{1}{4}\left(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*\gamma}+i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\gamma^*}+\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*\gamma^*}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\\&+\frac{1}{4}\left(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*\gamma}+i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha\gamma^*}+\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}.\end{aligned}$$

由于根据（3.2），可以验证

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\gamma}+\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*\gamma^*}=0,\quad -\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*\gamma}+\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\gamma^*}=0,\\ \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha\gamma}+\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*\gamma^*}=0,\quad -\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*\gamma}+\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha\gamma^*}=0.\end{aligned}$$

因此

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial\bar{v}^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}=0.$$

显然,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial\bar{v}^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial\bar{v}^{\alpha}}=\overline{\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha\gamma}}\frac{\partial}{\partial\bar{v}^{\beta}}\quad\text{and}\quad\nabla_{\frac{\partial}{\partial v^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial\bar{v}^{\alpha}}=0.$$

最后，$\nabla:\ \mathcal{X}(\mathcal{V}^{1,\,0})\to\mathcal{X}(T^*_{\mathbb{C}}\tilde{M}\otimes\mathcal{V}^{1,\,0})$是一个良好的复垂直联络，这由命题3.6立即得出。证明至此完成。□

定理 3.11 *Let F be a strongly convex complex Finsler metric on a complex manifold M. If $\nabla_X \boldsymbol{J} = 0$ for $X \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, then F must be a Kähler-Berwald metric.*

Proof 设 $V = \frac{1}{2}(X - i\boldsymbol{J}X)$ $W = \frac{1}{2}(Y - i\boldsymbol{J}Y)$ 其中 $X, Y \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$。由此可得 V, $W \in \mathcal{V}^{1,0}$并根据引理 2.1，可得

$$\langle V, W\rangle = 2\langle V|\overline{W}\rangle. \tag{3.32}$$

根据定理 2.3，嘉当联络的度量相容性 ∇ 意味着其自然扩张满足

$$Z\langle X|Y\rangle = \langle \nabla_Z X|Y\rangle + \langle X|\nabla_Z Y\rangle \tag{3.33}$$

对于任意满足 A 的 $Z = A + iB, B \in T_{\mathbb{R}}\tilde{M}$ 以及 $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{V}_{\mathbb{C}})$。

根据假设，对于所有 $X \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, $\nabla_X \boldsymbol{J} = 0$。因此，根据推论 3.1, $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 是 $\boldsymbol{J}$-不变的。因此，根据命题 3.4, $\frac{\delta}{\delta z^\alpha} = \frac{1}{2}(\frac{\delta}{\delta x^\alpha} - i\frac{\delta}{\delta x^{\alpha*}})$。将 $V = \frac{\partial}{\partial v^\beta}$, $\overline{W} = \frac{\partial}{\partial v^\gamma} \in \mathcal{V}^{1,0}$ 代入（3.32），再利用含有 $Z = \frac{\delta}{\delta z^\alpha} = \frac{1}{2}(\frac{\delta}{\delta x^\alpha} - i\frac{\delta}{\delta x^{\alpha*}}) \in \widetilde{\mathcal{H}}^{1,0}$的（3.33），可得

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta z^\alpha}\left\langle \frac{\partial}{\partial v^\beta}, \frac{\partial}{\partial v^\gamma}\right\rangle &= 2\frac{\delta}{\delta z^\alpha}\left\langle \frac{\partial}{\partial v^\beta}\middle| \frac{\partial}{\partial \bar{v}^\gamma}\right\rangle \\
&= 2\left\langle \nabla_{\frac{\delta}{\delta z^\alpha}}\frac{\partial}{\partial v^\beta}\middle| \frac{\partial}{\partial \bar{v}^\gamma}\right\rangle + 2\left\langle \frac{\partial}{\partial v^\beta}\middle| \nabla_{\frac{\delta}{\delta \bar{z}^\alpha}}\frac{\partial}{\partial \bar{v}^\gamma}\right\rangle \\
&= \left\langle \nabla_{\frac{\delta}{\delta z^\alpha}}\frac{\partial}{\partial v^\beta}, \frac{\partial}{\partial v^\gamma}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial v^\alpha}, \nabla_{\frac{\delta}{\delta \bar{z}^\alpha}}\frac{\partial}{\partial v^\gamma}\right\rangle.
\end{aligned}$$

这与定理 3.10 共同推出

$$\frac{\delta}{\delta z^\alpha}(G_{\beta\bar{\gamma}}) = \left\langle \mathcal{N}^\mu_{\beta;\,\alpha}\frac{\partial}{\partial v^\mu}, \frac{\partial}{\partial v^\gamma}\right\rangle = \mathcal{N}^\mu_{\beta;\,\alpha}G_{\mu\bar{\gamma}},$$

由此可得

$$\mathcal{N}^\mu_{\beta;\,\alpha} = G^{\bar{\gamma}\mu}\frac{\delta}{\delta z^\alpha}(G_{\beta\bar{\gamma}}) = G^{\bar{\gamma}\mu}\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha} - \mathcal{N}^\nu_{;\,\alpha}\frac{\partial}{\partial v^\nu}\right)(G_{\beta\bar{\gamma}}). \tag{3.34}$$

对（3.34）两边关于 v^β进行缩并，得到

$$\mathcal{N}^\mu_{;\,\alpha} = G^{\bar{\gamma}\mu}\frac{\partial}{\partial z^\alpha}(G_{\beta\bar{\gamma}})v^\beta = G^{\bar{\gamma}\mu}\frac{\partial^2 F^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{v}^\gamma} = \Gamma^\mu_{;\,\alpha},$$

其中使用了等式 $\frac{\partial}{\partial v^\nu}(G_{\beta\bar{\gamma}})v^\beta = 0$，且 $\Gamma^\mu_{;\,\alpha}$ 是由（F定义的复非线性联络系数（2.12）。将 $\Gamma^\mu_{;\,\alpha} = \mathcal{N}^\mu_{;\,\alpha}$ 代入（3.34），得到

$$\mathcal{N}^\mu_{\beta;\,\alpha} = G^{\bar{\gamma}\mu}\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha} - \Gamma^\nu_{;\,\alpha}\frac{\partial}{\partial v^\nu}\right)(G_{\beta\bar{\gamma}}) = \Gamma^\mu_{\beta;\,\alpha}, \tag{3.35}$$

其中 $\Gamma^\mu_{\beta;\,\alpha}$恰好是由（2.15）给出的 Chern-Finsler 联络的水平联络系数。根据注 3.5，我们已经有 $\mathcal{N}^\mu_{\beta;\,\alpha} = \mathcal{N}^\mu_{\alpha;\,\beta}$，因此$\Gamma^\mu_{\beta;\,\alpha} = \Gamma^\mu_{\alpha;\,\beta}$。也就是说，$F$ 必须是 K¨ahler-Finsler 度量。

接下来我们证明 F 实际上必定是 K¨ahler-Berwald 度量。根据命题 3.9 以及性质 $\Gamma^\mu_{;\,\alpha} = \mathcal{N}^\mu_{;\,\alpha}$，我们有

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{v}^\beta}\Gamma^\mu_{;\,\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^\beta} + i\frac{\partial}{\partial y^{\beta*}}\right)\Gamma^\mu_{;\,\alpha}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^{\beta}} + i\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}\right)\left(\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha} + i\hat{\Gamma}^{\mu^*}_{\alpha}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[(\hat{\mathbb{G}}^{\mu}_{\beta\alpha} - \hat{\mathbb{G}}^{\mu^*}_{\beta^*\,\alpha}) + i(\hat{\mathbb{G}}^{\mu^*}_{\beta\alpha} + \hat{\mathbb{G}}^{\mu}_{\beta^*\,\alpha})\right],
\end{aligned}
$$

其中 $\hat{\mathbb{G}}^{k}_{jl} = \frac{\partial^2 \mathbb{G}^{k}}{\partial y^{j}\partial y^{l}}$ 是与 F 相关的实 Berwald 联络系数。这意味着

$$
\hat{\mathbb{G}}^{\mu}_{\beta\alpha} = \hat{\mathbb{G}}^{\mu^*}_{\beta^*\,\alpha}, \quad \hat{\mathbb{G}}^{\mu^*}_{\beta\alpha} = -\hat{\mathbb{G}}^{\mu}_{\beta^*\,\alpha}. \tag{3.36}
$$

因此我们有

$$
\frac{\partial}{\partial \bar{v}^{\gamma}}\Gamma^{\mu}_{\beta;\,\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{v}^{\gamma}\partial v^{\beta}}\Gamma^{\mu}_{;\,\alpha} = \frac{\partial^2}{\partial v^{\beta}\partial \bar{v}^{\gamma}}\Gamma^{\mu}_{;\,\alpha} = 0.
$$

直接计算可得

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\mu}_{\beta;\,\alpha} = \frac{\partial}{\partial v^{\beta}}\Gamma^{\mu}_{;\,\alpha} &= \frac{\partial}{\partial v^{\beta}}\mathcal{N}^{\mu}_{;\,\alpha}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^{\beta}} - i\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}\right)\mathcal{N}^{\mu}_{;\,\alpha}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^{\beta}} - i\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}\right)\left(\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha} + i\hat{\Gamma}^{\mu^*}_{\alpha}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\hat{\mathbb{G}}^{\mu}_{\beta\alpha} + i\hat{\mathbb{G}}^{\mu^*}_{\beta\alpha} - i\hat{\mathbb{G}}^{\mu}_{\beta^*\,\alpha} + \hat{\mathbb{G}}^{\mu^*}_{\beta^*\,\alpha}\right]\\
&= \hat{\mathbb{G}}^{\mu}_{\beta\alpha} + i\hat{\mathbb{G}}^{\mu^*}_{\beta\alpha},
\end{aligned}
$$

其中在最后一个等式中我们使用了（3.44）。另一方面，我们有

$$
\Gamma^{\mu}_{\beta;\,\alpha} = \mathcal{N}^{\mu}_{\beta;\,\alpha} = \hat{\Gamma}^{\mu}_{\beta;\,\alpha} + i\hat{\Gamma}^{\mu^*}_{\beta;\,\alpha}.
$$

因此我们必有

$$
\hat{\Gamma}^{\mu}_{\beta;\,\alpha} = \hat{\mathbb{G}}^{\mu}_{\beta\alpha}, \quad \text{and} \quad \hat{\Gamma}^{\mu^*}_{\beta;\,\alpha} = \hat{\mathbb{G}}^{\mu^*}_{\beta\alpha}.
$$

这意味着，实 Berwald 联络系数与和 F 相关联的嘉当联络的水平联络系数一致。由于水平 Cartan 联络系数（与 Chern 联络系数相同）和实 Berwald 联络系数满足 $\hat{\Gamma}^{k}_{j;\,l} = \hat{\mathbb{G}}^{k}_{jl} - \dot{A}^{k}_{jl}$（见 [4] 第 39 页），因此可知 $\dot{A}^{k}_{jl} = 0$，故 F 必须是实 Landsberg度量。此外，强凸弱 K¨ahler-Finsler 度量是实Landsberg度量，当且仅当它是弱复 Berwald 度量 [9], ；而我们已经证明 F 是 K¨ahler-Finsler 度量，因此 F 必须是 K¨ahler-Berwald 度量。□

定理 3 12 *Let F be a strongly convex complex Finsler metric on a complex manifold M. Then $\nabla \boldsymbol{J} = 0$ iff the Cartan connection ∇ associated to F coincides with the Chern-Finsler connection D associated to F.*

。: $T^{1,0}M \to [0, +\infty)$

Proof 首先证明必要性。设 $\nabla \boldsymbol{J} = 0$。将 ∇ 延拓到 $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$，则由定理 3 10, $\nabla \quad \mathcal{X} \quad \to$.可得一个良好的复垂直联络: $(\mathcal{V}^{1,0}, (T^{*}_{\mathbb{C}}\tilde{M} \otimes \mathcal{V}^{1,0}))$，其类型为 $(1, 0)$，满足

$$
\nabla_{\frac{\delta}{\delta z^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}} = \mathcal{N}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}\frac{\partial}{\partial v^{\beta}}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{v}^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}} = \mathcal{N}^{\beta}_{\alpha\gamma}\frac{\partial}{\partial v^{\beta}}.
$$

由于 $\nabla \boldsymbol{J}=0$ 蕴含 $\nabla_X \boldsymbol{J}=0$ 对所有 $X \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$成立，因此由定理 3.11可得 $\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}=\Gamma^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}$。接下来证明 $\mathcal{N}^{\beta}_{\alpha\gamma}=\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}$。利用（3.32）和（3.33），可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}\left\langle \frac{\partial}{\partial v^{\beta}},\frac{\partial}{\partial v^{\gamma}}\right\rangle &= 2\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}\left\langle \frac{\partial}{\partial v^{\beta}}\Big|\frac{\partial}{\partial \bar{v}^{\gamma}}\right\rangle\\ &= 2\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial v^{\beta}}\Big|\frac{\partial}{\partial \bar{v}^{\gamma}}\right\rangle+\left\langle \frac{\partial}{\partial v^{\beta}}\Big|\nabla_{\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial \bar{v}^{\gamma}}\right\rangle\\ &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial v^{\beta}},\frac{\partial}{\partial v^{\gamma}}\right\rangle+\left\langle \frac{\partial}{\partial v^{\alpha}},\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{v}^{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial v^{\gamma}}\right\rangle.\end{aligned}$$

再次利用定理3.10，上面的等式化简为

$$\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}(G_{\beta\bar{\gamma}})=\left\langle \mathcal{N}^{\mu}_{\beta\alpha}\frac{\partial}{\partial v^{\mu}},\frac{\partial}{\partial v^{\gamma}}\right\rangle=\mathcal{N}^{\mu}_{\beta\alpha}G_{\mu\bar{\gamma}}.$$

因此，

$$\mathcal{N}^{\mu}_{\beta\alpha}=G^{\bar{\gamma}\mu}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}(G_{\beta\bar{\gamma}})=\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}, \tag{3.37}$$

它们恰好是与 F 相关联的 Chern-Finsler 联络的垂直联络系数。因此，$\nabla\colon \mathcal{X}(\mathcal{V}^{1,\,0})\to\mathcal{X}(T^{*}_{\mathbb{C}}\tilde{M}\otimes\mathcal{V}^{1,\,0})$ 与和 F 相关联的 Chern-Finsler 联络 D 重合。

接下来证明充分性。根据定理3.1，只需证明 (3.1) 和 (3.2) 成立。根据假设，嘉当联络 ∇ 与 Chern-Finsler联络 D 重合，因此与 ∇ 相关联的实非线性联络 ∇ 和与 D 相关联的复非线性联络 $\tilde{D}$ 重合。换言之，设 $\xi\in\mathcal{X}(T^{1,\,0}M)$ 是一个全纯向量场，且 $w\in T^{1,\,0}_{p}M$ 满足 $\eta_o=\xi$ 和 $u_o=w$，则在点 p 处，我们有

$$(\tilde{D}_w\xi)(p)=((\tilde{\nabla}_u\eta)_o)(p), \tag{3.38}$$

这意味着

$$\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha}=\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*},\quad \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha}=-\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*} \tag{3.39}$$

and

$$\mathcal{N}^{\beta}_{;\,\alpha}=\Gamma^{\beta}_{;\,\alpha}=\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha}+i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha}. \tag{3.40}$$

注意，（3.39）意味着 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 是 $\boldsymbol{J}$不变的，因此复水平丛$\widetilde{\mathcal{H}}^{1,\,0}$由 $\{\frac{\delta}{\delta z^1},\cdots,\frac{\delta}{\delta z^n}\}$张成，实际上与 $\mathcal{H}^{1}$相重合，^{0}即 $\frac{\delta}{\delta z^{\alpha}}=\delta_{\alpha}$对于 $\alpha=1,\ \cdots,\ n$。因此，根据命题 3.4，我们有

$$\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha}}\right)_o=\frac{\delta}{\delta z^{\alpha}}=\delta_{\alpha}\quad\text{and}\quad\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}}\right)_o=i\frac{\delta}{\delta z^{\alpha}}=i\delta_{\alpha}. \tag{3.41}$$

因此

$$\begin{aligned}0 &= D_{\delta_{\bar{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}=\nabla_{\frac{\delta}{\delta\bar{z}^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}\\ &= \frac{1}{2}\left(\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}+i\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^{\gamma^*}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}-i\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha^*}}+i\left(\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^{\gamma^*}}}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}-i\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^{\gamma^*}}}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha^*}}\right)\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*;\,\gamma}+i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma^*}+\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*;\,\gamma^*}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\\ &\quad+\frac{1}{4}\left(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,\gamma}+i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma^*}+\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,\gamma^*}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}},\end{aligned}$$

这意味着

$$\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}=-\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*;\,\gamma^*},\quad \hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*;\,\gamma}=\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma^*}, \tag{3.42}$$

$$\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma}=-\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,\gamma^*},\quad \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,\gamma}=\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma^*}. \tag{3.43}$$

利用（3.42）和（3.43），可得

$$\begin{aligned}\Gamma^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}\frac{\partial}{\partial v^{\beta}} &= D_{\delta_\gamma}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}=\nabla_{\frac{\delta}{\delta z^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}\\ &=\frac{1}{4}\left(\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}-i\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha^*}}-i\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^{\gamma^*}}}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}-\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^{\gamma^*}}}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha^*}}\right)\\ &=\frac{1}{4}\left(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*;\,\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma^*}-\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*;\,\gamma^*}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\\ &\quad+\frac{1}{4}\left(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma^*}-\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,\gamma^*}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}\\ &=\frac{1}{2}\left(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*;\,\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}+\frac{1}{2}\left(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}},\end{aligned}$$

这意味着

$$\mathrm{Re}\Gamma^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}=\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}=\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,\gamma},\quad \mathrm{Im}\Gamma^{\beta}_{\alpha;\,\gamma}=-\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha^*;\,\gamma}=\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,\gamma}.$$

因此，我们得到（3.1）。

同理，可得

$$\begin{aligned}0 &= D_{\frac{\partial}{\partial\bar{v}^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}=\nabla_{\frac{\partial}{\partial\bar{v}^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}\\ &=\frac{1}{4}(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*\gamma}+i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\gamma^*}+\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*\gamma^*})\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\\ &\quad+\frac{1}{4}(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*\gamma}+i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha\gamma^*}+\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*\gamma^*})\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\gamma}=-\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*\gamma^*},\quad \hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*\gamma}=\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\gamma^*},\quad \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha\gamma}=-\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*\gamma^*},\quad \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*\gamma}=\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha\gamma^*}. \tag{3.44}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}\frac{\partial}{\partial v^{\beta}} &= D_{\frac{\partial}{\partial\bar{v}^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}=\nabla_{\frac{\partial}{\partial\bar{v}^{\gamma}}}\frac{\partial}{\partial v^{\alpha}}\\ &=\frac{1}{4}(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\gamma^*}-\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*\gamma^*})\frac{\partial}{\partial y^{\beta}}\\ &\quad+\frac{1}{4}(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*\gamma}-i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha\gamma^*}-\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*\gamma^*})\frac{\partial}{\partial y^{\beta^*}},\end{aligned}$$

这与（3.44）结合起来可推出

$$\mathrm{Re}\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}=\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha\gamma}=\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*\gamma},\quad \mathrm{Im}\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}=-\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*\gamma}=\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha\gamma}. \tag{3.45}$$

因此得到（3.2）。至此，证明完毕。 □

定理 3 13 *Let F be a strongly convex Kähler-Berwald。: T^1, metric on a complex manifold M. Then $\nabla_X \boldsymbol{J}=0$ for all $X\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$.*
$^0M\ \to\ [0,+\infty)$

Proof 由于 F 是一个 K¨ahler-Berwald 度量，根据 [15]， $\mathbb{G}^{\mu}$ 相对于 v 和 $\mathbb{G}^{\mu}=\hat{}$ $\mathbb{G}^{\mu}+i\hat{}\mathbb{G}^{\mu^*}$是全纯。因此

$$\begin{aligned}0=\frac{\partial\mathbb{G}^{\mu}}{\partial\bar{v}^{\alpha}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^{\alpha}}+i\frac{\partial}{\partial y^{\alpha^*}}\right)\left(\hat{\mathbb{G}}^{\mu}+i\hat{\mathbb{G}}^{\mu^*}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha}+i\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha}{}^{*}+i\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha^*}-\hat{\Gamma}^{\mu^*}_{\alpha^*}\right),\end{aligned}$$

由此得到

$$\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha}=\hat{\Gamma}^{\mu^*}_{\alpha^*},\quad \hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha}{}^{*}=-\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha^*}. \tag{3.46}$$

对（3.46）求导，得到

$$\hat{\mathbb{G}}^{\mu}_{j\alpha}=\hat{\mathbb{G}}^{\mu^*}_{j\alpha^*},\quad \hat{\mathbb{G}}^{\mu^*}_{j\alpha}=-\hat{\mathbb{G}}^{\mu}_{j\alpha^*}.$$

由 [16], 定理1.2可知，强凸 K¨ahler-Berwald 度量必为实 Berwald 度量，因此也是实 Landsberg度量 [14]。因此 $\dot{A}^{k}_{jl}=0$，这意味着 $\hat{}\mathbb{G}^{k}_{jl}=\hat{}\Gamma^{k}_{j;\,l}$。也就是说，（3.1）中的等式成立。因此 $\nabla_X\boldsymbol{J}=0$ 对所有 $X\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$均成立。

□

设 $\Theta:\ \mathcal{V}^{1,\ 0}\to\mathcal{H}^{1,\ 0}$ 表示与 $\mathcal{H}^{1,\ 0}$ 相关联的复水平映射，并设 $\hat{}\ \Theta:$ $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}\to\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 表示与 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 相关联的实水平映射。由于$^{o}:\ \mathcal{V}^{1,\ 0}\to\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ 是一个 $\mathbb{R}$-同构，因此我们得到一个 $\mathbb{R}$-同构$\hat{}:\ \mathcal{H}^{1,\ 0}\to\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 其定义为

$$\hat{H}=\hat{\Theta}((\Theta^{-1}(H))^{o}),\quad \forall H\in\mathcal{H}^{1,0}.$$

注意，$\widehat{\delta_{\alpha}}=\frac{\delta}{\delta x^{\alpha}}$和 $\widehat{i\delta_{\alpha}}=\frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}}$。

Let

$$\hat{\chi}=y^{j}\frac{\delta}{\delta x^{j}}=y^{j}\left(\frac{\partial}{\partial x^{j}}-\hat{\Gamma}^{k}_{j}\frac{\partial}{\partial y^{k}}\right)\quad\text{and}\quad \chi=v^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial z^{\alpha}}-\Gamma^{\beta}_{;\,\alpha}\frac{\partial}{\partial v^{\beta}}\right)$$

分别表示与$\hat{}F$相关的实径向水平向量场和复径向水平向量场。令 Ω 和 Ω 分别表示与 F相关的 Car- tan 联络 ∇ 和 Chern-Finsler 联络 D 的曲率算子。

利用 Abate和Patrizio 在 [1], 第 2.6 节中建立的一些已知结果，我们现在能够得到以下定理，它揭示了强凸 K¨ahler-Berwald 度量的特殊性质。

定理 3 14 *Let F be a strongly convex Kähler-Berwald: $T^{1,\ 0}M\to[0,+\infty)$ . . . metric on a complex manifold M. Then for all $H\in\mathcal{H}^{1\ 0}$ and $V\in\mathcal{V}^{1\ 0}$ we have*

(1) $\chi^{o}=\hat{}\chi;\ \hat{}$(2) Θ commutes with $\boldsymbol{J}$;(3) $(\boldsymbol{J}H)^{o}=\boldsymbol{J}H^{o}$;
(4) $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ is $\boldsymbol{J}$-invariant;(5) $H=(H^{o})_{o}$;
(6) $\Gamma^{\beta}_{;\,\alpha}=\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha}+i\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha}$;(7) $\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha}}\right)^{o}=\frac{\delta}{\delta z^{\alpha}}$ and $\left(\frac{\delta}{\delta x^{\alpha^*}}\right)_{o}=i\frac{\delta}{\delta z^{\alpha}}$;

(8)

$$\hat{\Gamma}^{b}_{a}=\begin{cases} Re\Gamma^{\beta}_{;\,\alpha}, & if\ \ 1\leq a,b\leq n,\\ Im\Gamma^{\beta}_{;\,\alpha}, & if\ \ 1\leq a\leq n\ \ and\ \ n+1\leq b\leq 2n,\\ -Im\Gamma^{\beta}_{;\,\alpha}, & if\ \ n+1\leq a\leq 2n\ \ and\ \ 1\leq b\leq n,\\ Re\Gamma^{\beta}_{;\,\alpha}, & if\ \ n+1\leq a,b\leq 2n. \end{cases}$$

(9) $\nabla_{\hat{\chi}}V^{o}=(\nabla_{\chi^{o}}V)^{o}$;
(10) $\nabla_{\hat{H}}V^{o}=(\nabla_{H^{o}}V)^{o}$;
(11) $\langle\hat{\Omega}(\hat{\chi},\hat{H})\hat{H}|\hat{\chi}\rangle=\langle(\Omega(H,\overline{\chi})\chi)^{o}|H^{o}\rangle-\langle(\Omega(\chi,\overline{H})\chi)^{o}|H^{o}\rangle$;
(12) $\Gamma^{\beta}_{\gamma;\,\alpha}=\hat{\Gamma}^{\beta}_{\gamma;\,\alpha}+i\hat{\Gamma}^{\beta^{*}}_{\gamma;\,\alpha}$;
(13) $\nabla_{X}\boldsymbol{J}=0$ *for any* $X\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$;
(14) $\langle\hat{\Omega}(\hat{\chi},\widehat{\boldsymbol{J}\chi})\widehat{\boldsymbol{J}\chi}|\hat{\chi}\rangle=2\langle\Omega(\chi,\overline{\chi})\chi,\chi\rangle$.

Proof 断言 (1) 由 [1] 中的命题2.6.2推出。
断言 (5) 由 [1], 中的定理2.6.4 得出，它与 [1] 中的命题2.6.3 一起蕴含断言 (2)–(4) 和 (6)–(8)。

断言 (9) 由 [1]中的定理2.6.6 得出。
断言 (10) 由 [1] 中的定理2.6.8 得出，因为根据断言 (5)，我们有 $\hat{}H=H^{o}$。

断言 (11) 由 [1]中的定理2.6.9 得出。由于对于 K¨ahler-Berwald 度量，我们有 $\partial\Gamma^{\alpha}_{;\,\partial\bar{\upsilon}\gamma^{\mu}}=0$，因此 $\left(\nabla_{\chi\tau^{\mathcal{H}}}\right)(\chi,W)=0$。因此$\left(\left(\nabla_{\chi}\tau^{\mathcal{H}}\right)(\overline{\chi},\Theta^{-1}(H))\right)^{o}=0$ 对于任意 $H\in\overline{\mathcal{H}^{1,0}}$。

断言 (12) 由定理 3.1得出。
断言 (13) 由定理 3.13得出。
将 $H=\boldsymbol{J}\chi=i\chi$ 代入断言 (11)，得到

$$\langle\hat{\Omega}(\hat{\chi},\widehat{\boldsymbol{J}\chi})\widehat{\boldsymbol{J}\chi}|\hat{\chi}\rangle=\langle(\Omega(i\chi,\overline{\chi})\chi)^{o}|(i\chi)^{o}\rangle-\langle(\Omega(\chi,\overline{i\chi})\chi)^{o}|(i\chi)^{o}\rangle.$$

这与 (2.19) 一起推出

$$\begin{aligned}\langle\hat{\Omega}(\hat{\chi},\widehat{\boldsymbol{J}\chi})\widehat{\boldsymbol{J}\chi}|\hat{\chi}\rangle &= \mathrm{Re}[\langle\Omega(i\chi,\overline{\chi})\chi,i\chi\rangle-\langle\Omega(\chi,\overline{i\chi})\chi,i\chi\rangle]\\ &= \mathrm{Re}[\langle\Omega(\chi,\overline{\chi})\chi,\chi\rangle+\langle\Omega(\chi,\overline{\chi})\chi,\chi\rangle]\\ &= 2\langle\Omega(\chi,\overline{\chi})\chi,\chi\rangle\end{aligned}$$

其中我们用到了 $\langle\langle\cdot,\chi\rangle\rangle=0$ 和 $\langle\Omega(\chi,\chi)\chi,\chi\rangle$ 是实值的这一事实。 □

命题 **3 15** *Let* $\Phi=-iG_{\alpha\bar{\beta}}dz^{\alpha}\wedge d\bar{z}^{\beta}$ *be the fundamental form of a strongly*.:,) *convex complex Finsler metric* $F\quad T^{1\,0}M\to[0,+\infty$ *on a complex manifold* M.(),,*then Then* Φ *is a real horizontal* $1,1$ *-form on* $\tilde{M}$. *If moreover* $\nabla_{X}\boldsymbol{J}=0$ *for any* $X\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$

$$\Phi(X,Y)=\langle X|\boldsymbol{J}Y\rangle-\langle\boldsymbol{J}X|Y\rangle \tag{3.47}$$

for any $X,Y\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$.

Proof 显然，Φ 是 $\tilde{M}$上的实（1，1）形式。若对所有 $X\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$都有 $\nabla_{X}\boldsymbol{J}\equiv 0$，则$\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 是 $\boldsymbol{J}$-不变的，并由定理3.14中的断言（5），可得对任意$H\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$，$H=(H_{o})^{o}$，即 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}\cong\mathcal{H}^{1,\,0}$。因此

$$\Phi(X,Y)=-iG_{\alpha\bar{\beta}}dz^{\alpha}\wedge d\bar{z}^{\beta}(V+\overline{V},W+\overline{W})$$

$$
\begin{aligned}
&= -i\left(G_{\alpha\bar{\beta}}V^{\alpha}\overline{W}^{\beta} - G_{\alpha\bar{\beta}}W^{\alpha}\overline{V}^{\beta}\right)\\
&= -i\left[\langle V,W\rangle - \overline{\langle V,W\rangle}\right]\\
&= 2\mathrm{Im}\langle V,W\rangle.
\end{aligned}
$$

对于 $V=\frac{1}{2}(X-i\boldsymbol{J}X)=X_o$和 $W=\frac{1}{2}(Y-i\boldsymbol{J}Y)=Y_o\in\mathcal{H}^{1,0}$，其中 $X,\ Y\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$。由于 b

y 引理 2.1 ，我们还有

$$\langle V,W\rangle = 2\langle V|\overline{W}\rangle = \frac{1}{2}\left\{\langle X|Y\rangle + \langle JX|JY\rangle + i\left[\langle X|\boldsymbol{J}Y\rangle - \langle \boldsymbol{J}X|Y\rangle\right]\right\},$$

这就完成了证明。 □

对于强凸复 Finsler 流形 $(M,\ F)$，记 $d\colon \wedge^k\tilde{M}\to\wedge^{k+1}\tilde{M}$ $\tilde{M}$ 上的外微分算子。则

$$d = d_H + d_V,\quad d_H = dx^j\wedge\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^j}},\quad d_V = \delta y^j\wedge\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^j}}, \tag{3.48}$$

其中，∇ 是 F的嘉当联络。如果记

$$\partial_H = dz^{\alpha}\wedge D_{\delta_{\alpha}},\ \bar{\partial}_H = d\bar{z}^{\alpha}\wedge D_{\delta_{\bar{\alpha}}},\ \partial_V = \psi^{\gamma}\wedge D_{\frac{\partial}{\partial v^{\gamma}}},\ \bar{\partial}_V = \bar{\psi}^{\gamma}\wedge D_{\frac{\partial}{\partial\bar{v}^{\gamma}}}, \tag{3.49}$$

其中，D是 F的 Chern-Finsler 联络，那么一般而言，$d_H\neq\partial_H+\partial_H$，因为嘉当联络 ∇通常不一定与 Chern-Finsler 联络 D重合。

命题 **3 16** *Let d_H d_V ∂_H $\bar{\partial}_H$ ∂_V $\bar{\partial}_V$ be defined by 3 48 and。,,,,(.), respectively. If $\nabla_X\boldsymbol{J}=0$ for all $X\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ then*

$$d_H = \partial_H + \bar{\partial}_H,\quad d_V = \partial_V + \bar{\partial}_V. \tag{3.50}$$

Proof 根据假设，F必为 K¨ahler-Berwald 度量，因此 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 是 $\boldsymbol{J}$-不变的，且 $\widetilde{\mathcal{H}}^{1,0}=\mathcal{H}^{1,0}$。□

定理 **3 17** *Let F be a strongly convex complex Finsler。: $T^{1,0}M\to[0,+\infty)$ metric on a complex manifold M. If $\nabla_X\boldsymbol{J}=0$ for all $X\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ then*

,

(1) 对所有 $X\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$，$\nabla_X\Phi=0$；

(2) $d_H\Phi=0$，即 Φ 是 d_H-闭的。

Proof（1）设 H，X，$Y\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$。由命题 3.15，

$$
\begin{aligned}
(\nabla_H\Phi)(X,Y) &= H\Phi(X,Y) - \Phi(\nabla_H X,Y) - \Phi(X,\nabla_H Y)\\
&= H\langle X|\boldsymbol{J}Y\rangle - H\langle \boldsymbol{J}X|Y\rangle - \langle\nabla_H X|\boldsymbol{J}Y\rangle + \langle\boldsymbol{J}(\nabla_H X)|Y\rangle\\
&\quad -\langle X|\boldsymbol{J}(\nabla_H Y)\rangle + \langle\boldsymbol{J}X|\nabla_H Y\rangle.
\end{aligned}
$$

由于嘉当联络是水平度量，即 $H\langle X|Y\rangle = \langle\nabla_H X|Y\rangle + \langle X|\nabla_H Y\rangle$，上述等式变为

$$(\nabla_H\Phi)(X,Y) = \langle X|\nabla_H(\boldsymbol{J}Y)\rangle - \langle\nabla_H(\boldsymbol{J}X)|Y\rangle + \langle\boldsymbol{J}(\nabla_H X)|Y\rangle - \langle X|\boldsymbol{J}(\nabla_H Y)\rangle.$$

由于 $\nabla_H \boldsymbol{J}=0$，我们有

$$\begin{aligned}&\langle X|\nabla_H(\boldsymbol{J}Y)\rangle-\langle\nabla_H(\boldsymbol{J}X|Y\rangle+\langle\boldsymbol{J}(\nabla_H X)|Y\rangle-\langle X|\boldsymbol{J}(\nabla_H Y)\rangle\\=&\langle X|\boldsymbol{J}(\nabla_H Y)\rangle-\langle\boldsymbol{J}(\nabla_H X)|Y\rangle+\langle\boldsymbol{J}(\nabla_H X)|Y\rangle-\langle X|\boldsymbol{J}(\nabla_H Y)\rangle\\=&0.\end{aligned}$$

因此，对于任意 $H\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$， $\nabla_H\Phi=0$。

(2) 令 $X_1,X_2,X_3\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$。则

$$\begin{aligned}(d_H\Phi)(X_1,X_2,X_3)=&X_1(\Phi(X_2,X_3))-X_2(\Phi(X_1,X_3))+X_3(\Phi(X_1,X_2))\\&-\Phi([X_1,X_2],X_3)+\Phi([X_1,X_3],X_2)-\Phi([X_2,X_3],X_1).\end{aligned}$$

利用 $\nabla_{X_j}\Phi=0$，可得

$$\begin{aligned}(d_H\Phi)(X_1,X_2,X_3)=&\Phi(\nabla_{X_1}X_2-\nabla_{X_2}X_1,X_3)-\Phi(\nabla_{X_1}X_3-\nabla_{X_3}X_1,X_2)\\&+\Phi(X_1,\nabla_{X_3}X_2-\nabla_{X_2}X_3)\\&-\Phi([X_1,X_2],X_3)+\Phi([X_1,X_3],X_2)-\Phi([X_2,X_3],X_1).\end{aligned}$$

由于 $\theta(X_j,X_k)=\nabla_{X_j}X_k-\nabla_{X_k}X_j-[X_j,X_k]$，且 $\theta(X_j,X_k)\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$，而 Φ 是水平的，因此得到 $(d_H\Phi)(X_1,X_2,X_3)=0$。因此， $d_H\Phi=0$。□

Remark 3.18 该算子 d_H 与 [1], 第 95 页定义的算子$d_H\Phi=0$ 并不相同，其中 F 等价于¨为 Kähler-芬斯勒度量。定理3.17 的逆命题未必成立。然而，迄今为止，文献中所有明确给出的 K¨ähler-芬斯勒度量 [5, 8, 11, 17, 18] 都已被证明是 K¨ähler-Berwald 度量。是否存在不是 K¨ähler-Berwald 度量的 Kähler-芬斯勒度量¨，仍是一个尚未解决的问题。

定理 3.19 *Let* $F:\ T^{1,0}M\to[0,+\infty)$ *be a strongly convex weakly Kähler-Finsler metric on a complex manifold* M *and* $\sigma:\ [0,1]\to M$ *a smooth regular curve in* M*. Then the following assertions are equivalent:*

(1) F 是强凸的 *K¨ahler-Berwald* 度量；*(2)* 复化向量在 $T_{\mathbb{R}}M$ 中的类型在关于 ∇ 沿 σ 平行移动时保持不变；*(3)* 对于关于 ∇ 沿 σ 平行的任意平行实向量场 V， JV 也关于 ∇ 沿 σ 平行；*(4)* 对所有 $X\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$， $\nabla_X\boldsymbol{J}\equiv 0$；

Proof (1)⇒(2)：只需证明，类型为 (1, 0) 的复化切向量在关于 ∇ 沿 σ 平行移动时保持不变。设 $\xi^{1,0}(0)$ 是 $\sigma(0)$ 处一个类型为 (1, 0) 的复化切向量，也就是说，存在一个实切向量 ξ_0，使得在 $\sigma(0)$ 处有 $\xi^{1,0}(0)=\frac{1}{2}(\xi_0-iJ\xi_0)$。设 ζ 是 $\xi^{1,0}(0)$ 关于 ∇ 沿 σ 的平行移动。记 $\zeta=\zeta^{1,0}+\zeta^{0,1}$，其中 $\zeta^{1,0}$ 和 $\zeta^{0,1}$ 分别表示 ζ 的 (1, 0) 部分和 (0, 1) 部分。只需证明 $\zeta^{1,0}=\zeta$ 且 $\zeta^{1,0}(0)=\xi^{1,0}(0)$，也就是说， $\zeta^{0,1}$ 沿 σ。

为此，令 $V=V^j(t)\frac{\partial}{\partial x^j}$ 为相对于−∇ 沿 σ 的 ξ_0 平行移动，使得 $V(0)=\xi_0$，即

$$\frac{dV^k}{dt}+V^l\hat{\Gamma}^k_{l;\,j}(\sigma(t);\,\dot{\sigma}(t))\dot{\sigma}^j=0. \tag{3.51}$$

令 $JV = U^k(t)\frac{\partial}{\partial x^k}$。下面我们将证明，相对于 ∇，JV 沿 σ 也为平行的。显然，

$$U^\beta(t) = -V^{\beta^*}(t), \quad U^{\beta^*}(t) = V^\beta(t). \tag{3.52}$$

根据假设，F 是一个强凸 Kähler-Berwald 度量。因此，根据定理 3.13，$\nabla_X \boldsymbol{J} = 0$ 对所有 $X \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$。因此，根据定理 3.1，水平 Cartan 联络系数 $\hat{\Gamma}^l_{j;\,k}$ 满足（3.1），即

$$\hat{\Gamma}^\beta_{\alpha^*;\,j} = -\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,j}, \quad \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,j} = \hat{\Gamma}^\beta_{\alpha;\,j}. \tag{3.53}$$

注意到

$$\frac{\boldsymbol{D}U^k}{dt} = \frac{dU^k}{dt} + U^l\hat{\Gamma}^k_{l;\,j}(\sigma(t);\,\dot\sigma(t))\dot\sigma^j(t).$$

这与（351）-（353）共同表明

$$\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{D}U^\beta}{dt} &= \frac{dU^\beta}{dt} + U^l\hat{\Gamma}^\beta_{l;\,j}(\sigma(t);\,\dot\sigma(t))\dot\sigma^j(t)\\ &= -\frac{dV^{\beta^*}}{dt} - V^{\alpha^*}\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,j}(\sigma(t);\,\dot\sigma(t))\dot\sigma^j(t) - V^{\alpha}\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,j}\dot\sigma^j(t)\\ &= -\frac{dV^{\beta^*}}{dt} - V^l\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{l;\,j}(\sigma(t);\,\dot\sigma(t))\dot\sigma^j(t) = 0.\end{aligned}$$

根据类似的理由，我们有 $\frac{\boldsymbol{D}U^{\beta^*}}{dt} = 0$。因此，$JV$ 沿着 σ 关于 ∇也是平行的，即

$$\frac{\boldsymbol{D}U^k}{dt} = \frac{dU^k}{dt} + U^l\hat{\Gamma}^k_{l;\,j}(\sigma(t);\,\dot\sigma(t))\dot\sigma^j(t) = 0. \tag{3.54}$$

因此，$W = \frac{1}{2}(V - iJV)$ 关于 ∇ 沿 $\frac{1}{2}V^0 - iJV^0 = \frac{1}{2}\xi_0 - iJ\xi_0 = \zeta^{1\,0}$ $\zeta \equiv W$ $\zeta^{1\,0} \equiv 0$ σ 平行。

由于 $W(0)$ ( ) ( ) ( ) . ( )。因此，即 . 沿 。

(2) $\Rightarrow$ (3)：设 V 是关于 ∇ 沿 σ 平行的实向量场。记 $V = V^{1,0} + V^{0,1}$，其中 $V^{1,0} = \frac{1}{2}(V - iJV)$ 且 $V^{0,1} = \frac{1}{2}(V + iJV)$。令 W_1 和 W_2 分别为 $V^{1,0}(0)$ 和 $V^{0,1}(0)$ 关于 ∇ 沿 σ 的平行移动。由断言 (2)，W_1 和 W_2 分别是沿 σ 的 (1, 0) 型和 (0, 1) 型向量场，并且 $W = W_1 + W_2$ 关于 ∇ 沿 σ 平行。由于 $W(0) = W_1(0) + W_2(0) = V^{1,0}(0) + V^{0,1}(0) = V(0)$，因此 $W \equiv V$, $W_1 = V^{1,0}$ 和 $W_2 = V^{0,1}$ 沿 σ。故 $JV = J(V^{1,0} + V^{0,1}) = i(V^{1,0} - V^{0,1})$ 也关于 ∇ 沿 σ 平行。

(3) $\Rightarrow$ (4)：假设 $V = V^k(t)\frac{\partial}{\partial x^k}$ 和 $JV = U^k(t)\frac{\partial}{\partial x^k}$ 沿着 σ 相对于 ∇平行。于是由 (3.51) 可得

$$\frac{dV^\beta}{dt} + V^\alpha\hat{\Gamma}^\beta_{\alpha;\,j}(\sigma(t);\,\dot\sigma(t))\dot\sigma^j + V^{\alpha^*}\hat{\Gamma}^\beta_{\alpha^*;\,j}(\sigma(t);\,\dot\sigma(t))\dot\sigma^j = 0, \tag{3.55}$$

$$\frac{dV^{\beta^*}}{dt} + V^\alpha\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,j}(\sigma(t);\,\dot\sigma(t))\dot\sigma^j + V^{\alpha^*}\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,j}(\sigma(t);\,\dot\sigma(t))\dot\sigma^j = 0. \tag{3.56}$$

同理，由 (3.52) 和 (3.54) 可得

$$-\frac{dV^{\beta^*}}{dt} - V^{\alpha^*}\hat{\Gamma}^\beta_{\alpha;\,j}(\sigma(t);\,\dot\sigma(t))\dot\sigma^j + V^\alpha\hat{\Gamma}^\beta_{\alpha^*;\,j}(\sigma(t);\,\dot\sigma(t))\dot\sigma^j = 0, \tag{3.57}$$

$$\frac{dV^\beta}{dt} - V^{\alpha^*}\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,j}(\sigma(t);\,\dot\sigma(t))\dot\sigma^j + V^\alpha\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,j}(\sigma(t);\,\dot\sigma(t))\dot\sigma^j = 0. \tag{3.58}$$

由（3.55）和（3.58），可得

$$V^\alpha(\hat{\Gamma}^\beta_{\alpha;\,j} - \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,j})\dot\sigma^j + V^{\alpha^*}(\hat{\Gamma}^\beta_{\alpha^*;\,j} + \hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,j})\dot\sigma^j = 0. \tag{3.59}$$

由（3.56）和（3.57），可得

$$V^{\alpha}(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha;\,j}+\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*;\,j})\dot{\sigma}^j+V^{\alpha^*}(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*;\,j}-\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha;\,j})\dot{\sigma}^j=0. \tag{3.60}$$

由于$\hat{\Gamma}^{k}_{j;\,l}=\hat{\Gamma}^{k}_{l;\,j}$和$\hat{\Gamma}^{k}_{j;\,l}(x;\ \ y)y^j=\hat{\Gamma}^{k}_{l}$，因此 (3.59) 和 (3.60) 可以简化为

$$V^{\alpha}(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha}-\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*})+V^{\alpha^*}(\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*}+\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha})\ =\ 0, \tag{3.61}$$

$$V^{\alpha}(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha}+\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*})+V^{\alpha^*}(\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*}-\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha})\ =\ 0. \tag{3.62}$$

由于$\hat{\Gamma}^{k}_{j}(\sigma;\ \ \dot{\sigma})$与 V^j 对于 $j=1$无关，$\cdots$，$2n$，$\sigma:\ \ [0,1]\to M$ 是 M 中任意固定的光滑正则曲线，且 $V=V^j(t)\frac{\partial}{\partial x^j}$ 是沿 σ 相对于 ∇ 的任意平行向量场，因此 (3.61) 和 (3.62) 成立当且仅当

$$\hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha}(x;\ y)=\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha^*}(x;\ y),\quad \hat{\Gamma}^{\beta}_{\alpha^*}(x;\ y)=-\hat{\Gamma}^{\beta^*}_{\alpha}(x;\ y),\quad \forall(x;\ y)\in\tilde{M}. \tag{3.63}$$

对 (3.63) 关于 y^j 求导，得到

$$\hat{\mathbb{G}}^{\mu}_{\alpha^* j}(x;\ y)=-\hat{\mathbb{G}}^{\mu^*}_{\alpha j}(x;\ y),\quad \hat{\mathbb{G}}^{\mu^*}_{\alpha^* j}(x;\ y)=\hat{\mathbb{G}}^{\mu}_{\alpha j}(x;\ y).$$

这意味着，$\boldsymbol{J}$相对于与 F关联的实 Berwald 联络$\hat{\nabla}$是水平平行的。

由于 F 是强凸的弱 K¨ahler-芬斯勒度量，根据 [15], 中的引理 3.1，实喷射系数$\hat{\mathbb{G}}^{k}$和复喷射系数 $\mathbb{G}^{\mu}$ 满足

$$\mathbb{G}^{\mu}=\hat{\mathbb{G}}^{\mu}+i\hat{\mathbb{G}}^{\mu^*}. \tag{3.64}$$

对（3.64）关于 $\bar{v}^{\alpha}$ 求导，并利用（3.63），得到

$$\frac{\partial\mathbb{G}^{\mu}}{\partial\bar{v}^{\alpha}}=\frac{1}{2}[(\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha}-\hat{\Gamma}^{\mu^*}_{\alpha^*})+i(\hat{\Gamma}^{\mu^*}_{\alpha}+\hat{\Gamma}^{\mu}_{\alpha^*})]=0. \tag{3.65}$$

这意味着 $\mathbb{G}^{\mu}$ 关于纤维坐标 v 局部全纯。注意到，$\mathbb{G}^{\mu}$ 关于局部全纯坐标 v 是（2, 0）次齐次的，即 $\mathbb{G}^{\mu}(z;\ \lambda v)=\lambda^2\mathbb{G}^{\mu}(z;\ v)$。因此 $\mathbb{G}^{\mu}$ 实际上必定关于 v 是二次的，也就是说，

$$\mathbb{G}^{\mu}=\frac{1}{2}\mathbb{G}^{\mu}_{\alpha\gamma}(z)v^{\alpha}v^{\gamma},$$

其中 $\mathbb{G}^{\mu}_{\alpha\gamma}(z;\ \ v)\ =\ \mathbb{G}^{\mu}_{\alpha\gamma}(z)$ 是 F 的复 Berwald 联络系数。这表明 F 是弱复 Berwald 度量 [16]。由于 F 是强凸的弱 K¨ahler-芬斯勒度量，根据 [16] 中的定理 1.1，F 也是实 Berwald 度量。因此$\hat{\mathbb{G}}^{k}_{jl}=\hat{\Gamma}^{k}_{j;\,l}$，即实 Berwald 联络系数$\hat{\mathbb{G}}^{k}_{jl}$与水平 Cartan 联络系数$\hat{\Gamma}^{k}_{j;\,l}$相同。由此满足定理 3.1 中的条件（3.1），因此对所有 $X\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$，$\nabla_X\boldsymbol{J}\equiv 0$。

(4)⇒(1)：定理3.11。 □

4 常全纯截面曲率的 K¨ahler-Berwald 度量

在本节中，我们可以利用几何假设 $\nabla\boldsymbol{J}=0$ 对所有具有常全纯截面曲率的强凸复芬斯勒度量进行分类。

定理 4 1 *Let F be a strongly convex complex Finsler metric.: T^1, on a complex manifold M. If $\nabla \boldsymbol{J} = 0$ and F has constant holomorphic sectional curvature $c \neq 0$ then F is necessary a Kähler-Einstein metric on M.*
$^0M \to [0, +\infty)$,

Proof 由定义 2.5.2 可知， [1]，当且仅当 F 沿非零切向量 $v \in T^1,\ _z\ ^0M$ 具有常全纯截面曲率 c

$$-2G_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{;\,\mu}}{\partial \bar{z}^\nu} v^\mu \overline{v^\nu} = cG^2. \tag{4.1}$$

令 $A^\alpha_{\beta;\,\mu\bar{\nu}} := -\frac{\partial \Gamma^\alpha_\beta}{\partial \bar{z}^\nu}{}_{;\,\mu}$. 根据定理 3.11， F必为 K¨ahler-Berwald 度量，因为根据假设 $\nabla \boldsymbol{J} = 0$ 可知，特别地，对于任意 $X \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$，都有 $\nabla_X \boldsymbol{J} = 0$。因此，我们有 $\Gamma^\alpha_{\beta;\,\mu}(z) = \Gamma^\alpha_{\mu;\,\beta}(z)$，从而 $A^\alpha_{\beta;\,\mu\bar{\nu}} = A^\alpha_{\mu;\,\beta\bar{\nu}}$ 和 $\Gamma^\alpha_{;\,\mu} = \Gamma^\alpha_{\beta;\,\mu}(z) v^\beta$ 关于 v 是全纯且复线性的。对 $\bar{v}^\gamma$ 求导（4.1），得到

$$G_{\alpha\bar{\gamma}} A^\alpha_{\beta;\,\mu\bar{\nu}} v^\beta v^\mu \overline{v^\nu} + G_\alpha A^\alpha_{\beta;\,\mu\bar{\gamma}} v^\beta v^\mu = cGG_{\bar{\gamma}}. \tag{4.2}$$

重写（4.2），我们得到

$$\left\langle \Omega(\chi, \bar{\chi})\chi, \frac{\delta}{\delta z^\gamma} \right\rangle_v + \left\langle \Omega\left(\chi, \frac{\delta}{\delta \bar{z}^\gamma}\right)\chi, \chi \right\rangle_v = cGG_{\bar{\gamma}}. \tag{4.3}$$

在 [1], 中应用命题 2.5.1，我们立即得到

$$\left\langle \Omega(\chi, \bar{\chi})\chi, \frac{\delta}{\delta z^\gamma} \right\rangle_v = \overline{\left\langle \Omega(\chi, \bar{\chi})\frac{\delta}{\delta z^\gamma}, \chi \right\rangle_v},$$
$$\left\langle \Omega\left(\chi, \frac{\delta}{\delta \bar{z}^\gamma}\right)\chi, \chi \right\rangle_v = \overline{\left\langle \Omega\left(\frac{\delta}{\delta z^\gamma}, \bar{\chi}\right)\chi, \chi \right\rangle_v}.$$

在 [1]，中应用 (2.3.21) 的第一个等式，可得

$$\left\langle \Omega(\chi, \bar{\chi})\frac{\delta}{\delta z^\gamma}, \chi \right\rangle_v = -G_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\gamma;\,\mu}}{\partial \bar{v}^\nu} v^\mu \overline{v^\nu} - G_\alpha \Gamma^\alpha_{\gamma\sigma} \frac{\partial \Gamma^\sigma_{;\,\mu}}{\partial \bar{v}^\nu} v^\mu \overline{v^\nu}.$$

根据假设 $\nabla \boldsymbol{J} = 0$，由定理 3.12可知， F 的嘉当联络与 F的 Chern-Finsler 联络重合，因此垂直 Chern-Finsler 联络系数 $\Gamma^\alpha_{\gamma\sigma}$ 和垂直 Cartan 联络系数 $\hat{}\Gamma^a_{bc}$ 满足等式 $\Gamma^\alpha_{\gamma\sigma} = {}^{\wedge}\Gamma^\alpha_{\gamma\sigma} + i{}^{\wedge}\Gamma^{\alpha^*}_{\gamma\sigma}$。另一方面，垂直 Cartan 联络系数 $\hat{}\ \Gamma^a_{bc}$ 的 F 总是满足

$$G_a \hat{\Gamma}^a_{bc} = \frac{1}{4} G_a g^{as} \frac{\partial^3 F^2}{\partial y^b \partial y^c \partial y^s} = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 F^2}{\partial y^b \partial y^c \partial y^s} y^s = 0,$$

因此

$$\begin{aligned} 2G_\alpha \Gamma^\alpha_{\gamma\sigma} &= (G_\alpha - iG_{\alpha^*})(\hat{\Gamma}^\alpha_{\gamma\sigma} + i\hat{\Gamma}^{\alpha^*}_{\gamma\sigma}) \\ &= (G_\alpha \hat{\Gamma}^\alpha_{\gamma\sigma} + G_{\alpha^*} \hat{\Gamma}^{\alpha^*}_{\gamma\sigma}) - i(G_{\alpha^*} \hat{\Gamma}^{\alpha^*}_{\gamma^*\sigma} + G_\alpha \hat{\Gamma}^\alpha_{\gamma^*\sigma}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

Thus

$$\left\langle \Omega(\chi, \bar{\chi})\frac{\delta}{\delta z^\gamma}, \chi \right\rangle_v = -G_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\gamma;\,\mu}}{\partial \bar{v}^\nu} v^\mu \overline{v^\nu} = \left\langle \Omega\left(\frac{\delta}{\delta z^\gamma}, \bar{\chi}\right)\chi, \chi \right\rangle_v$$

因为 $\Gamma^{\alpha}_{\gamma;\,\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu;\,\gamma}$。因此我们实际上得到

$$\left\langle \Omega(\chi,\bar{\chi})\chi, \frac{\delta}{\delta z^{\gamma}} \right\rangle_{v} = \left\langle \Omega\left(\chi, \frac{\delta}{\delta \bar{z}^{\gamma}}\right)\chi, \chi \right\rangle_{v}.$$

因此 (4.3) 可简化为

$$2A^{\alpha}_{\beta;\,\mu\bar{\nu}} v^{\beta} v^{\mu} \overline{v^{\nu}} = cGv^{\alpha}. \tag{4.4}$$

对 (4.4) 关于 $\bar{v}^{\nu}$ 求导，得到

$$2A^{\alpha}_{\beta;\,\mu\bar{\nu}} v^{\beta} v^{\mu} = cG_{\bar{\nu}} v^{\alpha}. \tag{4.5}$$

对 (4.5) 关于 v^{β} 和 v^{μ} 依次求导，得到

$$4A^{\alpha}_{\beta;\,\mu\bar{\nu}} = c\left(G_{\beta\bar{\nu}}\delta^{\alpha}_{\mu} + cG_{\mu\bar{\nu}}\delta^{\alpha}_{\beta} + cG_{\beta\bar{\nu}\mu}v^{\alpha}\right). \tag{4.6}$$

取 $\alpha = \beta$，然后将 α 从 1 求和到 n，得到

$$4\sum_{\alpha=1}^{n} A^{\alpha}_{\alpha;\,\mu\bar{\nu}} = c(n+1)G_{\mu\bar{\nu}} \quad \text{equivalently} \quad G_{\mu\bar{\nu}} = \frac{4}{c(n+1)}\mathrm{Ric}_{\mu\bar{\nu}}. \tag{4.7}$$

这意味着 F 是一个 K¨ahler-爱因斯坦度量，定义在 M 上（因为 $\mathrm{Ric}_{\mu\bar{\nu}}$ 与 v无关，因此 F 的 $G_{\mu\bar{\nu}}$ 也与纤维坐标 v无关）。□

现在我们立即得到以下刚性定理。

定理 4 2 *Let F be a complete strongly convex complex。: T^{1}, Finsler metric on a simply connected complex manifold M. If $\nabla \boldsymbol{J} = 0$ and F has constant holomorphic sectional curvature $c \in \mathbb{R}$. Then* $^{0}M \to [0, +\infty)$

(i) 若 $c < 0$，(M, F) 是一个 ***K¨ahler*** 流形，它与 $\mathbb{C}^n$ 中的开单位球 B_n 全纯等距，且度量为伯格曼度量的一个常数倍，即

$$F^2(z;\, v) = -\frac{4}{c}\frac{(1-\|z\|^2)\|v\|^2 + |\langle z, v\rangle|^2}{(1-\|z\|^2)^2} \tag{4.8}$$

(ii) 若 $c = 0$，(M, F) 局部为复闵可夫斯基空间，并且局部全纯等距于 $\mathbb{C}^n$，其度量为某个复闵可夫斯基度量 $F(z;\ v) = f(v)$;

(iii) 若 $c > 0$，(M, F) 是一个 ***K¨ahler*** 流形，并且全纯等距于复射影空间 $\mathbb{CP}^n$，其度量为 ***Fubini-Study*** 度量的常数倍，即

$$F^2(z;\, v) = \frac{4}{c}\frac{(1+\|z\|^2)\|v\|^2 - |\langle z, v\rangle|^2}{(1+\|z\|^2)^2}. \tag{4.9}$$

Proof 对于 $c = 0$，由 [3] 中的定理 2.1 可知，F 局部是复闵可夫斯基度量。

对于 $c \neq 0$，由定理4.1 可知 F 是一个 K¨ahler-Einsetin 度量，定义在 M上。由于 M 是单连通的，且 F 具有常全纯截面曲率 c，K¨ahler 几何中的经典结果（参见 [10]第 171 页）蕴含断言 (i) 和 (iii)。□

定理的非平凡情形4.2 在于证明：每当 M 同时具有厄米二次型和非厄米二次型 K¨ähler-Berwald 度量时，常全纯截面曲率这一性质意味着 K¨ähler-Berwald 度量实际上必定是 K¨ähler 度量。事实上，存在许多同时具有厄米二次型和非厄米二次型 K¨ähler-Berwald 度量的复流形，例如 $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$)[17],[11]中的单位多圆盘和不可约有界对称域 [8],[18]。也有一些复流形，例如 B_n 中的开单位球 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{CP}^n$ [5]中的复射影空间¨，它们除了在¨和 B_n 上 $\mathbb{CP}^n$标准 Kähler 度量的常数倍之外，分别不具有其他非厄米二次型 Kähler-Berwald 度量。

*Remark 4.3*在 [3], 假设（M， F）是一个单连通且完备的复流形，模型为复闵可夫斯基空间（$\mathbb{C}^n$， f），F是一个 K¨ähler-芬斯勒度量并满足 Royden 条件，且（M， F）具有常全纯截面曲率 c的情况下，Aikou 概述了上述定理的一个证明（但未证明以下非平凡断言：“如果 K¨ähler-Berwald 流形（M， F）具有常全纯截面曲率 c，那么（M， h_M）也具有常全纯截面曲率 c”）。更确切地说，断言 (ii) 中的等式 F（z； v）$= fv$ 被 F（z； v）$= fv \leq \sum_{k=1}^{n} |v^k|^2$ 所替代，而断言 (iii) 中的“=”在 [3] 中被“$\leq$”所替代。相比之下，我们对定理 4.2 的证明基于刚性定理 4.1，这与 [3] 的证明本质不同。此外，我们的假设 $\nabla \boldsymbol{J} = 0$ 是一个简单的几何条件。

Remark 4.4 断言 (ii) 中的复闵可夫斯基度量 $f(v)$ 不能替换为典范欧几里得度量 $f(v)$ $= \sum_{\alpha=1}^{n} |v^\alpha|^2$。事实上，对于任意固定的 $t \in [0, +\infty)$ 和整数 $k \geq 2$,

$$f_{t,k}(v) = |v^1|^2 + \cdots + |v^n|^2 + t\sqrt{|v^1|^{2k} + \cdots + |v^n|^{2k}}, \quad \forall v = (v^1, \cdots, v^n) \in \mathbb{C}^n$$

是 $\mathbb{C}^n$ [17] 上的强凸复闵可夫斯基度量，并且 $(\mathbb{C}^n, f_{t,\ k})$ 是全纯截面曲率为零的复闵可夫斯基空间。然而，只要 $t_1 \neq t_2$ 且 $k_1 \neq k_2$，$(\mathbb{C}^n, f_{t_1,\ k_1})$ 就不同于 $(\mathbb{C}^n, f_{t_2,\ k_2})$ 全纯等距。

Remark 4.5 本文提出的方法也可用于研究典范复结构 $\boldsymbol{J}$ 相对于 F 的切恩–伦德联络在拉回丛 $\pi^* T_{\mathbb{R}} M$ 上的平行性；相关结果将另文发表。

致谢。第二作者łđšu国家自然科学基金委员会资助（项目批准号：12471080）。

参考文献

[1] M. Abate 和 G. Patrizio，芬斯勒度量——一种全面方法及其在几何函数论中的应用，数学讲义，第

36 文章标题1591，施普林格出版社，柏林，1994年。[2] T. Aikou，论复芬斯勒流形。《鹿儿岛大学理学院报告》（数学、物理与化学），第24期，第9-25页，1991年。[3] T. Aikou，建模于复闵可夫斯基空间上的复流形，京都大学数学杂志**35**（1995年），第1期，85-103页。[4] D. Bao、S.-S. Chern 和 Z. Shen，黎曼-芬斯勒几何导论，《数学研究生教材》第200卷，施普林格出版社，纽约，2000年。[5] P. Cao、X. Ge 和 C. Zhong，复格拉斯曼流形上不变复芬斯勒度量的刻画，微分几何及其应用94（2024年），论文编号102138，共22页。[6] B. Chen 和 Y. Shen，K¨ahler 芬斯勒度量实际上是强 K¨ahler 度量，中国数学年刊 ***B*30**（2009年），第2期，173-178页。[7] B. Chen、S. Liu 和 L. Zhao，强凸 K¨ahler-Finsler 度量的里奇曲率，中国科学：数学（中文），**54**（2024年），第10期，1469-1488页。[8] X. Ge 和 C. Zhong，经典域上全纯不变强伪凸复 Finsler 度量的几何，中国科学：数学**67**（2024年），第8期，1827-1864页。[9] Y. He 和 C. Zhong，强凸弱复伯瓦尔德度量与实兰德斯伯格度量，中国科学：数学**61**（2018年），535-544页。[10] S. Kobayashi、K. Nomizu，微分几何基础，第2卷，I nterscience，纽约，1969年。[11] S. Lin 和 C. Zhong，单位多圆盘上全纯不变强伪凸复芬斯勒度量的刻画，几何分析杂志**33**（2023），第11期，论文编号343，共28页。[12] N. Mok，*Hermitian* 局部对称流形上的度量刚性定理，世界科技出版公司，新加坡，1989年。[13]H. L. Royden，复芬斯勒度量，当代数学，**49**（1986年），119-124页。[14]Z. Shen，喷射与芬斯勒空间的微分几何，克吕维尔学术出版社，多德雷赫特，2001年。[15] H. Xia 和 C. Zhong，论常旗曲率的强凸弱复 K¨ahler-Finsler 度量，数学分析及其应用杂志**443**（2016年），891-912页。

[16]C. Zhong，关于与强凸弱K¨ahler-芬斯勒度量相关的实与复 Berwald联络，微分几何及其应用**29**（2011），388-408。[17] C. Zhong，强凸 K¨ahler-Berwald 流形的德拉姆分解定理，*Results Math.* **78**（2023），第1期，论文编号25，47页。[18] C. Zhong，经典域上的全纯不变复芬斯勒度量的刻画及施瓦茨引理，*Math. Ann.* **392**（2025），第4期，4861-4890。