arXiv:2601.04501v1 [math.DS] 8 Jan 2026

计算自创生的 Minary 原语

DANIEL CONNOR 和 COLIN DEFANT

Abstract. 我们介绍了 *Minary*，这是一个计算框架，旨在成为首个可通过形式化证明的自创生原语候选。Minary 将相互作用的概率事件表示为多维向量，并通过线性叠加而非标量乘法运算将其组合，从而保留不确定性，并在范围 $[-1,1]$ 内实现相长干涉与相消干涉。一组固定的“视角”依据隐含能力评估“语义维度”，它们之间的相互作用驱动两个离散时间随机过程。我们将该系统建模为迭代随机仿射映射，并运用迭代随机函数理论证明，该映射在分布意义上收敛至唯一的平稳分布；此外，我们还根据能力矩阵的行、列和整体均值，得到了极限期望的显式闭式表达式。随后，我们推导出在给定语义维度被激活的条件下，归一化共识的均值和方差的精确公式，揭示共识取决于能力结构，而非原始输入信号。最后，我们论证，按照 Maturana 和 Varela 的观点，Minary 在组织上是封闭的，但在操作上是开放的，并探讨了这一点对于构建能够承载独特主观身份观念的自我维持、分布式且可并行化计算系统所产生的影响。

1. Introduction

计算机科学领域在表示分布式概率系统方面长期面临挑战。对于如何协调相互作用的概率事件，教科书式的答案一直是采用单位区间 $[0,1]$ 中标量值的非线性乘法计算。使用单位区间标量进行乘法的效果是，乘积值会趋近于零、放大噪声，并且在任何参与者贡献因子 0 的情况下完全坍缩为 0。

一种可能比始终使用标量更稳健的替代方案，是使用概率密度函数计算乘积，最后再通过计算均值、众数或中位数等方法，将结果归约为单位区间标量。

Bayes 将核心乘法过程定义为后验概率 $\propto$ 先验概率 $\times$ 似然度 [3]。无论如何，采用标量归约的乘法方法，其明确目的都是降低 不确定性。

所披露的 Minary 计算框架采用了一种根本不同的理念，旨在保留 不确定性。Minary 框架将由不同视角贡献的相互依存概率事件结合起来，并以多维向量的形式进行端到端表示。简单的线性变换使这些向量之间的交互能够以范围为 $[-1,1]$ 的组成部分表示。使用带符号的组成部分，可以运用波状叠加来产生相长干涉和相消干涉图样。与乘法方法不同，叠加是线性的。

Minary 计算框架以向量为输入，使用向量进行计算，并生成向量。叠加的线性特性带来了能够以可证明的方式保留信息的对称性，而向量则提供了一种高保真格式，能够在任意维度上精确表示不确定性或信念的信息。此外，叠加的交换律和结合律在延迟和并行性方面赋予了计算灵活性。

Minary 计算框架是一个动力系统和控制论反馈机制[1] ，由存储在语义拓扑数据结构中的学习提供支持。可以将其视为集体信念的原语。输入信号充当驱动涌现的扰动，但它

已证明会从学习信号中被完全抵消，从而形成一个完全封闭、自指的学习循环。由于 Minary 框架具有向量和线性特性，即使在封闭系统中，其反馈也不会使系统走向崩溃，而是通过保存信息来维持连贯性，这与牛顿能量守恒的物理特性有些相似。

我们认为，Minary 在功能上闭合、但在操作上开放，是自创生计算原语的第一个形式化且可证明的模型。

Minary 计算框架既可采用随机形式，也可采用确定性形式；本文探讨其随机变体的属性。

2. Definitions

2.1. **自创生**。“自创生”一词 自创生 由生物学家 Humberto Mat- urana 和 Francisco Varela 于 1972年首次提出， [16,18], 他们将活细胞描述为自我创造的机器。在一般系统论框架的基础上, [27], 该理论将生命系统描述为开放系统，认为它们通过与环境持续交换来维持自身。Maturana 和 Varela 提出了更具体的组织标准。这自然促使计算机科学领域随后尝试创造符合其形式标准的人工机器，并尝试运用自创生方法对社会动力学建模 [15]。用他们自己的话来说：“自创生机器是一种机器，其组织方式（定义为一个统一体）是一个由组成部分的产生（转化和毁灭）过程构成的网络，该网络：（i）通过这些过程之间的相互作用和转化，不断再生并实现产生它们的过程（关系）网络；（ii）将其自身（该机器）构成空间中的一个具体统一体，而这些组成部分正是通过界定该网络作为此类网络得以实现的拓扑域而存在的。”

要符合自创生的定义，机器必须持续再生自身结构（即在组织上闭合），同时响应其环境（即操作开放）。

2.2. **他创生**。 与自创生相对且互不相容的是，他创生机器的组织方式旨在生产自身以外的事物（例如，汽车工厂生产汽车，而非更多工厂）。它们的功能由外部因素决定，而不是通过自我指涉的维护来实现。大多数传统计算过程都属于他创生。 [17]

3. Related Works

3.1. **贝叶斯网络**。 贝叶斯网络由 Judea Pearl 于 1985年 首次正式提出，是概率推理的一项基础技术 [22]。作为贝叶斯定理的一种应用实现，这些网络由表示事件间因果关系的有向无环图构成。

在这一框架中，先验概率与似然度相乘。网络的图结构使所有变量的联合概率分布能够分解为多个局部条件概率的乘积。部署贝叶斯网络的目的是推断给定事件集合最可能的状态；因此，它们的设计明确旨在消除不确定性，并收敛到特定结果。

从根本上说，贝叶斯网络具有他生性：其结构由外部设计者组织，并根据新证据进行更新。它的组织并非自我生成，而是一张用于外部引导推理的静态图谱。

3.2. **人工神经网络**。 人工神经网络植根于统计学习理论和计算神经科学，代表了过去一个世纪以来众多研究者的成果 [9, 11, 19, 21, 24]，并已成为人工智能的主导范式（尤其是大语言模型）。

在人工神经网络中，输入向量会经过多层计算单元（“神经元”）。每个单元都会对其输入执行加权乘法求和，然后将结果通过非线性激活函数。训练通常由反向传播引导 [25], ，这一过程通过将输出与外部“真实值”进行比较来产生误差信号。随后，利用该误差信号更新模型的权重，从而提高模型未来生成与真实值信号相一致输出的似然度。

从根本上说，人工神经网络是他生的，是由外部驱动的系统，其组织结构由外部目标塑造，且其输出与自身截然不同。

3.3. 向量符号架构。 与 Minary 密切相关的向量符号架构（VSA） [13] 或超维计算（HDC） [8] 利用叠加，将语义打包为高维空间中的向量，其中数据可通过编码后的语义进行寻址。生成的语义拓扑可通过多种方式查询，通常采用基于距离的相似性搜索（例如查找 k近邻），以找到与提示向量最匹配的项。

从根本上说，VSA 和 HDC 架构是他生的，其内容由外部真实来源填充，且不会自我生成。

3.4.自创生鸿沟。 几乎所有主流计算范式 [20] 都具有他生的本质，因此留下了一处空缺，需要一种新型自创生原语，用于构建自主导向的系统。我们将 Minary 定位为填补这一空缺的候选方案。

4. Mathematical Formalism

本节将给出严格的数学定义，用以描述对 Minary 框架中的共识机制进行建模的随机过程。

令 $\mathbb{R}^{a\times b}$ 表示实数 $a\times b$ 矩阵的集合。对于每个正整数 b，令 $[b]$ 表示集合 $\{1,2,\dots,b\}$。

我们固定一个由 n 个视角构成的集合 $\{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n\}$，以及一个由 m 个语义维度构成的集合 $\{\mathfrak{s}_1,\dots,\mathfrak{s}_m\}$。每个视角 $\mathfrak{p}_i$ 都具有一定的能力 C_i，$_j\in[0,1]$ 用于评估语义维度 $\mathfrak{s}_j$；能力矩阵是矩阵 $C\in\mathbb{R}^{n\times m}$，其第 i 行、第 j 列的元素为 C_i，$_j$。我们还固定一个整数 $k\in[m]$、一个步长 [1] $\alpha\in(0,2/3)$，以及定义在 $[0,1]$ 上的概率测度 μ。在示例中，我们将取 μ 为定义在 $[0,1]$ 上的均匀测度。

在每个时间步 t，我们均匀随机地选择一个 k元素集合 $S^{(t)}\subseteq[m]$。对于 $j\in S^{(t)}$ 而言，语义维度 $\mathfrak{s}_j$ 是时间 t时的活跃维度。对于每个 $j\in S^{(t)}$，我们从概率分布 μ中随机抽取一个信号 $x_j^{(t)}\in[0,1]$。为不同活跃维度选取的信号彼此独立。每个视角 $\mathfrak{p}_i$ 随后生成原始响应

$$r_{i,j}^{(t)}=x_j^{(t)}-C_{i,j}, \tag{1}$$

然后使用指数移动平均对其进行调整，得到调整后的响应

$$R_{i,j}^{(t)}=r_{i,j}^{(t)}+\Delta_{i,j}^{(t-1)}. \tag{2}$$

此时，该视角 $\mathfrak{p}_i$ 在不同的活跃维度上有不同的调整后的响应。我们将这些信息整合为一个平均调整后的响应

$$R_i^{(t)}=\frac{1}{k}\sum_{j\in S^{(t)}}R_{i,j}^{(t)}. \tag{3}$$

[1]将 α 取为 (0，1) 中的任意数值并无大碍，但假设它小于 $2/3$ 将简化我们的一项证明。在具体示例中，我们会令 α 远小于 $2/3$ （例如约为 0.02）。

这样我们就可以计算共识值

$$G^{(t)} = \sum_{i=1}^{n} R_i^{(t)}. \tag{4}$$

对于所有的 $i \in [n]$ 和 $j \in [m]$，现在我们通过设定以下内容来更新指数移动平均

$$\Delta_{i,j}^{(t)} = \begin{cases} \alpha d_i^{(t)} + (1-\alpha)\Delta_{i,j}^{(t-1)} & \text{if } j \in S^{(t)} \\ \Delta_{i,j}^{(t-1)} & \text{if } j \notin S^{(t)}, \end{cases} \tag{5}$$

其中

$$d_i^{(t)} = \frac{1}{n} G^{(t)} - R_i^{(t)}. \tag{6}$$

总之，驱动过程 $(\Delta^{(t)})_{t\geq 1}$ 和 $(G^{(t)})_{t\geq 1}$的随机性来源有两个。其一是在每个时刻 t选择均匀随机的 k元子集 $S^{(t)} \subseteq [m]$；其二是在每个时刻 t产生随机信号 $x_j^{(t)}$（对于 $j \in S^{(t)}$）。

5. Exponential Moving Average Limits

回想一下，我们有一个固定的能力矩阵 $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$，其元素属于 $[0,1]$。对于 $i \in [n]$ 和 $j \in [m]$，令

$$\overline{C}_{\cdot,j} = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} C_{r,j} \quad \text{and} \quad \overline{C}_{i,\cdot} = \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m} C_{i,r}.$$

我们还记

$$\overline{\overline{C}} = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{i,j}$$

用于所有能力的平均值。

本节的目标是证明以下关于指数移动平均过程$(\Delta_t)_{t\geq 0}$的定理。

定理 5.1。当 $t \to \infty$ 时，随机矩阵 $\Delta^{(t)}$ 依分布收敛。此外，对于所有$i \in [n]$ 和 $j \in [m]$，我们有

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\Delta_{i,j}^{(t)}\right] = \left(\frac{1}{2} - \eta_{m,k}\right)\left(\overline{C}_{i,\cdot} - \overline{\overline{C}}\right) + \eta_{m,k}\left(C_{i,j} - \overline{C}_{\cdot,j}\right),$$

其中

$$\eta_{m,k} = \frac{m-k}{k(m-1)+m-k}.$$

我们采用以下记号

$$\overline{\Delta}_{\cdot,j}^{(t)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta_{i,j}^{(t)}.$$

通过组合（1）、（2）、（3）和（4），我们得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}G^{(t)} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i^{(t)} \\ &= \frac{1}{k}\sum_{j\in S^{(t)}} \left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_j^{(t)}\right) - \overline{C}_{\cdot,j} + \overline{\Delta}_{\cdot,j}^{(t-1)}\right) \\ &= \frac{1}{k}\sum_{j\in S^{(t)}} \left(x_j^{(t)} - \overline{C}_{\cdot,j} + \overline{\Delta}_{\cdot,j}^{(t-1)}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

因此，

$$\begin{aligned} d_i^{(t)} &= \frac{1}{n}G^{(t)} - R_i^{(t)} \\ &= \frac{1}{k}\sum_{j\in S^{(t)}}\left(x_j^{(t)} - \overline{C}_{\cdot,j} + \overline{\Delta}_{\cdot,j}^{(t-1)}\right) - \frac{1}{k}\sum_{j\in S^{(t)}}\left(x_j^{(t)} - C_{i,j} + \Delta_{i,j}^{(t-1)}\right). \end{aligned}$$

含有刺激 $x_j^{(t)}$ 的项相互抵消，因此我们得到

$$d_i^{(t)} = \frac{1}{k}\sum_{j\in S^{(t)}}\left(C_{i,j} - \overline{C}_{\cdot,j} + \overline{\Delta}_{\cdot,j}^{(t-1)} - \Delta_{i,j}^{(t-1)}\right). \tag{8}$$

这意味着，影响从 $\Delta^{(t-1)}$ 到 $\Delta^{(t)}$ 转变的唯一随机因素是对 $S^{(t)}$ 的选择（而不是信号 $x_j^{(t)}$ ）。

我们希望将过程 $(\Delta^{(t)})_{t\geq 0}$ 表示为由随机仿射映射驱动的马尔可夫链；这样我们便能运用马尔可夫链理论中的已知结果来证明定理 5.1。为此，令 $I_\ell \in \mathbb{R}^{\ell\times\ell}$ 表示 $\ell\times\ell$ 单位矩阵，并令 $J_\ell \in \mathbb{R}^{\ell\times\ell}$ 为$\ell\times\ell$所有元素均为 1 的矩阵。令 $_J_\ell = \frac{1}{\ell}J_\ell$。我们用 M表示矩阵 $M^\top$的转置。令 $C^{\mathrm{dev}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 为如下定义的矩阵

$$C_{i,j}^{\mathrm{dev}} = C_{i,j} - \overline{C}_{\cdot,j} \tag{9}$$

对于每个集合 $S\subseteq[m]$，令 $\delta^S \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ 为 S 的列指示向量（因此，对所有 $j\in S$ 和 $j'\notin S$，$\delta_j^S = 1$ 且 $\delta_{j'}^S = 0$）。我们还用 $D^S \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 表示对角矩阵，其第 j个对角元素为 δ_j^S。定义线性映射 $A^S\colon \mathbb{R}^{n\times m}\to\mathbb{R}^{n\times m}$ 如下：

$$A^S(M) = M(I_m - \alpha D^S) + \frac{\alpha}{k}\left(\overline{J}_n - I_n\right)M\delta^S(\delta^S)^\top \tag{10}$$

以及矩阵 $B^S \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 乘以

$$B^S(M) = \frac{\alpha}{k}C^{\mathrm{dev}}\delta^S(\delta^S)^\top. \tag{11}$$

我们得到一个仿射映射 $\Phi^S\colon \mathbb{R}^{n\times m}\to\mathbb{R}^{n\times m}$，其定义如下：

$$\Phi^S(M) = A^S(M) + B^S.$$

Co将（5）、（8）和（9）结合起来，并运用一些初等线性代数，可得恒等式 y

$$\Delta^{(t)} = A^{S^{(t)}}(\Delta^{(t-1)}) + B^{S^{(t)}} = \Phi^{S^{(t)}}(\Delta^{(t-1)}). \tag{12}$$

在 $\mathbb{R}^{\ell\times\ell'}$ 上有一个自然的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，定义如下：

$$\langle M, M'\rangle = \mathrm{Tr}(M^\top M') = \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell'}M_{i,j}M'_{i,j},$$

其中 Tr 表示迹。这在 $\mathbb{R}^{\ell\times\ell'}$ 上诱导出弗罗贝尼乌斯范数，定义如下：

$$\|M\| = \langle M, M\rangle^{1/2},$$

这使 $\mathbb{R}^{\ell\times\ell'}$ 成为一个度量空间。映射 $F\colon \mathbb{R}^{\ell\times\ell'}\to\mathbb{R}^{\ell\times\ell'}$ 的 Lipschitz 常数为

$$\mathrm{Lip}(F) = \sup_{M,M'\in\mathbb{R}^{\ell\times\ell'}}\frac{\|F(M) - F(M')\|}{\|M - M'\|}.$$

下一个引理是证明定理 5.1所需的主要技术要点。

引理 5.2. 固定一个整数 $b \geq m/k$。令 S_1、…、S_b 为 $[m]$ 的相互独立的 k 元子集，每个子集均为均匀随机地选取，并令 $\Psi = \Phi^{S_b} \circ \cdots \circ \Phi^{S_1}$。我们有

$$\mathbb{E}\left[\log(\mathrm{Lip}(\Psi))\right] < 0.$$

证明。考虑子空间

$$V = \{M \in \mathbb{R}^{n\times m} : (I_n - \overline{J}_n)M = 0\} \quad \text{and} \quad V^{\perp} = \{M \in \mathbb{R}^{n\times m} : \overline{J}_n M = 0\},$$

它们互为正交补。对于 $S \subseteq [m]$，令

$$Q^S = I_n - \alpha D^S - \frac{\alpha}{k}\delta^S(\delta^S)^{\top}.$$

对于每个子集 $S \subseteq [m]$ 以及所有矩阵 $M \in V$和 $M' \in V^{\perp}$，我们有

$$A^S(M) = M(I_m - \alpha D^S) \in V \quad \text{and} \quad A^S(M') = M'Q^S \in V^{\perp}.$$

这表明 V和 $V^{\perp}$在 A^S下均为不变的。令 $A^S|_V$和 $A^S|_{V^{\perp}}$分别为 A^S 在 V和 $V^{\perp}$上的限制。

对于 $M \in V$，我们有

$$\left\|A^S(M)\right\| = \left\|M(I_m - \alpha D^S)\right\| \leq \|M\|;$$

这表明 $\mathrm{Lip}(A^S|_V) \leq 1$。对于 $M' \in V^{\perp}$，由于矩阵 Q^S是对称的，我们有

$$\left\|A^S(M')\right\|^2 = \left\|MQ^S\right\|^2 = \mathrm{Tr}(Q^S M^{\top} M Q^S) = \mathrm{Tr}(M^{\top}M(Q^S)^2).$$

直接计算可得

$$(Q^S)^2 = I_m - \alpha(2-\alpha)D^S + \frac{\alpha}{k}(3\alpha - 2)\delta^S(\delta^S)^{\top}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\left\|A^S(M')\right\|^2 &= \mathrm{Tr}\left((M')^{\top}M'\left(I_m - \alpha(2-\alpha)D^S + \frac{\alpha}{k}(3\alpha-2)\delta^S(\delta^S)^{\top}\right)\right)\\ &= \left\|M'\right\|^2 - \alpha(2-\alpha)\left\|M'D^S\right\|^2 + \frac{\alpha}{k}(3\alpha-2)\left\|M'\delta^S\right\|^2.\end{aligned}$$

我们假设 $0 < \alpha < 2/3$，所以

$$\left\|A^S(M')\right\|^2 \leq \left\|M'\right\|^2 - \alpha(2-\alpha)\left\|M'D^S\right\|^2 \leq \left\|M'\right\|^2.$$

这表明 $\mathrm{Lip}(A^S|_{V^{\perp}}) \leq 1$。因此，$\mathrm{Lip}(A^S) = \max\{\mathrm{Lip}(A^S|_V),\ \mathrm{Lip}(A^S|_{V^{\perp}})\} \leq 1$。由前一段可知

$$\mathrm{Lip}(\Psi) = \mathrm{Lip}(A^{S_b}\cdots A^{S_1}) \leq \mathrm{Lip}(A^{S_b})\cdots\mathrm{Lip}(A^{S_1}) \leq 1.$$

因此，要证明 $\mathbb{E}[\log(\mathrm{Lip}(\Psi))] < 0$，我们只需证明 $\mathrm{Lip}(\Psi) < 1$ 以正概率成立。由于 $b > m/k$，$S_1 \cup \cdots \cup S_b = [m]$ 成立的概率为正。因此，只需证明当 $S_1 \cup \cdots \cup S_b = [m]$ 时，$\mathrm{Lip}(\Psi) < 1$。

假设 $S_1 \cup \cdots \cup S_b = [m]$。我们有 $\mathrm{Lip}(\Psi) = \mathrm{Lip}(A^{S_b}\cdots A^{S_1})$。因此，只需证明对于所有非零的 $M \in V$ 和 $M' \in V^{\perp}$，$\left\|A^{S_b}\cdots A^{S_1}(M)\right\| < \|M\|$ 且 $\left\|A^{S_b}\cdots A^{S_1}(M')\right\| < \|M'\|$。对于第一个不等式，我们有

$$\left\|A^{S_b}\cdots A^{S_1}(M)\right\| = \left\|M(I_m - \alpha D^{S_1})\cdots(I_m - \alpha D^{S_b})\right\| < \|M\|.$$

对于第二个不等式，选择 $j^* \in [m]$，使得 M' 的第 j^* 列至少有一个非零项，并令 r 为满足 $j^* \in S_r$ 的 $[b]$ 中最小的元素。注意，M' 的第 j^* 列与矩阵 $M'' = M'Q^{S_1}\cdots Q^{S_{r-1}} = A^{S_{r-1}}\cdots A^{S_1}(M')$ 的第 j^* 列相同。由于 $j^* \in S_r$ 和 $0 < \alpha < 2/3$，我们有

$$\left\|A^{S_r}(M'')\right\|^2 = \left\|M''\right\|^2 - \alpha(2-\alpha)\left\|M''D^{S_r}\right\|^2 + \frac{\alpha}{k}(3\alpha-2)\left\|M''\delta^{S_r}\right\|^2 < \left\|M''\right\|^2.$$

因此，

$$\begin{aligned}\left\|A^{S_b}\cdots A^{S_1}(M')\right\| &= \left\|A^{S_b}\cdots A^{S_{r+1}}(A^{S_r}(M''))\right\| \\ &\le \left\|A^{S_r}(M'')\right\| \\ &< \left\|M''\right\| \\ &= \left\|A^{S_{r-1}}\cdots A^{S_1}(M')\right\| \\ &\le \left\|M'\right\|,\end{aligned}$$

如所需。 □

我们将借助 Diaconis 和 Freedman 的一项结果的以下特殊情形。

定理 *5.3*（[6,定理 1]）。设 $\mathcal{X}$ 是一个度量为 ϱ 的可分度量空间。设 Θ 是一个有限集，并且对每个 $\theta\in\Theta$，假设存在函数 $f_\theta\colon\ \mathcal{X}\to X$ 和实数 $K_\theta\ge 0$，使得对所有 x、$x'\in\mathcal{X}$，$\varrho(f_\theta(x)\ f_\theta(x'))\le K_\theta\varrho(x,\ x')$。设 ν 是定义在 Θ 上的概率测度，并设 θ_1、θ_2、.....是取值于 Θ、分布为 ν 的独立同分布序列。设 $X_0\in\mathcal{X}$，并且对每个整数 $t\ge 1$，令 $X_t=(f_{\theta_t}\circ f_{\theta_{t-1}}\circ\cdots\circ f_{\theta_1})\ (X_0)$。假设 $\sum_{\theta\in\Theta}log(K_\theta)\ \nu(\theta)\ <0$。那么马尔可夫链 $(X_t)_{t\ge0}$ 具有唯一的平稳分布 π，且 X_t 的分布律以指数速度收敛到 π。

现在我们可以结合引理 5.2和定理 5.3 来证明定理 5.1。

定理 5.1 的证明。设 $\mathcal{X}=\mathbb{R}^{n\times m}$；这是一个可分度量空间，其度量 ϱ 由$\varrho(M,M')=\|M-M'\|$给出。固定一个整数 $b\ge m/k$，并令 Θ为由 $[m]$的 k元子集构成的 b元组的集合。令 ν为 Θ上的均匀分布。对于每个元组 $\theta=(S_1,\ldots,S_b)\in\Theta$，令 $f_\theta=\Phi^{S_b}\cdots\Phi^{S_1}$，并令 $K_\theta=\mathrm{Lip}(f_\theta)$。令 $X_t=\Delta^{(bt)}$；由式 (12) 可得 $X_t=(f_{\theta_t}\circ f_{\theta_{t-1}}\circ\cdots\circ f_{\theta_1})(X_0)$。引理 5.2 告诉我们，$\sum_{\theta\in\Theta}\log(K_\theta)\ \nu(\theta)<0$。定理 5.3 的所有假设均已满足，因此我们得出，马尔可夫链 $(X_t)_{t\ge0}$ 有唯一的平稳分布 π，且 X_t 的分布律以指数速度收敛到 π。由于 $X_t=\Delta^{(bt)}$，这就证明了该定理的第一条结论。

我们现在知道极限 $E=\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\Delta^{(t)}\right]\in\mathbb{R}^{n\times m}$ 存在。令 I 表示 $\mathbb{R}^{n\times m}$上的恒等映射。由 (12) 可得 E 满足方程

$$(I-\mathbb{E}[A^S])E=\mathbb{E}[B^S],$$

其中，期望值是通过从 S 的 k元子集集合中均匀随机地选取 $[m]$来计算的。要证明该方程有唯一解，注意到根据 引理 5.2的证明，线性映射 $\mathbb{E}[A^S]\colon\ \mathbb{R}^{n\times m}\to\mathbb{R}^{n\times m}$ 的 Lipschitz 常数严格小于 1，这意味着它没有非零不动点。因此 $I-\mathbb{E}[A^S]$ 可逆，所以必有 $E=(I-\mathbb{E}[A^S])^{-1}\mathbb{E}[B^S]$。

Let

$$p_1=\frac{k}{m}\quad\text{and}\quad p_2=\frac{k(k-1)}{m(m-1)}.$$

Let

$$W=\mathbb{E}[\delta^S(\delta^S)^\top]=p_2J_m+(p_1-p_2)I_m.$$

考虑由以下方式定义的矩阵 $R,C^{\mathrm{dev}}\in\mathbb{R}^{n\times m}$

$$R_{i,j}=\overline{C}_{i,\cdot}-\overline{\overline{C}}\quad\text{and}\quad C^{\mathrm{dev}}_{i,j}=\overline{C}_{i,j}-\overline{C}_{\cdot,j}.$$

令$U=\left(\frac{1}{2}-\eta_{m,\ k}\right)R+\eta_{m,\ k}C^{\mathrm{dev}}$，其中

$$\eta_{m,k}=\frac{m-k}{k(m-1)+m-k}.$$

我们有

$$\overline{J}_n R = \overline{J}_n C^{\mathrm{dev}} = 0, \quad RJ_m = mR, \quad \text{and} \quad C^{\mathrm{dev}} J_m = mC^{\mathrm{dev}}.$$

经过简单计算可得

$$RW = \frac{k^2}{m} R \quad \text{and} \quad C^{\mathrm{dev}} W = (p_1 - p_2) C^{\mathrm{dev}} + p_2 mR.$$

由此可计算得

$$U = (1 - p_1\alpha)U + \frac{\alpha}{k}(\overline{J}_n - I_n)UW + \frac{\alpha}{k} C^{\mathrm{dev}} W = \mathbb{E}[A^S]U + \mathbb{E}[B^S].$$

由此可得 $E = U$，正如所需。 □

6. The Consensus Distribution

设 μ 和 σ 分别为概率分布 μ的均值和标准差。（如果 μ 是在 $[0,1]$ 上的均匀分布，那么 $\mu = 1/2$ 和 $\sigma = 1/\sqrt{12}$。）

对于每个 $j \in [m]$，我们关注归一化共识值

$$\overline{G}^{(t)} = \frac{1}{n} G^{(t)}$$

在事件 $j \in S^{(t)}$ 条件下。我们有以下定理。

定理 6.1. 固定 $j \in [m]$。令 $\widehat{C}_j = \frac{1}{m-1} \sum_{r \in [m] \setminus \{j\}} C_{\cdot,r}$。给定 $j \in S^{(t)}$ 时，$G^{(t)}$ 的条件期望为

$$\mathbb{E}\left[\overline{G}^{(t)} \mid j \in S^{(t)}\right] = \overline{\mu} - \frac{1}{k}\left(\overline{C}_{\cdot,j} - (k-1)\widehat{C}_j\right).$$

给定 $j \in S^{(t)}$ 时，$G^{(t)}$ 的条件方差为

$$\mathrm{Var}\left(\overline{G}^{(t)} \mid j \in S^{(t)}\right) = \frac{1}{k}\sigma^2 + \frac{(k-1)(m-k)}{k^2(m-1)(m-2)} \sum_{r \in [m] \setminus \{j\}} \left(\overline{C}_{\cdot,r} - \widehat{C}_j\right)^2.$$

证明。 由式（4）和（6）可立即得出 $\sum_{i=1}^n d_i^{(t)} = 0$。因此，

$$\overline{\Delta}_{\cdot,j}^{(t)} = \begin{cases} (1-\alpha)\overline{\Delta}_{\cdot,j}^{(t-1)} & \text{if } j \in S^{(t)} \\ \Delta_{i,j}^{(t-1)} & \text{if } j \notin S^{(t)}. \end{cases}$$

由于 $\Delta^{(0)} = 0$，必有 $\Delta_{\cdot,j}^{(t)} = 0$ 对所有 $t \geq 0$均成立。因此，若我们以事件$j \in S^{(t)}$为条件，则式（7）告诉我们

$$\overline{G}^{(t)} = \frac{1}{k} \sum_{r \in S^{(t)}} x_r^{(t)} - \frac{1}{k} \sum_{r \in S^{(t)} \setminus \{j\}} \overline{C}_{\cdot,r} - \frac{1}{k} \overline{C}_{\cdot,j}.$$

这立即推出了所需的 $\mathbb{E}[G^{(t)} \mid j \in S^{(t)}]$ 公式。

由于信号 $x_j^{(t)}$ 是从分布 μ中独立随机选取的，随机变量 $\frac{1}{k}\sum_{j \in S^{(t)}} x_j^{(t)}$ 的方差为 $\frac{1}{k}\sigma^2$。随机变量 $\frac{1}{k}\sum_{r \in S^{(t)} \setminus \{j\}} C_{\cdot,r}$的方差为

$$\frac{1}{k^2} \sum_{r \in [m] \setminus \{j\}} \overline{C}_{\cdot,r}^2 \mathrm{Var}(\delta_r^{(S^{(t)})}) + \frac{1}{k^2} \sum_{\substack{r,\ell \in [m] \\ r \neq \ell}} \overline{C}_{\cdot,r} \overline{C}_{\cdot,\ell} \mathrm{Cov}(\delta_r^{(S^{(t)})}, \delta_\ell^{(S^{(t)})})$$

$$= \frac{(k-1)(m-k)}{k^2(m-1)^2} \sum_{r \in [m] \setminus \{j\}} \overline{C}_{\cdot,r}^2 - \frac{(k-1)(m-k)}{k^2(m-1)^2(m-2)} \sum_{\substack{r,\ell \in [m] \setminus \{j\} \\ r \neq \ell}} \overline{C}_{\cdot,r} \overline{C}_{\cdot,\ell}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(k-1)(m-k)}{k^2(m-1)^2(m-2)} \left((m-2) \sum_{r\in[m]\setminus\{j\}} \overline{C}_{\cdot,r}^2 - \sum_{\substack{r,\ell\in[m]\setminus\{j\} \\ r\neq\ell}} \overline{C}_{\cdot,r}\overline{C}_{\cdot,\ell} \right) \\
&= \frac{(k-1)(m-k)}{k^2(m-1)^2(m-2)} \left((m-1) \sum_{r\in[m]\setminus\{j\}} \overline{C}_{\cdot,r}^2 - \left((m-1)\widehat{C}_j \right)^2 \right) \\
&= \frac{(k-1)(m-k)}{k^2(m-1)(m-2)} \left(\sum_{r\in[m]\setminus\{j\}} \overline{C}_{\cdot,r}^2 + (m-1)\widehat{C}_j^2 - 2\widehat{C}_j \sum_{r\in[m]\setminus\{j\}} \overline{C}_{\cdot,r} \right) \\
&= \frac{(k-1)(m-k)}{k^2(m-1)(m-2)} \sum_{r\in[m]\setminus\{j\}} \left(\overline{C}_{\cdot,r} - \widehat{C}_j \right)^2 .
\end{aligned}
$$

由于这两个随机变量相互独立，$\mathrm{Var}(G^{(t)} \mid j \in S^{(t)})$的所需公式由此得出。□

7. Worked Example

为说明 Minary 框架的运行机制，我们提供了一个随机 Minary 的 Python 仿真 [28] 其中，我们准备了 5 个视角，以及与特定能力标签相对应的 19 个维度。每个视角在 $[0, 1]$ 中的每个维度都被分配了一个能力值；这些维度共同大致构成了反映各视角相应“原型”的档案。这一设置规模足够大，能够产生丰富的动态，同时又足够小，不至于难以处理。

这个具体示例让各个视角每次将 3 个语义维度结合起来进行评估，并通过对所有活跃维度上的响应取平均值来作出响应。这体现了这样一种理念：每次迭代都代表一个需要同时具备全部三种能力的整体单元。

7.1. 设置。 我们考虑以下系统：

- $n = 5$ 视角：真正的艺术家（$\mathfrak{p}_1$）、执行总监（$\mathfrak{p}_2$）、技术人员（$\mathfrak{p}_3$）、评论家（$\mathfrak{p}_4$）和粉丝（$\mathfrak{p}_5$）
- $m = 19$语义维度：“3D 建模” ($\mathfrak{s}_1$)、“解剖学” ($\mathfrak{s}_2$)、“艺术作品相似度” ($\mathfrak{s}_3$)、“受众相关性” ($\mathfrak{s}_4$)、“品牌调性” ($\mathfrak{s}_5$)、“角色设计” ($\mathfrak{s}_6$)、“调色” ($\mathfrak{s}_7$)、“配色方案” ($\mathfrak{s}_8$)、“服装设计” ($\mathfrak{s}_9$)、“时尚潮流” ($\mathfrak{s}_{10}$)、“插画” ($\mathfrak{s}_{11}$)、“信息删节” ($\mathfrak{s}_{12}$)、“室内设计” ($\mathfrak{s}_{13}$)、“现代艺术” ($\mathfrak{s}_{14}$)、“摄影构图” ($\mathfrak{s}_{15}$)、“物理学” ($\mathfrak{s}_{16}$)、“情感” ($\mathfrak{s}_{17}$)、“可用性” ($\mathfrak{s}_{18}$)、“视觉广告” ($\mathfrak{s}_{19}$)
- $k = 3$ 每个时间步的活跃维度（视角跨所有活跃维度取平均时，各维度会相互耦合）
- $\alpha = 0.02$ （指数移动平均的步长）。

我们将演示一次迭代，其中“品牌调性”“现代艺术”和“物理学”这三个维度处于激活状态。能力矩阵 $C \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ 为：

$$
C = \begin{bmatrix}
0.95 & 0.20 & 0.50 \\
0.70 & 0.97 & 0.30 \\
0.50 & 0.30 & 0.95 \\
0.80 & 0.87 & 0.10 \\
0.60 & 0.70 & 0.30
\end{bmatrix}
$$

我们将 $\Delta^{(0)} = 0$ （零矩阵）初始化。在时间 $t = 1$，三个维度均处于激活状态： $M^{(1)} = \{5, 14, 16\}$，并从 $[0, 1]$ 上的均匀分布中抽取信号： $x^{(1)} = [0.6394, 0.0250, 0.2750]$。

7.2. **逐步计算**。

7.2.1. 步骤 *1*：原始响应。 使用 公式 (1)，我们针对每个视角 i 和维度 j 计算 $r_{i,j}^{(1)} = x_j^{(1)} - C_{i,j}$：

$$\begin{aligned}
\text{The True Artist:} \quad r_{1,1}^{(1)} &= 0.6394 - 0.95 = -0.3106 \\
r_{1,2}^{(1)} &= 0.0250 - 0.20 = -0.1750 \\
r_{1,3}^{(1)} &= 0.2750 - 0.50 = -0.2250
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{执行总监：} r_{2,1}^{(1)} &= 0.6394 - 0.70 = -0.0606 \\
r_{2,2}^{(1)} &= 0.0250 - 0.97 = -0.9450 \\
r_{2,3}^{(1)} &= 0.2750 - 0.30 = -0.0250
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{The Technician:} \quad r_{3,1}^{(1)} &= 0.6394 - 0.50 = 0.1394 \\
r_{3,2}^{(1)} &= 0.0250 - 0.30 = -0.2750 \\
r_{3,3}^{(1)} &= 0.2750 - 0.95 = -0.6750
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{The Critic:} \quad r_{4,1}^{(1)} &= 0.6394 - 0.80 = -0.1606 \\
r_{4,2}^{(1)} &= 0.0250 - 0.87 = -0.8450 \\
r_{4,3}^{(1)} &= 0.2750 - 0.10 = 0.1750
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{The Fan:} \quad r_{5,1}^{(1)} &= 0.6394 - 0.60 = 0.0394 \\
r_{5,2}^{(1)} &= 0.0250 - 0.70 = -0.6750 \\
r_{5,3}^{(1)} &= 0.2750 - 0.30 = -0.0250
\end{aligned}$$

7.2.2. 步骤 *2*：调整后的响应。 由于 $\Delta^{(0)} = 0$，调整后的响应 $R_{i,j}^{(1)} = r_{ij}^{(1)}$，与原始响应相同。

7.2.3. 步骤 *3*：调整后响应的平均值。每个视角都会对其在所有活跃维度上的调整后的响应取平均值。随后，所有维度均使用这个单一平均值，从而在它们之间建立耦合：

$$\begin{aligned}
R_1^{(1)} &= \frac{1}{3}(-0.3106 + (-0.1750) + (-0.2250)) = \frac{-0.7105}{3} = -0.2368 \\
R_2^{(1)} &= \frac{1}{3}(-0.0606 + (-0.9450) + (-0.0250)) = \frac{-1.0305}{3} = -0.3435 \\
R_3^{(1)} &= \frac{1}{3}(0.1394 + (-0.2750) + (-0.6750)) = \frac{-0.8105}{3} = -0.2702
\end{aligned}$$

$$R_4^{(1)} = \frac{1}{3}(-0.1606 + (-0.8450) + 0.1750) = \frac{-0.8305}{3} = -0.2768$$
$$R_5^{(1)} = \frac{1}{3}(0.0394 + (-0.6750) + (-0.0250)) = \frac{-0.6605}{3} = -0.2202$$

7.2.4. 步骤 *4*：共识（叠加）。通过叠加（线性求和）计算共识：

$$\begin{aligned} G^{(1)} &= \sum_{i=1}^{5} R_i^{(1)} \\ &= -0.2368 + (-0.3435) + (-0.2702) + (-0.2768) + (-0.2202) \\ &= -1.3476 \end{aligned}$$

7.2.5. 步骤 *5*：归一化共识与学习信号。归一化共识为：

$$\bar{G}^{(1)} = \frac{G^{(1)}}{n} = \frac{-1.3476}{5} = -0.2695$$

每个视角的学习信号（公式 (6)）为：

$$\begin{aligned} d_1^{(1)} &= \bar{G}^{(1)} - R_1^{(1)} = -0.2695 - (-0.2368) = -0.0327 \\ d_2^{(1)} &= \bar{G}^{(1)} - R_2^{(1)} = -0.2695 - (-0.3435) = 0.0740 \\ d_3^{(1)} &= \bar{G}^{(1)} - R_3^{(1)} = -0.2695 - (-0.2702) = 0.0007 \\ d_4^{(1)} &= \bar{G}^{(1)} - R_4^{(1)} = -0.2695 - (-0.2768) = 0.0073 \\ d_5^{(1)} &= \bar{G}^{(1)} - R_5^{(1)} = -0.2695 - (-0.2202) = -0.0493 \end{aligned}$$

验证： $\sum_{i=1}^{5} d_i^{(1)} = -0.0327 + 0.0740 + 0.0007 + 0.0073 + (-0.0493) = 0$

7.2.6. 步骤 *6*：更新指数移动平均。 由于所有视角在所有维度上共用一个平均响应值，因此学习信号 $d_i^{(1)}$ 会统一应用于所有维度。使用 $\alpha = 0.02$：

$$\begin{aligned} \text{The True Artist:} \quad & \Delta_{1,j}^{(1)} = 0.02 \times (-0.0327) = -0.000653 \text{ for } j \in \{1,2,3\} \\ \text{The Executive Director:} \quad & \Delta_{2,j}^{(1)} = 0.02 \times 0.0740 = 0.001480 \text{ for } j \in \{1,2,3\} \\ \text{The Technician:} \quad & \Delta_{3,j}^{(1)} = 0.02 \times 0.0007 = 0.000013 \text{ for } j \in \{1,2,3\} \\ \text{The Critic:} \quad & \Delta_{4,j}^{(1)} = 0.02 \times 0.0073 = 0.000147 \text{ for } j \in \{1,2,3\} \\ \text{The Fan:} \quad & \Delta_{5,j}^{(1)} = 0.02 \times (-0.0493) = -0.000987 \text{ for } j \in \{1,2,3\} \end{aligned}$$

完整的 $\Delta^{(1)}$ 矩阵如下：

$$\Delta^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.000653 & -0.000653 & -0.000653 \\ 0.001480 & 0.001480 & 0.001480 \\ 0.000013 & 0.000013 & 0.000013 \\ 0.000147 & 0.000147 & 0.000147 \\ -0.000987 & -0.000987 & -0.000987 \end{bmatrix}$$

7.3. **关键观察**。这个示例展示了 Minary 框架的基本属性：

(1) **信号抵消**：输入信号 $x^{(1)} = [0.6394, 0.0250, 0.2750]$ 会出现在原始响应中，但会在学习信号中完全抵消。如公式（8）所示，$d_i^{(1)}$ 中仅保留基于能力的差异，从而展现出功能闭合。(2) **信息守恒**：$\sum_{i=1}^{5} d_i^{(1)} = 0$ 完全相等，证实系统通过线性叠加而非乘法坍缩来保留信息。这一属性使系统能够无限期地维持一致性，而不会收敛到退化状态。(3) **维度耦合行为**：每个视角都对所有活跃维度进行平均，并统一应用相同的学习信号。这会产生维度耦合，其中$\Delta_{i,1}^{(1)} = \Delta_{i,2}^{(1)} = \Delta_{i3}^{(1)}$，对于每个视角而言 i。这模拟了评估由整体工作单元而非特定维度的工作子单元构成的场景。（请注意，也可以使用保持维度独立性的完整向量进行响应，从而维持简单的正交动力学。）（4）**视角特定适应**：执行总监的平均响应相对于归一化共识最为负面（-0.3435 相对于 -0.2695），因此获得最大的正向调整（$+0.0740$）。相反，粉丝获得负向调整（-0.0493）。这展示了各个视角如何在保留自身能力概况的同时，学习与集体行为保持一致。(5) **涌现式自指**：指数移动平均矩阵 $\Delta^{(t)}$ 会随时间演化，形成涌现式语义拓扑。该拓扑独立于外部信号，表示每个视角所学习到的调整，从而创建出定义系统组织闭合的自指结构。

经过 10000 次具有不同活跃维度的迭代后，系统形成了丰富的内部结构，其中矩阵 $\Delta^{(t)}$ 以动态方式维持整体视角原型，而不会变得僵化或静止。

7.4. **替代示例：通才的晋升**。

7.4.1. 替代设置。 为了清晰展示 Minary 一种不那么显而易见的涌现属性，我们定义了一种融入“通才”视角的极简配置。

- $n = 3$ 视角：专家（$\mathfrak{p}_1$）、通才（$\mathfrak{p}_2$）、反专家（$\mathfrak{p}_3$）
- $m = 6$ 语义维度：$\mathfrak{s}_1$，$\mathfrak{s}_2$，.. .，$\mathfrak{s}_6$
- $k = 3$ 每次迭代的活跃维度
- $\alpha = 0.02$

能力矩阵 $C \in \mathbb{R}^{3\times 6}$ 旨在凸显这一现象：

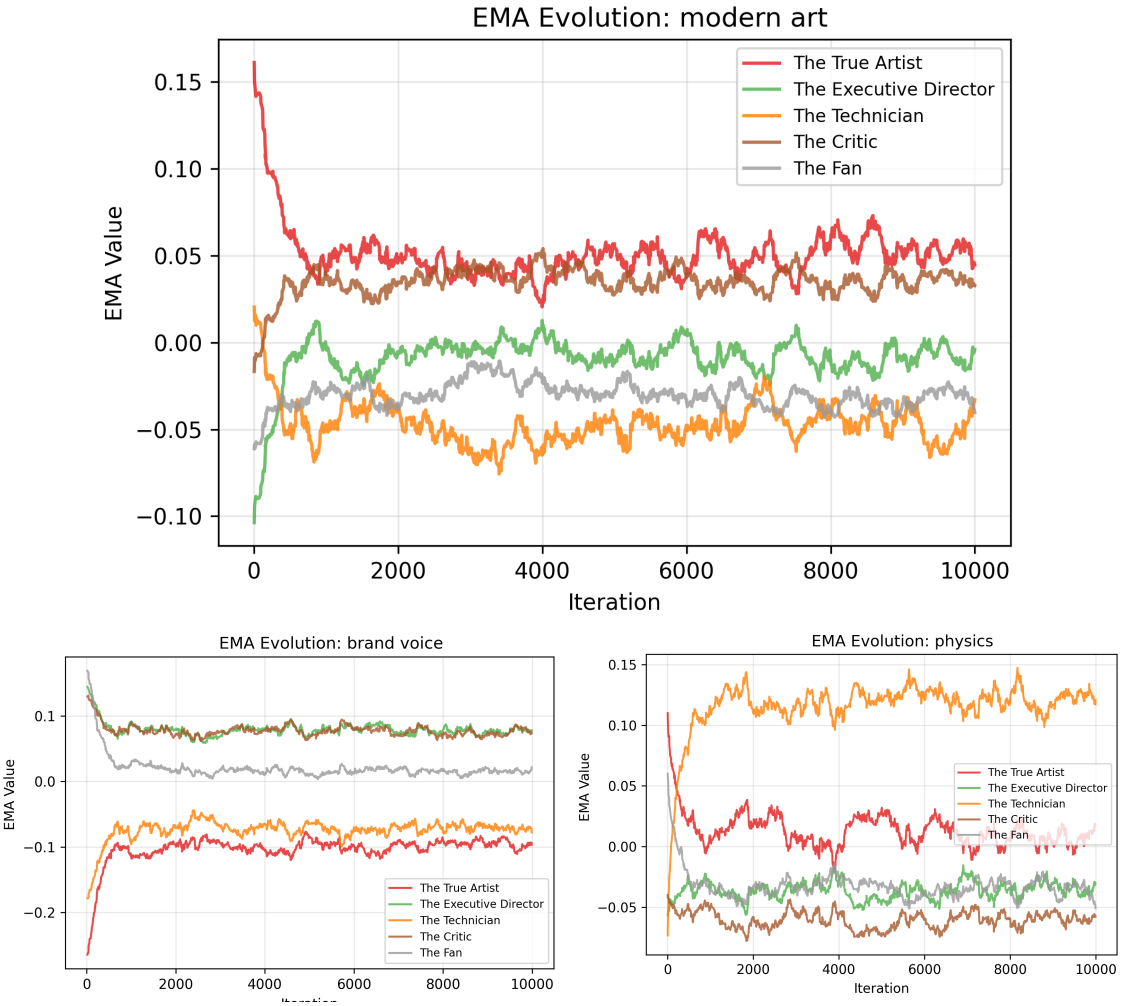
$$C = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.90 & 0.85 & 0.15 & 0.10 & 0.05 \\ 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.50 \\ 0.05 & 0.10 & 0.15 & 0.85 & 0.90 & 0.95 \end{pmatrix}$$

专家在维度 $\mathfrak{s}_1$、$\mathfrak{s}_2$、$\mathfrak{s}_3$ 上表现出色，但在 $\mathfrak{s}_4$、$\mathfrak{s}_5$、$\mathfrak{s}_6$ 上较为薄弱。反专家的特征则恰好相反。通才在所有维度上都保持 0。50 的能力。

7.4.2. 展示涌现的初始迭代。 **第 1 次迭代：** 活跃维度 $S^{(1)} = \{1, 4, 5\}$（融合专家优势）。

信号：$x^{(1)} = [0.70, -, -, 0.30, 0.60, -]$
专家的原始响应：

$$r_{1,1}^{(1)} = 0.70 - 0.95 = -0.25 \quad (\text{strong in } \mathfrak{s}_1)$$



$$r_{1,4}^{(1)} = 0.30 - 0.15 = 0.15 \quad \text{（在 } \mathfrak{s}_4\text{方面较弱）}$$
$$r_{1,5}^{(1)} = 0.60 - 0.10 = 0.50 \quad \text{（在 } \mathfrak{s}_5\text{方面较弱）}$$

平均值： $R_1^{(1)} = \frac{-0.25+0.15+0.50}{3} = \mathbf{0.133}$

通才的原始响应：

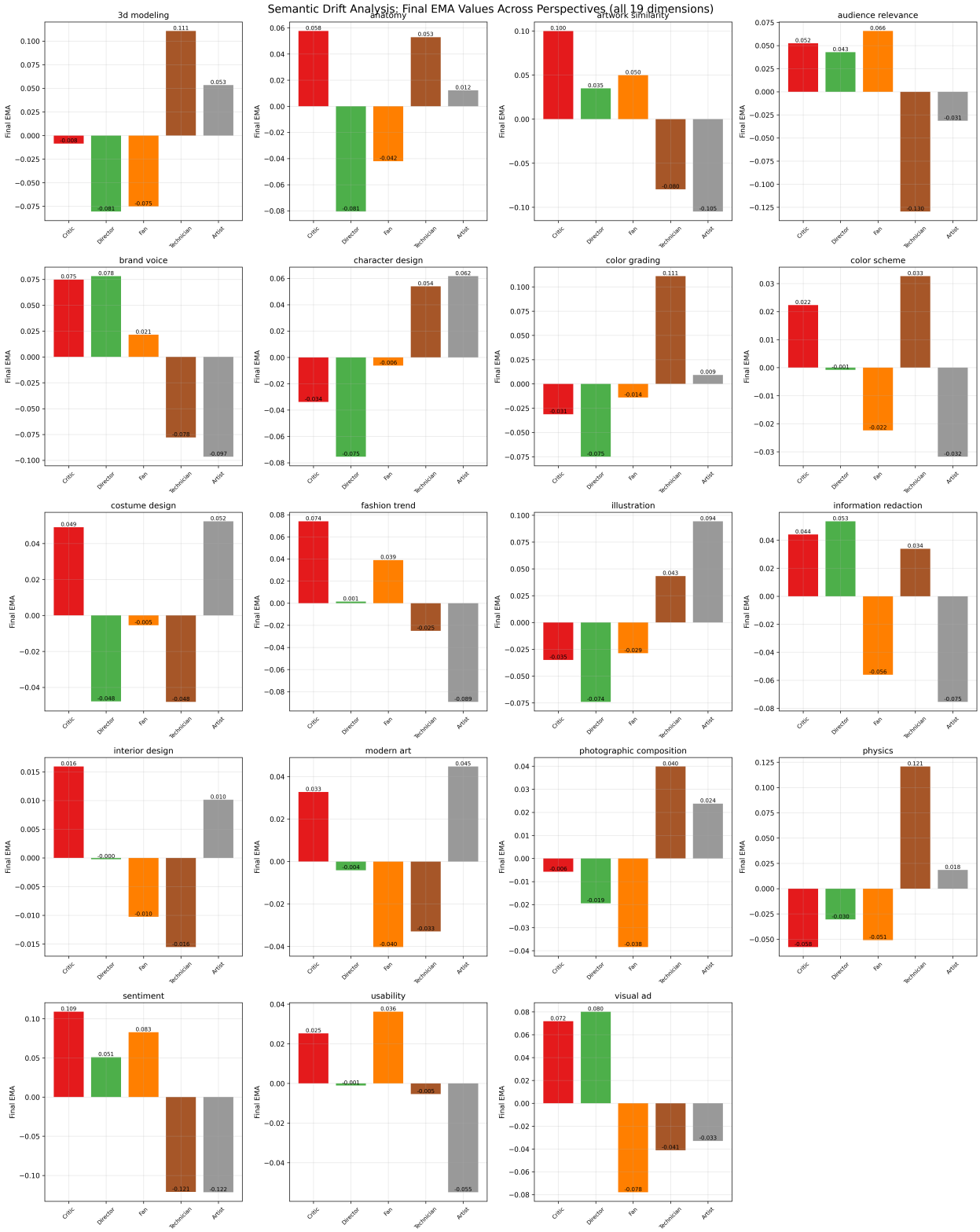
$$r_{2,1}^{(1)} = 0.70 - 0.50 = 0.20$$
$$r_{2,4}^{(1)} = 0.30 - 0.50 = -0.20$$
$$r_{2,5}^{(1)} = 0.60 - 0.50 = 0.10$$

平均值： $R_2^{(1)} = \frac{0.20-0.20+0.10}{3} = \mathbf{0.033}$

反专家的原始响应：

$$r_{3,1}^{(1)} = 0.70 - 0.05 = 0.65 \quad (\text{weak in } \mathfrak{s}_1)$$
$$r_{3,4}^{(1)} = 0.30 - 0.85 = -0.55 \quad (\text{strong in } \mathfrak{s}_4)$$
$$r_{3,5}^{(1)} = 0.60 - 0.90 = -0.30 \quad (\text{strong in } \mathfrak{s}_5)$$

平均值： $R_3^{(1)} = \frac{0.65-0.55-0.30}{3} = \mathbf{-0.067}$


Semantic Drift Analysis: Final EMA Values Across Perspectives (all 19 dimensions)
3d modeling
anatomy
artwork similarity
audience relevance
brand voice
character design
color grading
color scheme
costume design
fashion trend
illustration
information redaction
interior design
modern art
photographic composition
physics
sentiment
usability
visual ad
Final EMA
Critic
Director
Fan
Technician
Artist

关键观察： 通才的响应（0.033）最接近零，表明其在混合能力上的评估最为平衡。

共识： $G^{(1)} = 0.133 + 0.033 + (-0.067) = 0.099$ 归一化：
$\bar{G}^{(1)} = \frac{0.099}{3} = 0.033$ ——
学习信号：

$$d_1^{(1)} = 0.033 - 0.133 = -0.100 \quad \text{(Specialist penalized)}$$
$$d_2^{(1)} = 0.033 - 0.033 = 0.000 \quad \text{(Generalist neutral)}$$
$$d_3^{(1)} = 0.033 - (-0.067) = 0.100 \quad \text{(Anti-Specialist boosted)}$$

7.4.3. 历经 *1000* 次迭代后的演变。 经过 1000 次随机选取维度三元组的迭代后，系统展现出显著的行为。

混合维度的收敛行为： 当活跃维度混合了专家优势（例如， $\{1,4,5\}$ 或 $\{2,3,6\}$）时，通才始终会产生最接近共识的响应。其 $\Delta^{(t)}$ 值几乎没有漂移，始终接近零，而专家则表现出越来越多的调整。

最终 $\Delta^{(1000)}$ 值（选定维度）：

$$\Delta^{(1000)} = \begin{pmatrix} -0.08 & -0.07 & -0.06 & 0.06 & 0.07 & 0.08 \\ 0.01 & 0.01 & 0.00 & 0.00 & -0.01 & -0.01 \\ 0.07 & 0.06 & 0.06 & -0.06 & -0.07 & -0.08 \end{pmatrix}$$

7.4.4. 通才优势。这一现象源于公式（3）中的平均机制。当 $k > 1$ 个维度处于激活状态时：

(1) **专家受到高方差的影响：**在某些维度上的强劲表现会被其他维度上的弱势表现抵消。(2) **通才保持稳定性：**凭借均衡能力，其平均响应不受维度选择的影响，因而具有稳健性。(3) **系统共识趋向中间值：**当不同视角的优势互补时，整体 $G^{(t)}$ 会趋向适中值。(4) **学习会放大这一效应：**通过反馈回路，专家会学习调节自己的响应（$\Delta^{(t)}$ 调整），而通才只需进行最低限度的调整。

7.4.5. 影响。这种“通才的晋升”表明，在复杂的多维评估任务中：

- **广度可以胜过深度，**尤其是在决策需要同时考虑多个 e
  因素时。
- **系统稳健性**源于适中且稳定的能力。
- **专业专长** 若脱离互补技能，可能并非最优。

7.5. **替代示例 2：晕轮效应——唯一专家的全面晋升。**

7.5.1. 设置：单一不对称性。 为展示单一专业知识如何在耦合维度间传播，我们设定：

- $n = 5$ 视角：唯一专家（$\mathfrak{p}_1$）、通才 A（$\mathfrak{p}_2$）、通才 B（$\mathfrak{p}_3$）、通才 C（$\mathfrak{p}_4$）、通才 D（$\mathfrak{p}_5$）
- $m = 19$ 语义维度： $\mathfrak{s}_1$， $\mathfrak{s}_2$，……， $\mathfrak{s}_{19}$
- $k = 3$ 每次迭代的活跃维度
- $\alpha = 0.02$

能力矩阵 $C \in \mathbb{R}^{5\times 19}$ 具有一个显著特性:

$$C_{i,j} = \begin{cases} 0.9 & \text{if } i = 1 \text{ and } j = 14 \text{ (The Sole Expert at } \mathfrak{s}_{14}) \\ 0.5 & \text{otherwise} \end{cases}$$

除唯一专家在恰好一个维度上具备专业知识: $\mathfrak{s}_{14}$ 外，所有视角都是相同的通才。

7.5.2. 传播机制。 考虑一次迭代，其中 $\mathfrak{s}_{14}$ 与另外两个维度同时处于活跃状态。

迭代 t: 活跃维度 $S^{(t)} = \{3, 14, 16\}$。
信号: $x_3^{(t)} = 0.7$、 $x_{14}^{(t)} = 0.3$、 $x_{16}^{(t)} = 0.6$
对于唯一专家（$\mathfrak{p}_1$）:

$$r_{1,3}^{(t)} = 0.7 - 0.5 = 0.2$$
$$r_{1,14}^{(t)} = 0.3 - 0.9 = -0.6 \quad \text{(expert response)}$$
$$r_{1,16}^{(t)} = 0.6 - 0.5 = 0.1$$

平均值: $R_1^{(t)} = \frac{0.2+(-0.6)+0.1}{3} = -0.1$
对于任意通才 $\mathfrak{p}_i$（其中 $i \in \{2, 3, 4, 5\}$）:

$$r_{i,3}^{(t)} = 0.7 - 0.5 = 0.2$$
$$r_{i,14}^{(t)} = 0.3 - 0.5 = -0.2$$
$$r_{i,16}^{(t)} = 0.6 - 0.5 = 0.1$$

平均值: $R_i^{(t)} = \frac{0.2+(-0.2)+0.1}{3} = 0.033$

关键观察: 唯一专家对 $\mathfrak{s}_{14}$ 的强烈响应会使其整体平均响应转为负值，从而将其与所有其他视角区分开来，即使是在非专家维度上也是如此。

7.5.3. 晕轮效应的出现。共识: $G^{(t)} = (-0.1) + 4 \times 0.033 = 0.032$ 归一化:
$\bar{G}^{(t)} = \frac{0.032}{5} = 0.0064$ ——
学习信号:

$$d_1^{(t)} = 0.0064 - (-0.1) = 0.1064 \quad \text{(The Sole Expert)}$$
$$d_i^{(t)} = 0.0064 - 0.033 = -0.0266 \quad \text{for Generalists } i \in \{2, 3, 4, 5\}$$

关键洞见: 唯一专家收到正向学习信号（$+0.1064$），而所有通才都收到负向信号（-0.0266）。关键的是，由于耦合平均，这一调整适用于所有三个活跃维度:

$$\Delta_{1,j}^{(t+1)} = \Delta_{1,j}^{(t)} + \alpha \cdot 0.1064 \quad \text{for } j \in \{3, 14, 16\}$$

唯一专家的影响力不仅在 $\mathfrak{s}_{14}$ 中增强，也在 $\mathfrak{s}_3$ 和 $\mathfrak{s}_{16}$中增强——这些维度都不是它拥有特殊专业知识的领域!

7.5.4. 长期动态。 经过1000次迭代后，最终的 $\Delta^{(1000)}$ 矩阵显示，唯一专家在所有维度上都实现了正向调整:

$$\Delta_{1,j}^{(1000)} \approx \begin{cases} 0.08 \text{ to } 0.12 & \text{for all } j \in [19] \text{ (The Sole Expert)} \\ -0.02 \text{ to } -0.03 & \text{for all Generalists} \end{cases}$$

系统自发形成了一个等级体系，其中唯一专家事实上成了所有事情的权威，尽管其真正的专业知识仅限于维度 $\mathfrak{s}_{14}$。

7.5.5. 分析　属于晕轮效应。 这一现象是由三个相互作用的因素共同造成的　　：

(1) **能力不对称：** 唯一专家的$C_{1,\ 14} = 0.9$ 在 $\mathfrak{s}_{14}$ 处于活跃状态时，会持续产生不同的响应。

(2) **耦合维度：** 对活跃维度取均值，意味着唯一专家的专业知识信号会扩散到共同活跃的维度。

(3) **反馈放大：** 正向学习信号在多次迭代中不断累积，逐渐使唯一专家在所有维度上都建立起影响力。

数学机制：当 $\mathfrak{s}_{14}$ 以每次迭代$\frac{k}{m}$ 的概率出现时，唯一专家会累积正向调整，并将其传播到共同出现的维度。随着时间推移，这会形成一个影响力“光环”，远远超出原有专业知识的范围。

7.5.6. 影响　。 这种由初始不对称性极小所涌现的等级体系表明：

- **权威溢出：** 领域专业知识可以通过结构性耦合转化为更广泛的系统性影响力。
- **自发组织：**系统无需外部指定，便会形成领导结构。
- **平等的脆弱性：**即使能力上的细微差异，也可能逐渐累积，造成组织上的巨大不对称。

8. Discussion

在实际应用中，视角（或参与者）的属性通常未被定义或知晓，必须通过实际运用来发现。此处展示能力矩阵C，是为了透明地支持数学形式体系；但系统本身并不严格依赖于 C，而是依赖于视角 R的测量响应。矩阵C 可能未知，而且通常确实未知，但系统仍能正常运行。

8.1. 向量平均的运用。Minary 使用向量加法和平均来表示系统的瞬时状态。然而，Minary 也是一个动力系统，其中“头部”状态代表随时间演变的过程。过去的状态可以被存储，从而形成事实上的时间序列；也可以被舍弃，从而形成一个代表所有过去状态叠加的单一综合状态。

8.1.1. 第一部分：必要性证明。

我们认为，若没有平均运算，Minary 框架便无法存在。

共识机制： 系统的核心输出——共识 $G^{(t)}$，在形式上定义为各组成部分的求和。 公式（4）指出 $G^{(t)} = \sum_{i=1}^{n} R_i^{(t)}$。此外，视角的内部视图是通过对活跃维度求均值来计算的： $R_i^{(t)} = \frac{1}{k}\sum_{j \in S^{(t)}} R_{i\,j}^{(t)}$，。

收敛目标： 定理 5.1 证明，系统的稳定性完全取决于是否收敛到能力的均值。记忆矩阵 $\Delta^{(t)}$ 的极限由诸如$\bar{C}_{\cdot,\ j}$ （列均值）和 $\bar{C}$ （总均值）等项定义。

结论： 如果移除平均运算（线性叠加），系统就无法计算 $G^{(t)}$，也无法消除稳定性所需的偏差。因此，平均运算是必要的。

8.1.2. 第二部分：不足性的证明。

我们认为，仅对输入信号 $x_i^{(t)}$，$_j$ 和能力 $C_{i,\ j}$ 进行纯粹平均，无法重现 Minary 框架的行为。

证据 A：记忆变量（$\Delta^{(t)}$）

加权平均： 标准加权平均是当前输入的函数：输出$_t = f$(输入$_t$)。它没有内部状态。

Minary： Minary 的输出取决于先前的学习。 方程（2）将响应定义为 $R_i^{(t)}$, $_j = r_i^{(t)}$, $_j + \Delta_{i\,j}^{(t-1)}$ 。

证明： 在时间 t，如果两个系统具有相同的输入信号 $x^{(t)}$ 和相同的能力矩阵 C，但它们的历史（$\Delta^{(t-1)}$）不同，那么它们将产生不同的输出 。因此，仅对输入取平均值不足以确定系统的状态。

证据 B： 信号抵消（自创生属性）

取平均值： 如果对信号 x取平均值，结果与 x成正比。如果 x 翻倍，平均值也会翻倍。

Minary： 系统身份（Δ）的更新规则独立于信号幅度。方程（8）证明，含有刺激的项 $x_j^{(t)}$ 在学习步骤中会相互抵消。

证明： 系统学习的是参与者的结构，而不是信号的内容。信号的简单平均无法捕捉这种“结构学习”行为。

8.1.3. 总结。

平均值计算是一个前馈控制器 [2, 26]。它接收输入，并将其推送到输出：

$$\text{Output} = \text{Avg}(\text{Inputs}).$$

Minary 是一个反馈控制器。它测量平均值的误差，并将其添加到记忆库中：

$$\text{Output} = \text{Avg}(\text{Inputs}) + \int (\text{Error})dt.$$

8.2. **自创生特征映射。** 虽然 Minary 是竞争力矩阵 C 中前提条件的确定性结果，但该矩阵在功能上是隐藏的。

(1) 此处的 C 仅为数学形式体系之目的而提供。系统实际上依赖于 R，而 C 可能是未知的。(2) 如果 C 是未知的，系统仍能运行，因此 $(\Delta^{(t)})_{t\geq 0}$ 合理地代表系统的身份，而不是 C。(3) 矩阵 C 代表各部分的身份，而 $\Delta^{(t)}$ 代表整体身份。(4) 视角集合 P 代表闭合，因为 C（以及 R）完全取决于 P。(5) 信号 $x^{(t)}$ 代表环境，因为它不依赖于 C、P 或 $(\Delta^{(t)})_{t\geq 0}$。(6) 共识过程 $(G^{(t)})_{t\geq 0}$ 代表系统所做的事情。(7) 最后，如果不同的视角参与每次迭代，P 可以变为动态的，而系统仍能保持一个 $(\Delta^{(t)})_{t\geq 0}$。这表明该结构具有一种身份。

这为满足 Maturana 和 Varela 的判据提供了有力论据：

（1）过程网络：视角持续将输入转化为响应，以更新移动平均值 $\Delta^{(t)}$。（2）再生：移动平均值在每次迭代中持续重建——它并非静态不变，而是被主动维持。（3）具体统一体：这些视角并不直接互动，也不相互影响，而是共同参与 Minary 协议；正是该协议生成了构成系统边界的集体身份。（4）操作开放性：系统响应环境信号 x。（5）组织闭合：但是 x 会相互抵消——组织（$\Delta^{(t)}$）完全由系统内部动力学决定。（6）更替：视角可能互换、“死亡”或“诞生”，但 Minary 身份 $\Delta^{(t)}$ 仍然存在。

9. Logical Formalism for Autopoiesis

我们通过以下论证说明，Minary 符合自创生的标准。

组织闭合。 矩阵 $\Delta^{(t)}$ 会随时间存在并演化。 $\Delta^{(t)}$可能来自两个来源：外部输入 x或系统内部动力学。 方程（8）表明x 会从学习信号中抵消。因此， $(\Delta^{(t)})_{t\geq 0}$ 完全通过系统内部动力学生成——系统创造自身。

操作开放性。 共识 $G^{(t)}$ 存在，并会响应输入 $x^{(t)}$。然而，$G^{(t)} \neq x^{(t)}$；系统会转换输入，而非将其原样传递。因此，Minary 是一个会响应其环境的过程。

结论。 Minary 在组织上是闭合的（自我生产），在操作上是开放的（响应环境）。这些正是自创生的定义性特征。

10. Limitations

值得一提的是，从一开始，围绕自创生的论述就一直涉及两个“层次”之间的持续争论 [14, 23]:

(1) 自我维持系统。(2) 自我复制系统。

Minary 作为一种原语，更适合归入第 1 层，因为它是一个能够自我维持的系统。自我复制系统（第 2 层）能否由自我维持原语构建而成，仍是一个悬而未决的问题，但原语无论如何都是必要的。

关于计算系统中的自我生产。 一种可能的异议认为，尽管 Minary 呈现出组织闭合，却缺乏真正的自我生产——更新矩阵值并不等同于细胞生产蛋白质。我们对此直接作出回应。

在生物自创生中，“组成部分”是实现系统组织的物理构成物：膜、酶、结构蛋白。在计算中，与之对应的构成物是状态——实现系统组织身份的值。对于 Minary 而言，这就是过程 $(\Delta^{(t)})_{t\geq 0}$。

矩阵 $\Delta^{(t)}$ 并非静态结构；它会通过每次迭代中的反馈动力学不断再生。如果 $\Delta^{(t)}$ 被冻结，系统仍会处理输入，但随着时间推移，它将不再是同一个系统。持续生成 $\Delta^{(t)}$ 正是维持组织身份的关键。

“更新数值算不算生产？”这一问题可归结为：计算自我生产还能意味着什么？ [4, 7] quine 会生成自己的源代码，但没人会认为 quine 是自创生的。它们会复制，却不会维持自身。没有持续自我维持的自我复制，并不属于自创生。反过来说，若要求生成代码或硬件，就会使计算自创生在定义上不复存在，因为没有任何运行中的进程会生成自己的基底。 [10]

一致的标准是：系统持续生成构成其组织身份的状态。Minary 不是只生成一次，而是在每次迭代中都通过在数学上对外部信号封闭的动力学来生成。 $\Delta^{(t)}$ 这就是自我维持，也是历史上与自创生相关的两个层面中更为根本的一个。

11. 关于有用性 On Usefulness

虽然本文使用静态能力定义了一个基础模型，以形式化底层动态，但 Minary 框架支持显著的架构变体。在实际应用中，输入信号可能是确定性的，而非随机的；或者，视角本身也可能通过反馈回路不断演化。此类配置为 EMA记忆 建立了时间轨迹，使输入信号能够沿着稀疏拓扑中的路径运行。

未来的实现还可以将领域扩展到基于矩阵的信号或复值分量，以提升表达能力。在此语境下，矩阵 $\Delta^{(t)}$ 不仅仅是用于驱动共识的不透明内部状态，也可视为系统相对倾向的可查询流形——实际上，它为数据集的“主观投影”提供了直接访问途径。

因此，Minary 原语可作为工程应用的灵活基底。该系统的基本不变性在于信息的瞬时守恒，这通过全局均值的视角偏差分布来实现。在这一约束下，该框架仍可提供广泛的设计自由度，以适应具体的实现目标。

12. Conclusion

我们认为，Minary 有望成为首个经过形式化证明的自创生计算原语。我们深知这一主张的分量，并希望本文能够引发讨论，推动新的探究方向。

自创生的性质——自我维持、通过反馈实现的连贯性以及结构稳定性——为计算系统带来了新的可能性。传统的他生的架构需要外部干预来维持功能或适应新条件，而自创生原语则可能使系统能够抵御组件故障、无需重新训练即可适应，并在缺乏真实值的环境中运行。Minary 叠加的线性和交换性质还带来了计算优势： $O(n)$ 复杂度、天然的并行化能力，以及对分布式架构的适用性。而或许最引人入胜的性质是：Minary 拥有独特的相对学习动力学，支持一种可能完全相对且主观的身份形式。

Acknowledgments

本研究得到 Autopoetic 的支持。Colin Defant 获得了哈佛大学的 Benjamin Peirce Fellowship 资助。Minary 计算原语正在申请专利。

References

[1] Ashby, W. R.《控制论导论》。Chapman & Hall。（1956年）。[2] ˚Astr¨om, K. J. 与 Murray, R. M.《反馈系统：科学家与工程师导论》。普林斯顿大学出版社。（2008年）。[3] Bayes, T.《一篇旨在解决概率论问题的论文》。《伦敦皇家学会哲学汇刊》，53，370–418。1763年。[4] Bourgine, P. 与 Stewart, J.（2004年）。自创生与认知。《人工生命》，10(3)，327–345。[5] Brown, R. G.《用于需求预测的指数平滑》。《运筹学》，4(3)，289–306。（1956年）。[6] P. Diaconis 与 D. Freedman。《迭代随机函数》。《 *SIAM Rev.*》，**41** （1999年），45–76。[7] Fleischaker, G. R.（编）。《自创生——一场辩论：关于物理、生命与社会系统的争论》。《一般系统学杂志》，21(2)，专刊。（1992年）。[8] Gayler, R. W.《向量符号架构对 Jackendoff 认知神经科学挑战的回应》。《ICCS/ASCS国际认知科学会议》。2003年。

[9] 1949 Hebb, D. O.《行为的组织：神经心理学理论》。纽约：Wiley。[10] Hofstadter, D. R.《哥德尔、埃舍尔、巴赫：永恒的金色缎带》。Basic Books。1979。[11] Hopfield, J. J.《具有涌现集体计算能力的神经网络与物理系统》。《美国国家科学院院刊》，79(8)，2554–2558。（1982年）。[12] Hunter, J. S.《指数加权移动平均》。《质量技术杂志》，18(4)，203–210。（1986年）。[13] Kanerva, P.《超维计算：利用分布式表征与高维随机向量进行计算导论》。《认知计算》，1(2)，139–159。2009年。[14] Luisi, P. L.《自创生：综述与重新评价》。《自然科学》，90(2)，49–59。（2003年）。[15] Luhmann, N.《社会系统》。斯坦福大学出版社。（1995年）。[16] H. R. Maturana 与 F. J. Varela。《De M’aquinas y Seres Vivos：自创生：生命的组织》。Editorial Universitaria S.A.，1972年。[17] Varela, F. J.、Maturana, H. R. 与 Uribe, R.《自创生：生命系统的组织、其特征及模型》。《生物系统》。1974年。

[18] H. R. Maturana 与 F. J. Varela。《自创生与认知：生命的实现》。D. Reidel 出版公司，1980年。 [19] McCulloch, W. S. 与 Pitts, W.《神经活动中内在观念的逻辑演算》。《数学生物物理学通报》，5，115–133。1943年。 [20] McMullin, B.《三十年的计算自创生：综述》。《人工生命》，10(3)，277–295。（2004 年）。 [21] Minsky, M. 与 Papert, S.《感知器：计算几何导论》。麻省理工学院出版社。1969年。 [22] Pearl, J.《贝叶斯网络：用于证据推理的自激活记忆模型》。《第七届认知科学学会会议论文集》，329–334。1985年。 [23] Razeto-Barry, P.《四十年后的自创生：综述与重新表述》。《生命起源与生物圈演化》，42(6)，543–567。（2012年）。 [24] Rosenblatt, F.《感知器：用于大脑中信息存储与组织的概率模型》。《心理学评论》。1958年。 [25] Rumelhart, D. E.、Hinton, G. E. 与 Williams, R. J.《通过误差反向传播学习表征》。《自然》，323(6088)，533–536。1986 年。 [26] Wiener, N.《控制论：或动物与机器中的控制和通信》。麻省理工学院出版社。（1948年）。 [27] von Bertalanffy, L.《一般系统论：基础、发展与应用》。George Braziller。（1968年）。 [28] Connor, Daniel。

The Minary Primitive of Computational Autopoiesis（v1.0.0）。Autopoetic，2026年。数字对象标识符：10.5281/zenodo.18135333。

Autopoetic, New York, NY, USA
Email address: daniel@danielconnor.com

Department of Mathematics, Harvard University, Cambridge, MA 02138, USA
Email address: colindefant@gmail.com