arXiv:2601.04513v1 [math.CA] 8 Jan 2026

用于阻抗形式斯图姆-刘维尔方程解及相关边值问题的贝塞尔函数的诺伊曼级数

阿比盖尔·G. M´arquez-Hern´andez[1], V´ıctorA. Vicente-Ben´ıtez[2]1瓜纳华托大学莱昂校区科学与工程部，León Lomas del Bosque 103号，Lomas del Campestre，莱昂，瓜纳华托州，邮编37150，墨西哥2墨西哥国立自治大学数学研究所胡里基亚校区，胡里基亚大道3001号，胡里基亚，克雷塔罗州，邮编076230，墨西哥 ag.marquezhernandez@ugto.mx, va.vicentebenitez@im.unam.mx,

摘要

我们给出一种以球贝塞尔函数的诺伊曼级数表示阻抗形式斯图姆-刘维尔方程解的方法

$$(\kappa(x)u')' + \lambda\kappa(x)u = 0, \quad 0 < x < L,$$

在 $\kappa \in W^{1,2}(0, L)$ 的情形下，且在所关注的区间内没有零点。这种表示中的 x 相关系数可通过简单的递归积分过程显式构造。此外，我们推导了截断误差的界；当谱参数 $\rho = \sqrt{\lambda}$ 满足形如 $|\mathrm{Im}\ \rho| \leq C$ 的条件时，这些界是一致的。基于这些表示，我们开发了一种求解谱问题的数值方法，能够以不退化的精度计算特征值。

关键词： 常微分方程的谱理论；斯图姆-刘维尔问题；贝塞尔函数的诺伊曼级数；变换算子；数值分析。

MSC 分类： 34A25；34B09；34B24；34L16；41A30；47G20。

1 引言

本文旨在为阻抗形式的斯图姆-刘维尔方程（SLEIF）的解构造解析级数表示

$$-\frac{d}{dx}\left(\kappa(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = \lambda\kappa(x)u(x), \qquad 0 < x < L,\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

其中，$\kappa \in W^{1,2}(0, L)$ 是区间 $[0, L]$ 上的非零函数，称为该方程的电导率函数。

形式为 (1) 的方程出现在若干数学物理问题中，尤其是 $\kappa(x) > 0$。在声学理论中，方程 (1) 称为 *Webster*号角方程 [37]，它描述了由旋转阻抗函数 $a(x) = \sqrt{\kappa(x)}$ 生成的号角中声波的传播。同样，地球物理学中的此类直接和逆特征值问题涉及 [6, 8, 30]，波传播 [7, 38]，以及经典振动理论 [11, 33]。一个有趣的应用是根据声学测量确定人类声道的形状 [2]。

当电导率函数属于类 $W^{2,2}(0, L)$，方程 (1) 可变换为如下形式的 Schr¨odinger 方程

$$-v''(x) + \frac{a''(x)}{a(x)}v(x) = \lambda v(x), \qquad 0 < x < L,\ \lambda \in \mathbb{C},$$

通过刘维尔变换 $v(x) = a(x)u(x)$ [9]。若 $\kappa \in W^{1,2}(0, L)$，所得的 Schr¨odinger 方程必须理解为具有分布势 [35] 的方程。

本文着重于求解直接的斯图姆-刘维尔问题，主要考虑狄利克雷型和诺伊曼型边界条件。众所周知，对于正则的斯图姆–刘维尔问题，计算特征值可归结为求特征方程的零点，而该方程由谱参数 $\rho = \sqrt{\lambda}$ 的一个整函数给出。

求解此类问题的标准数值方法包括射击法和 Pr¨ufer 方法（例如参见 [31]），以及有限差分格式 [10]。较新的直接斯图姆–刘维尔型问题数值解方法包括例如基于 [24], sinc–Galerkin 展开的 MATSLICE package [3]，，以及 [36]，中提出的方法，该方法将斯图姆–刘维尔方程改写为关于 Schwarzian 导数的形式。在这些方法中，系数需要具备足够的正则性，才能通过刘维尔变换将问题转化为等价的 Schr¨odinger 方程。然而，这类纯数值方法不易推广到更广泛的问题类别，例如涉及复值系数或计算额外谱数据（包括韦尔函数）的问题。

有效计算谱数据（特征值和特征函数）的一种实用工具，是将方程（1）的解表示为关于参数 ρ的解析函数级数。其中一种表示方法是将解展开为谱参数 ρ的幂级数，这种技术通常称为*SPPS*方法 [5, 14, 16]。 x 中的系数称为形式幂，可通过实用的递归积分过程计算 [16]。在这种框架下，特征方程可通过截断级数得到的多项式来近似。近年来，这种方法已广泛用于分析斯图姆–刘维尔型问题、[5, 16]，Dirac型系统 [13]，方程铅笔、 [21]，高阶微分方程[17]，以及其他相关问题。然而，这类级数展开的一个缺点是，关于谱参数的近似仅在包含展开点的紧集上一致 ρ_0。因此，计算较大的特征值通常需要对级数进行多次谱平移。这促使人们寻找在整个实轴上一致收敛的表示方法。这类表示可以通过积分变换算子构造。对于具有正则势的薛定谔方程，已知其解具有带有一个¨核的积分表示 L^2 。[26]基于

将该核按适当的正交多项式级数展开，可以推导出解的级数表示，例如球贝塞尔函数的诺伊曼级数（*NSBF*）[15]。这类级数有一个优点：关于谱参数的近似在一个条带 $|\mathrm{Im}\ \rho| \le C$上一致¨。此外，对于薛定谔方程，它们能够以一致的误差界计算高阶特征值 [15]。对于形式为（1）的方程，通常在假设 $\kappa \in W^{2,\,2}(0,\ L)$成立的条件下，通过刘维尔变换 [19], 得到这种展开；对于 $\kappa \in C^1[0, L]$ ，此类级数的存在性也已得到证明 [22]。

本文的首要目标是证明，在 $\kappa \in W^{1,\,2}(0, L)$的情况下，解 $e_\kappa(\rho, x)$（1）存在 NSBF 级数表示，且满足 $e_\kappa^{(k)}(\rho,0) \ = (i\rho)^k, k = 0,1$，其形式如下：

$$e_\kappa(\rho, x) = e^{i\rho x} + \sum_{n=0}^{\infty} i^n \alpha_n(x) j_n(\rho x),$$

其中， $j_n(z)$表示球贝塞尔函数。我们还将提出一种简单的积分过程，用于显式构造系数 $\{\alpha_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$。通过使用与方程（1）相关的积分微分变换算子，可推导出 NSBF 表示的存在性。解 $e_\kappa(\rho, x)$具有积分表示，其中涉及定义在三角区域 $0 < x < L$, $-x < t < x$ [35, Sec.10]上的 $W^{1,2}$类核 $K_\kappa(x, t)$。将核 $K_\kappa(x, t)$展开为勒让德多项式的傅里叶级数，即可导出所需的 NSBF 表示。由于变换核具有正则性，我们证明 NSBF 级数的余项一致地为 $O\left(\frac{1}{N}\right)$阶，其中$x \in (0, L]$ 且 $|\mathrm{Im}\ \rho| \le C$。此外，若电导率函数属于 C^p类，则变换核也属于 C^p类，误差阶为 $O\left(N^{-p-\frac{1}{2}}\right)$型。我们进一步证明，该级数可以逐项求导两次，代入方程（1）后可得到 α_0, α_1的显式公式。其余系数 α_n 则可通过直接的积分过程递归求得。

本文的第二部分致力于将所得到的 NSBF 表示应用于谱边值问题的求解。我们首先考察具有狄利克雷边界条件的问题的主要性质，并确立其谱数据的关键特征，包括特征值的渐近式行为以及相应特征函数的完备性。随后，我们利用 NSBF 表示构造与狄利克雷问题相关的韦尔函数。经典的韦尔函数解析表示通常采取包含谱数据的 Mittag–Leffler 型有理级数形式，但这类展开在数值计算中往往收敛缓慢。据我们所知，目前尚无韦尔函数的其他解析表示，因此 NSBF 级数提供了一种新颖且计算高效的方法。利用达布变换 [34], 我们证明，具有诺伊曼条件的电导率为 κ 的方程所对应的问题，与电导率为 $1/\kappa$的狄利克雷问题等价。除第一个特征值外，这两个问题具有相同的谱数据。对于具有一般自伴边界条件的斯图姆–刘维尔问题，也可以得到类似的关系。最后，我们通过数值示例说明所提出的方法在计算特征值和韦尔函数方面的有效性，其中包括一个具有精确特征方程的方程，以及另一个具有非光滑电导率系数的方程。

本文的结构如下。第 2 节介绍有关阻抗形式的斯图姆–刘维尔方程及其解的预备知识，包括谱参数幂级数和积分表示。第 3 节推导变换核的傅里叶级数表示，并基于该表示获得解的 NSBF 展开。第 4 节致力于 NSBF 系数的推导与显式构造。第 5 节研究与阻抗方程相关的边值问题，讨论这些问题的主要性质，并利用 NSBF 表示求解这些问题。最后，第 6 节给出数值示例，以展示所提出方法的有效性。

2 SLEIF 的变换算子背景

全文中，我们使用记号 $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$。设 $I \subset \mathbb{R}$ 为一个区间。对于定义在 I 上的正可测函数 w 和 $1 \le p < \infty$，我们用 $L^p_w(I)$ 表示关于权函数 w 可积的可测函数空间。当 $w \equiv 1$ 时，我们简记为 $L^p(I)$。我们使用标准记号 $W^{k,\,p}(I)$ 表示索伯列夫空间，该空间由 $L^p(I)$ 中一阶 k 分布导数属于 $L^p(I)$ 的函数构成。高维定义域上的函数空间也采用类似记号。

考虑阻抗形式的斯图姆-刘维尔方程（SLEIF）

$$-\frac{d}{dx}\left(\kappa(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = \lambda\kappa(x)u(x), \quad 0 < x < L,\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

其中，函数 $\kappa \in W^{1,\,2}(0,\ L)$（一般为复值）在整个区间段 $[0, L]$ 上不为零，并满足归一化条件 $\kappa(0) = 1$。函数 κ 称为与方程（相对应的电导率函数2），其对应的阻抗函数定义为 $a^2(x) := \kappa(x)$。方程（2）可改写为

$$-u''(x) + q(x)u'(x) = \rho^2 u(x), \qquad \text{where } q(x) = -\frac{\kappa'(x)}{\kappa(x)} \text{ and } \rho^2 = \lambda. \tag{3}$$

令 $e_\kappa(\rho, x)$ 为满足初始条件的 (2) 的唯一解

$$e_\kappa(\rho, 0) = 1 \quad \text{and} \quad e'_\kappa(\rho, 0) = i\rho. \tag{4}$$

解 $e_\kappa(\rho,\ x)$ 具有若干种解析表示。第一种表示采用所谓的谱参数幂级数（SPPS）给出。定义函数系$\{\varphi_\kappa^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$（称为与 κ 相关的形式幂 ）如下：

$$\varphi_\kappa^{(0)}(x) = 1, \tag{5}$$

$$\varphi_\kappa^{(1)}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\kappa(t)}, \tag{6}$$

$$\varphi_\kappa^{(k)}(x) = k(k-1)\int_0^x \frac{1}{\kappa(t)}\left[\int_0^t \kappa(s)\varphi_\kappa^{(k-2)}(s)ds\right]dt, \quad k \ge 2. \tag{7}$$

定理 1（[5, 16]）解 $e_\kappa(\rho,\ x)$ 具有 *SPPS* 表示

$$e_\kappa(\rho,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\rho)^k\varphi_\kappa^{(k)}(x)}{k!}. \tag{8}$$

该级数关于 x 在 $[0,L]$上一致且绝对收敛，逐项求导一次后所得的级数也如此。二阶导数级数在$L^2(0,\ L)$中收敛。该级数关于 ρ 在复平面的紧子集上一致且绝对收敛。

已知解 $e_\kappa(\rho,\ x)$具有一种积分表示，其中涉及一个 L^2 核，并且该核保持电导率 κ的某些光滑性。下面的定理总结了 [22,第 3], [34, 节（第5节）和 6]及 [35, 定理 40]中给出的结果。

定理 2 对于每个 $x\in(0,\ L]$，解 $e_\kappa(\rho,\ x)$ 具有如下积分表示

$$e_\kappa(\rho,x)=e^{i\rho x}-i\rho\int_{-x}^{x}K_\kappa(x,t)e^{i\rho t}dt, \tag{9}$$

其中核 $K_\kappa(x,\ t)$ 属于 $W^{1,\ 2}(\mathcal{T}_L)\cap C(\mathcal{T}_L)$，其中 $\mathcal{T}_L:=\{(x,\ t)\in\mathbb{R}^2\,|\,0<x<L,\ |t|<x\}$ *(*见图 *1)*，并满足 *Goursat*条件

$$K_\kappa(x,x)=1-\frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}},\quad K_\kappa(x,-x)=0. \tag{10}$$

此外，如果 $\kappa\in C^p[0,L]$ 且 $p\in\{1,2\}$，因此 $K_\kappa\in C^p(\overline{\mathcal{T}_L})$，

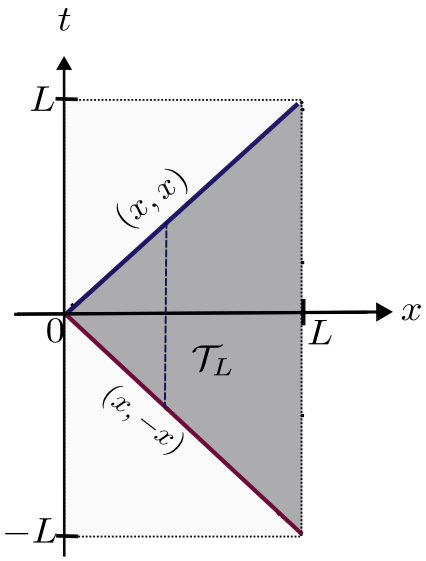


图 1：定义域 $\mathcal{T}_L$。积分域 $-x<t<x$ 由蓝色虚线标出。

核 K_κ 称为方程 (2) 的标准变换 核。定义算子

$$\mathbf{T}_\kappa u(x) := u(x) - \int_{-x}^{x} K_\kappa(x,t)u'(t)dt, \quad u \in C^1[-L,L]. \tag{11}$$

因此，关系式（9）可写为

$$e_\kappa(\rho,x) = \mathbf{T}_\kappa[e^{i\rho x}].$$

算子 $\mathbf{T}_\kappa$ 称为方程（2）的典范变换算子 [22, 34, 35] .

定理 3 ([34, 35]) 算子 T_κ: $W^1,2(-L,L) \to W^1,2(0,L)$ 是有界的，并且满足：若 $v \in W^3,2(-L,L)$ 是区间 $(-L,L)$ 上 $v'' + \rho^2 v = 0$ 的一个解，则 $u = T_\kappa v$ 是方程 (2) 的一个解，且满足初始条件 $u(0) = v(0)$ 和 $u'(0) = v'(0)$。此外，下列变换性质成立：

$$\mathbf{T}_\kappa[x^k] = \varphi_\kappa^{(k)}(x), \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{12}$$

3 贝塞尔函数的诺伊曼级数表示

3.1 核的傅里叶-勒让德表示

令 $\{P_n(z)\}_{n=0}^\infty$ 为区间 $L^2(-1,1)$ 上的勒让德多项式，其范数为 $\|P_n\|_{L^2(-1,1)} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$, $n \in \mathbb{N}_0$。众所周知，$\{P_n(z)\}_{n=0}^\infty$ 是 $L^2(-1,1)$ 的正交基。对于固定的 $x \in (0,L]$, $K_\kappa(x,\cdot) \in L^2(-x,x)$，因此它可表示为关于勒让德多项式的傅里叶展开：

$$K_\kappa(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x)}{x} P_n\left(\frac{t}{x}\right). \tag{13}$$

该级数关于 t 在 $L^2(-x,x)$ 中收敛，傅里叶-勒让德系数为

$$a_n(x) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-x}^{x} K_\kappa(x,t)P_n\left(\frac{t}{x}\right)dt. \tag{14}$$

写作 $P_n(z) = \sum_{k=0}^n l_{k,n} z^k$，我们得到关于形式幂的系数 $\{a_n(x)\}_{n=0}^\infty$ 的表示式。

Prop命题 4 函数 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ 属于 $W^{2,2}(0,L)$，并满足以下关系式

$$a_n(x) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{n} \frac{l_{k,n}}{(k+1)}\left(\frac{x^{k+1} - \varphi_\kappa^{(k+1)}(x)}{x^k}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{15}$$

证明。 论证与 [22, 命题。 38], 的证明完全相同，只需将 [22,定理。 37] 替换为 [34,定理。 37],并结合变换性质（12）。 ■

注记 5 给定特征条件 (10)

$$K_\kappa(x,x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}},$$

利用傅里叶–勒让德级数表示 (13) 以及以下事实 $P_n = \binom{x}{x} = P_n(1) = 1$ 对每个 $n \in \mathbb{N}_0$（参见 *[32, 第 124]*页上的公式 ***(17)***），我们得到恒等式

$$1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x)}{x}. \tag{16}$$

将 N 阶部分和（13）记为 $K_{\kappa,N}(x,t) := \sum_{n=0}^{N} a_n(x) P_n\left(\frac{t}{x}\right)$.

命题 6（[22], **命题 37**）设 $p \in \{0,1\}$。若 $\kappa \in C^{p+1}[0,L]$，则存在一个常数 $c_p > 0$ 使得以下不等式成立

$$\sup_{\substack{0<x\le L \\ -x\le t\le x}} |K_\kappa(x,t) - K_{\kappa,N}(x,t)| \le \frac{c_p M_p L^{p+1}}{N^{p+\frac{1}{2}}} \quad \forall N > p, \tag{17}$$

其中 $M_p := \left\| \frac{\partial^{p+1} K_\kappa}{\partial t^{p+1}} \right\|_{C(\mathcal{T}_L)}$.

令 $g \in L^2(-1,1)$，并令 $\widehat{g}_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\langle g, P_n\rangle_{L^2(-1,1)}$ 表示 $n \in \mathbb{N}_0$。令 $\mathcal{P}_N[-1,1]$ 表示 $[-1,1]$ 上次数至多为 N的多项式函数集合，并令$E_N^2(f) = \inf_{p\in\mathcal{P}_N[-1,1]} \|g-p\|_{L^2(-1,1)}$。在这种情况下，$E_N^2(f) = \|g - g_N\|_{L^2(-1,1)}$，其中 $g_N = \sum_{n=0}^{N} \widehat{g}_n P_n$。

下面的引理描述了当 $g \in W^{1,2}(-1,1)$ 时，傅里叶–勒让德系数 $\widehat{g}_n$ 以及误差 $E_N^2(g)$ 的衰减率。

引理 7 存在正常数 c_0 和 c_1，使得对于每个 $g \in W^{1,2}(-1、1)$，以下估计成立：

(i) $E_N^2(g) \le \frac{c_0}{N}\|g'\|_{L^2(-1,1)}$ 对所有 $N \in \mathbb{N}$ 均成立。*(ii)* $|\widehat{g}_n| \le \frac{c_1}{\sqrt{n}}\|g'\|_{L^2(-1,1)}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。

证明。对于 (i)，根据 [23, 定理 1]，，存在一个与 N和 g无关的常数 $c_0 > 0$，使得 $E_N^2(g) \le \frac{c_0}{N}\|\Delta \cdot g'\|_{L^2(-1,1)}$，其中 $\Delta(z) := \sqrt{1-z^2}$，$-1 \le z \le 1$。由于$\|\Delta \cdot g'\|_{L^2(-1,1)} \le \|g'\|_{L^2(-1,1)}$，估计 (i) 得证。

对于（ii），我们使用第 126] 页的递推关系 [32, 公式（32）

$$P_n = \frac{1}{2n+1}\left(P'_{n+1} - P'_{n-1}\right) \quad \text{for } n \ge 1,$$

以及边界值 $P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$ [32, 第 124] 页的公式（17）。对 $\widehat{g}_n$ 进行分部积分，得到

$$\widehat{g}_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f\left(\frac{P'_{n+1} - P'_{n-1}}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} f' P_{n-1} - \int_{-1}^{1} f' P_{n+1}\right).$$

应用柯西-布尼亚科夫斯基-施瓦茨不等式，得到

$$|\widehat{g}_n| \le \frac{1}{2}\|f'\|_{L^2(-1,1)}\left(\sqrt{\frac{2}{2n-1}}+\sqrt{\frac{2}{2n+3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\|f'\|_{L^2(-1,1)}\left(\frac{1}{\sqrt{n-\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{n+\frac{3}{2}}}\right).$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1\pm\frac{1}{2}}}=1$，可知存在一个常数 $C>0$，使得 $\frac{1}{\sqrt{n+1\pm\frac{1}{2}}}\le\frac{C}{\sqrt{n}}$ 对 $n\ge 1$ 成立。

取 $c_1=\frac{C}{\sqrt{2}}$，即可得到 (ii)。 ■

由此引理，在一般情形下，当 $\kappa\in W^{1,2}(0,L)$ 时，我们得到核 K_κ 的傅里叶-勒让德系数及误差估计。

定理 8 设 $\kappa\in W^{1,2}(0,L)$。定义 $d_\kappa:=\left\|\frac{\kappa'}{2\kappa}\right\|_{L^2(0,\ell)}$ 并令

$$M_{\kappa,L}:=8L\|\kappa^{-1/2}\|_{L^\infty(0,L)}(Ld_\kappa+2d_\kappa^2(L^2d_\kappa^2+L)e^{Ld_\kappa}). \tag{18}$$

设 c_0 和 c_1 为引理 7中的常数。以下估计成立：

$$(i)\quad \sup_{0<x\le L}\|K_\kappa(x,\cdot)-K_{\kappa,N}(x,\cdot)\|_{L^2(-x,x)}\le\frac{c_0\sqrt{LM_{\kappa,L}}}{N}\ for\ N\in\mathbb{N}.$$

$$(ii)\quad \sup_{0<x\le L}|a_n(x)|\le\frac{c_1\sqrt{LM_{\kappa,L}}}{\sqrt{n}}\ for\ n\in\mathbb{N}.$$

证明。固定 $x\in(0,\ell]$，并考虑 $g_x(z)=K_\kappa(x,xz)$，$-1\le z\le 1$。因此 $g_x\in W^{1,2}(-1,1)$，其中 $g_x'(z)=x\left(\frac{\partial K_\kappa}{\partial t}\right)(x,xz)$。在公式 (14) 中作变量代换可知，$a_n(x)=x(g_x)_n$，且 (13) 恰好是 g_x 的傅里叶-勒让德级数。现在，根据 [35, 注记39]，

$$\sup_{0<x\le L}\int_{-x}^{x}\left|\frac{\partial K_\kappa(x,t)}{\partial t}\right|^2dt\le M_{\kappa,L}.$$

因此

$$\|g_x'\|^2_{L^2(-1,1)}=x^2\int_{-1}^{1}\left|\left(\frac{\partial K_\kappa}{\partial t}\right)(x,xz)\right|^2dx=x\int_{-x}^{x}\left|\frac{\partial K_\kappa(x,t)}{\partial t}\right|^2dt\le LM_{\kappa,L}.$$

因此，结论由引理 7得出。 ■

3.2 解的 NSBF 表示

代入 将傅里叶–勒让德级数（13）代入积分表示（9，得到

$$e(\rho,x)=e^{i\rho x}-i\rho\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(x)}{x}\int_{-x}^{x}P_n\left(\frac{t}{x}\right)e^{i\rho t}dt.$$

级数与积分的次序互换，依据是变量 t 关于 $L^2(-x,\ x)$ 的范数收敛。注意，

$$\int_{-x}^{x} P_n\left(\frac{t}{x}\right) e^{i\rho t}dt = \int_{-x}^{x} P_n\left(\frac{t}{x}\right)\cos(\rho t)dt + i\int_{-x}^{x} P_n\left(\frac{t}{x}\right)\sin(\rho t)dt,$$

由于 $P_{2n}(z)$ 和 $P_{2n+1}(z)$ 分别为偶函数和奇函数，我们得到

$$\int_{-x}^{x} P_n\left(\frac{t}{x}\right) e^{i\rho t}dt = \begin{cases} 2\int_0^x P_n\left(\frac{t}{x}\right)\cos(\rho t)dt, & \text{if } n \text{ is even},\\ 2i\int_0^x P_n\left(\frac{t}{x}\right)\sin(\rho t)dt, & \text{if } n \text{ is odd}, \end{cases}$$

并利用 [28,第 433], 页中的公式 2.17.7

$$\int_0^a \begin{Bmatrix} P_{2k}\left(\frac{t}{a}\right)\cos(bt) \\ P_{2k+1}\left(\frac{t}{a}\right)\sin(bt) \end{Bmatrix} dt = (-1)^k\sqrt{\frac{\pi a}{2b}}J_{2k+\delta+\frac{1}{2}}(ab),\ \delta = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix},\ a>0,$$

其中，$J_\nu(z)$ 表示第一类贝塞尔函数。若考虑球贝塞尔函数 $j_\nu(z) := \sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{\nu+\frac{1}{2}}(z)$，则得到公式

$$\int_0^a \begin{Bmatrix} P_{2k}\left(\frac{t}{b}\right)\cos(bt) \\ P_{2k+1}\left(\frac{t}{b}\right)\sin(bt) \end{Bmatrix} dt = (-1)^k a j_{2k+\delta}(ab),\ \delta = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix},\ a>0.$$

同样，由于 $P_n(z)$ 的奇偶性，我们得到

$$\int_{-x}^{x} P_n\left(\frac{t}{x}\right) e^{i\rho t}dt = 2xi^n j_n(\rho x).$$

令 $\alpha_n(x) = 2a_n(x)$，我们得到级数表示

$$e(\rho,x) = e^{i\rho x} - i\rho\sum_{n=0}^{\infty} i^n\alpha_n(x)j_n(\rho x). \tag{19}$$

命题 9 对于 $x\in(0,L]$ 和 $\rho\in\mathbb{C}$，解 $e_\kappa(\rho,x)$ 具有级数表示 (19)。该级数在 x上逐点收敛，并在 ρ 上关于 $\mathbb{C}$的一切紧子集上一致收敛。此外，固定 $N\in\mathbb{N}$ 和 $x\in(0,L)$ 后，若令

$$e_{\kappa,N}(\rho,x) := e^{i\rho x} - i\rho\sum_{n=0}^{N} i^n\alpha_n(x)j_n(\rho x), \tag{20}$$

那么，对于任意满足 $|\mathrm{Im}\ \rho|\le C$, $C>0$ 的 $\rho\in\mathbb{C}$，我们有如下估计

$$\left|\frac{1}{\rho}(e_\kappa(\rho,x) - e_{\kappa,N}(\rho,x))\right| \le \varepsilon_N(x)\sqrt{\frac{\sinh(2LC)}{LC}}, \tag{21}$$

其中

$$\varepsilon_N(x) := \|K_\kappa(x,\cdot) - K_{k,N}(x,\cdot)\|_{L_2(-x,x)} \le \frac{c_0\sqrt{LM_{\kappa,L}}}{N}, \tag{22}$$

其中 c_0 如引理 7 中所述，且 $M_{\kappa,L}$ 如定理8中所述。

此外，若 $\kappa\in C^{p+1}[0,L]$ 对某个 $p\in\{0,1\}$ 成立，则

$$\varepsilon_N(x) \le \frac{2C_pM_pL^{p+2}}{N^{p+\frac{1}{2}}} \qquad \forall x\in(0,L],\ N>p, \tag{23}$$

其中 C_p 和 M_p 如命题 6中所给。

证明。 接下来只需证明估计式（21）。令 $K_{\kappa,N}(x,t)=\sum_{n=0}^{N} a_n \underline{(x^x P_n\left(\frac{t}{x}\right))}$。显然，

$$e_{\kappa,N}(\rho,x)=e^{i\rho x}-i\rho\int_{-x}^{x}K_{\kappa,N}(x,t)e^{i\rho t}dt.$$

因此，

$$\frac{1}{\rho}(e_\kappa(\rho,x)-e_{\kappa,N}(\rho,x))=-i\int_{-x}^{x}(K_\kappa(x,t)-K_{\kappa,N}(x,t))e^{i\rho t}dt,$$

且 $\rho=0$处的奇点是可去的。应用柯西–布尼亚科夫斯基–施瓦茨不等式可得

$$\left|\frac{1}{\rho}(e(\rho,x)-e_N(\rho,x))\right|\le\left(\int_{-x}^{x}|K_\kappa(x,t)-K_{\kappa,N}(x,t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-x}^{x}|e^{i\rho t}|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

令 $\varepsilon_N(x)=\left(\int_{-x}^{x}|K_\kappa(x,t)-K_{\kappa,N}(x,t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=\|K_\kappa(x,\cdot)-K_{\kappa,N}(x,\cdot)\|_{L_2(-x,x)}$，并注意到

$$\int_{-x}^{x}|e^{i\rho t}|^2dt=\int_{-x}^{x}e^{-2\operatorname{Im}\rho}dt=\frac{\sinh(2\operatorname{Im}\rho x)}{\operatorname{Im}\rho x}.$$

由于 双曲正弦(2ξ) ξ 关于偶函数且在 $\xi\ge0$上递增，且由于 $|\operatorname{Im}\rho x|\le LC$，我们得到（21）。最后，不等式（22）和（23）分别由定理 8（i）和命题 6得到。

■

注意，（21）意味着该近似在 $x\in(0,L]$ 上是一致的，并且对于所有 ρ 属于条带 $|\operatorname{Im}\rho|\le C$的 $\rho\in\mathbb{R}$，该近似也是一致的。特别地，对于所有 $\rho\in\mathbb{R}$，该近似都是一致的。令我们考虑满足初始条件的方程（$C_\kappa(\rho,x)$ 和 $S_\kappa(\rho,x)$ 的解（2）

$$C_\kappa(\rho,0)=1,\ C'_\kappa(\rho,0)=0, \tag{24}$$
$$S_\kappa(\rho,0)=0,\ S'_\kappa(\rho,0)=1. \tag{25}$$

因此，$C_\kappa(\rho,x)$ $S_\kappa(\rho,x)$ 构成方程 (2) 的基本解组。直接计算可得

$$C_\kappa(\rho,x):=\frac{e_\kappa(\rho,x)+e_\kappa(-\rho,x)}{2},\quad S_\kappa(\rho,x):=\frac{e_\kappa(\rho,x)-e_\kappa(-\rho,x)}{2i\rho}. \tag{26}$$

利用 (26) 以及球贝塞尔函数的奇偶性 $j_n(-z)=(-1)^n j_n(z)$（参见 [1, 公式 (10.1.3)]），我们推导出以下解的 NSBF 表示 $C_\kappa(\rho,x)$ 和 $S_\kappa(\rho,x)$。

命题 10 对于 $x\in(0,L]$ 和 $\rho\in\mathbb{C}$，解 $C_\kappa(\rho,x)$ 和 $S_\kappa(\rho,x)$ 具有以下 *NSBF* 表示

$$C(\rho,x)=\cos(\rho x)+\rho\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\alpha_{2k+1}(x)\,j_{2k+1}(\rho x), \tag{27}$$
$$S(\rho,x)=\frac{\sin(\rho x)}{\rho}+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\alpha_{2k}(x)\,j_{2k}(\rho x). \tag{28}$$

级数 在 $x\in(0,L]$ 上一致收敛，并且关于 ρ 在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致收敛。

级数（27）和（28）的部分和余项满足与（21）和（22）类似的估计。

注释 11 由关系式 (15)我们得到前几个系数

$$\alpha_0(x) = x - \varphi_\kappa^{(1)}(x), \tag{29}$$

$$\alpha_1(x) = \frac{3x}{2} - \frac{3}{2x}\varphi_\kappa^{(2)}(x). \tag{30}$$

下面的引理将有助于分析 NSBF 级数的可微性。**引理**

12 ***(i)*** 设 $Q_k(\zeta)$ 是一个次数为 $k \in \mathbb{N}$ 的多项式。对于任意 $z \in \mathbb{C}$，该级数 ^{es}

$$\sum_{n=0}^{\infty} |Q_k(n)||j_n(z)|^2$$

在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致收敛。

(ii) 设 $f \in L^2(-1、1)$ 以及 $\widehat{f_n} := \left(n + \frac{1}{2}\right) \langle f、 P_n\rangle_{L^2(-1、1)}$、 $n \in \mathbb{N}$。则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}_n j_n(z)$ 满足估计

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f_n}||j_n(z)| \le \|f\|_{L^2(-1,1)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+2}{2}|j_n(z)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

并且在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致绝对收敛。

证明。

(i) 我们来估计 [1, <style id='4'}62]

$$|j_n(z)| \le \sqrt{\pi}\left|\frac{z}{2}\right|^n \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}.$$

取常数 $C_k > 0$ 和 $N \in \mathbb{N}$，使得 $|Q_k(z)| \le C_k|z|^k$ 对 $|z| \ge N$成立。回忆一下，$\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$。因此

$$\sum_{n=N}^{\infty} |Q_k(n)||j_n(z)|^2 \le \sum_{n=N}^{\infty} \frac{C_k n^k}{2^{2n}} \cdot \frac{e^{2|\pi|z|^{2n}\operatorname{Im} z|}}{\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2((2n-1)!!)^2\pi}{2^{2n}}} = C_k e^{2|\operatorname{Im} z|} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{n^k 2|z|^{2n}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2((2n-1)!!)^2}.$$

比值判别法表明该级数收敛，因此根据魏尔斯特拉斯 M 判别法，它在 $\mathbb{C}$ 的紧子集上一致收敛。

(ii) f 关于归一化勒让德多项式 $P_n = \sqrt{n+\frac{1}{2}}P_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ 的傅里叶–勒让德级数为 $f = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\widehat{f_n}}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\right)\widehat{P}_n$。根据帕塞瓦尔恒等式 $\|f\|_{L^2(-1,1)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2|f_n|^2}{2n+1}$。利用柯西–布尼亚科夫斯基–施瓦茨不等式，我们得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f_n}||j_n(z)| \le \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2|\widehat{f_n}|^2}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}|j_n(z)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2(-1,1)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}|j_n(z)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

根据(i)，该级数在$\mathbb{C}$的紧子集上一致绝对收敛。

■

4 NSBF 系数的递归关系

本节将建立一种替代性的递归积分方法，用于计算NSBF 系数 $\{\alpha_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$。

定理 13 对于 $\kappa \in W^{1,2}(0, L)$，傅里叶-勒让德系数 $\{\alpha_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ 满足以下递归关系：$\alpha_m(x) = \overline{\sigma_m(x)\, x^m}$，$m \in \mathbb{N}_0$，其中

$$\sigma_0(x) = x - \int_0^x \frac{dt}{\kappa(t)}, \tag{31}$$

$$\sigma_1(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3\int_0^x \frac{dt}{\kappa(t)} \int_0^t \kappa(s)ds, \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
\theta_m(t) &:= \frac{1}{\kappa(t)} \int_0^t \{2(m-1)\kappa(s) + s\kappa'(s)\}\, \sigma_{m-2}(s)ds, \\
\eta_m(x) &:= \int_0^x \{2(2m-1)t\sigma_{m-2}(t) - (2m-1)\theta_m(t)\}\, dt, \\
\sigma_m(x) &= \frac{2m+1}{2m-3} \left[x^2\sigma_{m-2}(x) - \eta_m(x)\right], \quad m \geq 2.
\end{aligned} \tag{33}$$

证明。 首先，假设级数（20）可以逐项求二阶导数。由于$e_\kappa(\rho, x)$ 是（3）的一个解，我们得到

$$\begin{aligned}
0 = &\sum_{n=0}^{\infty} i^n \left\{\alpha_n'' j_n(\rho x) + 2\alpha_n' j_n'(\rho x)\rho + \alpha_n(\rho^2 j_n''(\rho x) + \rho^2 j_n(\rho x)\right\} \\
&+ q(x)e^{i\rho x} - q(x)\sum_{n=0}^{\infty} i^n \left\{\alpha_n' j_n(\rho x) + \alpha_n \rho j_n'(\rho x)\right\}.
\end{aligned} \tag{34}$$

我们使用递归关系 [1, 公式 10.1。22]

$$j_k'(z) = -j_{k+1}(z) + \frac{k}{z} j_k(z), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{35}$$

为计算二阶导数，我们对（35）求导，得到

$$j_k''(z) = -j_{k+1}'(z) - \frac{k}{z^2} j_k(z) + \frac{k}{z} j_k'(z),$$

以及递归关系 [1, 公式 10.1。21]

$$j_k'(z) = j_{k-1}(z) - \frac{k+1}{z} j_k(z), \quad k \in \mathbb{N},$$

我们得到

$$j_k''(z) = -j_k(z) + \frac{2}{z} j_{k+1}(z) + \frac{k(k-1)}{z^2} j_k(z), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{36}$$

由这些关系，我们推导出

$$\rho j_n'(\rho x) = -\rho j_{n+1}(\rho x) + \frac{n}{x} j_n(\rho x), \tag{37}$$

$$\rho^2 j_n''(\rho x) = -\rho^2 j_n(\rho x) + \frac{2\rho}{x} j_{n+1}(\rho x) + \frac{n(n-1)}{x^2} j_n(\rho x). \tag{38}$$

将（37）和（38）代入（34），可得

$$0=\sum_{n=0}^{\infty} i^n\left\{\alpha_n'' j_n(\rho x)+2\alpha_n'\left[-\rho j_{n+1}(\rho x)+\frac{n}{x}j_n(\rho x)\right]+\alpha_n\left[\frac{2\rho}{x}j_{n+1}(\rho x)+\frac{n(n-1)}{x^2}j_n(\rho x)\right]\right\}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty} q(x)i^n\left\{\alpha_n' j_n(\rho x)+\alpha_n\left[-\rho j_{n+1}(\rho x)+\frac{n}{x}j_n(\rho x)\right]\right\}+q(x)e^{i\rho x}.$$

由于 $e^{i\rho x}=j_0(\rho x)-\rho x j_1(\rho x)+i\rho x j_0(\rho x)$，因此

$$\begin{aligned}0=&\sum_{n=1}^{\infty} i^n\left\{\alpha_n''+\frac{2n}{x}\alpha_n'+\frac{n(n-1)}{x^2}\alpha_n-q(x)\alpha_n'-q(x)\frac{n}{x}\alpha_n\right\}j_n(\rho x)\\&+\sum_{n=0}^{\infty} i^n\left\{\frac{2\alpha_n}{x}-2\alpha_n'+\alpha_n q(x)\right\}\rho j_{n+1}(\rho x)\\&+[\alpha_0''-q(x)\alpha_0']j_0(\rho x)+q(x)j_0(\rho x)-q(x)\rho x j_1(\rho x)+q(x)i\rho x j_0(\rho x).\end{aligned}$$

令 $\mathbf{L}^{\kappa}=\frac{1}{k-(x)}\frac{d}{dx}\kappa(x)\frac{d}{dx}=\frac{d^2}{dx^2}-q(x)\frac{d}{dx}$。由（6）和（29）可得 $\mathbf{L}_\kappa\alpha_0=\mathbf{L}_\kappa x-\mathbf{L}_\kappa\varphi_\kappa^{(1)}=-q(x)$，因此

$$\begin{aligned}0=&\sum_{n=1}^{\infty} i^n\left\{\alpha_n''+\frac{2n}{x}\alpha_n'+\frac{n(n-1)}{x^2}\alpha_n-q(x)\alpha_n'-q(x)\frac{n}{x}\alpha_n\right\}j_n(\rho x)\\&+\sum_{n=0}^{\infty} i^n\left\{\frac{2\alpha_n}{x}-2\alpha_n'+\alpha_n q(x)\right\}\rho j_{n+1}(\rho x)\\&-q(x)\rho x j_1(\rho x)+q(x)i\rho x j_0(\rho x).\end{aligned}$$

直接计算可得

$$\frac{1}{x^n}\mathbf{L}_\kappa[x^n\alpha_n]=\alpha_n''-q(x)\alpha_n+\frac{2n}{x}\alpha_n'+\left(\frac{n(n-1)}{x^2}-\frac{n}{x}q(x)\right)\alpha_n$$

并利用关系式 [1, 公式 10.1。19]

$$j_n(\rho x)=\frac{\rho x}{2n+1}(j_{n-1}(\rho x)+j_{n+1}(\rho x)),\quad n\in\mathbb{N},$$

可得

$$\begin{aligned}0=&\sum_{n=1}^{\infty} i^n\frac{1}{x^n}\mathbf{L}_\kappa[x^n\alpha_n]\frac{\rho x}{2n+1}j_{n-1}(\rho x)+\sum_{n=1}^{\infty} i^n\frac{1}{x^n}\mathbf{L}_\kappa[x^n\alpha_n]\frac{\rho x}{2n+1}j_{n+1}(\rho x)\\&+\sum_{n=0}^{\infty} i^n\left\{\frac{2\alpha_n}{x}-2\alpha_n'+\alpha_n q(x)\right\}\rho j_{n+1}(\rho x)-q(x)\rho x j_1(\rho x)+q(x)i\rho x j_0(\rho x)\end{aligned}$$

第一项级数中的第一项为 $i\rho L[x\alpha_1]^{j_0(\rho x)}{}_3$。由 (7) 和 (30)，可得

$$\mathbf{L}_\kappa[x\alpha_1]=\frac{3}{2}\mathbf{L}_\kappa[x^2]-\frac{3}{2}\mathbf{L}_\kappa\varphi_\kappa^{(2)}=\frac{3}{2}(2-2xq(x)-2)=-3xq(x),$$

因此 $\mathbf{L}^{\kappa}\frac{[x\alpha_1]}{3x}+q(x)=0$，从而得到

$$0=\sum_{n=2}^{\infty} i^n \frac{1}{x^n}\mathbf{L}_\kappa[x^n\alpha_n]\frac{\rho x}{2n+1}j_{n-1}(\rho x)+\sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{1}{x^n}\mathbf{L}_\kappa[x^n\alpha_n]\frac{\rho x}{2n+1}j_{n+1}(\rho x)$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} i^n\left\{\frac{2\alpha_n}{x}-2\alpha_n'+\alpha_n q(x)\right\}\rho j_{n+1}(\rho x)-q(x)\rho x j_1(\rho x).$$

由于 $\mathbf{L}_\kappa[\alpha_1]=-q$，因此

$$0=\sum_{n=2}^{\infty} i^n \frac{1}{x^n}\mathbf{L}_\kappa[x^n\alpha_n]\frac{\rho x}{2n+1}j_{n-1}(\rho x)+\sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{1}{x^n}\mathbf{L}_\kappa[x^n\alpha_n]\frac{\rho x}{2n+1}j_{n+1}(\rho x)$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} i^n\left\{\frac{2\alpha_n}{x}-2\alpha_n'+\alpha_n q(x)\right\}\rho j_{n+1}(\rho x).$$

重新排列指标后，我们得出

$$0=\sum_{m=1}^{\infty} i^{m+1}\frac{1}{x^{m+1}}\mathbf{L}_\kappa[x^{m+1}\alpha_{m+1}]\frac{\rho x}{2m+3}j_m(\rho x)$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty} i^{m-1}\left\{\frac{1}{x^{m-1}}\mathbf{L}_\kappa[x^{m-1}\alpha_{m-1}]+\frac{1}{x}\left(\frac{2\alpha_{m-1}}{x}-2\alpha_{m-1}'+\alpha_{m-1}q(x)\right)\right\}\rho x j_m(\rho x).$$

两边同时除以 $i\rho x$，得到

$$\sum_{m=1}^{\infty}\zeta_m(x)j_m(\rho x)=0, \tag{39}$$

其中

$$\zeta_m(x)=\frac{\mathbf{L}_\kappa[x^{m+1}\alpha_{m+1}]}{(2m+3)x^{m-1}}-\frac{\mathbf{L}_\kappa[x^{m-1}\alpha_{m-1}]}{(2m-1)x^{m-1}}-\frac{1}{x}\left(\frac{2\alpha_{m-1}}{x}-2\alpha_{m-1}'+\alpha_{m-1}q(x)\right),\quad n\in\mathbb{N}. \tag{40}$$

由于级数 (39) 对所有 ρ均为零，特别是对 ρ 实数，我们利用正交性 [1, 公式 11.4。6]

$$\int_0^{\infty} j_n(z)j_m(z)dz=0,\quad \text{if } n\neq m,$$

并且我们得出，对于所有 $m\in\mathbb{N}$，$\zeta_m(x)=0$。重新排列指标后，该条件等价于

$$\frac{\mathbf{L}_\kappa[x^m\alpha_m]}{(2m+1)x^m}=\frac{\mathbf{L}_\kappa[x^{m-2}\alpha_{m-2}]}{(2m-3)x^{m-2}}-\frac{1}{x}\left(\frac{2\alpha_{m-2}}{x}-2\alpha_{m-2}'+\alpha_{m-2}q(x)\right),\quad m\geq 2. \tag{41}$$

记 $\sigma_m(x):=x^m\alpha_m(x)$，$m\in\mathbb{N}_0$。直接计算可得，对于 $m\geq 2$，$\sigma_m(0)=\sigma_m'(0)=0$。因此，我们将式（41）改写为

$$\frac{\mathbf{L}_\kappa[\sigma_m]}{(2m+1)x^m}=f_m(x),$$

其中

$$\begin{aligned}
f_m(x) =& \frac{\mathbf{L}_\kappa[\sigma_{m-2}]}{(2m-3)x^{m-2}} + \frac{1}{x}\left(\frac{2\sigma_{m-2}}{x^{m-1}} - 2\alpha'_{m-2} + q(x)\frac{\sigma_{m-2}}{x^{m-2}}\right) \\
=& \frac{\mathbf{L}_\kappa[\sigma_{m-2}]}{(2m-3)x^{m-2}} + \frac{1}{x}\left(\frac{2\sigma_{m-2}}{x^{m-1}} - 2\left(\frac{\sigma'_{m-2}}{x^{m-2}} - \frac{(m-2)\sigma_{m-2}}{x^{m-1}}\right) + q(x)\frac{\sigma_{m-2}}{x^{m-2}}\right) \\
=& \frac{\mathbf{L}_\kappa[\sigma_{m-2}]}{(2m-3)x^{m-2}} + \frac{1}{x^m}\left[2(m-1)\sigma_{m-2} - 2x\sigma'_{m-2} + xq(x)\sigma_{m-2}\right].
\end{aligned}$$

因此,

$$\mathbf{L}_\kappa[\sigma_m] = \frac{2m+1}{2m-3}\left\{x^2 L[\sigma_{m-2}] + 2(m-1)(2m-3)\sigma_{m-2} - 2(2m-3)\sigma'_{m-2} + (2m-3)xq(x)\sigma_{m-2}\right\}.$$

通过直接计算可得等式

$$\mathbf{L}_\kappa[\sigma_m] = \frac{2m+1}{2m-3}x^{2m-3}\mathbf{L}_\kappa\left[\frac{\sigma_{m-2}}{x^{2m-3}}\right], \quad m \geq 2. \tag{42}$$

由于 σ_m 满足初始条件 $\sigma_m(0) = \sigma'_{m-1}(0) = 0$, 因此可得

$$\sigma_m(x) = \frac{2m+1}{2m-3}\int_0^x \frac{1}{\kappa(t)}\left(\int_0^t \kappa(s)\left(s^{2m-1}\mathbf{L}_\kappa\left[\frac{\sigma_{m-2}(s)}{s^{2m-3}}\right]\right)ds\right)dt.$$

记 $D = \frac{d}{dx}$。 手是

$$\begin{aligned}
\sigma_m(x) =& \frac{2m+1}{2m-3}\int_0^x \frac{1}{\kappa(t)}\left(\int_0^t \kappa(s)s^{2m-1}\left(\frac{1}{\kappa(s)}D\left(\kappa(s)D\left(\frac{\sigma_{m-2}(s)}{s^{2m-3}}\right)\right)\right)ds\right)dt \\
=& \frac{2m+1}{2m-3}\int_0^x \frac{1}{\kappa(t)}\left(\int_0^t s^{2m-1}D\left(\kappa(s)D\left(\frac{\sigma_{m-2}(s)}{s^{2m-3}}\right)\right)ds\right)dt
\end{aligned}$$

令 $I = \int_0^t s^{2m-1}D\left(\kappa(s)D\left(\frac{\sigma_{m-2}(s)}{s^{2m-3}}\right)\right)ds$。 分部积分得

$$\begin{aligned}
I =& s^{2m-1}\kappa(s)D\left(\frac{\sigma_{m-2}(s)}{s^{2m-3}}\right)\Bigg|_0^t - \int_0^t (2m-1)s^{2m-2}\kappa(s)D\left(\frac{\sigma_{m-2}(s)}{s^{2m-3}}\right)ds \\
=& s^{2m-1}\kappa(s)\left[\frac{\sigma'_{m-2}(s)}{s^{2m-3}} - (2m-3)\frac{\sigma_{m-2}(s)}{s^{2m-2}}\right]\Bigg|_0^t - \int_0^t (2m-1)s^{2m-2}\kappa(s)D\left(\frac{\sigma_{m-2}(s)}{s^{2m-3}}\right)ds \\
=& \kappa(t)\left[t^2\sigma'_{m-2}(t) - (2m-3)t\sigma_{m-2}(t)\right] - (2m-1)s^{2m-2}\kappa(s)\frac{\sigma_{m-2}(s)}{s^{2m-3}}\Bigg|_0^t \\
&+ (2m-1)\int_0^t \left[(2m-2)s^{2m-3}\kappa(s) + s^{2m-2}\kappa'(s)\right]\frac{\sigma_{m-2}(s)}{s^{2m-3}}ds \\
=& \kappa(t)\left[t^2\sigma_{m-2}(t) - 4(m-1)t\sigma_{m-2}(t) + (2m-1)\theta_m(t)\right],
\end{aligned}$$

其中 $\theta_m(t) = \frac{1}{\kappa(t)} \int_0^t [(2m-2)s^{2m-3}\kappa(s) + s^{2m-2}\kappa'(s)] \frac{\sigma_{m-2}(s)}{s^{2m-3}}\, ds$。因此，$J = \int_0^x \frac{1}{\kappa(t)} I(t)dt$ 变为

$$J = \int_0^x \left\{ t^2\sigma_{m-2}(t) - 4(m-1)t\sigma_{m-2}(t) + (2m-1)\theta_m(t) \right\} dt$$

由于

$$\int_0^x t^2\sigma_{m-2}(t) = t^2\sigma_{m-2}(t)\Big|_0^x - \int_0^x 2t\sigma_{m-2}(t)dt,$$

我们得到

$$J = x^2\sigma_{m-2}(x) - \int_0^x \{2(2m-1)t\sigma_{m-2}(t) - (2m-1)\theta_m(t)\}\, dt.$$

记 $\eta_m(x) := \int_0^x \{2(2m-1)t\sigma_{m-2}(t) - (2m-1)\theta_m(t)\}\, dt$，则可得

$$\sigma_m(x) = \frac{2m+1}{2m-3}\left(x^2\sigma_{m-2}(x) - \eta_m(x)\right).$$

现在可以看出，当 $\kappa \in C^2[0,L]$ 时，逐项对级数求两次导数是合理的。由定理 3，$K_\kappa \in C^2(\mathcal{T}_L)$，因此，函数 $G_0(x,z) := K_\kappa(x, xz), 0 \le x \le L, -1 \le z \le 1$ 属于 C^2 类（因为它是 K_κ 与 C^∞ 变换 $[0,L]\times[-1,1] \ni (x,z) \longmapsto (x,xz) \in \mathcal{T}_L$ 的复合）。记 $G_1(x,z) := \frac{\partial G_0(x,z)}{\partial x}$，以及 $G_2(x,z) := \frac{\partial^2 G_0(x,z)}{\partial x^2}$。显然，这些函数在 $[0,L]\times[-1,1]$ 上连续。因此，$C_j(L) := \max_{0\le x\le L} \int_{-1}^1 |G_j(x,z)|^2 dt < \infty$。作变量代换，并利用积分号下求导的莱布尼茨法则，我们得到

$$\alpha_n^{(j)}(x) = (2n+1)\int_{-1}^1 G_j(x,z)P_n(z)dz, \quad n \in \mathbb{N}_0, j = 0,1,2.$$

也就是说，$\{2\alpha_n^{(j)}(x)\}$ 恰好是函数 $G_j(x,\cdot) \in L^2(-1,1)$ 的傅里叶-勒让德系数。根据帕塞瓦尔恒等式，$\sum_{n=0}^\infty 8|\alpha_n^{(j)}(x)|^2 = \int_{-1}^1 |G_j(x,\tau)|^2 d\tau \le C_j(L)$。因此，引理 12(ii) 意味着级数 $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n^{(j)}(x) j_n(\rho x)$ 在 $0 < x \le L$, $j = 0,1,2$ 上绝对且一致收敛。因此，可以逐项对级数 (19) 求两次导数，也可以重新编排其项，从而确保公式 (33) 成立。

最后，若 $\kappa \in W^1[0,L]$，取一个序列 $\{q_m\} \subset C^2[0,L]$，使得 $q_m \to q$ 属于 $L^2(0,L)$。令 $\kappa_m(x) = e^{-\int_0^x q_m(s)ds}$，则当 $m \to \infty$ 时，$\kappa_m, \frac{1}{\kappa_m} \to \kappa, \frac{1}{\kappa}$ 在 $[0,L]$ 上一致收敛。设 $\{\varphi_{\kappa_m}^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ 为与 κ_m 相关联的相应形式幂。根据定理 10]，，对每个 $k \in \mathbb{N}_0$，当 $m \to \infty$ 时，$\varphi_{\kappa_m}^{(k)} \to \varphi_\kappa^{(k)}$ 在 $[0,L]$ 上一致收敛。由公式 (15) 可知，相应的系数满足 $\sigma_{m,n} \to \sigma_n$, $m \to \infty$，且在 $[0,L]$ 上一致收敛。令 $m \to \infty$ 在 (31)-(33) 中趋于极限，可得 $\sigma_m(x)$ 满足递归关系■

5 边值问题的解

从本节开始，我们假设对所有 $0 < x < L$，$\kappa(x) > 0$。回顾一下，$L^2_\kappa(0, L)$ 表示关于权函数 $\kappa(x)$的平方可积函数所构成的希尔伯特空间。相应的内积定义为

$$\langle f, g\rangle_{L^2_\kappa} = \int_0^L f(x)\overline{g(x)}\kappa(x)\,dx. \tag{43}$$

5.1 狄利克雷问题

我们用 $\mathbf{L}^D_\kappa$: $\mathscr{D}(\mathbf{L}^D_\kappa) \subset L^2_\kappa(0,\ L) \to L^2_\kappa(0,\ L)$ 表示与狄利克雷问题相关的算子，其定义域为

$$\mathscr{D}(\mathbf{L}^D_\kappa) = \{u \in W^{2,2}(0, L) \mid u(0) = u(L) = 0\} \tag{44}$$

其作用定义为

$$\mathbf{L}^D_\kappa u = -\frac{1}{\kappa(x)}\frac{d}{dx}\left(\kappa(x)\frac{du(x)}{dx}\right). \tag{45}$$

注释14 利用分部积分和边界条件，可得$\mathbf{L}^D_\kappa$ 是厄米的

$$\langle \mathbf{L}^D_\kappa u, v\rangle_{L^2_\kappa} = \langle u, \mathbf{L}^D_\kappa v\rangle_{L^2_\kappa}, \quad \forall u, v \in \mathscr{D}(\mathbf{L}^D_\kappa). \tag{46}$$

命题15 算子$\mathbf{L}^D_\kappa$ 在 $L^2_\kappa(0, L)$上自伴

证明。 根据 [34, 引理 18], ，算子$\mathbf{L}^D_\kappa$ 在 $L^2_\kappa(0, L)$上稠密定义。记其伴随为$\mathbf{L}^*$。令 $u \in \mathscr{D}(\mathbf{L}^*)$并令 $v = \mathbf{L}^* u$。根据伴随算子的定义，有

$$\langle \mathbf{L}^D_\kappa \phi, u\rangle_{L^2_\kappa} = \langle \phi, v\rangle_{L^2_\kappa} \qquad \forall \phi \in \mathscr{D}(\mathbf{L}^D_\kappa). \tag{47}$$

考虑算子$\mathbf{R}^D$: $L^2_\kappa(0, L) \to L^2_\kappa(0, L)$，定义为

$$\mathbf{R}^D g(x) := -\int_0^x \frac{dt}{\kappa(t)}\int_0^t g(s)\kappa(s)ds + \frac{\int_0^L \frac{dt}{\kappa(t)}\int_0^t g(s)\kappa(s)ds}{\int_0^L \frac{dt}{\kappa(t)}}\int_0^x \frac{dt}{\kappa(t)} \qquad \text{for } g \in L^2_\kappa(0, L)$$

（分母有定义，因为 $\kappa > 0$）。根据构造，$\mathbf{R}^D(L^2_\kappa(0, L)) \subset \mathscr{D}(\mathbf{L}^D_\kappa)$，且 $\mathbf{L}^D_\kappa \mathbf{R}^D g = g$ 对所有 $g \in L^2_\kappa(0, L)$ 都成立。任取 $g \in L^2_\kappa(0, L)$，选取 $\phi = \mathbf{R}^D g$，使其属于 (47)，并利用 $\mathbf{L}^D_\kappa$ 是厄米的这一性质，可得

$$\langle g, u\rangle_{L^2_\kappa} = \langle \mathbf{L}^D_\kappa \mathbf{R}^D g, u\rangle_{L^2_\kappa} = \langle \mathbf{R}^D g, v\rangle_{L^2_\kappa} = \langle \mathbf{R}^D g, \mathbf{L}^D_\kappa \mathbf{R}^D v\rangle_{L^2_\kappa} = \langle \mathbf{L}^D_\kappa \mathbf{R}^D g, \mathbf{R}^D v\rangle_{L^2_\kappa} = \langle g, \mathbf{R}^D v\rangle_{L^2_\kappa}.$$

由于 g 是任意的，因此可得 $u = \mathbf{R}^D v \in \mathscr{D}(\mathbf{L}^D_\kappa)$ 和 $\mathbf{L}^D_\kappa u = v$。因此，$\mathbf{L}^D_\kappa = \mathbf{L}^*$。

■

定理 16 狄利克雷问题的特征值满足以下性质：

1. 特征值均为实数且为正。
2. 令 $\lambda = \rho^2$。那么 λ 是特征值，当且仅当满足特征方程：

$$S_\kappa(\rho, L) = 0. \tag{48}$$

3. 存在一个可数的特征值集合 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$，这些特征值构成一个趋于无穷大的递增序列：

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty, \quad n \to \infty. \tag{49}$$

此外，谱值 $\rho_n = \sqrt{\lambda_n}$ 满足渐近条件 s

$$\rho_n = \frac{n\pi}{L} + \zeta_n \quad for\ n\ large\ enough,\ where\ \{\zeta_n\} \in \ell_2. \tag{50}$$

4. 每个 $\lambda_n = \rho_n^2$ 都有唯一的归一化关联特征函数 $\phi_n(x)$，其表达式为：

$$\phi_n(x) = \frac{S_\kappa(\rho_n, x)}{\sqrt{\beta_n}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{51}$$

其中，$\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为归一化常数，定义如下：

$$\beta_n = \int_0^L S_\kappa^2(\rho_n, x)\kappa(x)dx, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{52}$$

5. 特征函数 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 构成 $L_\kappa^2(0, L)$上的标准正交基。此外，如果$f \in \mathscr{D}(\mathbf{L}_\kappa^D)$，那么级数

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle_{L_\kappa^2} \phi_n \tag{53}$$

在 $[0, L]$上一致收敛。

证明。

1. 由于$\mathbf{L}_\kappa^D$是自伴的，特征值为实数。另一方面，给定一个特征值λ 及其对应的特征函数 u，考虑 $\langle \mathbf{L}_\kappa^D u, u\rangle_{L_\kappa^2}$，分部积分和边界条件可推出

$$\langle \mathbf{L}_\kappa^D u, u\rangle_{L_\kappa^2} = -\int_0^L (\kappa(x)u(x)')'\overline{u(x)}dx = \int_0^L \kappa(x)|u'(x)|^2 dx = \|u'\|_{L_\kappa^2}^2.$$

由于狄利克雷边界条件，不可能有常数特征函数，这意味着 $u' \neq 0$，因此 $\|u'\|_{L_\kappa^2} > 0$。于是，$\langle \mathbf{L}_\kappa^D u, u\rangle_{L_\kappa^2} > 0$. 另一方面，

$$\langle \mathbf{L}_\kappa^D u, u\rangle_{L_\kappa^2} = \langle \lambda u, u\rangle_{L_\kappa^2} = \lambda \|u\|_{L^2}^2.$$

因此，

$$\|u'\|_{L_\kappa^2}^2 = \lambda \|u\|_{L^2}^2.$$

由于 $u \neq 0$，我们得出

$$\lambda = \frac{\|u'\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2}^2} > 0.$$

2. 令 $\lambda = \rho^2$。方程 u （2）的每个解都具有以下形式：

$$u = aC_\kappa(\rho, x) + bS_\kappa(\rho, x), \tag{54}$$

其中 a 和 b 是常数。由条件（24）和（25）， u 满足狄利克雷条件当且仅当 $u = bS_\kappa$ （ρ， x），且它是特征函数当且仅当 $b \neq 0$ 且 S_κ（ρ， L） $= 0$.

3. 由于 κ， $1/\kappa \in L^2(0, L)$，该问题是正则的，且具有紧预解算子；由 [27, 定理 274]可得（49）。对于（50），利用 Goursat条件（10）对 e_κ（ρ， L）的积分表示（9）进行分部积分，得到

$$e_\kappa(\rho, L) = \frac{e^{i\rho L}}{\sqrt{\kappa(L)}} + \int_{-L}^{L} \frac{\partial K_\kappa(L, t)}{\partial t} e^{i\rho t}.$$

由（26），可推得特征方程的如下积分表示：

$$S_\kappa(\rho, L) = \frac{\sin(\rho L)}{\sqrt{\kappa(L)}\rho} + \frac{1}{\rho}\int_{-L}^{L} k_L^-(t)e^{i\rho t}dt$$

其中 $k_L^+(t) := \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial K_\kappa(L,t)}{\partial t} + \frac{\partial K_\kappa(L,-t)}{\partial t}\right)$。由于 $\{\rho_n\}_{n=1}^\infty$ 是函数 $\sqrt{\kappa(L)}\rho S_\kappa(\rho, L)$ 的零点，而 $\sqrt{\kappa(L)}k_L^+ \in L^2(-L, L)$ 是核，因此由 [25] 可知 $\{\rho_n\}_{n=1}^\infty$ 满足渐近式（50）。

4. 从点 2 起，如果 $\lambda_n = \rho_n^2$ 是一个特征值，则与 λ_n 相关的每个特征函数都是 S_κ（ρ_n, x）的倍数。因此，在 L_κ^2（0， L）中归一化的唯一特征函数为

$$\phi_n(x) = \frac{S_\kappa(\rho_n, x)}{\sqrt{\beta_n}}, \quad \text{where } \beta_n = \|S_\kappa(\rho_n, \cdot)\|_{L_\kappa^2}^2. \tag{55}$$

5. 由于该问题是正则的，系统 $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ 在 L_κ^2（0， L）中构成完备正交基；这由 [27, 定理274]得出。此外，关于 $f \in \mathscr{D}$（$\mathbf{L}_\kappa^D$）的级数展开的一致收敛由 [4, 推论4.33]得出。

■

注记 17 集合 $\{\lambda_n, \beta_n\}_{n=1}^\infty$ 称为狄利克雷问题的**直接谱数据**。

狄利克雷问题的特征方程为 $S_\kappa(\rho,\ L)\ = 0$。因此，根据公式（28），该方程具有NSBF表示，特征值 $\lambda = \rho^2$ 可通过求解以下方程得到：

$$0 = \frac{\sin(\rho L)}{\rho} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \alpha_{2n}(L) j_{2n}(\rho L). \tag{56}$$

5.2 韦尔函数

设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 满足其不是狄利克雷问题的特征值。在这种情况下，以下边值问题存在唯一解 $\Phi_\kappa(\lambda, x)$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\kappa(x)}\dfrac{d}{dx}\kappa(x)\dfrac{d}{dx}\Phi_\kappa(\lambda,x) = \lambda\Phi_\kappa(\lambda,x), \\ \Phi_\kappa(\lambda,0) = 1, \quad \Phi_\kappa(\lambda,L) = 0. \end{cases}$$

直接计算可得

$$\Phi_\kappa(\lambda,x) = C_\kappa(\rho,x) - \frac{C_\kappa(\rho,L)}{S_\kappa(\rho,L)}S_\kappa(\rho,x), \tag{57}$$

其中 $\rho^2 = \lambda$。该公式定义良好，因为 $S_\kappa(\rho, x) \neq 0$. 出现在（57）中的系数在斯图姆–刘维尔理论中具有特殊的解释。

定义 18 与狄利克雷问题相关的韦尔函数定义为

$$M_\kappa^D(\lambda) := \frac{C_\kappa(\rho,L)}{S_\kappa(\rho,L)} \tag{58}$$

对于不是狄利克雷问题特征值的 λ 。

下面的命题是标准结果，但为完整起见，我们给出其证明。

命题 19 韦尔函数 M_κ^D 是关于 λ 的亚纯函数，在狄利克雷问题的特征值 $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ 处有简单极点，并且每个特征值处的留数由下式给出

$$\mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_n} M_\kappa^D(\lambda) = \frac{1}{\beta_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{59}$$

证明。设 $\lambda \in \mathbb{C}$。根据谱参数幂级数方法 [16], , 函数 $C_\kappa(\rho, x)$ 和 $S_\kappa(\rho, x)$ 关于 λ都是整函数。因此， $M_\kappa^D(\lambda)$ 是亚纯函数，其极点位于 $\Delta_D(\lambda)$ 的零点处: $= S_\kappa(\rho, L)$，这些零点与狄利克雷问题的特征值 $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ 重合。给定 $\lambda \in \mathbb{C}$，考虑满足以下条件的方程 (2) 的解 $\vartheta_\kappa(\lambda, x)$

$$\vartheta_\kappa(\lambda,L) = 0, \quad \vartheta_\kappa(\lambda,L) = \frac{1}{\kappa(L)}.$$

直接计算可得

$$\vartheta_\kappa(\lambda,x) = C_\kappa(\rho,L)S_\kappa(\rho,x) - S_\kappa(\rho,L)C_\kappa(\rho,x).$$

注意， $\Delta_D(\lambda) = -\vartheta(\lambda, 0)$，且若 $\lambda = \lambda_n$，则

$$\vartheta(\lambda_n,x) = C_\kappa(\rho_n,L)S_\kappa(\rho_n,x), \tag{60}$$

这意味着 $C_\kappa(\rho_n, L) \neq 0$。通过分部积分可得

$$\begin{aligned}(\lambda-\lambda_n)\langle\vartheta_\kappa(\lambda,\cdot), S_\kappa(\rho_n,x)\rangle_{L^2_\kappa} &= \langle \mathbf{L}_\kappa\vartheta_\kappa(\lambda,\cdot), S_\kappa(\rho_n,x)\rangle_{L^2_\kappa} - \langle\vartheta_\kappa(\lambda,\cdot), \mathbf{L}_\kappa S_\kappa(\rho_n,x)\rangle_{L^2_\kappa} \\ &= [\vartheta_\kappa(\lambda,x)\kappa(x)S'_\kappa(\rho_n,x) - \kappa(x)\vartheta'_\kappa(\lambda,x)S_\kappa(\rho_n,x)]_0^L = -\vartheta(\lambda,0)\end{aligned}$$

因此，$\frac{\Delta(\lambda)}{\lambda-\lambda_n} = \langle \vartheta_\kappa(\lambda,\cdot)\ S_\kappa(\rho_n,x)\rangle_{L^2_\kappa}$。令 $\lambda\to\lambda_n$ 并利用（60），得到

$$\left.\frac{d\Delta_D(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_n} = C_\kappa(\rho_n,L)\beta_n \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

那么，每个 λ_n 都是 $\Delta_D(\lambda)$的一个单零点，因此也是 $M_D(\lambda)$的一个单极点，这意味着公式（59）成立。 ■

根据解 $C_\kappa(\rho,x)$ 和 $S_\kappa(\rho,x)$ 的 NSBF 表示（27）和（28），我们得到韦尔函数的如下表示

$$M_\kappa^D(\lambda) = \frac{\cos(\rho L) \ + \ \rho\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\alpha_{2k+1}(L)\,j_{2k+1}(\rho L)}{\frac{\sin(\rho L)}{\rho} \ + \ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\,\alpha_{2k}(L)\,j_{2k}(\rho L)}. \tag{61}$$

当然，数值计算所用的近似式为

$$M_{\kappa,N}^D(\lambda) = \frac{\cos(\rho L) \ + \ \rho\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor (N-1)/2\rfloor}(-1)^k\,\alpha_{2k+1}(L)\,j_{2k+1}(\rho L)}{\frac{\sin(\rho L)}{\rho} \ + \ \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor N/2\rfloor}(-1)^{k+1}\,\alpha_{2k}(L)\,j_{2k}(\rho L)}. \tag{62}$$

5.3 与诺伊曼问题的关系

现在我们考虑满足诺伊曼条件的问题

$$u'(0) = u'(L) = 0.$$

特征值 $\mu = \rho^2$ 由特征方程的零点给出

$$C_k'(\rho,L) = 0.$$

按照定理16的证明，我们得到一个特征值递增序列$\{\mu_n=\rho_n^2\}_{n=0}^{\infty}$，其特点是 $\mu_0=0$，对应的特征函数为 $\psi_0\equiv 1$。

相　应的特征函数和归一化常数对于 $\mu_n>0$ 由以下给出　　y

$$\psi_n(x) = \frac{C_k(\rho_n x)}{\sqrt{\gamma_n}}, \quad \gamma_n = \int_0^L C_k^2(\rho_n x)\,\kappa(x)\,dx.$$

诺伊曼问题可以通过达布变换化为阻抗方程为 $1/a$ 的狄利克雷问题。

注记 20（阻抗方程的达布变换）接下来*[34]*, 我们考虑**达布变换**，其定义如下。设 $u\in W^2$, $_2(0,L)$ 是方程（(2)的一个解。函数

$$v(x) = \kappa(x)u'(x) \tag{63}$$

称为 u的达布变换。根据 *[34, 注记 2]*，$v \in W^{2,2}(0, L)$ 并满足**达布伴随方程**

$$-\kappa(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\kappa(x)}\frac{dv}{dx}\right) = \lambda v. \tag{64}$$

在 u 为 C_κ（ρ、x） 的特殊情况下，其达布变换为

$$\kappa(x)C'_\kappa(\rho, x) = -\rho^2 S_{1/\kappa(\rho,x)}$$

（见 *[34, 注记 9]*），由此我们得到

$$C'_\kappa(\rho, x) = -\frac{\rho^2 S_{1/\kappa}(\rho, x)}{\kappa(x)}. \tag{65}$$

同样，*[34, 注记 9]*表明

$$S'_\kappa(\rho, x) = \frac{C_{1/\kappa}(\rho, x)}{\kappa(x)}. \tag{66}$$

定理21 诺伊曼问题的正特征值（电导率函数为κ（x））与狄利克雷问题的特征值（电导率为 $1/\kappa$（x））相同。此外，相应的归一化常数 $\{\gamma_n^\kappa\}_{n=0}^\infty$ 满足

$$\gamma_n^\kappa = \mu_n \beta_n^{1/\kappa} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{67}$$

证明。 如果 $\mu = \rho^2 > 0$，那么它是电导率为 κ 的诺伊曼问题的特征值，当且仅当它满足特征方程

$$C'_\kappa(\rho, L) = 0.$$

根据公式（65）

$$C'_\kappa(\rho, L) = \frac{-\mu S_{1/\kappa}(\rho, L)}{\kappa(L)}. \tag{68}$$

由于 $\kappa(L) > 0$，且 $\mu > 0$ 根据假设，$C'_\kappa(\rho, L) = 0$ 当且仅当 $S_{1/\kappa}(\rho, L) = 0$，也就是说，当且仅当 μ是电导率为 $1/\kappa$的狄利克雷问题的特征值。对于 $n \geq 1$，令 γ_n^κ 为与 $\mu_n = \rho_n^2$相关联的归一化常数。利用关系式（66），结合等式（68）进行分部积分可得

$$\begin{aligned}
\gamma_n^\kappa &= \int_0^L C_\kappa^2(\rho_n, x)\kappa(x)dx = \int_0^L \left(\frac{1}{\kappa(x)}S'_{1/\kappa}(\rho_n, x)\right) S'_{1/\kappa}(\rho_n, x)dx \\
&= \frac{1}{\kappa(x)}S'_{1/\kappa}(\rho_n, x)S_{1/\kappa}(\rho_n, x)\Big|_0^L - \int_0^L \left(\frac{1}{\kappa(x)}S'_{1/\kappa}(\rho_n, x)\right)' S_{1/\kappa}(\rho_n, x)dx \\
&= \mu_n \int_0^L S_{1/\kappa}^2(\rho_n, x)\frac{dx}{\kappa(x)} = \mu_n \beta_n^{1/\kappa}.
\end{aligned}$$

■

由此　　因此，计算 Neuman 问题的正特征值 $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$　　n

可归结为计算电导率为 $1/\kappa$ 的 Dirichlet 问题的相应特征值。

关于诺伊曼问题的韦尔函数，其定义如下。对于 $\mu \in \mathbb{C}$不是诺伊曼问题特征值的量，令 $\Psi_\kappa(\mu, x)$ 为方程（2满足边界条件的唯一解

$$\Psi'_\kappa(\mu, 0) = 1, \quad \Psi'_\kappa(\mu, L) = 0.$$

直接计算可得

$$\Psi_\kappa(\mu, x) = S_\kappa(\mu, x) - \frac{S'_\kappa(\mu, L)}{C'_\kappa(\mu, L)} C_\kappa(\mu, x).$$

诺伊曼问题的韦尔函数定义为

$$M^N_\kappa(\mu) := \frac{S'_\kappa(\rho, L)}{C'_\kappa(\rho, L)}. \tag{69}$$

命题 22 设 $\mu \in \mathbb{C}$ 使得该量不是诺伊曼问题的特征值。则有如下关系：

$$M^N_\kappa(\mu) = -\frac{1}{\mu} M^D_{1/\kappa}(\mu). \tag{70}$$

证明。 由定义（69）和（58）以及公式（65）和（66）可得。 ■

注记 23 对于具有混合边界条件的斯图姆-刘维尔问题，也可以得到类似的关系，即诺伊曼–狄利克雷条件 $u'(0) = u(L) = 0$ (其特征方程为 $C_\kappa(\rho, L) = 0$)以及狄利克雷到诺伊曼条件 $u(0) = u'(L) = 0$(其特征方程为 $S'_\kappa(\rho, L) = 0$)。

事实上，达布关系(65) 和(66) 可用于为具有一般分离边界条件的问题推导 *NSBF* 表示

$a_1 u(0) + b_1 u'(0) = 0, \quad a_2 u(L) + b_2 u'(L) = 0$，其中 $a_i, \ b_i \in \mathbb{R}$ 且 $|a_i| + |b_i| > 0, \ i = 1, 2$。

6 数值解

6.1 实现细节

本小节介绍用于近似阻抗形式的斯图姆-刘维尔方程相关狄利克雷问题的特征值和特征函数的数值过程。该方法依赖于 NSBF 表示以及由此导出的特征方程 $S_\kappa(\rho, L) = 0$ 。

特征值 $\lambda = \rho^2$ 通过求解以下方程得到：

$$0 = \frac{\sin(\rho L)}{\rho} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_{2n}(L) j_{2n}(\rho L), \tag{71}$$

其中，$\{\alpha_n(x)\}$ 是傅里叶-勒让德展开的系数。
我们通过截断级数的根来近似特征值，截断至阶数N：

$$0 = Lj_0(\rho L) - \sum_{n=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} (-1)^n \alpha_{2n}(L) j_{2n}(\rho L), \tag{72}$$

其中使用了$\frac{\sin(\rho x)}{\rho} = x j_0(\rho x)$。在离散集合中的 ρ 个值上计算该截断特征函数，以检测符号变化并近似求根。以下伪代码旨在对所实现的算法进行高层次描述，使读者能够根据具体需求重现或调整该方法。

Algorithm24 用于数值计算特征值和特征函数的伪代码：

1. 固定 $L > 0$ 并定义均匀网格 $x_i \in [0, L]$。*2.* 在该网格上定义电导率函数 $\kappa(x)$及其导数 $\kappa'(x)$。*3.* 使用关于 α_n的递推关系计算系数矩阵 *NSBF* $\Phi_n = (\alpha_n(x_j))$：$= {}^{\sigma_n}(x)\, x^n$，并利用关系式*31-33*计算$(\sigma_n(x))$。*4.* 令 $\Psi :=\Phi[:\ N]$ 为 Φ的最后一列。*5.* 使用方程（*72*）中的截断级数定义特征函数：$S_N(\rho) = Lj_0(\rho L) - \sum_{n=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} (-1)^n \Psi_{2n} j_{2n}(\rho L)$。*6.* 在适当的 ρ 值区间上计算 $S_N(\rho)$。*7.* 检测 $S_N(\rho)$中的符号变化，以定位包含根的区间。*8.* 应用求根方法，求出 ρ_n，使得 $S_N(\rho_n) = 0$。*9.* 将 $\lambda_n = \rho_n^2$ 设为相应的特征值。*10.* 对于每个 λ_n，通过 *NSBF* $N-$部分和计算特征函数 $S_N(\rho_n, x)$。

6.2 数值示例

在给出数值示例之前，我们先简要介绍 NSBF 方法的实现过程。

所有计算均使用 `Python` 完成。为计算傅里叶-勒让德系数 $\{\alpha_n(x)\}$ 所需的递归积分，采用了 6 阶牛顿-科茨积分。在区间 $[0, L]$ 内使用了包含 2000 个点的均匀网格来离散定义域，并确保数值积分的稳定性。

计算出系数后，我们继续计算截断特征函数（72）的零点。为此，我们在区间 ρ 上对谱参数 $[0, 200]$ 进行离散化，使用包含 500 个点的均匀网格和 120 个系数。该区间被

细分后，通过检测特征函数的符号变化，定位包含零点的子区间。随后，使用 `scipy.optimize.root scalar` 对每个零点进行细化； `scipy.optimize.root scalar` 是 `scipy.optimize` 模块中一个可靠的求根函数。我们使用函数 `np.set printoptions(precision=14)` 来获得更高的精度。

这一过程使我们能够高效且高精度地计算特征值。所有计算均在一台配备 Intel(R) Celeron(R) N4000 CPU @ 1.10GHz 和 4 GB 内存的普通笔记本电脑上完成。计算过程很快，仅耗时不到一秒。

现在我们将介绍一些数值示例，首先从一个已知精确特征方程的问题开始。

例 25（阻抗 $a(x) = (1+x)^2$**）** 阻抗 $a(x) = (1+x)^2$ 体现了非均匀介质（例如声学号角），其特征值虽非平凡但可解析求得，从而验证了 *NSBF* 方法在奇异问题中的精度。在此情形下，相应的阻抗方程可通过刘维尔变换转换为薛定谔方程，如下所示。若 u 是

$$-\frac{1}{(1+x)^4}\frac{d}{dx}\left((1+x)^4\frac{du}{dx}\right) = \lambda u,$$

那么 $v = (1+x)^2 u$ 是薛定谔方程的一个解

$$-v'' + Q_a(x)v = \lambda v, \quad where \;\; Q_a(x) = \frac{a''}{a} = \frac{2}{(1+x)^2}, \tag{73}$$

参见 *[22,* 第 *3* 节。*4]*。狄利克雷条件在此变换下保持不变。*SLEIF* 的狄利克雷问题被变换为（*73*）对应的狄利克雷问题。在这种情况下，该问题的特征方程可以明确写出，其形式为

$$\Phi(\rho) = \frac{\sin(\rho L)}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{L^2}{(1+L)}j_1(\rho L) = 0, \tag{74}$$

参见 *[18,* 第 *3* 小节。*3]* 和 *[20]*。为了计算精确特征值，我们通过分析特征函数的零点来进行。将区间划分为若干子区间，并检查函数符号如何变化。每次符号变化都表明存在一个零点，该零点对应一个特征值。

这一流程提供了一种系统的方法来获得精确特征值序列。在实践中，通过在足够密集的一组点上数值计算特征函数，并在检测到符号变化时应用求根方法来实现。

n	λ_{exact}	λ_{NSBF}	$\lvert\lambda_{\text{exact}} - \lambda_{\text{NSBF}}\rvert$
1	1.34805063504836	1.34805063504823	1.29e-13
2	4.43028410885793	4.43028410885799	6.00e-14
3	9.45645939050872	9.45645939050879	7.00e-14
4	16.4672876486339	16.4672876486346	7.00e-13
5	25.4726699599228	25.4726699599230	2.00e-13
6	36.4757027586749	36.4757027586759	1.00e-12
20	400.482239127963	400.482239127971	8.00e-12
21	441.482300968039	441.482300968044	5.00e-12
22	484.482354595155	484.482354595153	2.00e-12
23	529.482401400839	529.482401400838	1.00e-12
30	1024.48264505729	1024.48264505730	1.00e-11

表1：阻抗方程的精确特征值与 NSBF 计算的特征值比较，其中 $a(x) = (1+x)^2$。报告绝对误差以量化精度。

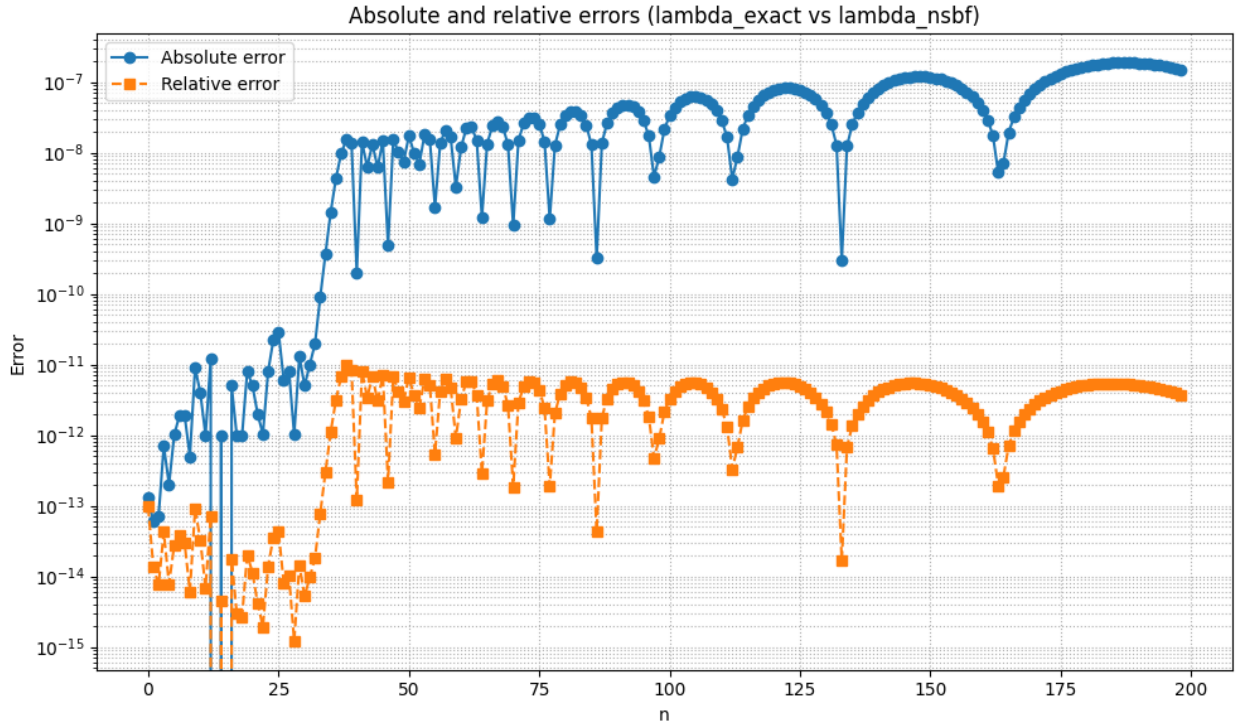


图2：精确特征值与使用 NSBF 方法计算得到的特征值之间的绝对误差和相对误差（见表25）。纵轴采用对数刻度，以突出显示跨越多个数量级的误差大小。

图 2 展示了将 *NSBF* 方法计算出的特征值与通过特征方程得到的特征值进行比较后得出的绝对误差和相对误差。纵轴上的对数刻度突显了跨越多个数量级的误差变化。对于最低阶模态，绝对误差范围为 10^{-14}–10^{-13}，基本上

达到了双精度浮点运算的极限。事实上，在 *IEEE-754 binary64* 格式中，只有约 *15–16* 位有效十进制数字能够得到可靠表示，对应的机器精度约为 2.22×10^{-16} *[12]*。这表明，在基模处观察到的差异并非源于 *NSBF* 方法本身，而是有限精度运算中数值表示的固有限制所致。随着指标 n 增大，绝对误差逐渐增大，并稳定在 10^{-8}附近，这与数值舍入误差的累积以及 *NSBF* 展开的振荡结构相符。相比之下，相对误差即使在较高阶模式下，仍几乎保持在10^{-12}–10^{-11} 的范围内。

从物理和数学角度来看，本例计算得到的特征值可解释为与底层 *SL* 算子相关的特征谱参数，而相应的特征函数则表示其空间模式。在非均匀介质中的波传播问题中，自然会出现这类方程，其中阻抗系数用于描述介质的空间变化。在此类情形下，特征函数描述了适应介质局部属性的驻波模式，而特征值则决定了允许出现的共振频率。因此，最低的特征值对应系统的基模，而更高阶的模式则具有越来越多的节点。

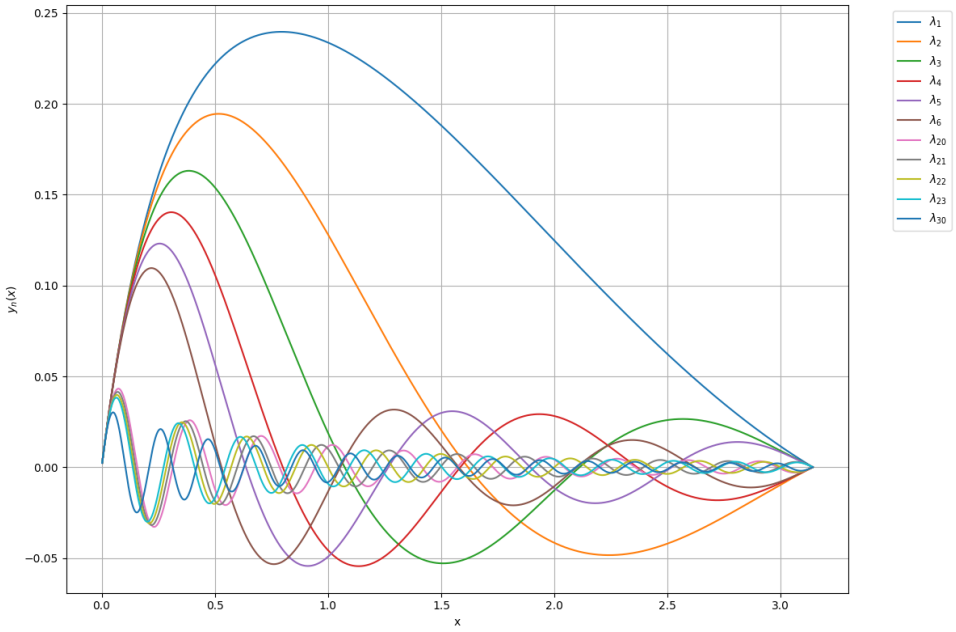


图 3：与表中所列特征值对应的特征函数25，使用 NSBF 方法计算得出。

为计算韦尔函数，我们采用$M_{\kappa,\ N}$ 由公式（62）给出的解析近似。在图4中，我们观察到与狄利克雷问题相关的韦尔函数图像。对于 λ 的实部，我们取值范围从 -10 到10 ，而虚部的取值范围从0 到10。观察到的跳跃位于狄利克雷问题的特征值处。

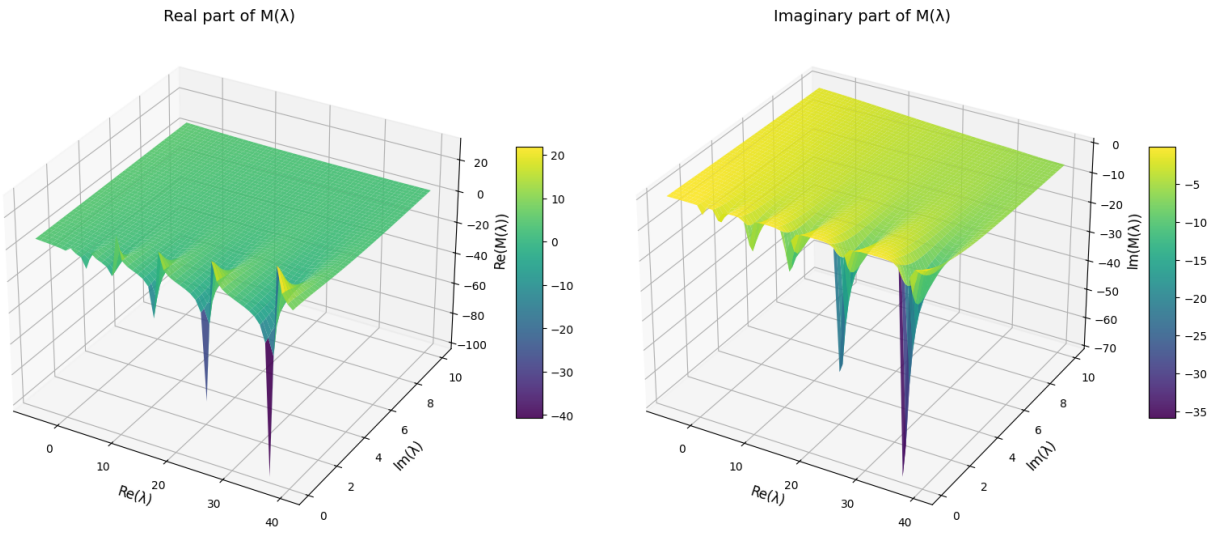


图 4：阻抗 $a(x) = (1+x)^2$ 在 λ 复平面上的狄利克雷问题韦尔函数实部和虚部的图像。

例26（非光滑阻抗）在本例中，我们考虑三角形导电率函数

$$\kappa(x) = \begin{cases} 1+x, & if \ \ 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 2-x, & if \ \ \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

三角形电导率的图像见图5。在这种情况下， $L = 1$ 和 $\kappa \in W^{1,\,2}(0,\,1)$，但其一阶导数是海维赛德型函数，因此 $\kappa \notin W^{2,\,2}(0,\,1)$。因此，该方程无法转换为正则的薛定谔方程。狄利克雷问题不具有显式的特征方程。我们采用*NSBF*级数与 $N = 40$ ，并计算出了 63 个特征值。

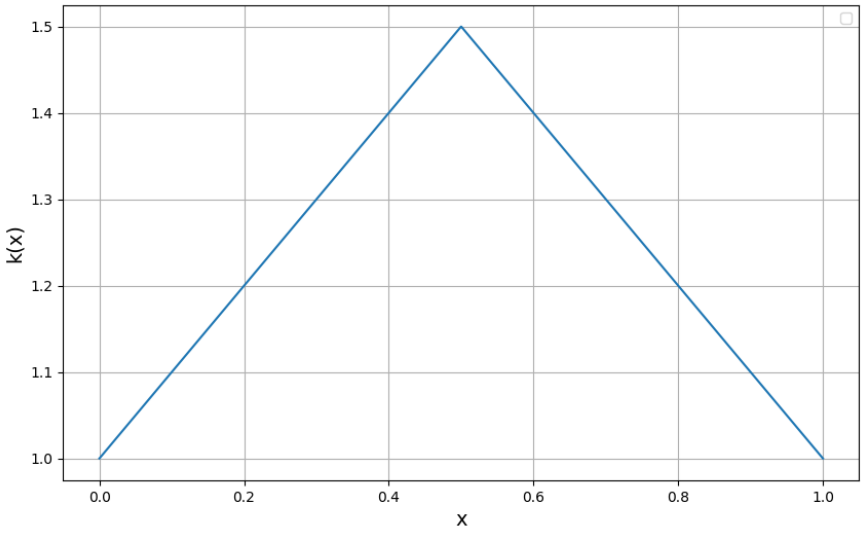


图 5：三角形电导率的图像。

我们将*Gao*报告的特征值 *[10]*，（其使用下降流方法进行了计算）与我们通过*SPPS*方法获得的特征值以及使用*NSBF*得到的结果进行了比较。对于*SPPS*方法，我们观察到，当 $n = 11$ 时会产生显著误差。这种现象可以由以下事实解释：*SPPS*依赖于基于泰勒级数的表示，而其有效性本质上具有局部性。因此，在这种情况下，文献中通常采用谱移位技术 *[16]* 来改善*SPPS*的数值性能。相比之下，*NSBF*方法无需进行任何谱移位，这是因为不等式(21)所述结果保证了特征值的一致逼近。

n	λ_{Gao}[10]	λ_{SPPS}[16]	λ_{NSBF}
1	8.3513e+00	8.351443468115294	8.35158241342649
2	3.9316e+01	39.31584966139984	39.3158490304397
3	8.7324e+01	87.32512433822502	87.3252433641185
4	1.5775e+02	157.7480942179849	157.748091718428
5	2.4524e+02	245.2396600060401	245.239779974236
6	3.5514e+02	355.1395825656164	355.139577098527
7	4.8211e+02	482.1103986679944	482.110512751393
8	6.3148e+02	631.4879392265606	631.487939226560
9	7.9793e+02	798.7713794569980	798.771379456998
10	9.8680e+02	985.2201158113872	985.220115811387
11	1.1927e+03	1196.413213808432	1192.73369448276

表 2：Gao [10], 谱参数幂级数 [16], 和 NSBF 方法计算的特征值比较。

图 7 展示了与狄利克雷问题相关的韦尔函数图像。对于 λ 的实部，我们取值范围为 0 至 200 ；虚部的取值范围为 0至10。

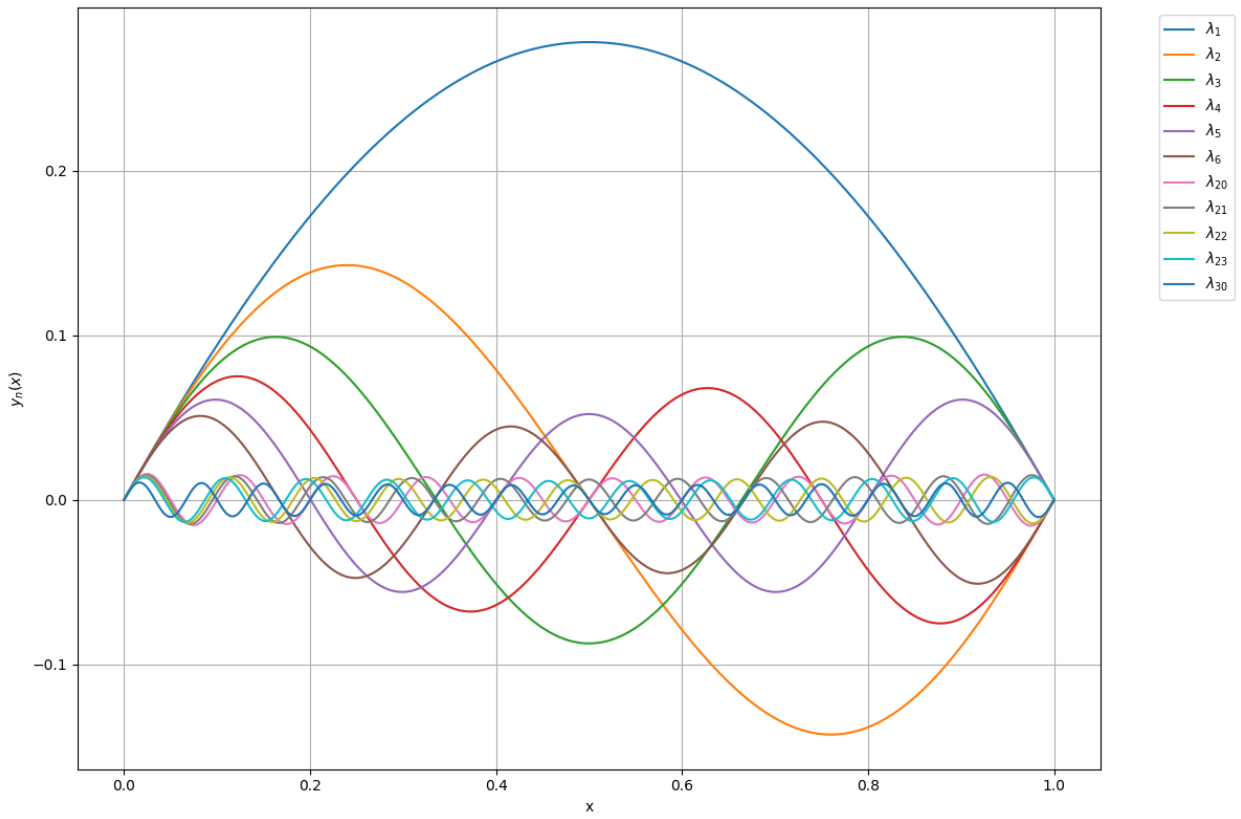


图6：与三角形电导率的狄利克雷问题相关的特征函数图。

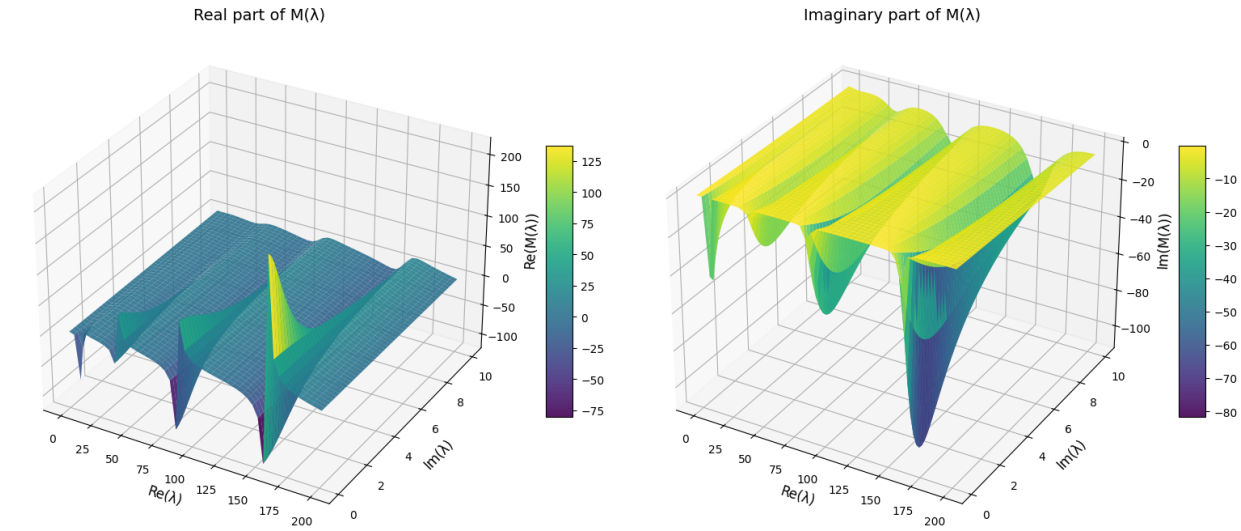


图7：三角形电导率的狄利克雷问题的韦尔函数实部和虚部图。

7 讨论与总结

本文推导了阻抗形式斯图姆-刘维尔方程解的贝塞尔函数诺伊曼级数（NSBF）表示。即使在 $\kappa \in W^{1,2}(0, L)$ 且不假设额外光滑性的情况下，所得到的方法仍提供了一个坚实而通用的框架。这使我们的结果自然地拓展了此前基于 NSBF 的表示方法，而这类方法通常要求系数具有更高的正则性（见 [15, 19]）。

该展开直接由与方程相关的典范变换核得到，而非通过化为薛定谔形式获得；它还给出了显式的截断误差估计（21），且该估计关于谱参数保持一致。我们还提出了一种高效的递归算法，用于计算完全在阻抗框架下定义的 NSBF 系数，从而使该表示在电导率正则性较低时仍然有效。

类似地，本文给出的 NSBF 级数可通过刘维尔变换用于求解与薛定谔方程相关的问题。尽管对于具有分布势的薛定谔方程也存在 NSBF 级数，但目前无法有效控制系数的衰减，也无法控制 NSBF 级数的截断误差 [35]。阻抗方程的 NSBF 级数的一项主要优势是，截断误差和系数衰减均具有形如（21）的一致界。这有助于提高近似特征值和特征函数计算的数值稳定性。还值得指出的是，原则上，NSBF 表示也可用于复值阻抗函数。在这种情况下，可采用基于罗歇定理和辐角原理的算法计算复根，方法与 [21] 中采用的方法类似。

从数值角度来看，所提出的 NSBF 表示为阻抗方程的解提供了一种高效且完全解析的计算方案。递归构造系数并结合一致的截断误差控制，使得即使对于高序号特征值，也能以大量有效数字准确计算特征值。这一特点对于高阶谱模态尤为重要的应用领域特别有意义，例如声学、地球物理学和波传播模型。此外，韦尔函数的 NSBF 表示提供了一种便于计算的工具，可用于分析与 SLEIF 相关的谱数据。具体而言，它可用于数学模型的验证与测试，也可用于开发和数值实现与阻抗型斯图姆-刘维尔问题相关的反问题方法 [20]。

致谢： Abigail G. M´arquez-Hern´andez 感谢 SECIHTI 和 Vladislav V. Kravchenko 教授通过奖学金 国家研究员助理 *SNII 3* 提供的资助。

V´ıctor A. Vicente-Ben´ıtez 感谢 SECIHTI 通过项目*Estancias Posdoctorales porM´exico Convocatoria 2023 (I)*提供支持。

两位作者感谢墨西哥国立自治大学数学研究所克雷塔罗分部（墨西哥），本研究的部分工作在此完成。

利益冲突： 本研究不存在任何利益冲突。

参考文献

[1] M. Abramovitz, I. A. Stegun,《数学函数手册》，纽约：*Dover*，*1972* 年。[2] T. Aktosun, P. Sacks, X. Ch. Xu，确定人类声道形状的反问题，《计算与应用数学杂志》*393*，*113477*（*2021*）。[3] A. Almalki，用于斯图姆–刘维尔问题的 *Sinc-Galerkin* 方法及其在量子力学中的应用，《乌姆·盖拉大学应用科学杂志》（*2025*）[4] C. Bennewitz, M. Brown, R. Weikard，《常微分方程的谱理论与散射理论》第一卷：斯图姆-刘维尔方程，施普林格，*2020* 年。[5] H. Blancarte, H. Campos, K. V. Khmelnytskaya不连续系数的谱参数幂级数，《应用科学中的数学方法》*38(10)*（*2015*），*2000-2011*。[6] R. Carroll, F. Santosa，地球物理学一维反问题的散射技术，《应用科学中的数学方法》*3*（*1981*）*145–171*。[7] R. Carroll, F. Santosa, J. Ortega，通过盖尔范德–列维坦方程研究一维反问题的稳定性，《应用分析》*13:4*，（*1982*）*271-277*。[8] R. Carroll, F. Santosa, L. Payne，关于地球物理数据的完整恢复，《数学与应用科学方法》*4*，（*1982*）*33-73*。[9] W. N. Everitt，《斯图姆-刘维尔微分方程目录：理论、过去与现在》，*Birkh¨user*，巴塞尔，*2005* 年，第 *271-331* 页。[10] Q. Gao，用于斯图姆-刘维尔问题的优良流方法，《应用数学建模》*36*（*2012*），*4452-4465*。[11] G. M. L. Gladwell，《振动反问题》，第 *2* 版，*Kluver Academic*，纽约，*2005* 年；莫斯科，*2008* 年。[12] D. Goldberg，每位计算机科学家都应了解的浮点算术知识。《*ACM* 计算调查》*23(1)*（*1991*）*5–48*。[13] N. Gutiérrez-Jiménez, S. M. Torba，线性二元一阶微分方程组解的谱参数幂级数表示，《应用数学与计算》第 *370* 卷（*2020*）*124911* [14] V. V. Kravchenko，斯图姆-刘维尔方程解的一种表示，《复变函数与椭圆方程》，*2008* 年，第 *53* 卷，第 *8* 期，*775-789*。[15] V. V. Kravchenko, L.J. Navarro, S.M. Torba，用贝塞尔函数的诺伊曼级数表示一维薛定谔方程的解。《应用数学与计算》*314(1)*（*2017*）*173–192*。

[16] V. V. Kravchenko, R. M. Porter, 斯图姆-刘维尔问题的谱参数幂级数，《数学方法与应用科学》*33 (2010) 459–468*。[17] V.V. Kravchenko, R.M. Porter, S.M. Torba, 任意阶线性微分方程的谱参数幂级数，《数学方法与应用科学》*42(15), (2019) 4902–4908*。[18] V. V. Kravchenko, S. M. Torba, 达布变换算子的变换算子及其应用，《物理学杂志*A*：数学与理论》*45 (2012) 075201*（*21*页）。
[19] V.V. Kravchenko, S.M. Torba, 斯图姆–刘维尔方程解的贝塞尔函数诺伊曼级数表示，《计算》*55, 11 (2018)*。[20] V. V. Kravchenko, S. M. Torba, A.O. Vatulyan, 杆件横截面形状的恢复，《墨西哥数学会通报》*31, 46(2025)*。*DOI: 10.1007/s40590-025-00727-7*[21] V.V. Kravchenko, S.M. Torba, U. Velasco-García, 势函数对谱参数呈多项式依赖的斯图姆–刘维尔方程及扎哈罗夫-沙巴特系统的谱参数幂级数。《数学物理学杂志》*56, 073508 (2015)*。
[22] V. V. Kravchenko, V. A. Vicente-Benítez, 阻抗形式斯图姆-刘维尔方程的变换算子方法 *I*：构造与解析性质，《数学科学杂志》*(2022) 266: 103-132*。*DOI: 10.1007/s10958-022-05875-z*[23] N. X. Ky, 带权多项式的函数逼近，《匈牙利数学学报》*59(1-2) (1992), 49-58*[24] V. Ledoux, M. Van Daele, G. Vanden Berghe, *MATSLICE*：斯图姆–刘维尔方程谱求解器，《*ACM*数学软件汇刊》*42 (2015),* 第*2*期，文章*14*，*1–18*。[25] B. Ya. Levin, I. V. Ostrovskii, 正弦型函数根集的小扰动，《苏联科学院通报：数学系列》*43 (1979),* 第*1*期，*87-110*（俄文）；英文译本：《苏联数学通报》*14 (1979),* 第*1*期，*(1980) 79-101*。[26] V. A. Marchenko, 斯图姆-刘维尔算子及其应用，*Birkh*¨巴塞尔，*1986*。[27] M. Miklavcic, 应用泛函分析与偏微分方程，世界科学出版社，新加坡，*1998*。[28] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, 积分与级数。第*2*卷。特殊函数（*Gordon & Breach*科学出版社，纽约，*1986*）[29] J. D. Pryce, 斯图姆–刘维尔问题的数值解，克拉伦登出版社，牛津，*1993*。[30] F. Santosa, 基于盖尔范德–列维坦方法的声学阻抗剖面反演数值方案，《国际地球物理学杂志》，第*70*卷，*(1982)*，*229–243*。

[31] Simon Širca, Martin Horvat,物理计算方法：学生用纲要, 物理学研究生教材，施普林格 Cham，2025。[32] P. K. Suetin, 经典正交多项式，第3版（俄文），莫斯科：Fizmatlit，2005，480页。[33] A. O. Vatulyan, 固体力学反问题，Fizmatlit，莫斯科，2007（俄文）。[34] V. A. Vicente-Benítez, 阻抗形式斯图姆-刘维尔方程的完备解系、变换算子及达布变换，《数学方法与应用科学》(2025)，在线发表：http://doi.org/10.1002/mma.70328[35] V. A. Vicente-Benítez, 具有分布势的薛定谔方程的变换算子及其相关阻抗方程，arXiv:2511.12094[36] N. Vlahakis, 斯图姆–刘维尔问题中的施瓦茨导数方法，《Symmetry》2024, 16(6), 648。[37] A. G. Webster,声阻抗，以及号角理论和留声机，《美国国家科学院院刊》5 (1919), 275-282。[38] Q. Wu, F. Fricke,通过特征频率偏移确定管道中的阻塞位置和横截面积，《声学学会杂志》87 (1990) 第67-75页。