arXiv:2601.04527v1 [physics.flu-dyn] 8 Jan 2026

双重共振导致快速谱演化及广义动力学方程适用性的数值研究

Mitsuhiro Tanaka（岐阜大学，日本）

摘要

已知对于双层流体系统，标准波湍流理论（WTT）给出的、支配波场谱演化的动力学方程会因“双重共振”的存在而失效，且谱的演化时间尺度可能远短于标准波湍流理论所预测的时间尺度。本研究采用双层流体系统的简化模型，通过数值计算考察广义动力学方程（GKE）在这种情况下的适用性。结果表明，GKE能够再现双重共振导致的表面波谱尖峰的出现，但会高估该峰的增长，因此无法正确地定量描述谱的时间演化，尤其是在双共振点附近。

1 引言

由两种密度不同的流体形成分层的双层流体系统，在自然环境中十分常见。典型例子包括淡水流经密度更大的海水上方的河口区域，以及低纬度浅海中的温跃层等。 [15, 22]。

一般而言，非线性波—波相互作用在波场演化中起着至关重要的作用，尤其是通过共振相互作用 [16]。对于单层流体，表面重力波的色散关系 $\omega = \sqrt{gk}\tanh kh$ 不支持三波共振。因此，共振能量传递只能通过更高阶（四波）相互作用发生，这会导致不同波数之间的能量交换较弱，谱演化也相应缓慢 [16]。

另一方面，在双层流体系统中，可能出现多种类型的三波共振相互作用，从而实现更强的能量传递 [7]。在我们先前的研究 [21], 中，我们利用直接数值模拟（DNS）考察了从表面波到界面波的谱能量传递。在该研究中，我们观察到一种奇特现象：表面波谱在某个波数处出现尖峰，并以远快于标准波湍流理论所预测的时间尺度迅速增长，即 $O(1/\omega_0\epsilon^2)$；其中 ω_0 是典型频率， ϵ 是表示波幅较小程度的无量纲参数。

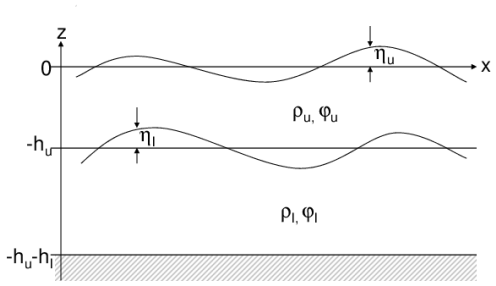

图 1：双层流体系统示意图

论文[21], 发表几年后，我们意识到，这种与标准波湍流理论不一致的快速谱变化是由“双重共振”引起的。另一方面，近来人们推导出了多种广义动力学方程（GKE），大大拓展了传统动力学方程的适用范围。这些广义动力学方程不假设谱缓慢演化，并已用于描述快速谱变化，例如飓 [5]导致的海洋风浪快速变化。因此，广义动力学方程或许能够描述由双重共振引起的尖峰增长；正如我们在先前研究中观察到的那样，这一过程发生的时间尺度比标准波湍流理论预测的更短。本研究旨在探究这种可能性。

本文的内容安排如下。在引言的其余部分，我们回顾先前论文 [21] 的研究结果，这些结果为本文提供了研究动机。此外，我们还将讨论我们获得的结果与基于标准波湍流理论的预测之间的矛盾，并介绍双重共振这一现象。在§2中，为便于数值计算，我们基于原双层流体系统的哈密顿形式提出一个“简化”模型，并推导出该简化模型的广义动力学方程。在§3中，我们比较简化双层流体系统的直接数值模拟（DNS）结果与广义动力学方程的结果，并评估广义动力学方程对双重共振所引发的快速谱变化的适用性。§4给出本研究的总结与结论。

1.1 先前研究综述

在我们的先前研究中[21], ，我们考虑了如图 1 所示的双层流体系统。设上层和下层的密度分别为 ρ_u 和 ρ_l，其未扰动深度分别为 h_u 和 h_l。波动引起的自由表面和界面位移分别表示为 $\eta_u(x,t)$ 和 $\eta_l(x,t)$。我们将 x 轴设定为波传播方向，并将 z 轴设定为从未扰动自由表面竖直向上的方向。假设流体均为不可压缩、无黏性，且流动为无旋流，因此上层和下层分别可用速度势 $\phi_u(x,z,t)$ 和 $\phi_l(x,z,t)$ 表示。另假设流体运动局限于竖直平面内，因此波传播被限制为一维。

那么，该系统的控制方程如下：

$$\nabla^2\phi_u = 0, \quad -h_u + \eta_l < z < \eta_u, \tag{1a}$$
$$\nabla^2\phi_l = 0, \quad -h_u - h_l < z < -h_u + \eta_l, \tag{1b}$$
$$\eta_{u,t} + \eta_{u,x}\phi_{u,x} - \phi_{u,z} = 0, \quad z = \eta_u, \tag{1c}$$
$$\phi_{u,t} + \frac{1}{2}\left(\phi_{u,x}^2 + \phi_{u,z}^2\right) + g\eta_u = 0, \quad z = \eta_u, \tag{1d}$$
$$\eta_{l,t} + \eta_{l,x}\phi_{u,x} - \phi_{u,z} = 0, \quad z = -h_u + \eta_l, \tag{1e}$$
$$\eta_{l,t} + \eta_{l,x}\phi_{l,x} - \phi_{l,z} = 0, \quad z = -h_u + \eta_l, \tag{1f}$$
$$\rho_u\left[\phi_{u,t} + \frac{1}{2}\left(\phi_{u,x}^2 + \phi_{u,z}^2\right) + g\eta_l\right] - \rho_l\left[\phi_{l,t} + \frac{1}{2}\left(\phi_{l,x}^2 + \phi_{l,z}^2\right) + g\eta_l\right] = 0, \quad z = -h_u + \eta_l, \tag{1g}$$
$$\phi_{l,z} = 0, \quad z = -h_u - h_l. \tag{1h}$$

通过对控制方程组（1）进行线性化，可得到以下线性色散关系：

$$(1 + R\,T_u\,T_l)\,\omega^4 - gk(T_u + T_l)\,\omega^2 + (1 - R)g^2k^2\,T_uT_l = 0, \tag{2}$$

其中 $T_u = \tanh\ kh_u$, $T_l = \tanh kh_l$, $R = \rho_u/\rho_l$。该方程关于 ω 是四次方程，因此对于每个 k: $\pm\omega^+, \pm\omega^-$，其中 $\omega^+ > \omega^-$。[1]

对应于较高频率 ω^+ 的波模态称为“表面波模态”，因为表面位移 η_u 占主导，而界面位移 η_l较小。相反，较低频率ω^- 对应于“界面波模态”，其中 η_l 占主导，而 η_u较小。在本研究中，对物理量进行无量纲化，使得 $\rho_l = 1$、 $h_u = 1$和 $g = 1$。因此，该系统由两个无量纲参数确定：密度比 R（$\equiv \rho_u/\rho_l < 1$）和水深比h_l（$= h_l/h_u$）。作为示例，我们在图2 ω^+ 中展示了 ω^-，其中 $h_l = 2.0$ 和 $R = 0.8$。

在我们先前的论文中[21], ，初始波场是通过叠加大量波数不同的单色波列构造的，因此表面波的能量谱

[1]尽管本研究局限于一维传播，因此 k 是一个标量，但在更广泛的物理背景下，它仍表示一个波数向量，其取值范围为 $(-\infty, \infty)$。另一方面，频率 ω 始终取正值；因此， k 的符号表示传播方向，而具有 k 和 $-k$ 的波则被视为彼此不同且相互独立。

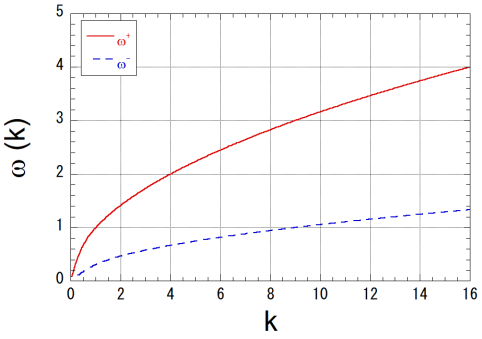

图 2：线性色散关系（$h_l = 2.0$, $R = 0.8$）

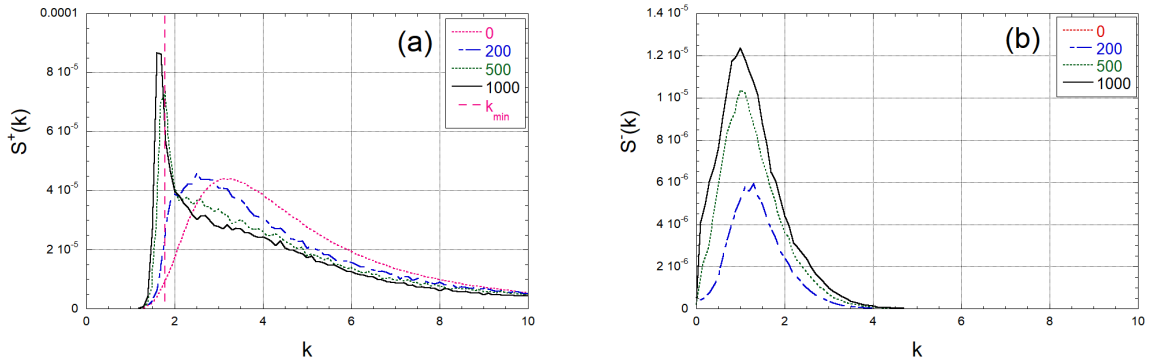

图 3：当 $h_l = 2.0$, $R = 0.8$, $k_p = 3.5$时能量谱的时间演化。 $t = 0$, $200T_p$, $500T_p$,$1000T_p$。（a）表面波模态，（b）界面波模态。

模态 $S^+(k)$ 和界面波模态 $S^-(k)$ 由下式给出

$$S^+(k) = A\left(\frac{k}{k_p}\right)^{-3} \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{k}{k_p}\right)^{-2}\right] \quad (k > 0), \qquad S^+(k) = 0 \quad (k < 0), \tag{3a}$$

$$S^-(k) = 0 \quad (-\infty < k < \infty)。 \tag{3b}$$

如式（3）所示，初始波场仅由沿 x正方向传播的表面波模态叠加而成，完全不含界面波模态。 $S^+(k)$ 的形式借鉴了皮尔逊-莫斯科维茨谱，这是一种广为人知的风浪谱，但这种谱形对本研究并无特别意义。

图 3 展示了从具有初始谱（3）的波场出发，对控制方程（1）进行直接数值模拟（DNS）所得的谱 $S^+(k)$ 和 $S^-(k)$ 的时间演化。图中， T_p 表示初始谱峰值波数 k_p 对应的表面波模态的周期。决定初始波场能量密度的参数 A设为 $A = 1.5 \times 10^{-4}$（相当于 $ak \approx 0.08$）。直接数值模拟所用的数值方法基于 Alam 等人（2009）开发的高阶谱方法（HOSM）[1]。关于数值方法的更多详情，包括如何从高阶谱方法直接处理的变量中估算谱的方法，参见[21]。

如图3所示，在谱演化的初始阶段，表面波谱 $S^+(k)$ 逐渐向较低波数偏移。然而，这种偏移在某个时刻停止了，随后在 $k = 1.73$ 附近出现一个尖峰，并迅速增长。另一方面，界面波谱$S^-(k)$ 最初在所有波数处均为零，之后在 $k \approx 1$ 附近的小波数区域单调增长。图4展示了与图3中相同的 $S^+(k)$ 和 $S^-(k)$，但涵盖的 k 范围更广，清楚地表明，对于 $k < 0$，直到 $t = 1000T_p$， $S^+(k)$ 和 $S^-(k)$ 几乎始终为零。这表明，沿负方向传播的波几乎未被激发；即使经过1000个周期，波场仍仅由沿正 x 方向传播的波组成。

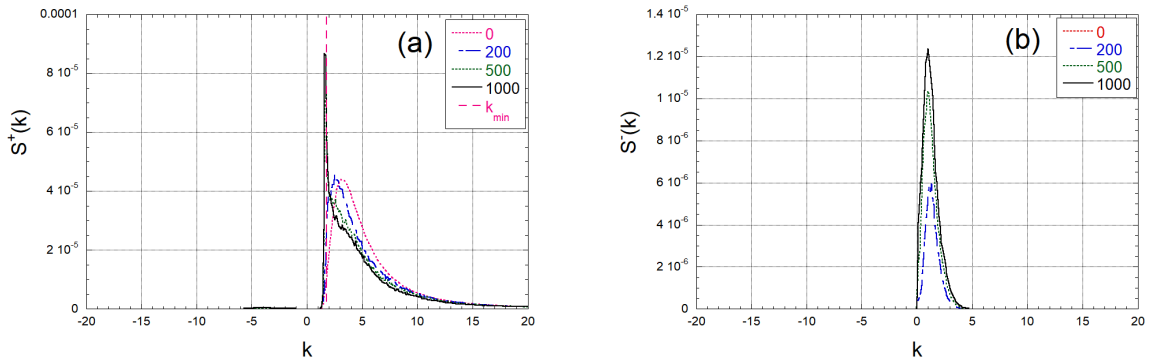

图4： 与图3相同，但涵盖的 k 范围更广。请注意，沿负方向传播的波几乎没有被激发。

1.2 与传统弱湍流理论的矛盾

将波湍流理论（WTT）的标准方法（例如，见 [14, 23]）应用于下文将介绍的“简化”双层流体系统（13），例如假设非高斯性较弱且 $t \gg 1/\omega_0$，可得出以下关于谱的动力学方程：

$$\frac{dn_k^+}{dt} = -2\pi \iint \Big[|V_{k12}^{(2)}|^2 \{(n_k^+ - n_1^+)n_2^- + n_k^+ n_1^+\} \delta(\omega_k^+ - \omega_1^+ - \omega_2^-)\, \delta(k - k_1 - k_2) \\ - |V_{1k2}^{(2)}|^2 \{(n_1^+ - n_k^+)n_2^- + n_k^+ n_1^+\} \delta(\omega_k^+ - \omega_1^+ + \omega_2^-)\, \delta(k - k_1 + k_2) \Big] dk_{12}, \tag{4a}$$

$$\frac{dn_k^-}{dt} = 2\pi \iint |V_{12k}^{(2)}|^2 \{(n_1^+ - n_2^+)n_k^- + n_1^+ n_2^+\} \delta(\omega_k^- - \omega_1^+ + \omega_2^+)\, \delta(k - k_1 + k_2) dk_{12}, \tag{4b}$$

其中， $n^+(k)$ 和 $n^-(k)$ 分别为表面波模态和界面波模态的作用量谱密度，并且它们与 $S^+(k)$ 和 $S^-(k)$ 的关系为 $n^+(k) = S^+(k)/\omega^+(k)$ 和 $n^-(k) = S^-(k)/\omega^-(k)$。 dn_k^+/dt 和 dn_k^-/dt 的表达式中存在两个狄拉克 δ 函数，这意味着只有共振相互作用才会影响谱的时间演化。

对于二维双层流体系统，已知存在两种三波共振，称为“A型”和“B型” [7]。A型共振是两个表面波与一个界面波之间的共振，其共振条件为

$$\boldsymbol{k}_1^+ = \boldsymbol{k}_2^+ + \boldsymbol{k}_3^-, \quad \omega_1^+ = \omega_2^+ + \omega_3^-, \tag{5}$$

而B型共振是一个表面波与两个界面波之间的共振，其共振条件为

$$\boldsymbol{k}_1^+ = \boldsymbol{k}_2^- + \boldsymbol{k}_3^-, \quad \omega_1^+ = \omega_2^- + \omega_3^-, \tag{6}$$

其中，上标 $+$ 和 $-$ 分别表示表面波和界面波模态。

当波传播被限制在一维（如本文所述）时，A型共振包含以下两类：

- Class1: $k_1^+ = -k_2^+ + k_3^-, \quad \omega_1^+ = \omega_2^+ + \omega_3^-, \quad (\theta_2^+, \theta_3^-) = (\pi, 0),$
- Class3: $k_1^+ = k_2^+ + k_3^-,\ \omega_1^+ = \omega_2^+ + \omega_3^-, \quad (\theta_2^+, \theta_3^-) = (0, 0).$

而B型共振包含以下两类：

- Class2: $k_1^+ = \pm k_2^- \mp k_3^-,\ \omega_1^+ = \omega_2^- + \omega_3^-, \quad (\theta_2^-, \theta_3^-) = (\pi, 0) \text{ or } (0, \pi),$
- Class4: $k_1^+ = k_2^- + k_3^-,\ \omega_1^+ = \omega_2^- + \omega_3^-. \quad (\theta_2^-, \theta_3^-) = (0, 0).$

此处 $\theta_i\,(i = 2, 3)$ 表示从 k_1^+看来 k_i 的传播方向，而 $k_j\,(j = 1, 2, 3)$ 表示$|\boldsymbol{k}_j|$，并且在这些共振条件下为正定。需要注意的是，在这四种

共振类别中，只有第3类和第4类由沿同一方向传播的波组成。然而，根据 [7], ，只有在 $R \leq 1/3$ 时第4类才可能发生。因此，在我们先前研究的参数设置下，即 $R = 0.8$，Class3共振是唯一可能不会在随时间演化过程中产生沿相反方向传播的波的共振类型。这一事实有力地表明，我们先前研究中观察到的谱演化，以及本文图3和图4再次展示的谱演化，主要是由Class3共振引起的。

图5显示了在$h_l = 2.0$ 和 $R = 0.8$时满足第3类共振条件的两个表面波的波数。需要注意的是，表面波存在一个最小波数 $k_{\min}$ ，其

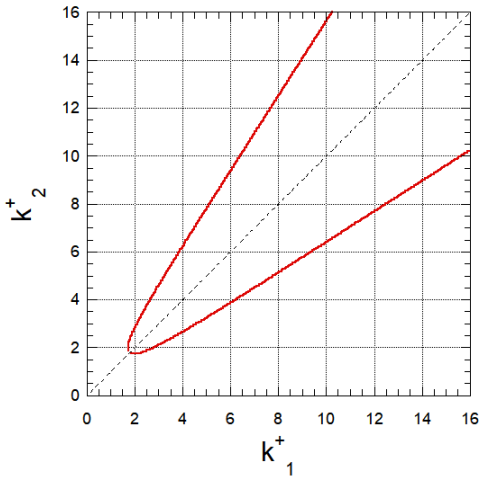

图5：满足第3类共振条件的两个表面波的波数（$h_l = 2.0$， $R = 0.8$）

参与第3类共振的波。在所示情形中， $k_{\min} \approx 1.73$。

基于上述讨论可以明显看出，先前研究中观测到的谱演化与标准波湍流理论之间存在差异。基于标准波湍流理论的传统动力学方程（4）表明，只有共振相互作用会对谱演化产生贡献。此外，数值结果显示，在图（4）所示的谱演化过程中，没有产生任何沿相反方向传播的波，这强烈表明在谱演化中起主要作用的共振相互作用完全属于第3类。另一方面，如图5所示，参与第3类共振的表面波模态的波数存在一个下限 $k_{\min}$ 。综合这些事实可知，表面波谱 $S^+(k)$ 在低于 $k_{\min}$时不应随时间变化。然而，如图6所示，该图放大了 $k_{\min}$附近的图3(a)，即使在 $k < k_{\min}$（≈ 1.73）范围内， $S^+(k)$ 实际上也发生了显著变化。

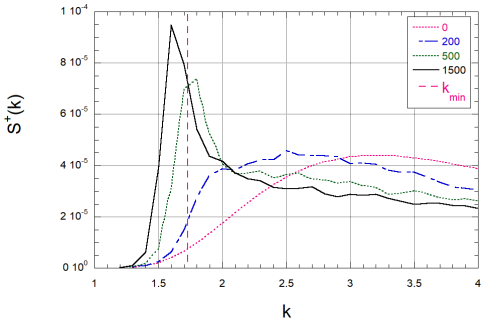

图6： 图3(a)中 $k_{\min}$附近的局部放大图

我们先前研究的结果还呈现出另一种特征，如下所示，这似乎与标准波湍流理论相矛盾。如果 $S^+(k)$ 或 $S^-(k)$ 的时间演化确实由~~~~标准动力学方程 (4) 所支配，那么归一化谱 $S^+(k) \equiv S^+(k)/A$ 和 $S^-(k) \equiv S^-(k)/A$（其中A 为初始谱 (3) 中的能量参数 A ）应仅通过 t 和 A 依赖于

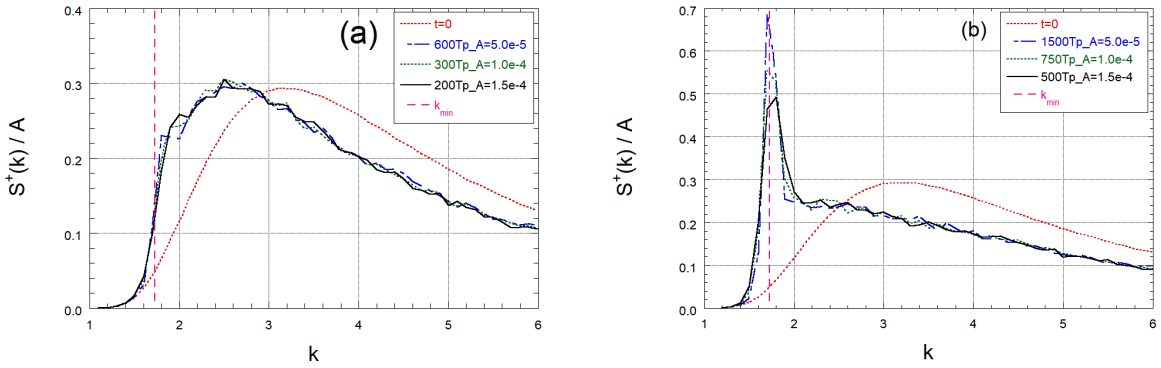

图7： 归一化表面波谱 $\widetilde{S}^{+}(k)$ ($h_l = 2$, $R = 0.8$, $k_p = 3.5$)。(a) $\tau = 3\times10^{-2}$, (b) $\tau = 7.5\times10^{-2}$。

~"慢时间" $\tau \equiv At$。图7展示了在$h_l = 2$, $R = 0.8$, $k_p = 3.5$的情况下，取 A 的三个不同值所得的 $S^{+}(k)$。图7(a)对应 (A, t) 的三种组合：$(0.5\times10^{-4}, 600T_p)$、$(1.0\times10^{-4}, 300T_p)$ 和 $(1.5\times10^{-4}, 200T_p)$，它们对应相同的缩放时间 $\tau = 3.0\times10^{-2}$。这些结果对应谱演化的相对早期阶段，此时 $k_{\min}$附近的 $S^{+}(k)$ 中尚未出现尖~峰。正如预期的那样，三个 $S^{+}(k)$几乎重合，这表明 $S^{+}(k)$实际上按照 (4) 演化。图7(b)针对另外三种组合进行了相同的分析：$(0.5\times10^{-4},1500T_p)$、$(1.0\times10^{-4}, 750T_p)$ 和 $(1.5\times10^{-4}, 500T_p)$，它们均对应于 $\tau = 7.5\times10^{-2}$。这些结果代表较晚阶段，此时 $S^{+}(k)$ 中已经出现尖峰。尽管大多数 k仍吻合良好，但在 $k_{\min}$附近出现了显著差异。这表明，尖峰的形成无法在传统波湍流理论框架内得到解释。此外，进一步观察发现，峰的形成时间尺度比标准波湍流理论预期的谱变化时间尺度更快，即 $O(1/\omega_0\epsilon^2)$，其中 ϵ 为无量纲振幅，且$\epsilon \propto \sqrt{A}$。顺便提一下，本研究标题中的"快速谱演化"指的是发生在比标准波湍流理论预测时间尺度更短的时间尺度上的谱演化，例如 $k_{\min}$附近 $S^{+}(k)$ 所呈现的情况。

1.3 双重共振导致标准波湍流理论失效 ce

第3类共振的共振条件表示为:

$$k_2^{+} = k_1^{+} + k_3^{-}, \quad \omega_2^{+} = \omega_1^{+} + \omega_3^{-} \quad (k_2^{+} > k_1^{+} > 0) \tag{7}$$

在图5所示的共振曲线上， $dk_1^{+}/dk_2^{+} = 0$ 当 $k_1^{+} = k_{\min}$时。因此，对式（7）关于 k_2^{+}在此点求导，得到:

$$\frac{d\omega_2^{+}}{dk_2^{+}} = \frac{d\omega_1^{+}}{dk_1^{+}}\frac{dk_1^{+}}{dk_2^{+}} + \frac{d\omega_3^{-}}{dk_3^{-}}\left(1 - \frac{dk_1^{+}}{dk_2^{+}}\right) = \frac{d\omega_3^{-}}{dk_3^{-}}, \tag{8}$$

这意味着以下事实：设 $\left(k_1^{+},k_2^{+}(>k_1^{+})\,k_3^{-}\right)$是一个Class3共振三波组。那么，如果 k_1^{+}等于 $k_{\min}$，波数为 k_2^{+}的表面波与波数为 k_3^{-}的界面波的群速度相等。这一事实对动力学方程有以下重要影响。

动力学方程 (4a) n_k^{+} $(= S^{+}(k)/\omega(k))$ 在利用狄拉克 δ 函数消去积分后，可以改写为:

$$\frac{dn_k^{+}}{dt} = -2\pi\frac{|V_{k12}^{(2)}|^2\{(n_k^{+} - n_1^{+})n_2^{-} + n_k^{+}n_1^{+}\}}{\left|\frac{d\omega_1^{+}}{dk_1^{+}} - \frac{d\omega_2^{-}}{dk_2^{-}}\right|} + 2\pi\frac{|V_{1k2}^{(2)}|^2\{(n_1^{+} - n_k^{+})n_2^{-} + n_k^{+}n_1^{+}\}}{\left|\frac{d\omega_1^{+}}{dk_1^{+}} - \frac{d\omega_2^{-}}{dk_2^{-}}\right|}, \tag{9}$$

其中，在右端第一项中，$k^{+} = k_1^{+} + k_2^{-}$（因此 $k^{+} > k_1^{+}$），而在第二项中，$k^{+} = k_1^{+} - k_2^{-}$（因此 $k^{+} < k_1^{+}$）。第二项中的分母在 $k = k_{\min}$ 处趋于零，导致 dn_k^{+}/dt发散。这表明，动力学方程 (4a) 无法正确描述 $S^{+}(k)$ 在 $k = k_{\min}$ 处的行为，而 $dS^{+}(k)/dt$ 向无穷大的发散也表明， $S^{+}(k)$ 的变化时间尺度远快于标准波湍流理论预期的 $O(1/\omega_0\epsilon^2)$ 在 $k = k_{\min}$ 附近的变化时间尺度。

O另一方面，界面波谱的动力学方程 (4b) 变为 es

$$\frac{dn_k^{-}}{dt} = 2\pi\frac{|V_{12k}|^2\{(n_1^{+} - n_2^{+})n_k^{-} + n_1^{+}n_2^{+}\}}{\left|\frac{d\omega_1^{+}}{dk_1^{+}} - \frac{d\omega_2^{+}}{dk_2^{+}}\right|}. \tag{10}$$

只要 $k_1^+ \neq k_2^+$，分母 $\left|\frac{d\omega_1^+}{dk_1^+} - \frac{d\omega_2^+}{dk_2^+}\right|$ 就不会为零，因此动力学方程仍然有定义。这一结果与我们此前的观察结果一致（此处未展示）：即使在 $k_{\min}$ 附近的 $S^+(k)$ 中出现尖峰后，$S^-(k)$ 的时间尺度$O(1/\omega_0\epsilon^2)$仍保持不变。当共振三元组的两个群速度相等时，控制谱演化的动力学方程会失效；这一现象称为“双重共振”。我们在先前研究中数值观察到的 $k_{\min}$ 附近 $S^+(k)$ 的快速增长，无疑是这种双重共振现象的体现。

据我们所知，Benney & Saffman [6] 最先提到了这种情况，并将其称为“双重共振”。他们指出，在这种情况下，他们推导动力学方程的方法会失效，因此在后续讨论中假设这种情况不会发生。Davidson[8, 9] 也采用与 Benney & Saffman 完全不同的方法，为允许三波共振的系统推导了动力学方程。他也提到了双重共振，并指出，如果双重共振存在，且 $\omega_k = \omega_{k'} + \omega_{k-k'}$ 和$\frac{d}{dk'}(\omega_{k'} + \omega_{k-k'}) = 0$同时成立，那么动力学方程中出现的“碰撞积分”将包含随大 t时按 $t^{1/2}$ 增长的世俗项。（更多详情请参见 [8] 的附录 H_2 。）

Soomere[17, 18] 详细研究了双重共振问题，重点考察了罗斯贝波。在这种情况下，波数是一个二维向量。因此，双重共振的条件，即 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2$、$\omega_{\boldsymbol{k}} = \omega_{\boldsymbol{k}_1} + \omega_{\boldsymbol{k}_2}$ 和 $\Delta\omega_{\boldsymbol{k}_1} = \Delta\omega_{\boldsymbol{k}_2}$，为三个波数向量的六个分量提供了五个标量条件，从而一般会得到一维解集，他将其称为“双重共振曲线”。他还研究了双重共振对整个谱演化的影响，并得出结论：尽管动力学方程在双共振点集附近会失效，但其无法正确描述（几乎）双重共振罗斯贝波能量传递所造成的误差，与无限多个普通（单）共振带来的能量传递积分强度相比很小。随后他提出，研究罗斯贝波谱演化的数值研究可以安全地基于标准动力学方程进行，只需舍弃“近似”双重共振三元组之间的相互作用。

Amundsen[2] 和 Amundsen 与 Benney[3] 基于含二次非线性的单维模型方程，以确定性方式解析计算了双重共振点处波模态在 $t \to \infty$ 时的渐近行为，并预测双共振模态的振幅 $a(k)$ 按 $a(k) \propto \sqrt{t}$ 的规律增长，且该模态附近的峰宽随 t 变窄。

如上所述，发生双重共振时，标准动力学方程 (4) 会失效。然而，得益于 Janssen [13], 、Annenkov 和 Shrira [4], 以及 Gramstad 和 Stiassnie [10], 等人的先前研究，如今已有更广义的动力学方程（广义动力学方程，GKE）。与标准动力学方程不同，这些广义动力学方程既考虑非共振相互作用的影响，也考虑共振相互作用的影响。因此，即使存在双重共振，它们也不会失效。此外，它们不假设谱仅缓慢变化。例如，Annenkov 和 Shrira [5] 将广义动力学方程用于研究飓等突发风速变化所引起的风浪谱快速变化。因此，这些广义动力学方程似乎能够充分描述双重共振点 $k_{\min}$ 附近 $S^+(k)$ 中尖峰的出现，以及其以远快于标准波湍流理论所预测的速率增长。本研究旨在验证这一猜想是否确实成立。

顺便提及，在等离子体物理学中，“双重共振”一词也被使用，但其含义完全不同，指的是波粒相互作用的语境（例如参见 [19] 。）；因此需要注意不要将其与本文所讨论的现象混淆。

2 简化的双层流体系统及其直接数值模拟

2.1 简化的双层流体系统

为了实现上述目标，我们需要推导双层流体系统的广义动力学方程。根据波湍流理论的标准步骤，动力学方程（包括广义动力学方程）的推导始于该系统的哈密顿形式。

Choi 等人[7] 已证明，由（1）式支配的双层流体系统可以表示为

在忽略四个或更多波之间所有相互作用的近似下，以下哈密顿系统：

$$\frac{da_k}{dt} = -i\frac{\delta H}{\delta a_k^*} = -i\omega_k^+ a_k - i\frac{\delta H_3}{\delta a_k^*}, \qquad \frac{db_k}{dt} = -i\frac{\delta H}{\delta b_k^*} = -i\omega^- b_k - i\frac{\delta H_3}{\delta b_k^*}$$

$$H = H_2 + H_3, \qquad H_2 = \int \left(\omega^+(k)|a(k)|^2 + \omega^-(k)|b(k)|^2\right)\, dk,$$

$$\begin{aligned} H_3 = \iiint \Big[&\Big\{ V_{123}^{(1)}(a_1^* a_2 a_3 + \text{c.c.}) + V_{123}^{(2)}(a_1^* a_2 b_3 + \text{c.c.}) \\ &+ V_{123}^{(3)}(b_1^* a_2 a_3 + \text{c.c.}) + V_{123}^{(4)}(b_1^* b_2 a_3 + \text{c.c.}) \\ &+ V_{123}^{(5)}(a_1^* b_2 b_3 + \text{c.c.}) + V_{123}^{(6)}(b_1^* b_2 b_3 + \text{c.c.}) \Big\}\, \delta_{1-2-3}^k \\ &+ \Big\{ V_{123}^{(7)}(a_1 a_2 a_3 + \text{c.c.}) + V_{123}^{(8)}(a_1 a_2 b_3 + \text{c.c.}) \\ &+ V_{123}^{(9)}(a_1 b_2 b_3 + \text{c.c.}) + V_{123}^{(10)}(b_1 b_2 b_3 + \text{c.c.}) \Big\}\, \delta_{1+2+3}^k \Big]\, dk_{123}. \end{aligned} \tag{11}$$

这里， $a(k)$ 和 $b(k)$ 分别是表面波和界面波模态的正则复振幅， $V_{(i)\,123}\,(i = 1, \cdots, 10)$ 表示依赖于三个波数 k_1、k_2、k_3 的复杂耦合系数。文中还使用了诸如 $a_1 = a(k_1)$、$V_{(i)\,123} = V_{(i)}(k_1, k_2, k_3)$、$\delta_{1-2-3}^k = \delta(k_1 - k_2 - k_3)$、$dk_{123} = dk_1 dk_2 dk_3$ 等简写符号。

如果直接使用这个包含所有类型三波相互作用的哈密顿量，数值计算和广义动力学方程（GKE）的推导将变得极其繁琐。既然我们现在知道，先前研究中观察到的谱演化最重要的机制是“Class3”共振，而且所有 Class3 共振（及近共振）相互作用都包含在 H_3 的第二项中，那么通过仅提取这一部分来近似相互作用哈密顿量 H_3 ，是合理的：

$$H_3 \approx \iiint V_{123}^{(2)}(a_1^* a_2 b_3 + \text{c.c.})\, \delta_{1-2-3}^k\, dk_{123}. \tag{12}$$

于是，复振幅的相应演化方程变为

$$\frac{da_k}{dt} = -i\omega_k^+ a_k - i \iint V_{012}^{(2)} a_1 b_2\, \delta_{0-1-2}^k\, dk_{12} - i \iint V_{102}^{(2)} a_1 b_2^*\, \delta_{1-0-2}^k\, dk_{12}, \tag{13a}$$

$$\frac{db_k}{dt} = -i\omega_k^- b_k - i \iint V_{120}^{(2)} a_1 a_2^*\, \delta_{1-2-0}^k\, dk_{12}, \tag{13b}$$

其形式为 g　　本研究采用的“简化”双层流体系统的控制方程。

最初，我们打算直接使用 $V_{012}^{(2)}$ 作为双层流体系统。然而，在查看 [7], 后，我们发现 $V_{012}^{(2)}$ 似乎是一个过于复杂的函数，因此放弃了按其原始形式使用它。此外，如上所述，本研究的目的并非研究双层流体系统，而是考察广义动力学方程对具有双重共振的系统的适用性，因此没有必要过分强调与双层流体系统的相似程度。接下来，为了进一步简化，我们将暂时把 $V_{012}^{(2)}$ 的原始形式替换为一个简单得多的形式，例如这里的 $V_{(2)\,012} = 1$ 或$V_{012}^{(2)} = \sqrt{|k_2|}$ 。如果这个极度简化的模型确实能够重现与原始双层流体系统中观察到的相似谱演化（如图3和图4所示），我们便可将其用作工具，研究广义动力学方程对双重共振所引发的快速谱变化的适用性。

2.2 简化模型的直接数值模拟

为了检验简化模型能否再现与原始双层流体系统相似的谱演化，我们基于简化模型的控制方程（13）进行了直接数值模拟。将波数空间 k 按等间隔离散化后，可得到以下常微分方程组

与 (13) 对应的微分方程：

$$\frac{da_k}{dt} = -i\omega^+ a_k - i\sqrt{2\pi}\sum_{k_1}\sum_{k_2} V_{012}\, a_1 b_2\, \delta^k_{0-1-2} - i\sqrt{2\pi}\sum_{k_1}\sum_{k_2} V_{102}\, a_1 b_2^*\, \delta^k_{1-0-2}, \tag{14a}$$

$$\frac{db_k}{dt} = -i\omega^- b_k - i\sqrt{2\pi}\sum_{k_1}\sum_{k_2} V_{120}\, a_1 a_2^*\, \delta^k_{1-2-0}, \tag{14b}$$

其中， δ^k_{0-1-2} 表示克罗内克δ函数，下标0、1和2分别对应 k、 k_1和 k_2。 $\sqrt{2\pi}$ 的出现源于连续傅里叶变换与离散傅里叶变换之间的关系。有关离散化方法的更多详情，请参见 [20]。在（14）中，我们省略了 V_{012}上的上标（2）。此后我们将沿用这一记法。

在对简化模型 (14) 进行直接数值模拟时，采用固定时间步长 Δt，通过四阶龙格–库塔方法追踪 $a_k(t)$ 和 $b_k(t)$ 的演化。非线性项的卷积和采用快速傅里叶变换进行伪谱计算，并使用所谓的 3/2规则适当去除这一过程中产生的混叠误差。初始谱由 (3) 给出，且在本研究中始终固定 k_p 为 $k_p = 3.5$ 。参数 A 的取值经过选择，使初始波场 E 的能量密度（定义为 $E = \sum_k \omega^+ |a_k(0)|^2$）达到指定值。在大多数计算中，波数空间截断于 $k_{\max} = k_p \times 5$，物理空间中的节点数 n_x 为 $n_x = 2^{18}$。采用这一设置时，波场由约 350,000 个弱相互作用的波列组成。时间步长 Δt 通常选为 $\Delta t = T_p/50$，对于当前参数设置，即 $h_l = 2.0$、 $R = 0.8$ 和 $k_p = 3.5$，有 $T_p \approx 3.36$ 。谱 $S^+(k)$ 和 $S^-(k)$ 近似计算为

$$S^+(k) = \sum_m \omega_m^+ |a_m|^2/\Delta k_S, \qquad S^-(k) = \sum_m \omega_m^- |b_m|^2/\Delta k_S, \tag{15}$$

其中， Δk_S 为谱的分辨率，在大多数情况下设为 $\Delta k_S = 0.01$ ；对节点编号 m 求和时，涵盖的是直接数值模拟中落在以 k为中心、宽度为 Δk_S 的谱箱内的节点。谱 $S^+(k)$和 $S^-(k)$也取十次实现的平均值，这些实现之间的区别仅在于用于指定分量波初始相位的随机数集合不同。

图 8 展示了通过对简化模型进行直接数值模拟得到的 $S^+(k)$（左）和 $S^-(k)$（右）的演化示例，其中采用了 $V_{012} = 1$。可以清楚地看到，尽管进行了显著简化，就$S^+(k)$而言，简化模型仍能再现与原双层流体系统相似的行为。

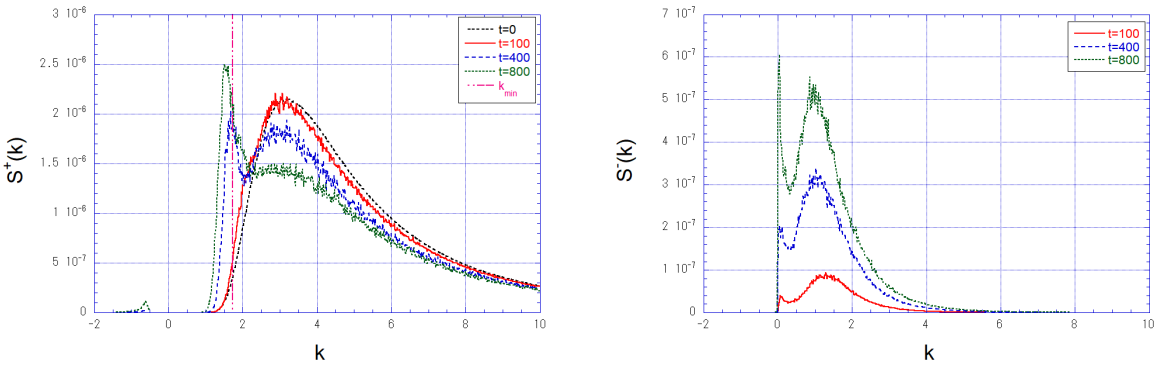

图 8：采用 $V_{123} = 1$ ($h_l = 2.0$, $R = 0.8$, $k_p = 3.5$, $E = 10^{-5}$)时，简化模型直接数值模拟得到的 $S^+(k)$（左）和 $S^-(k)$（右）的演化示例

然而，观察右侧所示的 $S^-(k)$ 的演化后发现，简化模型的表现并不理想。如图中清晰可见，波数极小的界面波会迅速增长。从数值角度来看，这种行为显然不可取；而且，原双层流体系统的直接数值模拟中也未曾观察到这种行为。这个问题源于我们对 V_{123} 的选择，即 $V_{123} = 1$。对于$k_1^+ = k_2^+$类型的共振，这种 V_{123} 不会消失； $k^- = 0$ 这种共振称为“长波-短波共振”。由于接近这种长波-短波共振的相互作用，能量会不断流向波数较小的界面波，导致在区域 $k^- \approx 0$ 内的 $S^-(k)$ 急剧增长，如图8所示。

为避免这个问题，我们尝试用 $V_{123}=\sqrt{|k_3|}$ 替代 $V_{123}=1$，希望这种 V_{123} 能消除长波-短波共振的影响。结果如图9所示。

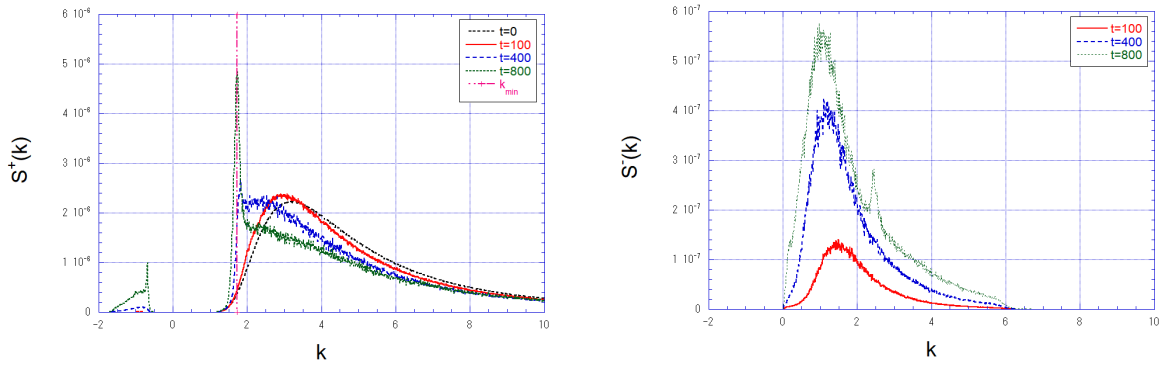

图9：与图8相同，但用 $V_{123}=\sqrt{|k_3|}$ 代替 $V_{123}=1$

如图所示，这种对 V_{123} 的选择成功消除了 $S^{-}(k)$在 $k=0$附近的不利增长，但仍再现了 $S^{+}(k)$在 $k_{\min}$附近尖峰的增长。因此，在本文的所有后续计算中，我们都将采用这种选择 $V_{123}=\sqrt{|k_3|}$。对 V_{123} 采用更大的 k_3 幂，也能有效消除 $S^{-}(k)$在 $k\approx 0$附近的增长，但同时会引入另一个问题：高波数处谱的行为会变得不稳定。

采用 $V_{123}=\sqrt{|k_3|}$ 的简化模型也具有与原始双层流体系统相当相似的时间尺度特征。图10展示了三个 $S^{+}(k,t)$，它们对应于 $\tau(\equiv Et)$的同一数值，但 (E,t) 的组合各不相同。如果谱 $S^{+}(k)$的演化遵循标准动力学方程(4)，那么在整个 k范围内，三个 $S^{+}(k)$应当重合。如图10所示，在 k的大部分范围内，这些 $S^{+}(k)$实际上相当吻合。然而，在双共振点 $k_{\min}(\approx 1.73)$附近，它们之间出现了显著差异。从右侧的局部放大图可以清楚地看到，尖峰的增长时间尺度似乎比 τ更短。与图7(b)对比可知，简化模型给出的 $S^{+}(k)$演化特征与此前观察到的原始双层流体系统的演化特征非常相似。

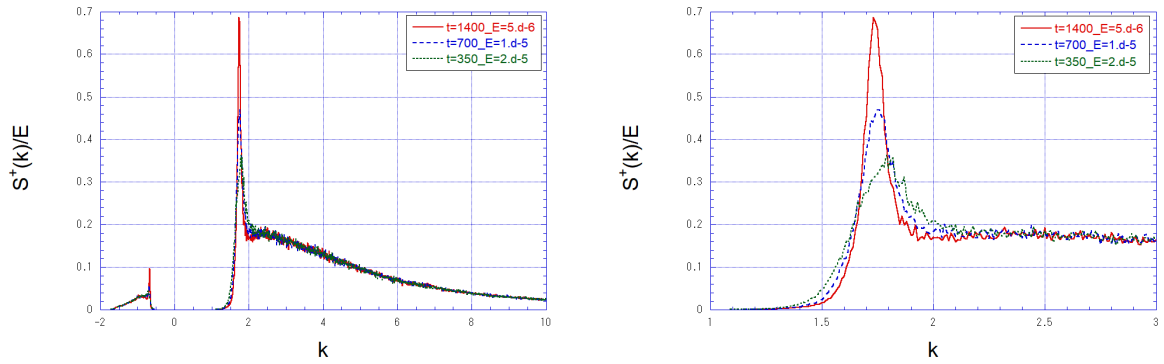

图10：简化模型相对于慢时间尺度 $\tau(=Et)$ 的标度特征。右图是左图中 $k_{\min}$ 附近的放大图。

以上所有观察结果都强烈表明，采用 $V_{123}=\sqrt{|k_3|}$ 的简化模型可作为一种合适的工具，用于验证广义动力学方程对具有双重共振的系统的适用性。

2.3 简化模型的广义动理学方程

作为描述不规则波场的统计量，我们引入如下定义的二阶矩和三阶矩：

$$\langle a_k a_{k'}^* \rangle = n(k)\delta(k-k'), \quad \langle b_k b_{k'}^* \rangle = N(k)\delta(k-k'), \tag{16a}$$

$$\langle a_0^* a_1 b_2 \rangle = J_{012}\delta(k-k_1-k_2). \tag{16b}$$

这里，$\langle\ \ \rangle$ 表示系综平均，而狄拉克 δ 函数源于对场空间均匀性的假设。

对 (16a) 关于 t 求导，并使用 (13)，得到

$$\frac{dn_k}{dt} = 2\,\mathrm{Im}\iint \left\{V_{012}J_{012}\delta_{0-1-2} - V_{102}J_{102}\delta_{1-0-2}\right\} dk_{12}, \tag{17}$$

$$\frac{dN_k}{dt} = -2\,\mathrm{Im}\iint V_{120}\,J_{120}\,\delta_{1-2-0}\,dk_{12}. \tag{18}$$

对 (16b) 中 J_{012} 的定义关于 t 求导，并使用 (13)，同时假设弱非高斯性使得四阶累积量可以忽略，可得到 J_{012} 的演化方程如下：

$$\left\{\frac{d}{dt} - i\Delta\omega_{012}\right\} J_{012} = iV_{012}f_{012}, \quad f_{012} \equiv n_1N_2 - n_0(n_1+N_2), \tag{19}$$

其中 $\Delta\omega_{012} = \omega_0 - \omega_1 - \omega_2$。对于 k_i 的模态，$\Delta\omega_{012}$ 中的 $\omega_i\,(i=0,1,2)$ 应适当地替换为 ω_i^+ 或 ω_i^-。

(19) 的通解为

$$J_{012}(t) = iV_{012}\int_0^t f_{012}(t')\mathrm{e}^{i\Delta\omega_{012}(t-t')}\,dt' + J_{012}(0)\mathrm{e}^{i\Delta\omega_{012}t}. \tag{20}$$

假设此处 (i) $J_{012}(0) = 0$，并且 (ii) $n_k(t)$ 和 $N_k(t)$ 的时间变化（因而 $f_{012}(t)$ 的时间变化）相对于振荡项 $\mathrm{e}^{i\Delta\omega_{012}t}$ 慢得多，因此可将 $f_{012}(t)$ 视为积分中的常数，则由 (20) 得到

$$J_{012}(t) = iV_{012}\frac{\mathrm{e}^{i\Delta\omega_{012}t}-1}{\Delta\omega_{012}}. \tag{21}$$

将 $J_{012}(t)$ 的这一表达式代入 (17) 和 (18)，得到“Janssen 方程” [13]。

进一步假设 f 在 (21) 中经过足够长的时间后，$t\to\infty$ 的渐近计算给出 s

$$J_{012}(t) = V_{012}\left[-\frac{\mathcal{P}}{\Delta\omega_{012}} + \pi i\delta(\Delta\omega_{012})\right]. \tag{22}$$

将 $J_{012}(t)$ 的这一形式代入 (17) 和 (18)，得到 Zakharov-Hasselmann 型的标准动力学方程 (4)。 [11, 14, 23]

求解方程组 (17)、(18) 和 (19)，以追踪谱 $n(k)$、$N(k)$ 和 J_{012} 的时间演化，构成了如本文所研究的允许三波共振相互作用的系统的广义动力学方程框架。在广义动力学方程中，通常还可将这三个方程组成的方程组化简为仅涉及 $n(k)$ 和 $N(k)$ 的两个方程，方法是将 (20) 代入 (17) 和 (18) 以消去 J。然而，在本研究中，我们不采用这种化简，而是直接处理 (17)、(18) 和 (19) 组成的耦合方程组。这一选择使数值代码更加简单，同时也能够直接处理三阶矩 J_{012} 所提供的信息。顺便一提，我们设定 $J_{012}(0) = 0$，因为我们的直接数值模拟的初始条件由大量具有不同波数的相互独立的波列叠加而成，对于这些波列，J_{012} 应为零。

将 k 离散化以对简化模型的GKE进行数值计算时，$n(k)$和$N(k)$均表示为一维数组。尽管 J_{012} 由于其指标数量较多，乍看之下似乎需要使用三维数组，但其定义（16b）中的狄拉克 δ 函数 $\delta(k_0-k_1-k_2)$ 使我们能够将其化简为二维数组。若将 $J_{012}\delta_{0-1-2}$ 表示为二维数组 $f(k,k_1)$，则 J_{102}和 J_{120}分别可表示为 $f(k_1,k)$和 $f(k_1,k_1-k)$。因此，仅使用一个二维数组就足以表示出现在GKE三个演化方程中的 J 的全部信息。

离散化的GKE系统采用四阶龙格-库塔法进行时间积分，固定时间步长为 Δt。在对 J_{012}的演化方程（19）进行积分时，我们通过 $\widetilde{J}_{012} \equiv J_{012} e^{-i\Delta\omega_{012}t}$ 引入辅助变量 $\widetilde{J}_{012}$，并对 $\widetilde{J}_{012}$应用龙格-库塔格式。这样可以在不损失精度的情况下使用更大的时间步长 Δt。该技术也已用于（13）的直接数值模拟。在GKE的大多数计算中，k 的区间设为 $\Delta k = 0.01$，RK4的时间步长为$\Delta t = T_p/10$。

3 结果与讨论：DNS与GKE的比较

图11比较了简化模型在四个不同时间（即 $200T_p$、$400T_p$、$600T_p$和 $800T_p$，其中 $E = 1 \times 10^{-5}$）下，通过直接数值模拟（蓝线）和广义动力学方程（红线）得到的表面波模态能量谱 $S^+(k)$。

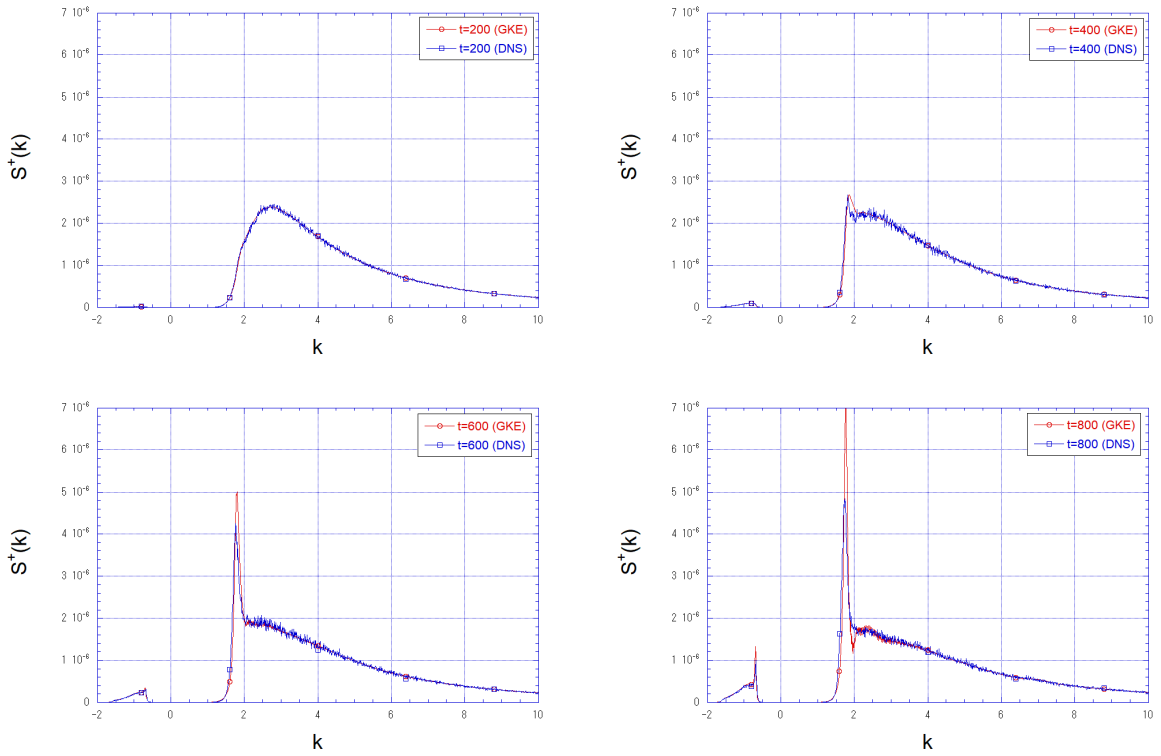

图11：简化模型在不同时间通过直接数值模拟（蓝线）和广义动力学方程（红线）得到的 $S^+(k)$的比较：$200T_p$（左上）、$400T_p$（右上）、$600T_p$（左下）、$800T_p$（右下）。$E = 1 \times 10^{-5}$

在谱演化的早期阶段，即由双重共振导致的尖峰（例如 $t = 200T_p$ 和 $400T_p$）出现之前，广义动力学方程的结果与直接数值模拟的结果非常吻合。然而，在较晚时刻，除了双共振点 $k_{\min}$附近的尖峰区域外，两者仍然吻合良好，但在峰附近，直接数值模拟与广义动力学方程之间存在显著差异。具体而言，广义动力学方程倾向于夸大峰的增长。鉴于传统动力学方程(4)预言，在 $k_{\min}$处 $dS^+(k)/dt$ 为无穷大，因此，尽管通过纳入非共振相互作用的影响，$k_{\min}$ 处的奇点被平滑化，广义动力学方程仍倾向于高估 $k_{\min}$附近区域内 $S^+(k)$的增长，这一结果是自然而然的。

DNS给出的 $S^+(k)$中出现的小幅波动，可能是因为用于估算谱的实现次数（=10）不足。与DNS给出的结果相比，GKE给出的 $S^+(k)$在 $k \approx 2$ 附近（当 $t = 800T_p$时）出现了明显的凹陷，其原因可以解释如下。在此处采用的参数设置下，与 $k_1^+ = k_{\min}(= 1.73)$构成双重Class3共振三波组的另外两个波的波数分别为 $k_2^+ = 1.97$ 和 $k_3^- = 0.24$，而这个 k_2^+恰好对应于GKE预测的 $S^+(k)$中观察到凹陷的位置。如图11所示，GKE倾向于高估 $S^+(k)$在$k_1^+ = k_{\min}$处的增长，进而可能低估了在 k_2^+处与 $k_{\min}$ 共振的表面波的能量；该表面波因此提供能量，支撑了位于

$k_1^+ = k_{\min}$.

顺带一提，负值区域中在 $k \approx -0.67$ 处出现的小峰，可以解释为通过“Class1共振”与 $k_{\min}(= 1.73)$ 处的表面波共振的表面波。我们的相互作用哈密顿量（12）虽然已从原始形式大幅简化，但仍包含我们主要关注的Class3共振以及这种Class1共振。Class1共振的共振条件为 $k_1^+ + k_2^+ = k_3^-$、$\omega_1^+ = \omega_2^+ + \omega_3^-$，这些条件适用于$k_1^+ = 1.73$、 $k_2^+ = 0.67$和$k_3^- = 2.40$。请注意，在这种共振中，波数为 k_2^+的表面波传播方向与另外两个波相反。由于双重共振使 $k_1^+ = 1.79$ 处的表面模态选择性增长，$k_2^+ = (-)0.67$处的表面模态也通过这种Class1共振得以生成。

图 12 同样比较了与图 11 所示相同情形下，通过直接数值模拟（蓝线）和广义动力学方程（红线）得到的界面波模态能量谱 $S^-(k)$。对于 $S^-(k)$，与图 11 中所示的 $S^+(k)$ 的对比不同，直接数值模拟与广义动力学方程在 k 的整个范围内都吻合极佳，不仅是在双重共振（$t = 200T_p$）导致 $S^+(k)$ 中尖峰出现之前，也包括该尖峰充分发展之后（$t = 600T_p$）。直接数值模拟和广义动力学方程中在 $k^- = 2.4$ 附近观察到的轻微隆起，对应于上述 Class1共振的一个共振三元组成员，因此也是 $k_{\min}$ 附近 $S^+(k)$ 急剧增长所产生的另一种副产物。

在 $k^- = 2.4$ 之后观察到的广义动力学方程中的异常振荡，很可能是由某种数值不稳定性引起的。图中所示的广义动力学方程计算将 k 空间以间隔 $\Delta k = 0.01$ 进行离散化。使用较粗的离散化，间隔为 $\Delta k = 0.02$ 时，振荡幅度几乎增大一倍。这表明，如果使用足够精细的网格，这种不理想的振荡就会消失。然而，遗憾的是，由于我们的计算环境简陋，仅有一台 Windows个人电脑，因此无法做到这一点，主要原因是内存不足。

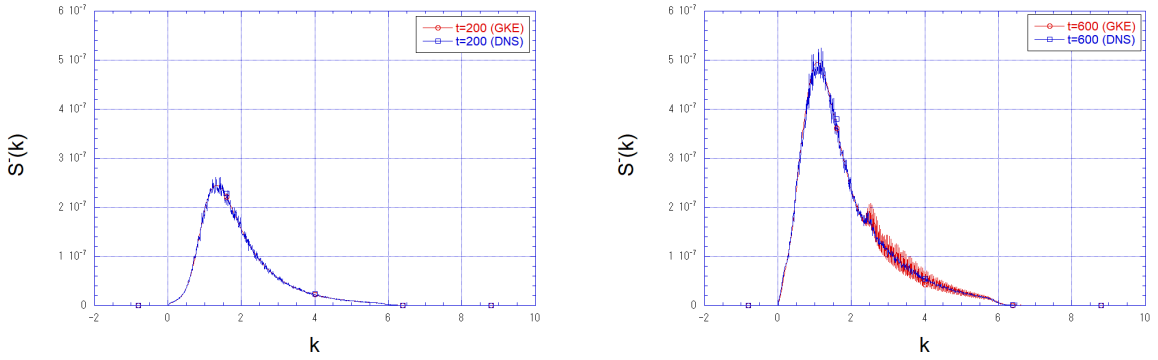

图 12：简化模型在 $t = 200T_p$（左）和 $t = 600T_p$（右）处，由 DNS（蓝线）和 GKE（红线）得到的 $S^-(k)$ 对比。 $E = 1 \times 10^{-5}$

为了考察波场的非线性程度如何影响 GKE 的适用性，我们针对 E 的若干不同取值进行了计算。图 13 展示了 $t = 1200T_p$ 处、当 $E = 5 \times 10^{-6}$ 时由 DNS（蓝线）和 GKE（红线）得到的 $S^+(k)$（左）和 $S^-(k)$（右）；图 14 展示了相同结果，但对应于 $t = 300T_p$ 处、当 $E = 2 \times 10^{-5}$ 时的情况，两者对应相同的缩放时间值 $\tau = Et$。通过比较这些图中的 $S^+(k)$，以及图 11 左下方所示的 $t = 600T_p$ 处、当 $E = 1 \times 10^{-5}$ 时的 $S^+(k)$（因此也对应相同的 τ 值），我们可以看到，双重共振导致的 $k_{\min}$ 附近 $S^+(k)$ 中的峰会随着 E 变小而更加明显。这一特征对 DNS 和 GKE 均成立。DNS 和 GKE 都包含波的非共振相互作用以及共振相互作用。尽管谱演化主要由共振相互作用支配，但足够接近共振的非共振相互作用也会对谱演化产生影响。在这种情况下，可能影响谱演化的非共振相互作用所允许的频率失配 $\Delta\omega$ 会随 E 增大。因此，出现在双共振点处的 $S^+(k)$ 中的尖峰会随着 E 增大而变得不那么尖锐，并扩展到邻近的波数区域。

对图12、图13和图14中所示 $S^-(k)$的比较清楚地表明，图12中与 $S^-(k)$有关的上述数值不稳定性会随着 E 增大而减弱，并且当 $E = 2 \times 10^{-5}$时，不利的振荡几乎消失。正如上文所述，由双重共振导致的 $S^+(k)$中出现的尖峰，其宽度会随着 E 减小而变窄。因此，对更精细的

分辨率的需求在 k 空间中会随着 E 减小而愈发突出。如果在保持分辨率 Δk 不变的情况下减小 E，数值不稳定性会变得越来越严重，正如图中所示。

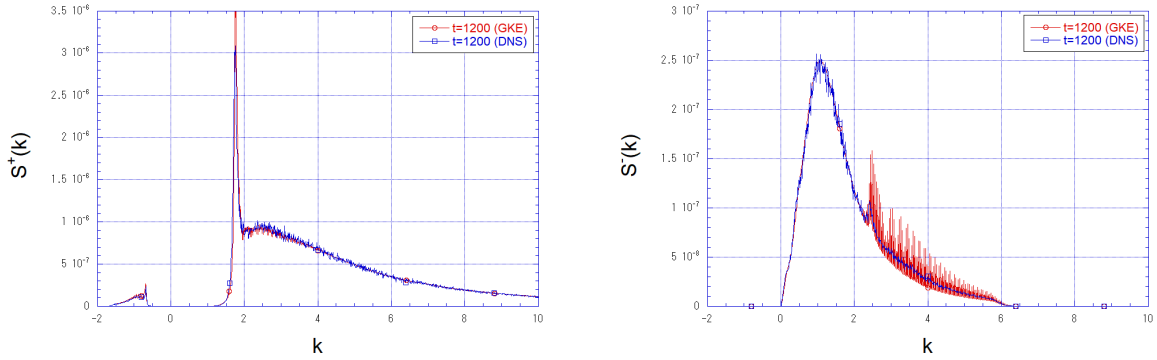

图 13：通过直接数值模拟（蓝线）和广义动力学方程（红线）得到的 $S^{+}(k)$（左）和 $S^{-}(k)$（右），其中 $t = 1200T_p$时 $E = 5 \times 10^{-6}$。

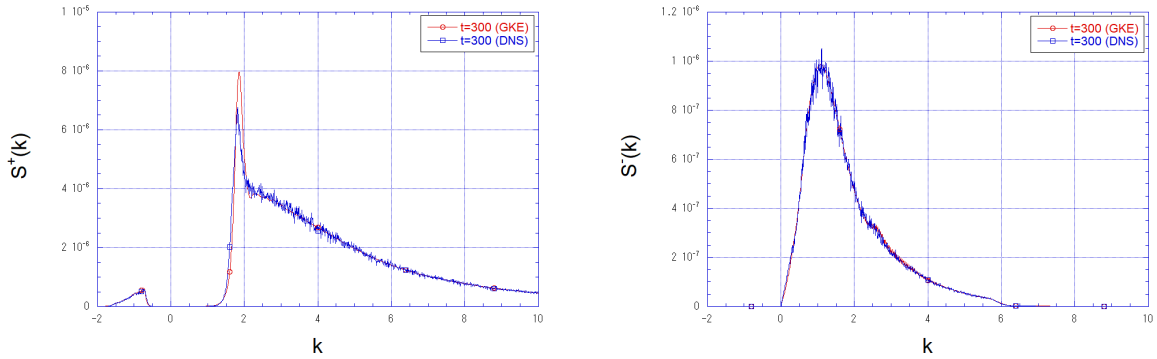

图 14：与图 13 相同，但对应 $t = 300T_p$ 和 $E = 2 \times 10^{-5}$。

顺便提一下，对于允许的频率失配 $\Delta\omega$ 的大小，似乎仍有一些争议。对于表面重力波，由于不存在三波共振，且四波共振是最低阶的共振相互作用，通常认为$\Delta\omega \sim O(\epsilon^2)$。不过，似乎有两种不同的推理都支持这一数量级估计。第一种推理基于有效频率 Ω_k相对于线性频率 ω_k 的“瞬时偏差”幅度，具体如下。对于四波相互作用，确定性运动方程可示意性地写为

$$\frac{da_k}{dt} = -i\omega_k a_k + i \sum_{k_1,k_2,k_3} V_{0123} a_1^* a_2 a_3 \, \delta^k_{0+1-2-3} \equiv -i\Omega_k a_k, \tag{23}$$

因此，Ω_k 相对于 ω_k的瞬时偏差的量级显然为 $O(\epsilon^2)$，其值由三重求和除以 $-ia_k$得到。关于 $\Delta\omega \sim O(\epsilon^2)$ 的第二种推理依据如下：Ω_k 相对于 ω_k 的“平均偏差”。将式 (23) 中的非线性项分为两部分，可表示为

$$\frac{da_k}{dt} = -i\omega_k a_k + i a_k \sum_{k_1} V_{0101} |a_1|^2 \, \delta^k_{0+1-0-1} + i \sum_{\substack{k_1,k_2,k_3 \\ k_1 \neq k_2,k_3}} V_{0123} a_1^* a_2 a_3 \, \delta^k_{0+1-2-3}, \tag{24}$$

其中，Ω_k 相对于 ω_k 的平均偏差来源于第一项求和，其量级同样为 $O(\epsilon^2)$。因此，对于四波系统，两种推理都得出相同的结论：$\Delta\omega$ 的量级为$O(\epsilon^2)$。

另一方面，对于本文所研究的这类三波系统，确定性运动方程可以示意性地写为

$$\frac{da_k}{dt} = -i\omega_k a_k + i \sum_{k_1,k_2} V_{012} a_1 a_2 \, \delta^k_{0-1-2}, \tag{25}$$

这两种论证对 $\Delta\omega$ 的大小给出了不同的估计。前一种基于 Ω_k 与 ω_k 之间“瞬时”偏差的推理预言 $\Delta\omega$ 为 $O(\epsilon)$；而后一种基于 Ω_k 与 ω_k 之间“平均”偏差的推理则预言 $\Delta\omega$ 为 $O(\epsilon^2)$，Jakobsen 和 Newell [12] 已从理论上证明了这一点。从这个意义上说，与四波系统相比，三波系统更适合作为研究平台，用以阐明关于 $\Delta\omega$ 量级的两种推理中哪一种更为恰当。无论如何，就这一讨论而言，系统研究更简单、且不涉及双重共振等不必要复杂因素的三波系统会更加合适。

在结束本节之前，我们简要报告数值结果与 Amundsen[2] 和 Amundsen&Benney[3]的理论预测之间的比较。Amundsen[2] 和 Amundsen&Benney[3]利用一个具有二次非线性的一维模型方程，对双共振点处模态的增长进行了解析研究。他们的方法完全是确定性的，分析对象是傅里叶模态复振幅的确定性演化，而非谱等统计量。他们的模型方程为

$$u_t + \mathcal{L}(u) = \epsilon \mathcal{N}(u), \qquad u(x,0) = f(x), \tag{26}$$

将其表示为傅里叶变换的形式，可得

$$a_t = \epsilon \int H(l, k-l) a(l) a(k-l) \mathrm{e}^{-i\Delta\omega(k,l)t}\, dl, \quad a(k,0) = \hat{a}(k), \tag{27}$$

其中 $\Delta\omega(k,l) = \omega(l) + \omega(k-l) - \omega(k)$，$H(l,k-l)$表示与算子 $\mathcal{N}$相对应的非线性相互作用核，而$\hat{a}(k)$是初始函数 $f(x)$的傅里叶变换。

将 $a(k)$按微扰级数展开为 $a(k,t) = a_0 + \epsilon a_1 + \cdots$后，他们证明了$(a_0)_t = 0$，即$a_0(k) = \hat{a}(k)$，而 $a_1(k)$由下式给出

$$a_1(k) \approx \frac{2\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-i\pi/4} H(\tilde{l}, k-\tilde{l}) a_0(\tilde{l}) a_0(k-\tilde{l})}{\sqrt{\Delta''\omega(k,\tilde{l})}} \sqrt{t} \int_0^1 \mathrm{e}^{-\Delta\omega(k,\tilde{l})tv^2}\, dv. \tag{28}$$

这里，$\tilde{l}$ 是满足 $\omega'(l) = \omega'(k-l)$ 的波数，且 $\Delta''\omega(k,l) := \omega''(l) + \omega''(k-l) \neq 0$，其中 $'$ 表示微分。式（28）通过驻相法得到，适用于 $t \to \infty$。a_1 的这一表达式意味着，在双共振点 $k = k$处，其中 $\Delta\omega(k, l(k)) = 0$，$a_1$按 $a_1 \approx O(\sqrt{t})$ 增长，而 $\bar{k}$ 附近峰的宽度随时间 t变窄。

下面我们考察数值结果是否与这一理论一致。图15展示了通过对简化模型进行直接数值模拟，在双共振点 $k = k_{\min} = 1.73$ 处得到的 $S^+(k)$ 的时间演化，其中 $E = 2.5 \times 10^{-6}$。在这次直接数值模拟中，我们对初始谱（3）略作修改，使得当 $k < 1.90$时，$S^+(k, 0) = 0$。这样便消除了 $k_{\min}$处最低阶部分 a_0 的贡献，从而便于与理论预测进行比较。[2] 和 [3] 的理论预测表明，$a(k_{\min})$ 按 $\sqrt{t}$增长，这似乎意味着 $S(k_{\min})$ 与 t成正比增长。然而，在此处考察的时间范围内，并未观察到这种行为。

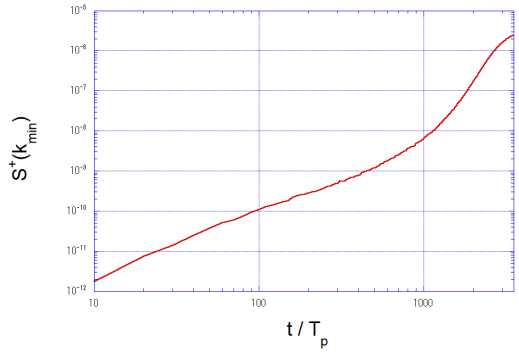

图15：采用含有 E =2.5×10^{-6}的简化模型进行直接数值模拟，得到的 $k_{\min} = 1.73$处 $S^+(k)$的时间演化。

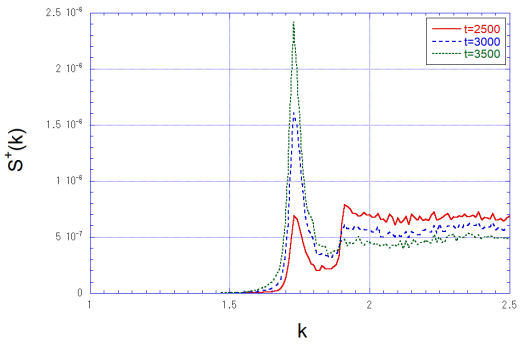

图16：与图15采用相同的直接数值模拟得到的 $k_{\min}$ 附近 $S^+(k)$的时间演化。

图16展示了从同一直接数值模拟中获得的双共振点$k_{\min}$附近的 $S^+(k)$的演化。根据图15所示双共振点处的峰在计算结束时已开始趋于饱和这一事实判断，

计算时长可以认为足够长。然而，在图16中，并未观察到理论所预测的 $S^{+}(k)$中尖峰逐渐变窄的趋势。

因此，我们无法重现 [2] 和 [3]从理论上预测的双共振点附近模态演化特征。我们的讨论涉及能量谱等统计量，而 [2] 和 [3] 中的理论则针对模态复振幅等确定性变量。因此，若要直接比较两者，可能需要进行更为谨慎的考察。

4 总结与结论

本研究的结果及由此得出的结论可总结如下。

- 在先前研究 [21] 中，我们数值研究了双层流体系统中能量从表面波模态向界面波模态的传递，并观察到由双重共振引发的表面波模态能量谱中尖峰的出现及其快速增长。波湍流理论（WTT）给出的传统动力学方程无法重现这一现象。本研究旨在验证“广义”动力学方程（GKE）是否适用于这一双重共振起关键作用的现象。

- 为便于研究，我们基于原系统的哈密顿表述，仅提取特定类型的三波相互作用，并将复耦合系数替换为类似$V_{123}=\sqrt{|k_3|}$这样的简单系数，从而构建了一个高度简化的双层流体系统模型。

- 通过对该简化模型进行直接数值模拟（DNS），已经确认该模型能够再现表面波谱$S^{+}(k)$在双共振点 $k_{\min}$ 处尖峰的出现及其快速增长；这一现象在定性上与原双层流体系统中观察到的现象非常接近。这表明该模型可以作为实现本研究目标的合适工具。

- 我们推导了该简化模型的GKE，基于该方程进行了数值模拟，并将结果与同一简化模型的DNS结果进行了比较。比较表明，至少在定性上，GKE同样能够再现 $S^{+}(k)$在双共振点 $k_{\min}$处尖峰的出现及其快速增长。然而，研究表明，GKE往往会高估尖峰的增长，从而与DNS结果产生显著差异（例如，见图11）。考虑到传统动理学方程（4）预测 $dS^{+}(k)/dt$ 在 $k_{\min}$处取无穷大，这可以视为一种自然结果。在 $k_{\min}$ 处过度增长还会通过普通的（即单一）共振相互作用，导致GKE在其他波数区域的结果偏离DNS结果。

- 考察广义动力学方程的推导过程可知，广义动力学方程偏离直接数值模拟（即正确行为）的原因，显然在于基于弱非高斯性假设推导三阶矩的演化方程（19）时，忽略了四阶累积量。由此看来，未来或许值得更深入地研究广义动力学方程所给出的 J_{012} 行为。

- 除双共振点 $k_{\min}$ 附近以及通过普通共振与之直接相关的几个狭窄波数区域外，广义动力学方程的结果与直接数值模拟的结果吻合得非常好。在广义动力学方程与直接数值模拟吻合良好的这些区域中，也证实谱演化的时间尺度与传统弱湍流理论预测的慢时间尺度$1/\omega_0\epsilon^2$ 保持相似，这一点非常准确。这或许表明，在谱演化中发挥重要作用的非共振相互作用所允许的频率失配 $\Delta\omega$ 按 $O(\epsilon^2)$ 的尺度变化。进一步研究允许的频率失配 $\Delta\omega$ 的大小值得探讨。

- 遗憾的是，我们未能证实 [2] 和 [3] 关于双共振点处模态增长特征的理论预测。由于本研究的主要目标

是考察广义动力学方程（GKE）对具有双重共振的系统的适用性，因此我们的研究方法可能有些方面不适合与 [2] 和 [3]进行比较分析。这一点值得进一步探讨。

致谢

作者谨向基尔大学的 Victor Shrira 致以诚挚谢意，感谢他指出，作者在双层流体系统的直接数值模拟中观察到的尖锐谱峰与“双重共振”现象有关，并慷慨提供相关文献资料。作者还要感谢东京电机大学的 Naoto Yokoyama，感谢他进行的宝贵讨论。

参考文献

[1] Alam, M.-R., Liu, Y. & Yue, D.K.P. 2009 双层流体中波在海底波纹上传播时的布拉格共振。第二部分：数值模拟，《流体力学杂志》624, 225–253。[2] Amundsen, D.E.，《色散波系统中的共振》，博士论文，数学系，麻省理工学院，1999年4月26日。[3] Amundsen, D.E. & Benney, D.J. 2000《色散波系统中的共振》，《应用数学研究》105, 277–300。[4] Annenkov, S. Y. & Shrira, V. I. 2006 非共振相互作用在非线性随机水波场演化中的作用。《流体力学杂志》561, 181–207。[5] Annenkov, S. Y. & Shrira, V. I. 2015 用广义动力学方程模拟飓对风浪的影响。《物理海洋学杂志》45, 807–812。[6] Benney, D.J. & Saffman, P.G. 1966 色散介质中随机波的非线性相互作用。《皇家学会学报A辑》289, 301–320。[7] Choi, W., Chabane, M., Taklo, TMA. 2021 双层系统中的二维共振三波相互作用。《流体力学杂志》907, A5-1–41。doi:10.1017/jfm.2020.824[8] Davidson, R.C. 1966 均匀等离子体中的弱湍流。普林斯顿大学等离子体实验室报告，MATT-496，第140页。[9] Davidson, R.C. 1967 均匀湍流弱非线性系统中波相关性的演化。《等离子体物理学杂志》1, 341–359。[10] Gramstad, O. & Stiassnie, M. 2013 水波的相位平均方程。《流体力学杂志》718, 280–303。[11] Hasselmann, K. 1962 重力波谱中的非线性能量传递。第一部分：一般理论，《流体力学杂志》12, 481–500。[12] Jakobsen, P. & Newell, A.C. 2004 波湍流中的不变测度与熵产生。《统计力学杂志》(2004) L10002，DOI 10.1088/1742-5468/2004/10/L10002[13] Janssen, P. A. E. M. 2003 非线性四波相互作用与怪波。《物理海洋学杂志》33 863–884。[14] Nazarenko, S. 2011 波湍流，《物理学讲义》825，施普林格。[15] Osborne, A.R. & Burch, A.R. 1980 安达曼海中的内孤立波，《科学》208, 451–460。[16] Phillips, O.M. 1960 有限振幅非定常重力波的动力学，第一部分，《流体力学杂志》9, 193–217。[17] Soomere, T. 1992 罗斯贝波双重共振的几何结构，《地球物理年刊》10, 741–748。[18] Soomere, T. 1993 罗斯贝波的双重共振与动力学方程，《地球物理年刊》11, 90–98。

[19] Soto, A.R., Crabtree, C., Ganguli, G, & Fletcher, A.C. 2020 SMART实验中由多种快速重离子环分布引起的下混合波不稳定性，《等离子体物理》27, 122112, https://doi.org/10.1063/5.0025379[20] Tanaka, M. & Yokoyama, N. 2013 弱湍流随机相位与振幅形式的数值验证，《物理评论E》87, 062922-1–10。[21] Tanaka, M. & Wakayama, K. 2015 双层流体系统中表面波向界面波能量传递的数值研究。《流体力学杂志》763, 202–217。[22] Turner, J.S. 1973 流体中的浮力效应，剑桥大学出版社。[23] Zakharov,V.E., L'vov, V.S. & Falkovich, G. 2025 Kolmogorov-Zakharov湍流谱——波湍流（第2版），施普林格。