arXiv:2601.04528v1 [math.AP] 8 Jan 2026

利用 Lam´e-Navier 解对一阶利普希茨函数进行哈代分解

Daniel Alfonso Santiesteban[1],Ricardo Abreu Blaya[1] 和 Daniel Alpay[2]

[1] 数学系，格雷罗自治大学，墨西哥[2] 施密德科学与技术学院，查普曼大学，美国 电子邮件：danielalfonso950105@gmail.com, rabreublaya@yahoo.es，alpay@chapman.edu

摘要

克利福德代数的表述使我们能够用欧几里得狄拉克算子重写 Lam´e-Navier 系统。本文关注的主要问题是：若尔当域 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 的边界 Γ 上的高阶利普希茨函数，能否分解为 Lam´e-Navier 系统某个解在 Γ 两侧的两个边界值之和。我们的主要工具是与克利福德分析背景下出现的奇异积分算子相关的哈代投影；事实证明，该算子在一阶利普希茨类上是一个对合算子。

关键词。 克利福德分析，Lam´e-Navier 系统，高阶利普希茨类，哈代分解。

2010 年数学主题分类： 30G30,30G35,26A16.

1 引言

在不存在体力的情况下，三维各向同性弹性体中各点的位移向量 $\vec{u}$ 由 Lam´e-Navier 系统描述

$$\mu\Delta\vec{u} + (\mu + \lambda)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) = 0, \tag{1}$$

其中， λ 和 μ 是所谓的拉梅´参数 [15]。这里， $\mu > 0$和$\lambda > -\frac{2}{3}\mu$是取决于物体的弹性常数。¯拉梅´-纳维系统（或平衡方程）在连续介质力学中非常重要，因为它构成了描述弹性材料在应力作用下行为的基础数学框架。它之所以有用，是因为其在线性弹性理论以及桥梁、建筑物等结构的设计与分析中发挥着至关重要的作用，

以及机械部件的设计与分析中发挥着至关重要的作用。该系统使工程师和科学家能够预测结构变形和稳定性，从而确保各种应用中的安全性和效率（例如参见 [4,17]）。

调和函数是二阶偏微分方程 $\mathcal{D}_x\mathcal{D}_x u = 0$ 的解，其中 $\mathcal{D}_x$ 表示狄拉克算子，它在 $\mathbb{R}^m$ ($\Delta = -\mathcal{D}_x\mathcal{D}_x$) 中将拉普拉斯算子因式分解。夹心型方程 $\mathcal{D}_x u\mathcal{D}_x = 0$ 的解，即所谓的亚单生成函数，与线性弹性理论 [1, 20, 23, 24] 的某些主题中的调和函数密切相关。这些奇异函数最初在 [18, 19] 中被引入，并在 [16, 21, 22, 25, 36] 中得到更深入的研究。事实上，经典的 Lam´e-Navier 系统（1）可以改写为

$$\left(\frac{\mu+\lambda}{2}\right)\mathcal{D}_{\underline{x}}\vec{u}\mathcal{D}_{\underline{x}} + \left(\frac{3\mu+\lambda}{2}\right)\mathcal{D}_{\underline{x}}\mathcal{D}_{\underline{x}}\vec{u} = 0, \tag{2}$$

其中

$$\mathcal{D}_{\underline{x}} := e_1\frac{\partial}{\partial x_1} + e_2\frac{\partial}{\partial x_2} + e_3\frac{\partial}{\partial x_3},$$

这是利用 $\mathbb{R}^3$ 的标准基构造的三维狄拉克算子，该标准基生成克利福德代数 $\mathbb{R}_{0,3}$ [25]。如果考虑 $\mathbb{R}^m$ 中的狄拉克算子，则可以构想出（2）的一个自然推广。

上述改写为 Lam´e-Navier 系统的解的结构带来了新的认识。事实上，（2）的每个解都可以表示为一个调和函数与一个亚单生成函数之和，而（2）的通解恰好是同时满足调和性和亚单生成性的那些向量场。

将闭若尔当曲线 Γ 上的复函数分解为两个全纯函数的边界迹之和，其中每个函数分别定义在曲线所界定的一个开区域内，这是复分析中的经典课题，也是求解黎曼-希尔伯特问题的基石。事实上，这种分解涉及希尔伯特变换（柯西变换的一种奇异形式），其 α-H¨older 和 L^p 有界性在实调和分析 [7, 12, 26, 35] 中起着基础性作用。借助所谓的单生成函数（狄拉克算子的零解 $\mathcal{D}_x$），这种分解已推广到 m 维欧几里得空间。

标准的高阶利普希茨类 Lip($k+\alpha$, Γ) 由所有取值于 $\mathbb{R}$ 的连续函数集合构成

$$\mathbf{f} := \{f^{(\mathbf{j})},\ |\mathbf{j}| \le k\} \tag{3}$$

定义在 Γ 上并满足相容条件

$$\left| f^{(\mathbf{j})}(\underline{x}) - \sum_{|\mathbf{j}+\mathbf{l}|\le k} \frac{f^{(\mathbf{j}+\mathbf{l})}(\underline{y})}{\mathbf{l}!}(\underline{x}-\underline{y})^{\mathbf{l}} \right| = \mathcal{O}(|\underline{x}-\underline{y}|^{k+\alpha-|\mathbf{j}|}),\ \underline{x},\underline{y}\in\Gamma,\ |\mathbf{j}|\le k.$$

1934年，美国数学家 Hassler Whitney 在 [37] 中证明，这样一个集合可以扩展为定义在 $\mathbb{R}^m$ 上的 $C^{k,\alpha}$-光滑函数。若想了解更经典的论述，

可参阅 E.M. Stein 的著名著作 [34, 第 176] 页。

按照惯例，$\mathbb{R}_{0,m}$值函数类按分量定义。为简化记号，对于$\mathbb{R}_{0,m}$值函数的高阶利普希茨类，我们仍记作 Lip$(k+\alpha,\Gamma)$。对于 $k=0$，特别有 Lip$(k+\alpha,\Gamma) = C^{0,\alpha}(\Gamma)$。$\mathbb{R}_{0,m}$值类 Lip$(k+\alpha,\Gamma)$ 也可以通过相容条件定义

$$\left\| f^{(\mathbf{j})}(\underline{x}) - \sum_{|\mathbf{l}|\le k-|\mathbf{j}|} \frac{f^{(\mathbf{j}+\mathbf{l})}(\underline{y})}{\mathbf{l}!}(\underline{x}-\underline{y})^{\mathbf{l}} \right\| \le C|\underline{x}-\underline{y}|^{k+\alpha-|\mathbf{j}|},\ \underline{x},\underline{y}\in\Gamma,$$

其中使用了克利福德范数 $\|\cdot\|$，而函数 $f^{\mathbf{j}}$ 这次是$\mathbb{R}_{0,m}$值的。如果我们限于讨论 $k=1$ 的情形，只需将形如 $(0,0,\ldots,1,\ldots,0)$ 的多重指标 $\mathbf{j}$ 与其中 1 所占据的位置索引 j 对应起来，我们的记号就会大大简化。

惠特尼延拓定理可以表述如下（更多细节请参见 [2, 定理3。2] ）

定理1. 设$\mathbf{f} = \{f^j, 0\le j\le m\}$ 是一个取值于$\mathbb{R}_{0,m}$的集合，属于利普希茨 $Lip(1+\alpha,\Gamma)$。那么，存在一个紧支撑函数 $\tilde{f}\in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}_{0,m})$，满足

(i) $\tilde{f}|_\Gamma = f^0$, $\partial_{x_j}\tilde{f}|_\Gamma = f^j$, $j=1,\ldots,m$,

(ii) $\tilde{f}\in C^\infty(\mathbb{R}^m\setminus\Gamma)$,

(iii) $\|\mathcal{D}_{\underline{x}}\tilde{f}(\underline{x})\| \leqslant c\,\mathrm{dist}(\underline{x},\Gamma)^{\alpha-1}$, *for* $\underline{x}\in\mathbb{R}^m\setminus\Gamma$.

在 [3] 中证明了，Lip$(1+\alpha,\Gamma)$中的高阶利普希茨函数可以分解为 $\mathbb{R}^m\setminus\Gamma$中一个分片次单生函数的两个边界值之和。最近，在 [9] 中，作者解决了如下问题：寻找一个在无穷远处为零、且满足与高阶利普希茨函数相关的某种边值条件的分片克利福德代数值调和函数。

从这个角度来看，自然会提出这样的问题：若尔当域 $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ 的边界 Γ 上的函数 $f\in$Lip$(1+\alpha,\Gamma)$能否分解为 Lam´e-Navier 系统的一个解在跨越 Γ时的两个边界值之和？这正是本文要探讨的主要问题。

2 预备概念与辅助结果

考虑由 $e_1,\ldots,e_m$生成的 2^m 维实克利福德代数 $\mathbb{R}_{0,m}$，其乘法规则为 $e_ie_j+e_je_i=-2\delta_{i,j}$, 其中 $\delta_{i,j}$ 是克罗内克符号。下文中，我们将研究范围限定在情形 $m>2$。

代数 $\mathbb{R}_{0,m}$ 中的元素都可以唯一表示为以下形式

$$a=\sum_{A\subseteq\{1,2,\ldots,m\}} a_Ae_A,$$

其中 $a_A \in \mathbb{R}$，并且我们将 e_A 与 $e_{h_1} e_{h_2} \cdots e_{h_k}$ 视为相同，其中 $A = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\} (1 \le h_1 < h_2 < \cdots < h_k \le m)$ 且 $e_\emptyset = e_0 = 1$。通过将 $x = (x_1, \ldots, x_m)$ 与 $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$ 视为相同，我们可以将 $\mathbb{R}^m$ 嵌入到 $\mathbb{R}_{0,m}$ 中。特别地，$Sc[a] := a_0$ 称为 a 的标量部分。$\mathbb{R}_{0,m}$ 中的共轭定义为反自同构 $a \mapsto a^*$，满足 $e_i = -e_i$。在 $\mathbb{R}_{0,m}$ 上定义范数 $\|\cdot\|$ 如下：对于 $a \in \mathbb{R}_{0,m}$，有 $\|a\|^2 = Sc[aa^*]$。

对于每个 $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$，值得注意的是 $\|x\| = |\underline{x}|$，其中 $|\cdot|$ 表示通常的欧几里得范数。一般而言，对于 $a, b \in \mathbb{R}_{0,m}$，我们有

$$\|ab\| \le 2^{\frac{m}{2}} \|a\| \|b\|. \tag{4}$$

关于克利福德代数的深入研究，读者可参阅 [6, 10, 13, 14, 28, 31–33]。

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 是一个边界 Γ 足够光滑的若尔当域。在下文中，我们暂时用 Ω^+ 和 Ω^- 分别表示由 Γ 确定的内部域和外部域（包含无穷远点）。

我们将关注函数 $f : \Omega \to \mathbb{R}_{0,m}$，它们可以写成 $f(x) = \sum_A f_A(x) e_A$，其中取 f_A 取 $\mathbb{R}$ 值。连续性、可微性、可积性等性质均按坐标逐一赋予。特别地，我们以此定义如下由 $\mathbb{R}_{0,m}$ 值函数构成的右模：

- $C^k(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ Ω 中所有 $\mathbb{R}_{0,m}$ 值函数的右模，这些函数具有 k 阶连续可微性。我们记作

$$\partial^{\mathbf{j}} := \frac{\partial^{|\mathbf{j}|}}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \ldots \partial x_m^{j_m}},$$

其中 $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_m) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^m$ 是一个 m 维多重指标，并且

$$|\mathbf{j}| = j_1 + \cdots + j_m.$$

- $C^{k,\alpha}(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$，$\alpha \in (0, 1)$ Ω 中所有 $\mathbb{R}_{0,m}$ 值函数的右模，这些函数具有 k 阶 α-Hölder 连续可微性。

我们指出，算子 $\mathcal{D}_x$ 的基本解（即所谓的克利福德-柯西核）由下式给出

$$E_0(\underline{x}) = \mathcal{D}_{\underline{x}} E_1(\underline{x}) = -\frac{1}{\sigma_m} \frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^m},$$

其中

$$E_1(\underline{x}) = \frac{1}{(m-2)\sigma_m |\underline{x}|^{m-2}}, \ \underline{x} \ne 0,$$

是拉普拉斯算子的基本解，σ_m 表示 $\mathbb{R}^m$ 中单位球面的表面积。因此，核 $E_0(x)$ 是 $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ 中双侧单生函数的一个基本例子。

2.1 Lam´é-Navier 解的表示

设 $f \in C^1(\Omega \cup \Gamma,\ \mathbb{R}_{0,\ m})$在Ω中为左单值函数，则以下Clifford柯西型公式可根据 Γ上的取值重现Ω中的 f：

$$f(\underline{x}) = \int_{\Gamma} E_0(\underline{y} - \underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})d\underline{y},,\ \ \underline{x} \in \Omega, \tag{5}$$

其中，$\underline{n}(\underline{y})$ 表示 $y \in \Gamma$ 处的外指单位法向量。对于右单生成函数，我们有式 (5) 的右手版本：

$$f(\underline{x}) = \int_{\Gamma} f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{y} - \underline{x})d\underline{y},,\ \ \underline{x} \in \Omega. \tag{6}$$

Clifford柯西核 $E_0(x)$ 生成以下重要积分：

$$(\mathcal{C}^l f)(\underline{x}) := \int_{\Gamma} E_0(\underline{y} - \underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})d\underline{y},\ \ \underline{x} \notin \Gamma,$$

and

$$(\mathcal{C}^r f)(\underline{x}) := \int_{\Gamma} f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{y} - \underline{x})d\underline{y},\ \ \underline{x} \notin \Gamma,$$

这些积分使人联想到标准的柯西型积分。相应的特奥多雷斯库变换定义为：

$$(\mathcal{T}^l f)(\underline{x}) := \int_{\Omega} E_0(\underline{y} - \underline{x})f(\underline{y})d\underline{y},$$

and

$$(\mathcal{T}^r f)(\underline{x}) := \int_{\Omega} f(\underline{y})E_0(\underline{y} - \underline{x})d\underline{y}.$$

与 $\mathcal{D}_x\mathcal{D}_x(.)$ 相关的柯西变换和特奥多雷斯库变换可分别定义为

$$(\mathcal{C}^l_{\mathcal{H}} f)(\underline{x}) := -\int_{\Gamma} E_1(\underline{y} - \underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})d\underline{y}, \quad \underline{x} \notin \Gamma, \tag{7}$$

and

$$(\mathcal{T}_{\mathcal{H}} f)(\underline{x}) := \int_{\Omega} E_1(\underline{y} - \underline{x})f(\underline{y})d\underline{y}, \tag{8}$$

分别地，式 (8) 的右手版本为

$$(\mathcal{C}^r_{\mathcal{H}} f)(\underline{x}) := -\int_{\Gamma} f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})E_1(\underline{y} - \underline{x})d\underline{y}, \quad \underline{x} \notin \Gamma. \tag{9}$$

调和函数 $f \in C^2(\Omega\,\mathbb{R}_{0,\ m}) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma,\ \mathbb{R}_{0,\ m})$ 在 Ω 中具有如下表示：

$$f(\underline{x}) = (\mathcal{C}^l f)(\underline{x}) + (\mathcal{C}^l_{\mathcal{H}}\mathcal{D}_{\underline{x}} f)(\underline{x}), \tag{10}$$

and

$$f(\underline{x}) = (\mathcal{C}^r f)(\underline{x}) + (\mathcal{C}^r_{\mathcal{H}} f \mathcal{D}_{\underline{x}})(\underline{x}). \tag{11}$$

与 $\mathcal{D}_x$(。)$\mathcal{D}_x$相关的柯西变换和特奥多雷斯库变换已在 [23], 中引入，其形式为

$$(\mathcal{C}^r_{\mathcal{I}} f)(\underline{x}) := \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x}) f(\underline{y}) \underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x}) d\underline{y} + \sum_{j=1}^{m} e_j \int_{\Gamma} E_1(\underline{y}-\underline{x}) f(\underline{y}) \underline{n}(\underline{y}) d\underline{y} e_j\right), \tag{12}$$

and

$$(\mathcal{T}_{\mathcal{I}} f)(\underline{x}) := -\frac{1}{2}\left(\int_{\Omega} E_0(\underline{y}-\underline{x}) f(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x}) d\underline{y} + \sum_{j=1}^{m} e_j \int_{\Omega} E_1(\underline{y}-\underline{x}) f(\underline{y}) d\underline{y} e_j\right). \tag{13}$$

我们还有（12）的一个左手版本，即

$$(\mathcal{C}^l_{\mathcal{I}} f)(\underline{x}) := \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x}) \underline{n}(\underline{y}) f(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x}) d\underline{y} + \sum_{j=1}^{m} e_j \int_{\Gamma} E_1(\underline{y}-\underline{x}) \underline{n}(\underline{y}) f(\underline{y}) d\underline{y} e_j\right). \tag{14}$$

亚单生成函数 $f \in C^2(\Omega\, \mathbb{R}_{0,m}) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma, \mathbb{R}_{0,m})$ 在 Ω 中具有如下表示:

$$f(\underline{x}) = (\mathcal{C}^l f)(\underline{x}) + (\mathcal{C}^r_{\mathcal{I}} \mathcal{D}_{\underline{x}} f)(\underline{x}) \tag{15}$$

and

$$f(\underline{x}) = (\mathcal{C}^r f)(\underline{x}) + (\mathcal{C}^l_{\mathcal{I}} f \mathcal{D}_{\underline{x}})(\underline{x}). \tag{16}$$

我们将 $\mathcal{L}_x$ 称为 Clifford-Lam´e-Navier 算子

$$\left(\frac{\mu+\lambda}{2}\right) \mathcal{D}_{\underline{x}}(.) \mathcal{D}_{\underline{x}} + \left(\frac{3\mu+\lambda}{2}\right) \mathcal{D}_{\underline{x}} \mathcal{D}_{\underline{x}}(.).$$

我们通常将算子 $\mathcal{L}_x$ 的零解称为 Lam´e-Navier 解。容易看出，该算子可以因式分解为

$$\mathcal{L}_{\underline{x}} = \mathcal{M}_{\underline{x}} \mathcal{D}_{\underline{x}}(.) = \mathcal{D}_{\underline{x}} \mathcal{M}_{\underline{x}}(.) = \overline{\mathcal{M}}_{\underline{x}}(.) \mathcal{D}_{\underline{x}} = (.) \mathcal{D}_{\underline{x}} \overline{\mathcal{M}}_{\underline{x}}, \tag{17}$$

其中 $\mathcal{M}_x := \left(\frac{\mu+\lambda}{2}\right)(.)\mathcal{D}_x + \left(\frac{3\mu+\lambda}{2}\right)\mathcal{D}_x(.)$ 且 $\mathcal{M}_{\underline{x}} := \left(\frac{\mu+\lambda}{2}\right)\mathcal{D}_x(.) + \left(\frac{3\mu+\lambda}{2}\right)(.)\mathcal{D}_x$。

与 $\mathcal{L}_x$ 相关的柯西变换和特奥多雷斯库变换将定义为相应积分算子 (7)、(8)、(12) 和 (13) 的线性组合，该线性组合涉及 Lam´e 参数。具体而言，我们定义

$$(\mathcal{C}^l_{\mathcal{L}} f)(\underline{x}) := -\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} (\mathcal{C}^l_{\mathcal{I}} f)(\underline{x}) + \frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} (\mathcal{C}^l_{\mathcal{H}} f)(\underline{x}), \tag{18}$$

and

$$(\mathcal{T}_{\mathcal{L}}f)(\underline{x}) := -\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}f)(\underline{x}) + \frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{T}_{\mathcal{H}}f)(\underline{x}). \tag{19}$$

(18) 的右手版本定义为

$$(\mathcal{C}^r_{\mathcal{L}}f)(\underline{x}) := -\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^r_{\mathcal{I}}f)(\underline{x}) + \frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^r_{\mathcal{H}}f)(\underline{x}). \tag{20}$$

定理 2 (Borel-Pompeiu 公式**)**。 设 $f \in C^2$**(**Ω**)**。则 $\overline{\ }$

$$\begin{aligned}&(\mathcal{C}^l f)(\underline{x}) + \frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l_{\mathcal{H}}\mathcal{M}_{\underline{x}}f)(\underline{x}) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^r_{\mathcal{I}}\overline{\mathcal{M}}_{\underline{x}}f)(\underline{x}) + \mathcal{T}_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}_{\underline{x}}f)(\underline{x})\\ &= \begin{cases} f(\underline{x}), & if\, \underline{x} \in \Omega,\\ 0, & if\, \underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}\end{aligned} \tag{21}$$

证明。
我们只证明关于 $x \in$ Ω 的结论。关于 $x \in \mathbb{R}^m \setminus$Ω 的证明完全类似。$\overline{\ }$

利用涉及算子 $\mathcal{D}_x\mathcal{D}_x$(.) 和 $\mathcal{D}_x$(.)$\mathcal{D}_x$的 Borel-Pompeiu 公式 _(见 [5] 和 [23]) ：_

$$f(\underline{x}) = (\mathcal{C}^l f)(\underline{x}) + (\mathcal{C}^l_{\mathcal{H}}\mathcal{D}_{\underline{x}}f)(\underline{x}) + (\mathcal{T}_{\mathcal{H}}\mathcal{D}_{\underline{x}}\mathcal{D}_{\underline{x}}f)(\underline{x}) \tag{22}$$

and

$$f(\underline{x}) = (\mathcal{C}^l f)(\underline{x}) + (\mathcal{C}^r_{\mathcal{I}}\mathcal{D}_{\underline{x}}f)(\underline{x}) + (\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\mathcal{D}_{\underline{x}}f\mathcal{D}_{\underline{x}})(\underline{x}), \tag{23}$$

我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}_{\underline{x}}f)(\underline{x}) &= -\frac{(\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\mathcal{D}_{\underline{x}}f\mathcal{D}_{\underline{x}})(\underline{x}) - \frac{(\mu+\lambda)(3\mu+\lambda)}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\mathcal{D}_{\underline{x}}\mathcal{D}_{\underline{x}}f)(\underline{x})\\ &\quad + \frac{(3\mu+\lambda)(\mu+\lambda)}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{T}_{\mathcal{H}}\mathcal{D}_{\underline{x}}f\mathcal{D}_{\underline{x}})(\underline{x}) + \frac{(3\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{T}_{\mathcal{H}}\mathcal{D}_{\underline{x}}\mathcal{D}_{\underline{x}}f)(\underline{x})\\ &= f(\underline{x}) + \frac{(\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l f)(\underline{x}) - \frac{(3\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l f)(\underline{x})\\ &\quad + \frac{(\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^r_{\mathcal{I}}\mathcal{D}_{\underline{x}}f)(\underline{x}) - \frac{(3\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l_{\mathcal{H}}\mathcal{D}_{\underline{x}}f)(\underline{x})\\ &\quad + \frac{(3\mu+\lambda)(\mu+\lambda)}{4\mu(2\mu+\lambda)}[(\mathcal{T}_{\mathcal{H}}\mathcal{D}_{\underline{x}}f\mathcal{D}_{\underline{x}})(\underline{x}) - (\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\mathcal{D}_{\underline{x}}\mathcal{D}_{\underline{x}}f)(\underline{x})].\end{aligned}$$

现在，应用方程 (22) 和 (23)，并利用恒等式

$$(\mathcal{T}^l f)\mathcal{D}_{\underline{x}} = \mathcal{D}_{\underline{x}}(\mathcal{T}^r f), \tag{24}$$

我们得到

$$(\mathcal{T}_{\mathcal{H}}\mathcal{D}_{\underline{x}}f\mathcal{D}_{\underline{x}})(\underline{x}) - (\mathcal{T}_{\mathcal{I}}\mathcal{D}_{\underline{x}}\mathcal{D}_{\underline{x}}f)(\underline{x}) = (\mathcal{C}^r_{\mathcal{I}}f\mathcal{D}_{\underline{x}})(\underline{x}) - (\mathcal{C}^l_{\mathcal{H}}f\mathcal{D}_{\underline{x}})(\underline{x}). \tag{25}$$

因此，对于 $x \underline{\in} \Omega$,

$$
\begin{aligned}
&f(\underline{x})\\
&= (\mathcal{C}^l f)(\underline{x}) - \frac{(\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^r_{\mathcal{I}}\mathcal{D}_{\underline{x}}f)(\underline{x}) + \frac{(3\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l_{\mathcal{H}}\mathcal{D}_{\underline{x}}f)(\underline{x})\\
&\quad + \frac{(3\mu+\lambda)(\mu+\lambda)}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l_{\mathcal{H}}f\mathcal{D}_{\underline{x}})(\underline{x}) - \frac{(3\mu+\lambda)(\mu+\lambda)}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^r_{\mathcal{I}}f\mathcal{D}_{\underline{x}})(\underline{x}) + \mathcal{T}_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}_{\underline{x}}f)(\underline{x})\\
&= (\mathcal{C}^l f)(\underline{x}) + \frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l_{\mathcal{H}}\mathcal{M}_{\underline{x}}f)(\underline{x}) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^r_{\mathcal{I}}\overline{\mathcal{M}}_{\underline{x}}f)(\underline{x}) + \mathcal{T}_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}_{\underline{x}}f)(\underline{x}),
\end{aligned}
$$

至此，我们便完成了证明。 □

沿用前述证明的思路，我们还可以证明以下表示式

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{C}^r f)(\underline{x}) + \frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^r_{\mathcal{H}}\overline{\mathcal{M}}_{\underline{x}}f)(\underline{x}) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l_{\mathcal{I}}\mathcal{M}_{\underline{x}}f)(\underline{x}) + \mathcal{T}_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}_{\underline{x}}f)(\underline{x})\\
&= \begin{cases} f(\underline{x}), & \text{if } \underline{x} \in \Omega,\\ 0, & \text{if } \underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}, \end{cases} \qquad (26)\\
&\frac{(3\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l f)(\underline{x}) - \frac{(\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^r f)(\underline{x}) + \mathcal{C}^l_{\mathcal{L}}\left(\mathcal{M}_{\underline{x}}f\right)(\underline{x}) + \mathcal{T}_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}_{\underline{x}}f)(\underline{x})\\
&+ \frac{(3\mu+\lambda)(\mu+\lambda)}{4\mu(2\mu+\lambda)}\left(\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})d\underline{y} - \int_\Gamma \underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y}\right)\\
&= \begin{cases} f(\underline{x}), & \text{if } \underline{x} \in \Omega,\\ 0, & \text{if } \underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}, \end{cases} \qquad (27)\\
&\frac{(3\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^r f)(\underline{x}) - \frac{(\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l f)(\underline{x}) + \mathcal{C}^r_{\mathcal{L}}\left(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{x}}f\right)(\underline{x}) + \mathcal{T}_{\mathcal{L}}(\mathcal{L}_{\underline{x}}f)(\underline{x})\\
&+ \frac{(3\mu+\lambda)(\mu+\lambda)}{4\mu(2\mu+\lambda)}\left(\int_\Gamma \underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y} - \int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})d\underline{y}\right)\\
&= \begin{cases} f(\underline{x}), & \text{if } \underline{x} \in \Omega,\\ 0, & \text{if } \underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega}. \end{cases} \qquad (28)
\end{aligned}
$$

同样容易证明

$$
\mathcal{M}_{\underline{x}}\left[(\mathcal{C}^l f)(\underline{x}) + \frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l_{\mathcal{H}}\mathcal{M}_{\underline{x}}f)(\underline{x}) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^r_{\mathcal{I}}\overline{\mathcal{M}}_{\underline{x}}f)(\underline{x})\right] = (\mathcal{C}^l\mathcal{M}_{\underline{x}}f)(\underline{x}). \qquad (29)
$$

事实上，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}_{\underline{x}}\left[(\mathcal{C}^l f)(\underline{x})+\frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l_{\mathcal{H}}\mathcal{M}_{\underline{x}}f)(\underline{x})-\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^r_{\mathcal{I}}\overline{\mathcal{M}}_{\underline{x}}f)(\underline{x})\right]\\
&=\mathcal{M}_{\underline{x}}\left[\frac{(3\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l f)(\underline{x})-\frac{(\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^r f)(\underline{x})+\mathcal{C}^l_{\mathcal{L}}\left(\mathcal{M}_{\underline{x}}f\right)(\underline{x})\right.\\
&\quad\left.+\frac{(3\mu+\lambda)(\mu+\lambda)}{4\mu(2\mu+\lambda)}\left(\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})d\underline{y}-\int_\Gamma \underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y}\right)\right]\\
&=\frac{(3\mu+\lambda)^2(\mu+\lambda)}{8\mu(2\mu+\lambda)}[(\mathcal{C}^l f)(\underline{x})]\mathcal{D}_{\underline{x}}-\frac{(\mu+\lambda)^2(3\mu+\lambda)}{8\mu(2\mu+\lambda)}\mathcal{D}_{\underline{x}}[(\mathcal{C}^r f)(\underline{x})]\\
&\quad+\frac{(3\mu+\lambda)(\mu+\lambda)^2}{8\mu(2\mu+\lambda)}\left(\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})d\underline{y}\right)\mathcal{D}_{\underline{x}}\\
&\quad-\frac{(3\mu+\lambda)^2(\mu+\lambda)}{8\mu(2\mu+\lambda)}\mathcal{D}_{\underline{x}}\left(\int_\Gamma \underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y}\right)\\
&\quad-\frac{(\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l_{\mathcal{I}}\mathcal{M}_{\underline{x}}f)\mathcal{D}_{\underline{x}}-\frac{(\mu+\lambda)(3\mu+\lambda)}{4\mu(2\mu+\lambda)}\mathcal{D}_{\underline{x}}(\mathcal{C}^l_{\mathcal{I}}\mathcal{M}_{\underline{x}}f)\\
&\quad+\frac{(\mu+\lambda)(3\mu+\lambda)}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l_{\mathcal{H}}\mathcal{M}_{\underline{x}}f)\mathcal{D}_{\underline{x}}+\frac{(3\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}\mathcal{D}_{\underline{x}}(\mathcal{C}^l_{\mathcal{H}}\mathcal{M}_{\underline{x}}f)\\
&=(\mathcal{C}^l\mathcal{M}_{\underline{x}}f)(\underline{x}).
\end{aligned}
$$

类似地,

$$
\overline{\mathcal{M}}_{\underline{x}}\left[(\mathcal{C}^l f)(\underline{x})+\frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l_{\mathcal{H}}\mathcal{M}_{\underline{x}}f)(\underline{x})-\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^r_{\mathcal{I}}\overline{\mathcal{M}}_{\underline{x}}f)(\underline{x})\right]=(\mathcal{C}^r\overline{\mathcal{M}}_{\underline{x}}f)(\underline{x}). \tag{30}
$$

推论 1 (柯西积分公式**)**。 设 $f\in C^2(\Omega)\cap C^1(\Omega)$。若 $\mathcal{L}_x f=0$ 属于 Ω, 则

$$
f(\underline{x})=(\mathcal{C}^l f)(\underline{x})+\frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l_{\mathcal{H}}\mathcal{M}_{\underline{x}}f)(\underline{x})-\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^r_{\mathcal{I}}\overline{\mathcal{M}}_{\underline{x}}f)(\underline{x}). \tag{31}
$$

(31) 的一些改写如下

$$f(\underline{x}) = (\mathcal{C}^r f)(\underline{x}) + \frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^r_{\mathcal{H}}\overline{\mathcal{M}}_{\underline{x}} f)(\underline{x}) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l_{\mathcal{I}}\mathcal{M}_{\underline{x}} f)(\underline{x}), \tag{32}$$

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) = {} & \frac{(3\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l f)(\underline{x}) - \frac{(\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^r f)(\underline{x}) + \mathcal{C}^l_{\mathcal{L}}\left(\mathcal{M}_{\underline{x}} f\right)(\underline{x}) \\ & + \frac{(3\mu+\lambda)(\mu+\lambda)}{4\mu(2\mu+\lambda)}\left(\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x}) f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})d\underline{y} - \int_\Gamma \underline{n}(\underline{y}) f(\underline{y}) E_0(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y}\right), \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) = {} & \frac{(3\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^r f)(\underline{x}) - \frac{(\mu+\lambda)^2}{4\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}^l f)(\underline{x}) + \mathcal{C}^r_{\mathcal{L}}\left(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{x}} f\right)(\underline{x}) \\ & + \frac{(3\mu+\lambda)(\mu+\lambda)}{4\mu(2\mu+\lambda)}\left(\int_\Gamma \underline{n}(\underline{y}) f(\underline{y}) E_0(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y} - \int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x}) f(\underline{y})\underline{n}(\underline{y})d\underline{y}\right). \end{aligned} \tag{34}$$

本文将需要以下外域Ω中的 Lam´e-Navier 解的表示公式_ 。

定理3. 设 $f \in C^2(\Omega_-, \mathbb{R}_{0,m}) \cap C^1(\Omega_- \cup \Gamma, \mathbb{R}_{0,m})$ 是 *ΩΩ_* 中的 ***Lam´e-Navier*** 解，使得 $f(\infty)$ 存在，并且

$$\|\mathcal{D}_{\underline{x}} f(\underline{x})\| = o\left(\frac{1}{|\underline{x}|}\right) \ as \ \underline{x} \to \infty.$$

那么对于 $\underline{x} \in \Omega_-$ ， 我们有

$$f(\underline{x}) = -(\mathcal{C}^l f)(\underline{x}) - \frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}_{\mathcal{H}}\mathcal{M}_{\underline{x}} f)(\underline{x}) + \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\mathcal{C}_{\mathcal{I}}\overline{\mathcal{M}}_{\underline{x}} f)(\underline{x}) + f(\infty). \tag{35}$$

证明。
设 $x \in \Omega_-$ ，并选取一个球面 $C_R(x) := \{y \in \mathbb{R}^m : \ |y-x| \le R\}$ ，其半径 R 足够大且包含集合 $\Omega \cup \Gamma$。

将柯西积分公式（31）应用于 $\Omega_- \cap \{y \in \mathbb{R}^m : \ |y-x| < R\}$ ，得到

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) = {} & -\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y}) f(\underline{y})d\underline{y} + \frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})[\mathcal{M}_{\underline{y}} f(\underline{y})]d\underline{y} \\ & + \frac{\mu+\lambda}{4\mu(2\mu+\lambda)}\left(\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}} f(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y} + \sum_{j=1}^m e_j \int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}} f(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})d\underline{y}e_j\right) \\ & + \int_{\partial C_R} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y}) f(\underline{y})d\underline{y} - \frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\int_{\partial C_R} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})[\mathcal{M}_{\underline{y}} f(\underline{y})]d\underline{y} \\ & - \frac{\mu+\lambda}{4\mu(2\mu+\lambda)}\left(\int_{\partial C_R} E_0(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}} f(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y} + \sum_{j=1}^m e_j \int_{\partial C_R} E_1(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}} f(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})d\underline{y}e_j\right). \end{aligned}$$

根据我们的假设可得

$$\int_{\partial C_R} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f(\underline{y})d\underline{y} \to f(\infty),$$

而其余积分在 ∂C_R 上当 $R \to \infty$时趋于零，断言得证。□

2.2 Lam´é-Navier 解的柯西型积分

前面引入的利普希茨类 Lip$(1+\alpha,\ \Gamma)$ 非常适合在其上定义一种由式 (16) 导出的柯西型积分。更具体地说，给定$\mathbf{f} \in$ Lip$(1+\alpha,\ \Gamma)$，$\mathbf{f}$ 的柯西型积分可定义为

$$\mathcal{C}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{f}](\underline{x}) = \int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f^0(\underline{y})d\underline{y} - \frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})[\mathcal{M}_{\underline{y}}\tilde{f}(\underline{y})]d\underline{y}$$
$$- \frac{\mu+\lambda}{4\mu(2\mu+\lambda)}\left(\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}\tilde{f}(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y} + \sum_{j=1}^m e_j\int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}\tilde{f}(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})d\underline{y}e_j\right). \tag{36}$$

此处及下文中，f 表示$\mathbf{f}$的惠特尼延拓，依据定理 1。$\mathcal{M}_y f$ 和 $\mathcal{M}_y f$ 在 Γ 上的限制给出

$$\mathcal{M}_{\underline{y}}f(\underline{y}) = \left(\frac{\mu+\lambda}{2}\right)\sum_{j=1}^m f^j(\underline{y})e_j + \left(\frac{3\mu+\lambda}{2}\right)\sum_{j=1}^m e_j f^j(\underline{y}),$$

and

$$\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}\tilde{f}(\underline{y}) = \left(\frac{3\mu+\lambda}{2}\right)\sum_{j=1}^m f^j(\underline{y})e_j + \left(\frac{\mu+\lambda}{2}\right)\sum_{j=1}^m e_j f^j(\underline{y}).$$

应用式 (29)，得到

$$\mathcal{M}_{\underline{x}}[\mathcal{C}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{f}](\underline{x})] = \mathcal{C}^l[\mathcal{M}_{\underline{x}}\tilde{f}](\underline{x}),\ \underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \Gamma, \tag{37}$$

容易看出，$\mathcal{C}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{f}](x)$ 是 $\mathbb{R}^m \setminus \Gamma$ 中的 Lam´é-Navier 解，即$\mathcal{L}_x[\mathcal{C}^0_{\mathcal{L}}[\mathbf{f}](x)] = 0$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \Gamma$。此外，当 x 趋近于 Γ时，式 (36) 中其余的积分（除第一个之外）均变为弱奇异，这一点很容易验证。因此，所有这些积分在 Γ上都没有跳跃不连续。将这一事实与应用于式 (36) 中第一个克利福德-柯西型积分的经典普莱梅利-索霍茨基公式相结合，可得

$$[\mathcal{C}^0_{\mathcal{L}}\mathbf{f}]^+(\underline{x}) - [\mathcal{C}^0_{\mathcal{L}}\mathbf{f}]^-(\underline{x}) = \tilde{f}(\underline{x}) = f^0(\underline{x}),\ \underline{x} \in \Gamma, \tag{38}$$

其中

$$[\mathcal{C}^0_{\mathcal{L}}\mathbf{f}]^\pm(\underline{x}) := \lim_{\Omega_\pm \ni \underline{z} \to \underline{x}} [\mathcal{C}^0_{\mathcal{L}}\mathbf{f}](\underline{z}).$$

$[\mathcal{C}^0_{\mathcal{L}}\mathbf{f}]$ 在 Γ 上的奇异版本记作 $\mathcal{S}^0_{\mathcal{L}}\mathbf{f}$，其定义为

$$\mathcal{S}^0_{\mathcal{L}}\mathbf{f}(\underline{x}) = [\mathcal{C}^0_{\mathcal{L}}\mathbf{f}]^+(\underline{x}) + [\mathcal{C}^0_{\mathcal{L}}\mathbf{f}]^-(\underline{x}),\ \underline{x} \in \Gamma, \tag{39}$$

或者等价地

$$\mathcal{S}^0_{\mathcal{L}}\mathbf{f}(\underline{x}) = 2\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})f^0(\underline{y})d\underline{y} - \frac{3\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})[\mathcal{M}_{\underline{y}}\tilde{f}(\underline{y})]d\underline{y}$$
$$-\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\left(\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}\tilde{f}(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y} + \sum_{j=1}^m e_j\int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}\tilde{f}(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})d\underline{y}e_j\right). \tag{40}$$

其中，（40）中的积分均按柯西主值的意义取值。为简洁起见，省略这些积分前的 p.v. 记号。

设 $\mathbf{f}$ ∈属于 $\mathbf{Lip}(1+\alpha,\Gamma)$，则对于 $y \in \mathbb{R}^m$, $x \in \Gamma$，有（更多细节见 [34]）

$$\tilde{f}(\underline{y}) = P_{\underline{x}}(\underline{y}) + R_{\underline{x}}(\underline{y}), \tag{41}$$

其中

$$P_{\underline{x}}(\underline{y}) = f^0(\underline{x}) + \sum_{j=1}^m f^j(\underline{x})(y_j - x_j).$$

由于 $P_{\underline{x}}(\underline{y})$ 是关于 $\mathbb{R}^m$ 的多项式，且 $\mathcal{L}_y P_x(y) = 0$，结合公式（31）与显然的等式 $P_x(x) = f^0(x)$，可将（40）改写如下

$$\mathcal{S}^0_{\mathcal{L}}\mathbf{f}(\underline{x}) = f^0(\underline{x}) + 2\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})R_{\underline{x}}(\underline{y})d\underline{y} - \frac{3\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})[\mathcal{M}_{\underline{y}}R_{\underline{x}}(\underline{y})]d\underline{y}$$
$$-\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\left(\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}R_{\underline{x}}(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y} + \sum_{j=1}^m e_j\int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}R_{\underline{x}}(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})d\underline{y}e_j\right).$$

再引入一个记号:

$$E^j_0(\underline{y}-\underline{x}) = \partial_{z_j}E_0(\underline{y}-\underline{z})|_{\underline{z}=\underline{x}},\ E^j_1(\underline{y}-\underline{x}) = \partial_{z_j}E_1(\underline{y}-\underline{z})|_{\underline{z}=\underline{x}}$$

并设

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}}\mathbf{f} = \{\mathcal{S}^j_{\mathcal{L}}\mathbf{f} : 0 \le j \le m\}, \tag{42}$$

因此，对于 $j > 0$，我们有

$$\mathcal{S}^j_{\mathcal{L}}\mathbf{f}(\underline{x}) = f^j(\underline{x}) + 2\int_\Gamma E^j_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})R_{\underline{x}}(\underline{y})d\underline{y} - \frac{3\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_\Gamma E^j_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})[\mathcal{M}_{\underline{y}}R_{\underline{x}}(\underline{y})]d\underline{y}$$
$$-\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\left(\int_\Gamma E^j_0(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}R_{\underline{x}}(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y} + \sum_{j=1}^m e_j\int_\Gamma E^j_1(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}R_{\underline{x}}(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})d\underline{y}e_j\right)$$
$$+\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}R_{\underline{x}}(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})e_j d\underline{y}.$$

以下恒等式将在下文中频繁使用

$$\frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^{m}\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^{j}\mathbf{f}(\underline{x})e_j+\frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^{m}e_j\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^{j}\mathbf{f}(\underline{x})=2\int_{\Gamma}E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(\mathcal{M}_{\underline{y}}\tilde{f}(\underline{y}))d\underline{y},\quad(43)$$

$$\frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^{m}e_j\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^{j}\mathbf{f}(\underline{x})+\frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^{m}\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^{j}\mathbf{f}(\underline{x})e_j=2\int_{\Gamma}(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}\tilde{f}(\underline{y}))\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y},\quad(44)$$

这些结论可通过与证明（29）和（30）时类似的分析得到。为完整起见，我们仅介绍证明（43）的基本思路。

我们有

$$\begin{aligned}&\frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^{m}\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^{j}\mathbf{f}(\underline{x})e_j+\frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^{m}e_j\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^{j}\mathbf{f}(\underline{x})\\&=\frac{\mu+\lambda}{2}f^j(\underline{x})e_j+\frac{3\mu+\lambda}{2}e_jf^j(\underline{x})+2\int_{\Gamma}E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})\left(\frac{\mu+\lambda}{2}R_{\underline{x}}(\underline{y})\mathcal{D}_{\underline{y}}+\frac{3\mu+\lambda}{2}\mathcal{D}_{\underline{y}}R_{\underline{x}}(\underline{y})\right)d\underline{y}.\end{aligned}$$

由此我们得出

$$\begin{aligned}&\frac{\mu+\lambda}{2}R_{\underline{x}}(\underline{y})\mathcal{D}_{\underline{y}}+\frac{3\mu+\lambda}{2}\mathcal{D}_{\underline{y}}R_{\underline{x}}(\underline{y})\\&=\frac{\mu+\lambda}{2}\left(\sum_{j=1}^{m}f^j(\underline{y})e_j-\sum_{j=1}^{m}f^j(\underline{x})e_j\right)+\frac{3\mu+\lambda}{2}\left(\sum_{j=1}^{m}e_jf^j(\underline{y})-\sum_{j=1}^{m}e_jf^j(\underline{x})\right)\end{aligned}$$

and

$$\int_{\Gamma}E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})d\underline{y}=\frac{1}{2}$$

从而证明了（43）。

在下一节中，我们将推导出 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ 的一个重要性质。具体而言，它是 $\mathbf{Lip}(1+\alpha,\Gamma)$ 上的一个对合算子。这将使我们能够理解关系式（43）和（44）

$$(\mathcal{M}_{\underline{x}}\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{L}})(\underline{x})=2\int_{\Gamma}E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})(\mathcal{M}_{\underline{y}}\tilde{f}(\underline{y}))d\underline{y},\quad\underline{x}\in\Gamma,\qquad(45)$$

$$(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{x}}\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{L}})(\underline{x})=2\int_{\Gamma}(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}\tilde{f}(\underline{y}))\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y},\quad\underline{x}\in\Gamma,\qquad(46)$$

˜在此情形下， $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ 是f的惠特尼延拓。

$\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$的对合性质

对合算子是自身的逆算子的线性算子。仔细考察式（42）的具体情形可知，它似乎甚至不是单射。事实上，例如，第一分量 $\mathcal{S}^0_{\mathcal{L}}$ 由 f^0 和 f^j 的特殊线性组合定义，它们构成了限制在 Γ上的 $\tilde{f}$ 的 $\mathcal{M}$算子和 $\mathcal{M}$算子，而不是由整个$\mathbf{f}$ 集合本身定义。

针对这个问题，我们要问的是：Γ上的 f^0 和 $\mathcal{M}_y\tilde{f}(y)$（或 $\mathcal{M}_y\tilde{f}(y)$）的取值，是否能确定 $\mathrm{Lip}(1+\alpha,\ \Gamma)$ 中的函数集合 $\mathbf{f}=\{f^j,\,0\le j\le m\}$。下述定理对此给出了肯定的回答；同时，该定理也是 [3, 定理 3] 的一个相当一般的推广，并在证明我们的主要成果中起着关键作用。

定理 4. 设 $\mathbf{f}\in Lip(1+\alpha,\Gamma)$ 满足 $f^0=0$，且

$$c_1\sum_{j=1}^m f^j(\underline{y})e_j+c_2\sum_{j=1}^m e_j f^j(\underline{y})=0,\quad c_1,c_2\in\mathbb{R},\ c_1\neq\pm c_2,\ \underline{y}\in\Gamma. \tag{47}$$

Then

$$\mathbf{f}=0,\ i.e.,\ f^j=0,\ 0\le j\le m.$$

特别地，若 $c_1=\frac{\mu+\lambda}{2}$ 且 $c_2=\frac{3\mu+\lambda}{2}$，那么 Γ 上的 f^0 和 $\mathcal{M}\tilde{f}$ 将确定函数 $\mathbf{f}$。

证明。
在证明定理之前，我们必须指出，除非假设 $\mathbf{f}$ 是一个取值于 $\mathbb{R}$ 的函数，否则其结论并不能由（47）以及 e_j 的线性无关性推出。对于一般的取值于 $\mathbb{R}_{0,\ m}$ 的函数，上述论证不再成立，因此我们需要采用一种截然不同的方法。

令 $\underline{x},\underline{y}\in\Gamma$，则存在一个与 x,y 无关的常数 M，使得

$$\left\|\sum_{j=1}^m f^j(\underline{y})(x_j-y_j)\right\|\le C|\underline{x}-\underline{y}|^{1+\alpha}, \tag{48}$$

其中我们用到了 Γ 中的假设 $f^0=0$。

由于

$$x_j-y_j=-\frac{1}{2}[e_j(\underline{x}-\underline{y})+(\underline{x}-\underline{y})e_j],$$

不等式 (48) 表明

$$\left\|\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m f^j(\underline{y})[e_j(\underline{x}-\underline{y})+(\underline{x}-\underline{y})e_j]\right\|\le C|\underline{x}-\underline{y}|^{1+\alpha}. \tag{49}$$

将（49）的两边同时除以 $|x-y|$，可得

$$\left\|\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m f^j(\underline{y})\left[e_j\frac{(\underline{x}-\underline{y})}{|\underline{x}-\underline{y}|}+\frac{(\underline{x}-\underline{y})}{|\underline{x}-\underline{y}|}e_j\right]\right\|\le C|\underline{x}-\underline{y}|^{\alpha}. \tag{50}$$

Γ 在 y 处的切空间记为 $\mathrm{Tan}(\Gamma, y)$，它由向量 $(x-y)|x-y|$ 以及沿 Γ 中任意选定的轨迹令 $x \to y$ 所生成。

设 $\{v_1, v_2, ..., v_{m-1}\}$ 是 $\mathrm{Tan}(\Gamma, y)$ 的一个标准正交基，并假设它在 $\mathbb{R}^m$ 的标准基下具有如下规范表示：

$$\begin{aligned}
\underline{v}_1 &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{12}e_2 + ... + \alpha_{1m}e_m, \\
\underline{v}_2 &= \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 + ... + \alpha_{2m}e_m, \\
\underline{v}_3 &= \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 + ... + \alpha_{3m}e_m, \\
&\vdots \quad \vdots \\
\underline{v}_{m-1} &= \alpha_{(m-1)1}e_1 + \alpha_{(m-1)2}e_2 + ... + \alpha_{(m-1)m}e_m.
\end{aligned}$$

由（50）可知

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} f^j(\underline{y})(e_j\underline{v}_k + \underline{v}_k e_j) = 0, \tag{51}$$

对于 $k = 1$，.....，$m-1$。另一方面，我们有

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} f^j(\underline{y})(e_j\underline{v}_k + \underline{v}_k e_j) = -\sum_{j=1}^{m} f^j(\underline{y})\alpha_{kj}.$$

由此我们得到方程组

$$\begin{cases}
\alpha_{11}f^1(\underline{y}) + \cdots + \alpha_{1m}f^m(\underline{y}) & = 0, \\
\alpha_{21}f^1(\underline{y}) + \cdots + \alpha_{2m}f^m(\underline{y}) & = 0, \\
\qquad\qquad \vdots & \vdots \\
\alpha_{(m-1)1}f^1(\underline{y}) + \cdots + \alpha_{(m-1)m}f^m(\underline{y}) & = 0,
\end{cases}$$

其关联矩阵为

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1m} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\alpha_{(m-1)1} & \alpha_{(m-1)2} & ... & \alpha_{(m-1)m}
\end{pmatrix}. \tag{52}$$

由于 $\mathcal{A}$ 的值域是 $m-1$，（52）中的某一列，即第 2th 列，可以表示为其余 $m-1$ 列的线性组合。

因此，我们有

$$\begin{aligned}
\alpha_{12} &= \gamma_1\alpha_{11} + \gamma_2\alpha_{13} + ... + \gamma_{m-1}\alpha_{1m}, \\
\alpha_{22} &= \gamma_1\alpha_{21} + \gamma_2\alpha_{23} + ... + \gamma_{m-1}\alpha_{2m}, \\
\alpha_{32} &= \gamma_1\alpha_{31} + \gamma_2\alpha_{33} + ... + \gamma_{m-1}\alpha_{3m}, \\
&\vdots \quad \vdots \\
\alpha_{(m-1)2} &= \gamma_1\alpha_{(m-1)1} + \gamma_2\alpha_{(m-1)3} + ... + \gamma_{m-1}\alpha_{(m-1)m},
\end{aligned}$$

上述系统变为

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}[f^1(\underline{y})+\gamma_1 f^2(\underline{y})]+\alpha_{13}[f^3(\underline{y})+\gamma_2 f^2(\underline{y})]+\cdots+\alpha_{1m}[f^m(\underline{y})+\gamma_{m-1}f^2(\underline{y})]=0,\\
&\alpha_{21}[f^1(\underline{y})+\gamma_1 f^2(\underline{y})]+\alpha_{23}[f^3(\underline{y})+\gamma_2 f^2(\underline{y})]+\cdots+\alpha_{2m}[f^m(\underline{y})+\gamma_{m-1}f^2(\underline{y})]=0,\\
&\alpha_{31}[f^1(\underline{y})+\gamma_1 f^2(\underline{y})]+\alpha_{33}[f^3(\underline{y})+\gamma_2 f^2(\underline{y})]+\cdots+\alpha_{3m}[f^m(\underline{y})+\gamma_{m-1}f^2(\underline{y})]=0,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\ \ \vdots\\
&\alpha_{(m-1)1}[f^1(\underline{y})+\gamma_1 f^2(\underline{y})]+\alpha_{(m-1)3}[f^3(\underline{y})+\gamma_2 f^2(\underline{y})]+\cdots+\alpha_{(m-1)m}[f^m(\underline{y})+\gamma_{m-1}f^2(\underline{y})]=0.
\end{aligned}$$

由于上述齐次系统对应的（$m-1$）×$(m-1)$ 矩阵的值域为 $m-1$，因此只有平凡解存在。因此

$$\begin{cases} f^1(\underline{y}) & =-\gamma_1 f^2(\underline{y}),\\ f^3(\underline{y}) & =-\gamma_2 f^2(\underline{y}),\\ \vdots & \vdots\\ f^m(\underline{y}) & =-\gamma_{m-1}f^2(\underline{y}). \end{cases} \tag{53}$$

Then

$$\begin{aligned}
&c_1 f^2(\underline{y})(-\gamma_1 e_1+e_2-\gamma_2 e_3+\ldots+\gamma_{m-1}e_m)+c_2(-\gamma_1 e_1+e_2-\gamma_2 e_3+\ldots+\gamma_{m-1}e_m)f^2(\underline{y})\\
&=c_1\sum_{j=1}^{m}f^j(\underline{y})e_j+c_2\sum_{j=1}^{m}e_j f^j(\underline{y})=0,
\end{aligned}$$

在假设下。记向量 $-\gamma_1 e_1+e_2-\gamma_2 e_3+\ldots+\gamma_{m-1}e_m$ 为 u。由于 u 是一个非零可逆的 Clifford 向量，其乘法逆元为$-u/|u|^2$，因此我们得到以下系统

$$\begin{cases} c_1 f^2(\underline{y})-\frac{c_2}{|\underline{u}|}\underline{u}f^2(\underline{y})\underline{u}=0,\\ c_2 f^2(\underline{y})-\frac{c_1}{|\underline{u}|}\underline{u}f^2(\underline{y})\underline{u}=0. \end{cases} \tag{54}$$

分别将 (54) 的第一和第二个方程乘以 c_1 和 c_2，然后相减，可得 $(c_1^2-c_2^2)f^2(y)=0$，因此 $f^2(y)=0$。最后，其余等式直接由 (53) 得出。□

注 1. 请注意，如果 $c_1=\pm c_2$ 属于(47)，那么该关系可能退化，无法据此确定**f** 在 Γ 上的取值。例如，如果**f** 是一个取值于 $\mathbb{R}$ 的函数，且 $c_1=-c_2$，那么关系 (47) 自动成立，并不能确定集合中的 f^j。而如果 m 是偶数， $c_1=c_2$，且**f** 是一个赝标量场集合，那么我们也会得出与之前相同的结论。

3.1 Plemelj-Privalov定理

H¨older类在复柯西奇异积分算子作用下的不变性，由著名的Plemelj-Privalov定理所确立。该定理以斯洛文尼亚数学家约西普·普列梅利和俄罗斯数学家

伊万·伊万诺维奇·普里瓦洛夫的名字命名。普莱梅利 [27] 在光滑曲线的情形下得到了这一结果，而普里瓦洛夫 [29] 则在圆的情形下重新发现了这一结果，随后又将其推广到每一条无尖点的分段光滑曲线 [30]。这一结果在全纯函数理论中至关重要，尤其适用于求解边值问题。它为分析区域边界上的奇异算子提供了重要工具，并应用于物理学和工程学等多个领域。该领域另一项值得关注的工作是登金 [11], 关于柯西积分光滑性估计的研究，他以函数的光滑模为依据进行估计。由于这一主题用途广泛，人们开始尝试将Plemelj-Privalov定理推广到高维。

现在我们推导一个关于 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$的普莱梅利–普里瓦洛夫型定理，该定理本身也很有意义。证明过程与 [8, 定理 2]或 [3, 定理 4] 的证明相同，因此这里只概述其中的大部分内容。

定理 5。 算子 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ 保持利普希茨类 $Lip(1+\alpha,\Gamma)$不变，即：

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(Lip(1+\alpha,\Gamma)) \subset Lip(1+\alpha,\Gamma). \tag{55}$$

证明。
任务是证明，集合$\mathbf{h} := \{h^j\colon\ j=0,\dots,m\}$满足

$$h^0(\underline{x}) = 2\int\limits_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})R_{\underline{x}}(\underline{y})d\underline{y} - \frac{3\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\int\limits_{\Gamma} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})[\mathcal{M}_{\underline{y}}R_{\underline{x}}(\underline{y})]d\underline{y}$$
$$-\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\left(\int\limits_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}R_{\underline{x}}(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y} + \sum_{j=1}^{m} e_j\int\limits_{\Gamma} E_1(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}R_{\underline{x}}(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})d\underline{y}e_j\right), \tag{56}$$

and

$$h^j(\underline{x}) = 2\int\limits_{\Gamma} E_0^j(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})R_{\underline{x}}(\underline{y})d\underline{y} - \frac{3\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\int\limits_{\Gamma} E_1^j(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})[\mathcal{M}_{\underline{y}}R_{\underline{x}}(\underline{y})]d\underline{y}$$
$$-\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\left(\int\limits_{\Gamma} E_0^j(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}R_{\underline{x}}(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y} + \sum_{j=1}^{m} e_j\int\limits_{\Gamma} E_1^j(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}R_{\underline{x}}(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})d\underline{y}e_j\right)$$
$$+\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\int_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}R_{\underline{x}}(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})e_j d\underline{y} \tag{57}$$

对于 $j=1,\dots,m$，属于 $\mathbf{Lip}(1+\alpha,\Gamma)$。

设 $t,\underline{p}\in\Gamma$ 满足 $|t-p| = \underline{2}r$。为证明（55），我们接下来证明

$$\|h^0(\underline{t}) - h^0(\underline{p}) - \sum_{j=1}^{m} h^j(\underline{p})(t_j-p_j)\| \le M|\underline{t}-\underline{p}|^{1+\alpha} \tag{58}$$

and

$$\|h^j(\underline{t}) - h^j(\underline{p})\| \le M|\underline{t}-\underline{p}|^{\alpha},\ j=1,\dots,m \tag{59}$$

其中常数 M 与 t, p 无关。

我们将 Γ 分成三个互不相交的部分：$\Gamma_1 = \Gamma \cap B_r(t)$、$\Gamma_2 = \Gamma \cap B_r(p)$ 和 $\Gamma_3 = \Gamma \setminus \Gamma_1 \cup \Gamma_2$（见图 3.1）。为简化记号，令 h_i^j 表示 (56)-(57) 中与 h^j 对应的类似项，其中积分区域限制在 Γ_i上。只需证明对于每个 h_i^j，当$i = 1$、2、3 时，条件 (58) 和 (59) 均成立。下面简要概述 (58) 的证明；(59) 也可用大致相同的方法处理。

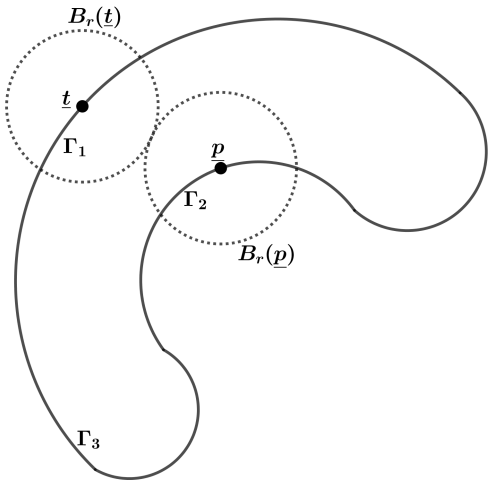

图 1：曲面分解

我们只需考虑 $i = 3$ 的情形；其他情形 $i = 1$、2 的证明与 [8, 定理 2] 的证明非常相似。为此，注意到

$$R_{\underline{t}}(\underline{y}) = R_{\underline{p}}(\underline{y}) + R_{\underline{t}}(\underline{p}) + \sum_{j=1}^{m} [f^j(\underline{p}) - f^j(\underline{t})](y_j - p_j)$$

and

$$R_{\underline{t}}(\underline{y})\mathcal{D}_{\underline{y}} = \tilde{f}(\underline{y})\mathcal{D}_{\underline{y}} - \tilde{f}(\underline{t})\mathcal{D}_{\underline{t}}, \quad \mathcal{D}_{\underline{y}} R_{\underline{t}}(\underline{y}) = \mathcal{D}_{\underline{y}}\tilde{f}(\underline{y}) - \mathcal{D}_{\underline{t}}\tilde{f}(\underline{t}),$$

因此,

$$\mathcal{M}_{\underline{y}} R_{\underline{t}}(\underline{y}) = \mathcal{M}_{\underline{y}}\tilde{f}(\underline{y}) - \mathcal{M}_{\underline{t}}\tilde{f}(\underline{t}),$$
$$\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}} R_{\underline{t}}(\underline{y}) = \overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}\tilde{f}(\underline{y}) - \overline{\mathcal{M}}_{\underline{t}}\tilde{f}(\underline{t}).$$

经过简短计算可得

$$h_3^0(\underline{t}) - h_3^0(\underline{p}) - \sum_{j=1}^{m} h_3^j(\underline{p})(t_j - p_j) = I_1 + I_2,$$

其中

$$I_1 = 2\int_{\Gamma_3}\left[E_0(\underline{y}-\underline{t}) - E_0(\underline{y}-\underline{p}) - \sum_{j=1}^{m} E_0^j(\underline{y}-\underline{p})(t_j-p_j)\right]\underline{n}(\underline{y})R_{\underline{p}}(\underline{y})d\underline{y}$$

$$-\frac{3\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_{\Gamma_3}\left[E_1(\underline{y}-\underline{t}) - E_1(\underline{y}-\underline{p}) - \sum_{j=1}^{m} E_1^j(\underline{y}-\underline{p})(t_j-p_j)\right]\underline{n}(\underline{y})[\mathcal{M}_{\underline{y}}R_{\underline{p}}]d\underline{y}$$

$$-\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\int_{\Gamma_3}\left[E_0(\underline{y}-\underline{t})(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}R_{\underline{p}})n(\underline{y})(\underline{y}-\underline{t}) - E_0(\underline{y}-\underline{p})(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}R_{\underline{p}})n(\underline{y})(\underline{y}-\underline{p})\right]d\underline{y}$$

$$+\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\left(\int_{\Gamma}\sum_{j=1}^{m}\partial_{z_j}[E_0(\underline{y}-\underline{z})(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}R_{\underline{p}})\underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{z})]|_{\underline{z}=\underline{p}}(t_j-p_j)d\underline{y}\right)$$

$$-\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\left[\sum_{i=1}^{m} e_i\int_{\Gamma_3}\left(E_1(\underline{y}-\underline{t}) - E_1(\underline{y}-\underline{p}) - \sum_{j=1}^{m} E_1^j(\underline{y}-\underline{p})(t_j-p_j)\right)(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}R_{\underline{p}})\underline{n}(\underline{y})d\underline{y}e_i\right]$$

and

$$I_2 = 2\int_{\Gamma_3} E_0(\underline{y}-\underline{t})\underline{n}(\underline{y})\left[R_{\underline{t}}(\underline{p}) + \sum_{j=1}^{m}(f^j(\underline{p}) - f^j(\underline{t}))(y_j-p_j)\right]d\underline{y}$$
$$-\tfrac{3\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_{\Gamma_3} E_1(\underline{y}-\underline{t})\underline{n}(\underline{y})[\mathcal{M}_{\underline{p}}R_{\underline{t}}]d\underline{y}$$
$$-\tfrac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\left(\int_{\Gamma_3} E_0(\underline{y}-\underline{t})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{p}}R_{\underline{t}}]\underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{t})d\underline{y} + \textstyle\sum_{j=1}^{m} e_j\int_{\Gamma_3} E_1(\underline{y}-\underline{t})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{p}}R_{\underline{t}}]\underline{n}(\underline{y})d\underline{y}e_j\right).$$

为估计 $\|I_2\|$，我们利用以下简单观察:

$$g(\underline{y}) = R_{\underline{t}}(\underline{p}) + \sum_{j=1}^{m}[f^j(\underline{p}) - f^j(\underline{t})](y_j-p_j)$$

是一个 Lam´e-Navier 解，满足

$$\mathcal{M}_{\underline{y}}g(\underline{y}) = \mathcal{M}_{\underline{p}}R_{\underline{t}}, \quad \overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}g(\underline{y}) = \overline{\mathcal{M}}_{\underline{p}}R_{\underline{t}}.$$

然后根据（31），我们可以采用标准方法，将Γ_3 上的积分转化为 Ω 中球面 $\partial B_r(t)$、 $\partial B_r(p)$ 上相应部分的积分。

对于 $y \in \partial B_r(t)$，（60）中每个积分的克利福德范数均由$|t-p|^{1+\alpha}$控制；这在将范数移入积分号内后即可直接得出。此外，对于 $y \in \partial B_r(p)$，我们有

$$r \le |\underline{y}-\underline{t}| \le |\underline{y}-\underline{p}| + |\underline{p}-\underline{t}| = 3r$$

并且可以采用相同的论证，因此 $\|I_2\|$ 肯定受$|t-p|^{1+\alpha}$ 支配。

类似的考虑也适用于 $\|I_1\|$，正如 [8, 定理 2] 中所采用的那样。在我们的语境中，关键之处在于函数

$$E_0(\underline{y}-\underline{z}), E_0(\underline{y}-\underline{z})(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}R_{\underline{p}})\underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{z}), E_1(\underline{y}-\underline{z})$$

对于 $\underline{y}\in\Gamma_3$，它们（作为 z 的函数）在 t 的某个适当邻域内无穷可微。这使我们能够应用泰勒公式，为其余项得到适当的界，并最终为 I_1 中的每个积分得到所需的范数估计。□

3.2 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ 是线性对合

定理 6。 算子 $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$：利普希茨$(1+\alpha,\Gamma)\mapsto$利普希茨$(1+\alpha,\Gamma)$ 是线性对合。也就是说，

$$[\mathcal{S}^2_{\mathcal{L}}\mathbf{f}]^j=\mathbf{f}^j \ for\ all\ j=0,\dots,m. \tag{60}$$

证明。
根据定理 4，所要进行的步骤是证明对于 $x\in\Gamma$

(i)

$$[\mathcal{S}^2_{\mathcal{L}}\mathbf{f}]^0(\underline{x})=f^0(\underline{x}),$$

(ii)

$$\frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m[\mathcal{S}^2_{\mathcal{L}}\mathbf{f}]^j(\underline{x})e_j+\frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m e_j[\mathcal{S}^2_{\mathcal{L}}\mathbf{f}]^j(\underline{x})=\frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m f^j(\underline{x})e_j+\frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m e_jf^j(\underline{x}).$$

我们首先证明下面的等式

$$[\mathcal{S}^2_{\mathcal{L}}\mathbf{f}]^0(\underline{x})=2\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})\mathcal{S}^0_{\mathcal{L}}\mathbf{f}(\underline{y})d\underline{y}-\frac{3\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})[\mathcal{M}_{\underline{y}}\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{L}}(\underline{y})]d\underline{y}$$

$$-\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\left(\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{L}}(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y}+\sum_{j=1}^m e_j\int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{y}}\tilde{\mathcal{S}}_{\mathcal{L}}(\underline{y})]\underline{n}(\underline{y})d\underline{y}e_j\right).$$

因此，由（43）和（44）可得

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^2\mathbf{f}]^0(\underline{x}) = 2\int_\Gamma 2\int_\Gamma & E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{z})f^0(\underline{z})d\underline{z}d\underline{y} \\
& - \frac{2(3\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_\Gamma\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_1(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{z})[\mathcal{M}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]d\underline{z}d\underline{y} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_\Gamma\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{z}-\underline{y})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})(\underline{z}-\underline{y})d\underline{z}d\underline{y} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\sum_{j=1}^m\int_\Gamma\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})e_jE_1(\underline{z}-\underline{y})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})e_jd\underline{z}d\underline{y} \\
& - \frac{2(3\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_\Gamma\int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{z})[\mathcal{M}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]d\underline{z}d\underline{y} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_\Gamma\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})d\underline{z}d\underline{y} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\sum_{j=1}^m\int_\Gamma\int_\Gamma e_jE_1(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{y})e_jd\underline{z}d\underline{y}.
\end{aligned}
$$

由于

$$
2\int_\Gamma 2\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{z})f^0(\underline{z})d\underline{z}d\underline{y} = f^0(\underline{x}),
$$

因此，只需证明

$$
\begin{aligned}
I := & -\frac{2(3\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_\Gamma\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_1(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{z})[\mathcal{M}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]d\underline{z}d\underline{y} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_\Gamma\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{z}-\underline{y})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})(\underline{z}-\underline{y})d\underline{z}d\underline{y} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\sum_{j=1}^m\int_\Gamma\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})e_jE_1(\underline{z}-\underline{y})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})e_jd\underline{z}d\underline{y} \\
& - \frac{2(3\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_\Gamma\int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{z})[\mathcal{M}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]d\underline{z}d\underline{y} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_\Gamma\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})d\underline{z}d\underline{y} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\sum_{j=1}^m\int_\Gamma\int_\Gamma e_jE_1(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{y})e_jd\underline{z}d\underline{y} = 0.
\end{aligned}
$$

仔细考察上述公式可知，其中每个被积函数都表示柯西核与弱奇异核的乘积。于是我们可以改变积分次序，经过简短计算后得到

$$I = \int_{\Gamma} I(\underline{x}, \underline{z}) d\underline{z},$$

其中

$$\begin{aligned}
I(\underline{x}, \underline{z}) := & -\frac{2(3\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)} \int_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_1(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{z})[\mathcal{M}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]d\underline{y} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)} \int_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{z}-\underline{y})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})(\underline{z}-\underline{y})d\underline{y} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)} \sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})e_j E_1(\underline{z}-\underline{y})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})e_j d\underline{y} \\
& - \frac{2(3\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)} \int_{\Gamma} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{z})[\mathcal{M}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]d\underline{y} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)} \int_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)} \sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma} e_j E_1(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{y})e_j d\underline{y}.
\end{aligned}$$

令 $\epsilon > 0$，并考虑分别以 x 和 z 为中心、半径为 ϵ 的球体 $B_\epsilon(x)$ 和 $B_\epsilon(z)$。

那么，采用记号 Γ_ϵ 表示 $\Gamma \setminus (B_\epsilon(x) \cup B_\epsilon(z))$，有

$$
\begin{aligned}
I(\underline{x},\underline{z}) = \lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon(\underline{x},\underline{z}) := \lim_{\epsilon\to 0}\Bigg[& -\frac{2(3\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_{\Gamma_\epsilon} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_1(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{z})[\mathcal{M}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]d\underline{y} \\
& -\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_{\Gamma_\epsilon} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{z}-\underline{y})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})(\underline{z}-\underline{y})d\underline{y} \\
& -\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\sum_{j=1}^{m}\int_{\Gamma_\epsilon} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})e_j E_1(\underline{z}-\underline{y})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})e_j d\underline{y} \\
& -\frac{2(3\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_{\Gamma_\epsilon} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{z})[\mathcal{M}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]d\underline{y} \\
& -\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_{\Gamma_\epsilon} E_0(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y} \\
& -\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\sum_{j=1}^{m}\int_{\Gamma_\epsilon} e_j E_1(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{y})e_j d\underline{y}\Bigg].
\end{aligned}
$$

将斯托克斯公式应用于 $\Omega_\epsilon := \Omega \setminus (B_\epsilon(x) \cup B_\epsilon(z))$，并利用等式

$$
\mathcal{D}_{\underline{y}}[E_0(\underline{z}-\underline{y})(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z}))\underline{n}(\underline{z})(\underline{z}-\underline{y})] = -\sum_{j=1}^{m} e_j E_0(\underline{z}-\underline{y})(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z}))\underline{n}(\underline{z})e_j,
$$

$$
[(\underline{y}-\underline{x})(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z}))\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})]\mathcal{D}_{\underline{y}} = \sum_{j=1}^{m} e_j(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z}))\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})e_j,
$$

and

$$
\mathcal{D}_{\underline{y}}\left[\sum_{j=1}^{m} e_j E_1(\underline{z}-\underline{y})(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z}))\underline{n}(\underline{z})e_j\right] = 2(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z}))\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y}) + \sum_{j=1}^{m} e_j E_0(\underline{z}-\underline{y})(\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z}))\underline{n}(\underline{z})e_j,
$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
I_\epsilon(\underline{x},\underline{z}) - \Big\{ & -\frac{2(3\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)} \int\limits_{C_\epsilon(\underline{x})\cup C_\epsilon(\underline{z})} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_1(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{z})[\mathcal{M}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]d\underline{y} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)} \int\limits_{C_\epsilon(\underline{x})\cup C_\epsilon(\underline{z})} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{z}-\underline{y})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})(\underline{z}-\underline{y})d\underline{y} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{C_\epsilon(\underline{x})\cup C_\epsilon(\underline{z})} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})e_j E_1(\underline{z}-\underline{y})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})e_j d\underline{y} \\
& - \frac{2(3\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)} \int\limits_{C_\epsilon(\underline{x})\cup C_\epsilon(\underline{z})} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{z})[\mathcal{M}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]d\underline{y} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)} \int\limits_{C_\epsilon(\underline{x})\cup C_\epsilon(\underline{z})} E_0(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{C_\epsilon(\underline{x})\cup C_\epsilon(\underline{z})} e_j E_1(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{y})e_j d\underline{y}\Big\} \\
= & \frac{2(3\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)} \int\limits_{\Omega_\epsilon} E_0(\underline{y}-\underline{x})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{z})[\mathcal{M}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]d\underline{y} \\
& + \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\Omega_\epsilon} E_0(\underline{y}-\underline{x})e_j E_0(\underline{z}-\underline{y})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})e_j d\underline{y} \\
& - \frac{2(\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)} \int\limits_{\Omega_\epsilon} E_0(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})d\underline{y} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\Omega_\epsilon} E_0(\underline{y}-\underline{x})e_j E_0(\underline{z}-\underline{y})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})e_j d\underline{y} \\
& - \frac{2(3\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)} \int\limits_{\Omega_\epsilon} E_0(\underline{y}-\underline{x})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{z})[\mathcal{M}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]d\underline{y} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\Omega_\epsilon} e_j[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})e_j E_0(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y} \\
& - \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\Omega_\epsilon} e_j[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})e_j d\underline{y},
\end{aligned}
$$

其中 $C_\epsilon(\underline{x}) := \partial B_\epsilon(\underline{x}) \cap \Omega, \quad C_\epsilon(\underline{z}) := \partial B_\epsilon(\underline{z}) \cap \Omega_\circ$

注意到 $E_0(y-x)e_i + e_i E_0(y-x)$ 取值于 $\mathbb{R}$，因此可得

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2(\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_{\Omega_\epsilon} E_0(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})d\underline{y}\\
&\quad-\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega_\epsilon} e_j[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})e_jE_0(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y}\\
&\quad-\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega_\epsilon} e_j[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})E_0(\underline{y}-\underline{x})e_jd\underline{y}\\
&=-\frac{2(\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_{\Omega_\epsilon} E_0(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})d\underline{y}\\
&\quad-\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\sum_{j=1}^{m}\int_{\Omega_\epsilon} e_j(e_jE_0(\underline{y}-\underline{x})+E_0(\underline{y}-\underline{x})e_j)[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})d\underline{y}.
\end{aligned}
$$

现在我们利用恒等式

$$\sum_{i=1}^{m} e_iE_0(\underline{y}-\underline{x})e_i=(m-2)E_0(\underline{y}-\underline{x}),$$

这意味着最后几个积分为零。

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
I_\epsilon(\underline{x},\underline{z})=&-\frac{2(3\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_{C_\epsilon(\underline{x})\cup C_\epsilon(\underline{z})} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_1(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{z})[\mathcal{M}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]d\underline{y}\\
&-\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_{C_\epsilon(\underline{x})\cup C_\epsilon(\underline{z})} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{z}-\underline{y})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})(\underline{z}-\underline{y})d\underline{y}\\
&-\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\sum_{j=1}^{m}\int_{C_\epsilon(\underline{x})\cup C_\epsilon(\underline{z})} E_0(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})e_jE_1(\underline{z}-\underline{y})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})e_jd\underline{y}\\
&-\frac{2(3\mu+\lambda)}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_{C_\epsilon(\underline{x})\cup C_\epsilon(\underline{z})} E_1(\underline{y}-\underline{x})\underline{n}(\underline{y})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{z})[\mathcal{M}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]d\underline{y}\\
&-\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\int_{C_\epsilon(\underline{x})\cup C_\epsilon(\underline{z})} E_0(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{y})(\underline{y}-\underline{x})d\underline{y}\\
&-\frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}\sum_{j=1}^{m}\int_{C_\epsilon(\underline{x})\cup C_\epsilon(\underline{z})} e_jE_1(\underline{y}-\underline{x})[\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}}\tilde{f}(\underline{z})]\underline{n}(\underline{z})E_0(\underline{z}-\underline{y})\underline{n}(\underline{y})e_jd\underline{y}
\end{aligned}
$$

利用对于 $y\in C_\epsilon(x)$（$y\in C_\epsilon(z)$），其法向量 $n(y)$

具有显式形式 $\frac{y-x}{|y-x|}\left(\frac{y-z}{|y-z|}\right)$ 这一事实，我们得到

$$
\begin{aligned}
I(\underline{x},\underline{z}) = \lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon(\underline{x},\underline{z}) &= -\frac{3\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)} E_1(\underline{z}-\underline{x}) n(\underline{z}) [\mathcal{M}_{\underline{z}} \tilde{f}(\underline{z})] - \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} E_0(\underline{z}-\underline{x}) [\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}} \tilde{f}(\underline{z})] n(\underline{z})(\underline{z}-\underline{x}) \\
&- \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} \sum_{j=1}^{m} e_j E_1(\underline{z}-\underline{x}) [\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}} \tilde{f}(\underline{z})] n(\underline{z}) e_j + \frac{3\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)} E_1(\underline{z}-\underline{x}) n(\underline{z}) [\mathcal{M}_{\underline{z}} \tilde{f}(\underline{z})] d\underline{y} \\
&+ \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} E_0(\underline{z}-\underline{x}) [\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}} \tilde{f}(\underline{z})] n(\underline{z})(\underline{z}-\underline{x}) + \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} \sum_{j=1}^{m} e_j E_1(\underline{z}-\underline{x}) [\overline{\mathcal{M}}_{\underline{z}} \tilde{f}(\underline{z})] n(\underline{z}) e_j \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

这就证明了 (i)。

现在我们来考察 (ii)，由 (43) 可知这一点几乎显而易见。事实上，我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mu+\lambda}{2} \sum_{j=1}^{m} [\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^2 \mathbf{f}]^j(\underline{x}) e_j + \frac{3\mu+\lambda}{2} \sum_{j=1}^{m} e_j [\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^2 \mathbf{f}]^j(\underline{x}) \\
&= \frac{\mu+\lambda}{2} \sum_{j=1}^{m} [\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^j (\mathcal{S}_{\mathcal{L}} \mathbf{f})](\underline{x}) e_j + \frac{3\mu+\lambda}{2} \sum_{j=1}^{m} e_j [\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^j (\mathcal{S}_{\mathcal{L}} \mathbf{f})](\underline{x}) \\
&= 2 \int_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x}) \underline{n}(\underline{y}) [\mathcal{M}_{\underline{y}} \tilde{\mathcal{S}_{\mathcal{L}}}(\underline{y})] d\underline{y} \\
&= 2 \int_{\Gamma} 2 \int_{\Gamma} E_0(\underline{y}-\underline{x}) \underline{n}(\underline{y}) E_0(\underline{z}-\underline{y}) n(\underline{z}) [\mathcal{M}_{\underline{z}} \tilde{f}(\underline{z})] d\underline{z} d\underline{y} \\
&= \frac{\mu+\lambda}{2} \sum_{j=1}^{m} f^j(\underline{x}) e_j + \frac{3\mu+\lambda}{2} \sum_{j=1}^{m} e_j f^j(\underline{x}),
\end{aligned}
$$

如所述。 □

4 哈代分解

根据上述章节，$\mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{+} := \frac{1}{2}(\mathcal{I} + \mathcal{S}_{\mathcal{L}})$ 和 $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{-} := \frac{1}{2}(\mathcal{I} - \mathcal{S}_{\mathcal{L}})$ 是 $\mathbf{Lip}(1+\alpha,\ \Gamma)$ 上的投影算子。也就是说，

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{+}\mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{+} = \mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{+},\ \mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{-}\mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{-} = \mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{-},\ \mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{+}\mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{-} = \mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{-}\mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{+} = 0.$$

因此，利普希茨类 $\mathbf{Lip}(1+\alpha,\ \Gamma)$ 具有如下正交分解

$$\mathrm{Lip}(1+\alpha,\Gamma) = \mathrm{Lip}^{+}(1+\alpha,\Gamma) \oplus \mathrm{Lip}^{-}(1+\alpha,\Gamma),$$

其中

$$\mathrm{Lip}^{+}(1+\alpha,\Gamma) := \mathrm{im}\mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{+},\ \mathrm{Lip}^{-}(1+\alpha,\Gamma) := \mathrm{im}\mathcal{P}_{\mathcal{L}}^{-}.$$

本文其余部分旨在刻画 $\mathbf{Lip}^{\pm}(1+\alpha,\ \Gamma)$ 的结构。

定理 7。 集合 $\mathbf{f} \in$ 利普希茨$(1+\alpha,\Gamma)$ 属于 $Lip^{+}(1+\alpha,\Gamma)$ 当且仅当存在一个 *Lam´e-Navier* 解 F，其定义于Ω_{+} 中，并且与 $\mathcal{M}_{x}F$ 一同连续延拓至 Γ，且满足

$$F|_{\Gamma}=f^{0},\ \mathcal{M}_{\underline{x}}F|_{\Gamma}=\frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^{m}f^{j}e_{j}+\frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^{m}e_{j}f^{j}. \tag{61}$$

证明。
首先假设 $\mathbf{f} \in$ 利普希茨$^{+}(1+\alpha,\Gamma)$，则存在 $\mathbf{g} \in$ 利普希茨$(1+\alpha,\Gamma)$，使得

$$\mathbf{f}=\frac{1}{2}(\mathcal{S}_{\mathcal{L}}\mathbf{g}+\mathbf{g}). \tag{62}$$

引入函数

$$F(\underline{x})=[\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{0}\mathbf{g}](\underline{x}),\ \underline{x}\in\Omega_{+}.$$

显然，F 是 Ω_{+} 中的 Lam´e-Navier 解，并且对于 $z\in\Gamma$，我们有

$$F(\underline{z})=[\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{0}\mathbf{g}]^{+}(\underline{z})=\frac{1}{2}(\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^{0}\mathbf{g}+g^{0})=f^{0}.$$

此外，由 (37) 可得:

$$\mathcal{M}_{\underline{x}}F(\underline{x})=\mathcal{M}_{\underline{x}}[\mathcal{C}_{\mathcal{L}}^{0}\mathbf{g}](\underline{x})=\mathcal{C}^{l}\left[\frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^{m}g^{j}e_{j}+\frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^{m}e_{j}g^{j}\right](\underline{x}),\ \underline{x}\in\Omega_{+}.$$

因此，对于 $z\in\Gamma_{-}$

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}_{\underline{x}}F)(\underline{z})=&\left[\mathcal{C}^{l}\left[\frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^{m}g^{j}e_{j}+\frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^{m}e_{j}g^{j}\right]\right]^{+}(\underline{z})\\&=\frac{1}{2}\left[2\int_{\Gamma}E_{0}(\underline{y}-\underline{z})\underline{n}(\underline{y})\left(\frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^{m}g^{j}(\underline{y})e_{j}+\frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^{m}e_{j}g^{j}(\underline{y})\right)d\underline{y}\right.\\&\left.+\frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^{m}g^{j}(\underline{z})e_{j}+\frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^{m}e_{j}g^{j}(\underline{z})\right]\\&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{\mu+\lambda}{2}\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^{j}\mathbf{g}(\underline{z})e_{j}+\frac{3\mu+\lambda}{2}e_{j}\mathcal{S}_{\mathcal{L}}^{j}\mathbf{g}(\underline{z})+\frac{\mu+\lambda}{2}g^{j}(\underline{z})e_{j}+\frac{3\mu+\lambda}{2}e_{j}g^{j}(\underline{z})\right].\end{aligned}$$

最后一个等式由（43）得出。

最后，我们由（62）得出

$$(\mathcal{M}_{\underline{x}}F)(\underline{z})=\frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^{m}f^{j}(\underline{z})e_{j}+\frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^{m}e_{j}f^{j}(\underline{z}),\ \underline{z}\in\Gamma.$$

现在假设这样的 Lam´é-Navier 解 F 存在，并且满足（61）。那么，公式（31）意味着 $F(x) = \mathcal{C}^0_{\mathcal{L}}\mathbf{f}(x)$， $x \in \Omega_+$。我们声称 $\mathcal{P}^+_{\mathcal{L}}\mathbf{f} = \mathbf{f}$，因此 $\mathbf{f} \in$ 利普希茨$^+(1+\alpha, \Gamma)$。事实上，我们有

$$[\mathcal{P}^+_{\mathcal{L}}\mathbf{f}]^0(\underline{z}) = \frac{1}{2}(\mathcal{S}^0_{\mathcal{L}}\mathbf{f}(\underline{z}) + f^0(\underline{z})) = \lim_{\Omega_+ \ni \underline{x} \to \underline{z}} \mathcal{C}^0_{\mathcal{L}}\mathbf{f}(\underline{x}) = F(\underline{z}) = f^0(\underline{z}).$$

另一方面

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m [\mathcal{P}^+_{\mathcal{L}}\mathbf{f}]^j(\underline{z})e_j + \frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m e_j[\mathcal{P}^+_{\mathcal{L}}\mathbf{f}]^j(\underline{z}) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m \mathcal{S}^j_{\mathcal{L}}\mathbf{f}(\underline{z})e_j + \frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m e_j\mathcal{S}^j_{\mathcal{L}}\mathbf{f}(\underline{z}) + \frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m f^j(\underline{z})e_j + \frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m e_j f^j(\underline{z})\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{z})\underline{n}(\underline{y})\left(\frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m f^j(\underline{y})e_j + \frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m e_j f^j(\underline{y})\right)d\underline{y}\right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m f^j(\underline{z})e_j + \frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m e_j f^j(\underline{z})\right].
\end{aligned}$$

最后一个等式由 (43) 得出。

在假设 $\frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m f^j(z)e_j + \frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m e_j f^j(z)$ 是 Γ 中的 Hölder 连续函数的条件下，该函数表示单值函数 $\mathcal{M}_x F$ 的内部极限值，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[2\int_\Gamma E_0(\underline{y}-\underline{z})\underline{n}(\underline{y})\left(\frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m f^j(\underline{y})e_j + \frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m e_j f^j(\underline{y})\right)d\underline{y}\right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m f^j(\underline{z})e_j + \frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m e_j f^j(\underline{z})\right] \\
&= \frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m f^j(\underline{z})e_j + \frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m e_j f^j(\underline{z}),
\end{aligned}$$

这意味着

$$\frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m [\mathcal{P}^+_{\mathcal{L}}\mathbf{f}]^j(\underline{z})e_j + \frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m e_j[\mathcal{P}^+_{\mathcal{L}}\mathbf{f}]^j(\underline{z}) = \frac{\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m f^j(\underline{z})e_j + \frac{3\mu+\lambda}{2}\sum_{j=1}^m e_j f^j(\underline{z}).$$

因此，根据定理 4，$[\mathcal{P}^+_{\mathcal{L}}\mathbf{f}]^j(z) = f^j(z)$。 □

下面结果的证明类似，因此省略。

定理 8. 集合 $\mathbf{f} \in$ 属于利普希茨$(1+\alpha, \Gamma)$，当且仅当存在一个 *Lam´e-Navier* 解 F 在 Ω_- 中，使其与 $\mathcal{M}_x F$一起连续延拓至 Γ，且 $F(\infty) = 0$, $\|\mathcal{D}_x F(x)\| = o\left(\frac{1}{|x|}\right)$为 $x \to \infty$，并满足

$$F|_\Gamma = f^0, \ \mathcal{M}_{\underline{x}} F|_\Gamma = \frac{\mu+\lambda}{2} \sum_{j=1}^{m} f^j e_j + \frac{3\mu+\lambda}{2} \sum_{j=1}^{m} e_j f^j.$$

利益冲突

作者声明，他们在本文发表方面不存在利益冲突。

致谢

Daniel Alfonso Santiesteban 谨此感谢科学、人文、技术与创新秘书处（SECIHTI）（资助编号 1043969）提供的经费支持。

参考文献

[1] R. Abreu Blaya, J. Bory Reyes, M.A. Herrera Pel´aez 和 J.M. Sigarreta Almira，与 Lam´é-Navier 系统相关的积分表示公式，《数学学报》（英文版）**36** (2020)，第12期，1341-1356。[2] R. Abreu Blaya、R. ´Avila ´Avila 和 J. Bory Reyes，分形域中多重单生成函数的高阶 Lipschitz 边界数据边值问题，*Appl. Math. Comput.***269** (2015)，802-808。[3] R. Abreu Blaya、D. Alfonso Santiesteban、J. Bory Reyes 和 A. Moreno Garc´ía，高阶 Lipschitz 函数的亚单生成分解，*Math. Meth. Appl. Scie.*45-9 (2022)，4911-4928。[4] R. Arunachalam 和 K. Pradeep Krishnan，铝金属基复合材料的压缩响应，《材料百科全书：复合材料》**1**(2021)，325-343。[5] J. Bory Reyes、H. De Schepper、A. Guzm´án Ad´án 和 F. Sommen，克利福德分析中的高阶 Borel-Pompeiu 表示，*Math. Methods Appl.Sci.***39** (2016)，第16期，4787–4796。DOI 10.1002/mma.3798。[6] F. Brackx、R. Delanghe 和 F. Sommen，克利福德分析，《数学研究札记》76，Pitman（Advanced Publishing Program），波士顿，1982。[7] G. David，复平面某些曲线上的奇异积分算子，*Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4) 17 (1)，157–189（法文），1984。

[8] L. De la Cruz Toranzo、R. Abreu Blaya 和 J. Bory Reyes，关于克利福德分析中涉及高阶 Lipschitz 类的普莱梅利-普里瓦洛夫定理，J. Math. Anal. Appl. 480 (2019)，第2期，123411，13页。[9] L. De la Cruz Toranzo、R. Abreu Blaya 和 S. Bernstein，通过克利福德代数值调和函数对一阶Lipschitz函数进行 Hardy 分解，J. Math. Anal. Appl. 536 (2024)，128242。[10] R. Delanghe、F. Sommen 和 V. Soucek，《克利福德代数与旋量值函数》，Kluwer Academic Publishers，Dordrecht，1992。[11] E.M. Dyn'kin，关于柯西型积分的光滑性，Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI 92 (1979)，115-133。[12] F. D. Gakhov，《边值问题》。（俄文）第三版，修订增补版，Izdat. Nauka，莫斯科，1977。[13] J.E. Gilbert 和 M. Murray，调和分析中的克利福德代数与狄拉克算子，《剑桥高等数学研究》，26。剑桥大学出版社，剑桥，1991。[14] K. G¨urlebeck、K. Habetha 和 W. Spr¨ossig，平面与 n维空间中的全纯函数。译自2006年德文原版。Birkh¨äuser Verlag，巴塞尔，2008。[15] G. Lam´é，关于温度平衡状态下均质固体等温面的回忆录，《纯粹与应用数学杂志》2 (1837)，147-188。[16]R. L´avicka，H作用的 Fischer 分解及其应用，《超复分析及其应用》。数学趋势，I. Sabadini 和 F Sommen（编），Springer，巴塞尔，2011。DOI 10. 1007/978-3-0346-0246-4_10。[17] F.J. Lino Alves、A.M. Baptista 和 A.T. Marques，航空航天工程中的金属基和陶瓷基复合材料。载于《航空航天工程用先进复合材料》，59-99。Elsevier，2016。[18] H. Malonek、D. Pe˜na-Pe˜na 和 F. Sommen，亚单生成函数的 Cauchy-Kowalevski 定理，Math. J. Okayama Univ. 53 (2011)，167-172。[19] H. Malonek、D. Pe˜na-Pe˜na 和 F. Sommen，通过亚单生成函数进行 Fischer 分解，Cubo 12 (2010)，第2期，189–197。[20] A. Moreno Garc´ía 和 B. Delgado，Lam´é–Navier 系统的传输边值问题，Bol. Soc. Mat. Mex. 30 (2024)，第1期，论文编号6，15页。DOI 10.1007/s40590-023-00577-1。[21] A. Moreno Garc´ía、T. Moreno Garc´ía 和 R. Abreu Blaya，比较克利福德分析中的调和函数与亚单生成函数，Mediterr. J. Math. 19 (2022)，第1期，论文编号33，14页。DOI 10.1007/s00009-021-01957-5。

[22] A. Moreno Garc´ía、D. Alfonso Santiesteban 和 R. Abreu Blaya，《球内二阶椭圆系统的狄利克雷问题》，《微分方程杂志》364（2023），498-520。DOI 10.1016/j.jde.2023.03.050。[23] A. Moreno Garc´ía、T. Moreno Garc´ía、R. Abreu Blaya 和 J. Bory Reyes，《克利福德分析中亚单生成函数的柯西积分公式》，Adv. Appl. Clifford Algebr. 27（2017），第2期，1147–1159。[24] A. Moreno Garc´ía、T. Moreno Garc´ía、R. Abreu Blaya 和 J. Bory Reyes，《亚单生成函数的分解及其在弹性理论中的应用》，Math. Meth. Appl. Sci. 43（2020），1915–1924。[25] A. Moreno Garc´ía、T. Moreno Garc´ía、R. Abreu Blaya 和 J. Bory Reyes，《亚单生成函数及其在三维弹性理论中的应用》，Math.. Meth. Appl. Sci. 41（2018），第10期，3622-3631。[26] N. I. Mushelisvili：《奇异积分方程》，Nauka，莫斯科，（1968）；第1版英文译本，Noodhoff，格罗宁根，（1953）；1972年重印。[27] J. Plemelj，《关于柯西解析函数积分表示及其边界值的补充定理》，Monatsh. Math. Phys. 19(1)（1908），205-210。[28] I.R. Porteous，《拓扑几何》，Van Nostrand Reinhold Co.，伦敦-纽约-墨尔本，1969。[29] I. Privalov，《论共轭函数》，《法国数学会通报》44(2)（1916），100-103。[30] I. Privalov，《论柯西型积分》，C. R.（Dokl.）《苏联科学院》（1939），859–863。[31] J. Ryan，《克利福德分析中的柯西–格林型公式》，《美国数学会会刊》347（1995），第4期，1331-1341。[32] J. Ryan，《基础克利福德分析》，《Cubo 数学教育》2（2000），226–256。[33] M.V. Shapiro，《克利福德代数值函数的若干边值问题》，《数学信使》40（1988），321-326。[34] E.M. Stein，《奇异积分与函数的可微性质》，普林斯顿数学丛书第30卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970。[35] E. M. Stein 和 A. Zygmund，《霍尔德空间和Lp 空间上平移不变算子的有界性》，《数学年刊》（第2辑）85，337–349，1967。[36] L. Wang、S. Jia、L. Luo 和 F. Qiu，《亚单生成函数的普莱梅利公式及其边值问题》，《复变函数与椭圆方程》68（2023），第7期，1158–1181。[37] H. Whitney，《定义在闭集上的可微函数的解析延拓》，《美国数学会会刊》36（1934），第1期，63–89。