arXiv:2601.04532v1 [math-ph] 8 Jan 2026

具有表面应变梯度弹性的直裂纹混合模态加载

C. RODRIGUEZ，A. ZEMLYANOVA

Dedicated to D. J. Steigmann, in recognition of his profound influence on the interplay between Geometry and Mechanics.

Abstract. 本文采用线性化表面-基底理论对脆性断裂进行建模，其中裂纹面具有由表面应变梯度弹性能导出的表面应力。该模型将表面拉伸、曲率以及伸长的表面梯度纳入表面能，从而捕捉早期表面弹性理论未能涵盖的小尺度效应。在加入具有物理依据的尖端条件后，该理论被应用于无限各向同性板中有限直裂纹的 I/II 型混合模态加载。通过复分析方法，研究表明，对于几乎所有允许的参数值，所得应力场和应变场在裂纹尖端处仍保持有界。结合此前关于 III 型载荷的研究结果，分析表明，采用表面应变梯度弹性的线性化表面-基底模型能够消除远场加载所有主要模态下的裂纹尖端奇异性。

1. Introduction

1.1. 表面-基体相互作用与断裂建模。如今，人们已充分认识到，固体通过表面张力等表面力与周围环境发生的相互作用，在决定小长度尺度上的力学行为方面发挥着决定性作用，尤其是在边界附近。Griffith、Westergaard 和 Irwin 对断裂的经典研究中已隐含这一认识 [2, 11, 16, 17, 43],，并促使人们致力于在连续介质理论中描述表面效应。为此，一种自然的数学框架是赋予体材料边界的某些部分独立的热力学结构，其特征是具有不同于体相的能量密度。这一思想构成了现代材料表面理论的基础；这类理论通过为边界表面和内部（界面）表面赋予能量性质和本构性质，扩展了经典连续介质力学。

Gurtin和Murdoch 首次全面建立了这类理论的表述 [12,13],，旨在描述解理晶体中观测到的压缩表面应力。他们的框架将表面视为一种能抵抗拉伸但不抵抗弯曲的膜，并已成为研究局限于薄边界区域或界面区域内小尺度现象的基石。尽管 Gurtin-Murdoch 理论已成功应用于广泛的力学问题，Steigmann和 Ogden [36,37] 后来指出，该理论无法支持压缩能量极小平衡态。

Steigmann和Ogden [36, 37], 通过扩展表面能以纳入曲率依赖性，赋予材料曲面弯曲刚度，从而克服了这一局限。此后，Steigmann-Ogden 模型被用于分析接触 [19–22, 47, 48, 54], 夹杂[8, 14, 24, 25, 42, 52], 和脆性断裂问题 [46, 49, 50],，由此为同时具有面内刚度和弯曲刚度的表面建立了统一的理论框架。这些断裂相关应用的成功，是本研究的主要动机。

经典线弹性断裂力学（LEFM）仍是脆性断裂建模中最重要的理论框架，尽管它预测裂纹尖端处的应力与应变无界。在无穷小应变假设下推导得到的 LEFM 控制方程会产生不符合物理实际的奇异解。人们提出了许多理论扩展来消除这些奇异性（例如，见 [7]）。从 Muki 和 Sternberg [26, 27] 以及 Bogy 和 Sternberg [5, 6] 的偶应力公式开始，将位移场的高阶梯度纳入体材料储能的理论消除了旋转梯度中的奇异性，但仍未消除应力奇异性。随后

应变梯度理论 [1,3] 成功消除了应变奇异性，但未能消除应力奇异性。总体而言，这些进展表明，将高阶梯度纳入体材料储能可以减弱经典线弹性断裂力学固有的奇异性，但无法将其彻底消除。

另一种消除裂纹尖端奇异性的方法，是通过修改边界条件而非体材料本构定律来实现。在这种方法中，裂纹面被建模为具有自身表面应力的材料表面，由此引入高阶表面梯度，同时不改变体相的标准各向同性储能。自 [30] 提出这一方法，并由 Sendova 和 Walton [34],加以完善以来，人们假设存在依赖曲率的表面张力，可消除若干问题中的奇异性 [9,41,44,45,53]。然而，这些表述缺乏变分基础：所得表面应力通常无法由能量密度推导得到。若表面应力改由 Gurtin-Murdoch能量推导，则在远场加载下奇异性依然存在 [18,40]。更精细的分析 [10]表明，非均匀表面性质可能改变奇异性的强度，但无法将其消除。相比之下，Steigmann-Ogden表面弹性可消除某些平面应变和轴对称裂纹中的奇异性 [46,49,50],；然而，对于反平面剪切（III 型载荷），曲率依赖性消失，裂纹尖端场仍无界。现有表面弹性模型在 III 型载荷下持续失效，这促使研究者发展一种新理论，以预测所有主要载荷模式下有界的应力与应变。

近期在 [31], 中提出了沿这一方向的扩展：将伸长的表面梯度纳入 Steigmann-Ogden 表面能，从而得到一种表面应变梯度型能量：

$$E=\int_{\mathcal{B}} W(\boldsymbol{E}), dA+\int_{\mathcal{S}} U(\boldsymbol{E}_s,\boldsymbol{\rho},\nabla_s\boldsymbol{E}_s), dA. \tag{1.1}$$

其中， $\mathcal{B}$ 为体材料， $\mathcal{S}\subseteq\partial\mathcal{B}$ 为具有表面应力的材料曲面， $\boldsymbol{E}$ 为拉格朗日应变， $\boldsymbol{E}_s$为曲面应变张量， $\boldsymbol{\rho}$ 为相对法向曲率张量， ∇_s 为曲面梯度。[1] 对于平面曲面 $\mathcal{S}$， U 的函数形式与 Hilgers 和 Pipkin 的应变梯度板理论 [15], 一致；而对于曲面，则与 Steigmann 关于独立应变梯度弹性壳体的理论 [35]一致。从物理上看，纳入 $\nabla_s\boldsymbol{E}_s$ 使曲面具有抵抗测地线畸变的能力，即抵抗随动测地线偏离变形曲面上测地线路径的趋势 [31]。

在 [31,32], 中，研究表明，通过虚功原理由式（1.1）导出的线性化表面-基底模型，能够消除有限长度裂纹在远场 III 型载荷作用下的裂纹尖端奇异性；这与 Gurtin-Murdoch 模型和 Steigmann-Ogden 模型形成对比。文献 [31] 采用了 Hilgers 和 Pipkin [15], 提出的特设二次表面能 U，而后续研究 [32] 则采用了表面能

$$U=\frac{\lambda_s}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{E}_s)^2+\mu_s|\boldsymbol{E}_s|^2+\ell_s^2\left(\frac{\lambda_s}{2}(\nabla_s\operatorname{tr}\boldsymbol{E}_s)^2+\mu_s|\nabla_s\boldsymbol{E}_s|^2\right)+\frac{\zeta}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{\rho})^2+\eta|\boldsymbol{\rho}|^2, \tag{1.2}$$

其中 ℓ_s 为材料长度尺度。与 [31], 中采用的唯象能量不同，形式 (1.2) 可通过对厚度为 ℓ_s 的平面应变梯度弹性层的三维储能进行降维而导出

$$W_{sg}=\frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{E})^2+\mu|\boldsymbol{E}|^2+\ell_s^2\left[\frac{\lambda}{2}(\nabla\operatorname{tr}\boldsymbol{E})^2+\mu|\nabla\boldsymbol{E}|^2\right], \tag{1.3}$$

从而得到以下对应关系

$$\lambda_s=\frac{2h\lambda\mu}{\lambda+2\mu},\quad \mu_s=h\mu,\quad \zeta=\Big(\frac{h^3}{24}+h\ell_s^2\Big)\lambda_s,\quad \eta=\Big(\frac{h^3}{24}+h\ell_s^2\Big)\mu_s.$$

[4] 中的分析通过对壳体和比式（1.3）更一般的 Toupin–Mindlin 能量采用类似的渐近论证，从三维视角获得了类似的表面能。 [31] 和式（1.2）中所用表面能的强椭圆性，对于保证该理论所预测的应力与应变有界起到了关键作用；这与对应于 Steigmann-Ogden 模型的 $\ell_s=0$ 极限形成对比。

[1]这些运动学描述量的精确定义见第 2 节。

1.2. 主要结果与概要。本文将 [31]的线性化表面-基底模型及其表面能（1.2）应用于无限各向同性板中有限直裂纹的 I/II型混合模态加载。通过复解析方法，我们证明，对于几乎所有允许的参数值，应力与应变在裂纹尖端处仍保持有界。结合关于 III 型载荷 [31, 32], 的结果，这表明具有表面应变梯度弹性的线性化断裂表面-基底模型能够使远场断裂载荷的所有主要模态正则化。因此，所得理论为建立应力场和应变场有界的脆性断裂模型提供了统一且符合物理规律的框架。

第 2 节建立线性化表面-基底模型，定义储存能，并通过虚功原理推导远场混合模式平面应变裂纹载荷下的控制方程。特别关注尖端条件，因为这些条件对于确保应力和应变在裂纹端点处仍保持有界至关重要。其中包括尖点闭合条件、裂纹尖端两侧应力的连续性，以及合表面力偶为零；对于平面应变和反平面剪切构型，这都是物理上合理的要求。第 3 节利用复解析势重新表述混合模式边值问题，由此得到一组耦合的奇异积分微分方程。第 4 节将该方程组化为 Fredholm 型积分形式，并证明解的存在性、唯一性和充分正则性，从而保证应力场和应变场在裂纹尖端处仍保持有界（模型参数取值中一个可数集合除外）。第 5 节给出基于切比雪夫多项式近似的数值结果，并比较不同参数区间下的结果，展示表面应变梯度对能量的贡献对模型的定量影响。

致谢。C. R. 衷心感谢 NSF DMS-2307562 提供的支持。A. Z. 衷心感谢 Simons Foundation 提供的支持，资助编号为 713080 和 SFI-MPS-TSM-00013162。

2. Preliminaries

本节介绍本文中所采用的线性化表面-基底模型。我们给出基底和表面的储存能及其无穷小位移近似。通过虚功原理推导有限直裂纹在 I/II 型混合模态加载下的控制场方程，并明确陈述为保证应力场和应变场有界所需的尖端条件，同时从物理角度说明其合理性。

2.1. 具有应变梯度弹性边界表面的 Green 弹性体。现在简要回顾 [31] 中关于具有表面应变梯度弹性边界表面的 Green 弹性体 $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ 平衡态的表面-基底理论基础 $\mathcal{S} \subseteq \partial\mathcal{B}$。[2]

设 $\boldsymbol{x} : U \to \mathcal{S}$ 是 $\mathcal{S}$的局部参数化。这里， $U \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个坐标为 (θ^α) 的开集。相应的自然基向量记为 $\boldsymbol{A}_\alpha := \boldsymbol{x}_{,\alpha}$ ，对偶基向量则分别记为 $\boldsymbol{A}^\alpha$ 。这里 $_\alpha = \partial_{\theta^\alpha}$。 $\mathcal{S}$ 的切平面上的投影记为 $\mathbf{1}$，并定义为

$$\mathbf{1} = \boldsymbol{A}_\alpha \otimes \boldsymbol{A}^\alpha.$$

度量的分量定义为

$$A_{\alpha\beta} := \boldsymbol{A}_\alpha \cdot \boldsymbol{A}_\beta,$$

$(A^{\alpha\beta})$ 的行列式记为 A，对偶分量记为 $(A^{\alpha\beta})$，因此 $A_{\alpha\gamma}A^{\gamma\beta} = \delta^\beta_\alpha$。张量的分量分别使用 $(A^{\alpha\beta})$ 和 $(A_{\alpha\beta})$ 升降指标。对于定义在 $\mathcal{S}$ 上的向量场 $\boldsymbol{u}$，我们定义

$$\boldsymbol{u}_{\alpha|\beta} := \boldsymbol{u}_{,\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\boldsymbol{u}_{,\gamma},$$

其中 $(\Gamma^\gamma_{\beta\alpha})$ 是与 $(A_{\alpha\beta})$ 相关联的克里斯托费尔符号。对于定义在 $\mathcal{S}$上的标量值函数 φ ，其曲面梯度定义为

$$\nabla_s\varphi := \varphi_{,\alpha}\boldsymbol{A}^\alpha,$$

[2]在本文中，我们通过选定原点和固定的正交归一基$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$，将三维欧几里得空间与 $\mathbb{R}^3$ 对应起来。

对于 $\mathcal{S}$上的向量场或张量场 $\boldsymbol{B}$，其曲面梯度定义为

$$\nabla_s \boldsymbol{B} := \boldsymbol{B}_{,\alpha} \otimes \boldsymbol{A}^\alpha.$$

曲面散度 div_s 和曲面拉普拉斯算子 Δ_s 由迹与曲面梯度的标准组合定义。

设 $\boldsymbol{\chi}: \mathcal{B} \to \mathbb{R}^3$ 是一个光滑可逆变形，其变形梯度为 $\boldsymbol{F}$，并诱导出一个光滑嵌入 $\boldsymbol{y}: \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$。曲面应变张量定义为

$$\boldsymbol{E}_s := \frac{1}{2}(\boldsymbol{y}_{,\alpha} \cdot \boldsymbol{y}_{,\beta} - A_{\alpha\beta})\boldsymbol{A}^\alpha \otimes \boldsymbol{A}^\beta,$$

相对法向曲率张量则定义为

$$\boldsymbol{\rho} := (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{y}_{,\alpha\beta} - \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{x}_{,\alpha\beta})\boldsymbol{A}^\alpha \otimes \boldsymbol{A}^\beta,$$

其中，$\boldsymbol{n}$ 是随动曲面 $\boldsymbol{\chi}(\mathcal{S})$上的外单位法向量场，$\boldsymbol{N}$ 是 $\mathcal{S}$上的外单位法向量场。通过要求 $\boldsymbol{N} = |\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2|^{-1}\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2$，由此确定 $\mathcal{S}$ 的定向。

对于相应的位移向量场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{p}) := \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{p}$，定义其无穷小应变张量、曲面应变张量和相对法向曲率张量如下：

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T), \quad \boldsymbol{\epsilon}_s = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{A}_\alpha \cdot \boldsymbol{u}_{,\beta} + \boldsymbol{u}_{,\alpha} \cdot \boldsymbol{A}_{,\beta}\big)\boldsymbol{A}^\alpha \otimes \boldsymbol{A}^\beta, \quad \boldsymbol{\kappa}_s = \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{u}_{,\alpha|\beta}\boldsymbol{A}^\alpha \otimes \boldsymbol{A}^\beta.$$

我们假设基底 $\mathcal{B}$ 由小应变二次各向同性储能描述

$$W = \frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{E})^2 + \mu|\boldsymbol{E}|^2,$$

并且，曲面 $\mathcal{S}$ 具有包含表面张力的应变梯度曲面能：

$$U = \sigma_0 J^{1/2}_{\boldsymbol{1}+2\boldsymbol{E}_s} + \frac{\lambda_s}{2}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{E}_s)^2 + \mu_s|\boldsymbol{E}_s|^2 + \ell_s^2\Big[\frac{\lambda_s}{2}|\nabla_s \mathrm{tr}\,\boldsymbol{E}_s|^2 + \mu_s|\nabla_s \boldsymbol{E}_s|^2\Big] + \frac{\zeta}{2}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\rho})^2 + \eta|\boldsymbol{\rho}|^2.$$

此处，$\sigma_0 \in \mathbb{R}$ 表示表面张力常数，$J_{\boldsymbol{a}}$ 是张量场 $\boldsymbol{a}$ 在 $\mathcal{S}$上的雅可比。

若假设位移满足

$$\max_{\mathcal{B}} |\nabla \boldsymbol{u}| + L \max_{\mathcal{S}} |\nabla_s \nabla_s \boldsymbol{u}| := \delta \ll 1, \tag{2.1}$$

其中 L 是固定的长度尺度，则忽略 $o(\delta^2)$ 阶项后可得，

$$\begin{aligned} W &= \frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\epsilon})^2 + \mu|\boldsymbol{\epsilon}|^2, \\ U &= \sigma_0(1 + \mathrm{div}_s \boldsymbol{\epsilon}_s) + \frac{\lambda_s + \sigma_0}{2}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\epsilon}_s)^2 + (\mu - \sigma_0)|\boldsymbol{\epsilon}_s|^2 + \frac{\sigma_0}{2}|\nabla_s \boldsymbol{u}|^2 \\ &\quad + \ell_s^2\Big[\frac{\lambda_s}{2}|\nabla_s \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\epsilon}_s|^2 + \mu_s|\nabla_s \boldsymbol{\epsilon}_s|^2\Big] + \frac{\zeta}{2}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\kappa}_s)^2 + \eta|\boldsymbol{\kappa}_s|^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

当 $\ell_s = 0$ 和 $\zeta = \eta = 0$时，(2.2) 化为经典的 Gurtin-Murdoch 曲面能；当仅有$\ell_s = 0$时，则可得到无穷小 Steigmann-Ogden 模型，该模型包含抗弯曲性，但不包含曲面应变梯度项。在本研究中，我们假设

$$\zeta + 2\eta > 0, \quad \lambda_s + 2\mu_s > 0, \quad \ell_s > 0.$$

鉴于本文考虑的是平面应变情形，我们将表面能专门化为平面变形。对于形式如下的平面应变位移 (2.2)

$$\boldsymbol{u} = u_1(x_1, x_2)\boldsymbol{e}_1 + u_2(x_1, x_2)\boldsymbol{e}_2$$

对于位于 x_1-x_3 平面内的材料曲面 $\mathcal{S}$，直接计算可得，式（2.2）化简为

$$U = \sigma_0(1 \pm u_{1,1}) + \frac{\lambda_s + 2\mu_s}{2}\Big[(u_{1,1})^2 + \ell_s^2(u_{1,11})^2\Big] + \frac{\sigma_0}{2}(u_{2,1})^2 + \frac{\zeta + 2\eta}{2}(u_{2,11})^2, \tag{2.3}$$

其中，符号的选择取决于曲面法向量的定向，$\boldsymbol{N} = \mp \boldsymbol{e}_2$。

2.2. 混合模态问题的表述。本文研究无限脆性[3]板 $\mathcal{B}=\mathbb{R}^2\times[-H,H]$中的一条长度为 2ℓ 、沿区间 $[-\ell,\ell]$ 延伸的有限裂纹，该裂纹处于平面应变状态并承受远场混合模态加载条件

$$\boldsymbol{u}=u_1(x_1,x_2)\boldsymbol{e}_1+u_2(x_1,x_2)\boldsymbol{e}_2.$$

远场加载条件表示为

$$\lim_{|(x_1,x_2)|\to\infty}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\sigma}^{\infty}$$

其中

$$\boldsymbol{\sigma}=\lambda(\operatorname{tr}\boldsymbol{\epsilon})\boldsymbol{I}+2\mu\boldsymbol{\epsilon},$$

为柯西应力张量。将两个裂纹面沿 $y\to 0^{\pm}$ 趋近时，记为 $\mathcal{S}_{\pm}:=[-\ell,\ell]\times\{0^{\pm}\}\times[-H,H]$。二者的并集具有表面储能 (2.2)；平面应变情形见 (2.3)。为简单起见，我们假设裂纹表面上没有施加外部牵引力。裂纹的端点 $\{\pm\ell\}\times\{0\}\times[-H,H]$ 称为裂纹尖端，这与平面应变假设下的二维约化一致。

现在，我们通过虚功原理推导控制场方程。

命题 2.1. 设 $\mathcal{P}\subset\mathbb{R}^2$ 是一个具有分段光滑边界的开集，且 $[-\ell,\ell]\subset\mathcal{P}$。若 $\boldsymbol{u}:\mathcal{P}\to\mathbb{R}^2$ 在 $\mathcal{P}$ 上运动学容许，则记为 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{A}(\mathcal{P})$:

(1) $\boldsymbol{u}\in C^2(\mathcal{P}\backslash[-\ell,\ell])$。 (2) $\boldsymbol{u}|_{\mathcal{P}\cap\{\pm x_2>0\}}$ 延拓为 C^2 函数 $\boldsymbol{u}^{\pm}$ 于 $\mathcal{P}\cap\{\pm x_2\geq 0\}$ 上，并且 $\boldsymbol{u}^{\pm}|_{[-\ell,\ell]}\in C^4([-\ell,\ell])$。 (3) $\boldsymbol{u}^{\pm}$ 满足尖点条件

$$\boldsymbol{u}^{+}(\pm\ell,0)=\boldsymbol{u}^{-}(\pm\ell,0), \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{u}^{+}_{,1}(\pm\ell,0)=\boldsymbol{u}^{+}_{,1}(\pm\ell,0). \tag{2.5}$$

对于 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{A}(\mathcal{P})$，通过以下方式定义总能量 $E(\cdot;\mathcal{P})$、边缘力 $\boldsymbol{t}_e$ （位于 $t=\pm\ell$处）以及边缘双力 $\boldsymbol{m}_e$ （位于 $t=\pm\ell$处）：

$$\begin{aligned}
E(\boldsymbol{u};\mathcal{P}):=&\int_{\mathcal{P}\backslash[-\ell,\ell]}\Big[\frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr}\boldsymbol{\epsilon})^2+\mu|\boldsymbol{\epsilon}|^2\Big]dA+\sigma_0\sum_{\pm}\int_{-\ell}^{\ell}(1\pm u^{\pm}_{1,1})dt\\
&+\sum_{\pm}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{\lambda_s+2\mu_s}{2}\Big[(u^{\pm}_{1,1})^2+\ell_s^2(u^{\pm}_{1,11})^2\Big]dt+\sum_{\pm}\int_{-\ell}^{\ell}\Big[\frac{\sigma_0}{2}(u^{\pm}_{2,1})^2+\frac{\zeta+2\eta}{2}(u^{\pm}_{2,11})^2\Big]dt,\\
\boldsymbol{t}_e:=&\sum_{\pm}\Big[(\lambda_s+2\mu_s)(u^{\pm}_{1,1}-\ell_s^2u^{\pm}_{1,111})\boldsymbol{e}_1+(\sigma_0u^{\pm}_{2,1}-(\zeta+2\eta)u^{\pm}_{2,111})\boldsymbol{e}_2\Big],\\
\boldsymbol{m}_e:=&\sum_{\pm}\Big[\ell_s^2(\lambda_s+2\mu_s)u^{\pm}_{1,11}\boldsymbol{e}_1+(\zeta+2\eta)u^{\pm}_{2,11}\boldsymbol{e}_2\Big].
\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$满足虚功原理：对于所有有界的 $\mathcal{P}$，对于所有 $\boldsymbol{v}\in\mathcal{A}(\mathcal{P})$ ，

$$\frac{d}{d\epsilon}E(\boldsymbol{u}+\epsilon\boldsymbol{v};\mathcal{P})\Big|_{\epsilon=0}=\int_{\partial\mathcal{P}}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}\,ds+\boldsymbol{t}_e\cdot\boldsymbol{v}\big|^{t=\ell}_{t=-\ell}+\boldsymbol{m}_e\cdot\boldsymbol{v}_{,1}\big|^{t=\ell}_{t=-\ell}, \tag{2.6}$$

其中， $\boldsymbol{N}$ 是 $\partial\mathcal{P}$上的外单位法向量场，当且仅当满足以下控制场方程：

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{0},\quad on\ \mathbb{R}^2\backslash[-\ell,\ell],\\
&\sigma^{\pm}_{12}(t,0)=\mp(\lambda_s+2\mu_s)\big(u^{\pm}_{1,11}(t,0)-\ell_s^2u^{\pm}_{1,1111}(t,0)\big), &(2.7)\\
&\sigma^{\pm}_{22}(t,0)=\pm(\zeta+2\eta)u^{\pm}_{2,1111}(t,0)\mp\sigma_0u^{\pm}_{2,11}(t,0),\quad t\in[-\ell,\ell], &(2.8)
\end{aligned}$$

其中，与前文一样， $\pm$ 表示当 $y\to 0^{\pm}$时趋近于 $[-\ell,\ell]$ 的极限值。

[3]“脆性”一词表明，我们仅考虑无穷小位移梯度，以及在假设（2.1）下推导出的线性化理论。

证明。我们首先……请注意，连续性条件（2.4）和微积分基本定理意味着 t

$$\sigma_0 \sum_{\pm} \int_{-\ell}^{\ell} (1 \pm u_{1,1}^{\pm}) dt = 2\sigma_0 \ell.$$

通过标准的分部积分…… 分部积分论证以及 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{A}(\mathcal{P})$ $\boldsymbol{v} \in \mathcal{A}(\mathcal{P})$这一事实，我们进而得出…… t

$$\begin{aligned}
\dot{E} &= \int_{\mathcal{P}\setminus[-\ell,\ell]} -\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}\, dA + \int_{\partial\mathcal{P}} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{v}\, ds \\
&+ \sum_{\pm} \int_{-\ell}^{\ell} \Big[\mp \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{v}^{\pm} - (\lambda_s + 2\mu_s)(u_{1,11}^{\pm} - \ell_s^2 u_{1,1111}^{\pm}) v_1 - [\sigma_0 u_{,11} - (\zeta + 2\eta) u_{2,1111}^{\pm}] v_2 \Big] dx_1 \\
&+ \Big[\sum_{\pm} (\lambda_s + 2\mu_s)(u_{1,1}^{\pm} - \ell_s^2 u_{1,111}^{\pm}) \Big] v_1 \Big|_{t=-\ell}^{t=\ell} + \Big[\sum_{\pm} (\sigma_0 u_{2,1}^{\pm} - (\zeta + 2\eta) u_{2,111}^{\pm}) \Big] v_2 \Big|_{t=-\ell}^{t=\ell} \\
&+ \Big[\sum_{\pm} \ell_s^2 (\lambda_s + 2\mu_s) u_{1,11}^{\pm} \Big] v_{1,1} \Big|_{t=-\ell}^{t=\ell} + \Big[\sum_{\pm} (\zeta + 2\eta) u_{2,11}^{\pm}) \Big] v_{2,1} \Big|_{t=-\ell}^{t=\ell} \\
&= \int_{\mathcal{P}\setminus[-\ell,\ell]} -\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}\, dA + \int_{\partial\mathcal{P}} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{v}\, ds \\
&+ \sum_{\pm} \int_{-\ell}^{\ell} \Big[\mp \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{v}^{\pm} - (\lambda_s + 2\mu_s)(u_{1,11}^{\pm} - \ell_s^2 u_{1,1111}^{\pm}) v_1 - [\sigma_0 u_{2,11}^{\pm} - (\zeta + 2\eta) u_{2,1111}^{\pm}] v_2 \Big] dx_1 \\
&+ \boldsymbol{t}_e \cdot \boldsymbol{v} \big|_{t=-\ell}^{t=\ell} + \boldsymbol{m}_e \cdot \boldsymbol{v}_{,1} \big|_{t=-\ell}^{\ell}.
\end{aligned}$$

现在，利用变分法基本定理以及 $\mathcal{P}$的任意性，即可得到该结果。□

现在，我们根据虚功原理推导平衡定律。设 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ 为具有分段光滑边界的有界开集，且 $[-\ell, \ell] \subset \mathcal{P}^\circ$。令 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$、 $b \in \mathbb{R}$，并定义

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} - b x_2 \boldsymbol{e}_1 + b x_1 \boldsymbol{e}_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{P}).$$

若 $\boldsymbol{u}$ 满足（2.6），则

$$\boldsymbol{0} = \Big[\int_{\partial\mathcal{P}} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{N}\, ds + \boldsymbol{t}_e \big|_{t=-\ell}^{t=\ell} \Big] \cdot \boldsymbol{a} + \Big[\Big(\int_{\partial\mathcal{P}} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{N}\, ds + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}_e \Big|_{x_1 = t = -\ell, x_2 = 0}^{x_1 = t = \ell, x_2 = 0} \Big) \cdot \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{m}_e \cdot \boldsymbol{e}_2 \big|_{t=-\ell}^{t=\ell} \Big] b$$

由于 $\boldsymbol{a}$ 和 b 是任意的，且平面内两个向量的叉积始终平行于 $\boldsymbol{e}_3$，我们得出，包含裂纹的部分满足力平衡

$$\boldsymbol{0} = \int_{\partial\mathcal{P}} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{N}\, ds + \boldsymbol{t}_e \big|_{t=-\ell}^{t=\ell},$$

且包含裂纹的部分满足力矩平衡

$$\boldsymbol{0} = \int_{\partial\mathcal{P}} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{N}\, ds + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}_e \Big|_{x_1 = t = -\ell, x_2 = 0}^{x_1 = t = \ell, x_2 = 0} + (\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2) \boldsymbol{m}_e \big|_{t=-\ell}^{t=\ell}. \tag{2.9}$$

项（$\boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2$）$\boldsymbol{m}_e \big|_{t=-\ell}^{t=\ell}$ 表示一个平行于 $\boldsymbol{e}_3$（即裂纹边缘方向）的力偶。

由于方程 (2.7) 和 (2.8) 涉及作用于 $\boldsymbol{u}^{\pm}$ 的四阶微分算子，因此需要 16 个线性无关标量条件以确保适定性。注意，在 (x_1, x_2) 处， $= (\pm\ell, 0)$，(2.4)

和 (2.5) 可表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^+ \\ u_1^- \\ u_2^+ \\ u_2^- \\ u_{1,1}^+ \\ u_{1,1}^- \\ u_{2,1}^+ \\ u_{2,1}^- \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

因此，在两个尖端总共只规定了八个线性无关标量条件，还需要另外八个条件。此外，我们要求裂纹尖端处的应力连续:

$$\sigma_{12}^+(\pm\ell,0) = \sigma_{12}^-(\pm\ell,0), \quad \sigma_{22}^+(\pm\ell,0) = \sigma_{22}^-(\pm\ell,0),$$

这提供了另外四个线性无关标量条件。最后，我们要求裂纹尖端处的双力为零:

$$\boldsymbol{m}_e = \mathbf{0} \quad \text{at } t = \pm\ell. \tag{2.10}$$

施加条件 (2.10) 可确保裂纹边缘除受到边缘力 $\boldsymbol{t}_e$ 在 $t=\pm\ell$ （见 (2.9)）所引起的扭转之外，不再发生额外扭转，这等价于

$$\boldsymbol{u}_{,11}^+(\pm\ell,0) + \boldsymbol{u}_{,11}^-(\pm\ell,0) = \mathbf{0}. \tag{2.11}$$

3. The mixed-mode loading problem from the complex analytic perspective

本节利用复势重新表述混合型裂纹问题。通过用复变量的解析函数表示各场，控制边值问题可化为关于裂纹两侧面力和位移导数跃变的耦合奇异积分微分方程组。这一表示形式提取出了稍后应用弗雷德霍姆择一定理所需的解析结构。

3.1. 萨夫鲁克复势。位于 $L := [-\ell,\ell]$ 上的应力和位移 u_1, u_2 的导数可利用两个复势 [29], Φ 和 Ψ 表示，从而得到（例如，参见 [33] 的第 **1.1** 节）

$$(\sigma_{22} - i\sigma_{12})(t) = \Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + \frac{\overline{dt}}{dt}(t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)}), \tag{3.1}$$

$$2\mu\frac{d}{dt}(u_1 + iu_2)(t) = \kappa\Phi(t) - \overline{\Phi(t)} - \frac{\overline{dt}}{dt}(t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)}), \quad t \in L, \tag{3.2}$$

其中，我们省略了沿曲线哪一侧进行求值。这里，$\kappa = 3-4\nu$其中 ν是块体材料的泊松比。

函数 Φ 和 Ψ 在 $\mathbb{C}\backslash L$ 上解析，且可用柯西积分表示。我们采用 Savruk 提出的形式

$$\Phi(z) := \Gamma + \frac{1}{2\pi}\int_L \Big(g'(t) - \frac{2iq(t)}{\kappa+1}\Big)\frac{dt}{t-z},$$
$$\Psi(z) := \Gamma' + \frac{1}{2\pi}\int_L \Big(\overline{g'(t)} - \frac{2i\kappa\overline{q(t)}}{\kappa+1}\Big)\frac{\overline{dt}}{t-z} - \frac{1}{2\pi}\int_L \Big(g'(t) - \frac{2iq(t)}{\kappa+1}\Big)\frac{\bar{t}dt}{(t-z)^2}$$

其中 $\Gamma := \frac{1}{4}(\sigma_{11}^{\infty}+\sigma_{22}^{\infty})$ 和 $\Gamma' := \frac{1}{2}(\sigma_{22}^{\infty}-\sigma_{11}^{\infty})+i\sigma_{12}^{\infty}$。将 Savruk 表示代入式 (3.1) 和 (3.2)，得到

$$\begin{aligned}(\sigma_{22}-i\sigma_{12})^{\pm}(t) &= \pm q(t)+\frac{1}{2\pi}\int_L\Big(\frac{2}{\tau-t}+k_1(t,\tau)\Big)g'(\tau)\\ &\quad+\frac{1}{2\pi}\int_L k_2(t,\tau)\overline{g'(\tau)d\tau}+\frac{1}{\pi i(\kappa+1)}\int_L\Big(-\frac{\kappa-1}{\tau-t}-\kappa k_1(t,\tau)\Big)q(\tau)d\tau\\ &\quad-\frac{1}{\pi i(\kappa+1)}\int_L k_2(t,\tau)\overline{q(\tau)d\tau}+2\mathrm{Re}\,\Gamma+\bar{\Gamma}'\frac{\overline{dt}}{dt},\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}2\mu\frac{d}{dt}(u_1+iu_2)^{\pm}(t) &= \pm\frac{i(\kappa+1)}{2}g'(t)+\frac{1}{2\pi}\int_L\Big(\frac{\kappa-1}{\tau-t}-k_1(t,\tau)\Big)g'(\tau)d\tau\\ &\quad-\frac{1}{2\pi}\int_L k_2(t,\tau)\overline{g'(\tau)d\tau}+\frac{\kappa}{\pi i(\kappa+1)}\int_L\Big(\frac{2}{\tau-t}+k_1(t,\tau)\Big)q(\tau)d\tau\\ &\quad+\frac{1}{\pi i(\kappa+1)}\int_L k_2(t,\tau)\overline{q(\tau)d\tau}+\kappa\Gamma-\bar{\Gamma}-\bar{\Gamma}'\frac{\overline{dt}}{dt},\quad t\in L,\end{aligned}\tag{3.4}$$

其中

$$k_1(t,\tau)=\frac{d}{dt}\log\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}},\quad k_2(t,\tau)=-\frac{d}{dt}\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}.$$

由于 $L=[-\ell,\ell]$，$\bar{t}=t$，因此

$$\begin{aligned}(\sigma_{22}-i\sigma_{12})^{\pm}(t) &= \pm q(t)+\frac{1}{\pi}\int_L\frac{g'(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{\kappa-1}{\pi i(\kappa+1)}\int_L\frac{q(\tau)}{\tau-t}d\tau\\ &\quad+2\mathrm{Re}\,\Gamma+\bar{\Gamma}',\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}2\mu\frac{d}{dt}(u_1+iu_2)^{\pm}(t) &= \pm\frac{i(\kappa+1)}{2}g'(t)+\frac{\kappa-1}{2\pi}\int_L\frac{g'(\tau)}{\tau-t}d\tau\\ &\quad+\frac{2\kappa}{\pi i(\kappa+1)}\int_L\frac{q(\tau)}{\tau-t}d\tau+\kappa\Gamma-\bar{\Gamma}-\bar{\Gamma}',\quad t\in L.\end{aligned}\tag{3.6}$$

方程 (3.3) 和 (3.4) 表明，函数 $q(t)$ 和 $g'(t)$ 分别表示裂纹 L两侧的应力和位移梯度场跳跃:

$$2q(t)=(\sigma_{22}-i\sigma_{12})^{+}(t)-(\sigma_{22}-i\sigma_{12})^{-}(t),\tag{3.7}$$

$$\frac{i(\kappa+1)}{2\mu}g'(t)=\frac{d}{dt}(u_1+iu_2)^{+}(t)-\frac{d}{dt}(u_1+iu_2)^{-}(t),\quad t\in L.\tag{3.8}$$

这一对应关系赋予 q 和 g' 明确的物理含义：它们是沿裂纹面应力和应变不连续的度量。此外，将 (3.8) 从 $-\ell$ 积分到 t，并利用 (2.4)，可得

$$\frac{i(\kappa+1)}{2\mu}g(t)=(u_1+iu_2)^{+}(t)-(u_1+iu_2)^{-}(t),\quad t\in L,$$

因此， $g(t)$ 表示裂纹处的位移跳跃。

3.2. 用柯西积分表示的边界条件。将裂纹上、下表面的两个边界条件 (2.7) 和 (2.8) 相加和相减（相对于 $\pm$），可得在 $[-\ell,\ell]$ 上,

$$\begin{aligned}\sigma_{12}^{+}+\sigma_{12}^{-} &= -(\lambda_s+2\mu_s)(u_{1,11}^{+}-u_{1,11}^{-})+\ell_s^2(\lambda_s+2\mu_s)(u_{1,1111}^{+}-u_{1,1111}^{-}),\\ \sigma_{22}^{+}+\sigma_{22}^{-} &= -\sigma_0(u_{2,11}^{+}-u_{2,11}^{-})+(\zeta+2\eta)(u_{2,1111}^{+}-u_{2,1111}^{-}),\\ \sigma_{12}^{+}-\sigma_{12}^{-} &= -(\lambda_s+2\mu_s)(u_{1,11}^{+}+u_{1,11}^{-})+\ell_s^2(\lambda_s+2\mu_s)(u_{1,1111}^{+}+u_{1,1111}^{-}),\\ \sigma_{22}^{+}-\sigma_{22}^{-} &= -\sigma_0(u_{2,11}^{+}+u_{2,11}^{-})+(\zeta+2\eta)(u_{2,1111}^{+}+u_{2,1111}^{-}).\end{aligned}$$

利用 (3.3) 和 (3.4)，上述条件等价于

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{Im}\Big[\frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{g'(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{\kappa-1}{\pi i(\kappa+1)}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{q(\tau)}{\tau-t}d\tau+2\mathrm{Re}\,\Gamma+\bar{\Gamma}'\Big]&\\
=\frac{1}{4\mu}(\lambda_s+2\mu_s)(\kappa+1)\mathrm{Im}\,g''(t)-\frac{\ell_s^2}{4\mu}(\lambda_s+2\mu_s)(\kappa+1)\mathrm{Im}\,g''''(t),&\qquad(3.9)\\
\mathrm{Re}\Big[\frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{g'(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{\kappa-1}{\pi i(\kappa+1)}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{q(\tau)}{\tau-t}d\tau+2\mathrm{Re}\,\Gamma+\bar{\Gamma}'\Big]&\\
=-\frac{1}{4\mu}\sigma_0(\kappa+1)\mathrm{Re}\,g''(t)+\frac{1}{4\mu}(\zeta+2\eta)(\kappa+1)\mathrm{Re}\,g''''(t),&\qquad(3.10)\\
-\mathrm{Im}\,q(t)=\frac{\lambda_s+2\mu_s}{4\mu}\Big[-\frac{d}{dt}+\ell_s^2\frac{d^3}{dt^3}\Big]\mathrm{Re}\Big[\frac{\kappa-1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{g'(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{4\kappa}{\pi i(\kappa+1)}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{q(\tau)}{\tau-t}d\tau\Big],&\qquad(3.11)\\
\mathrm{Re}\,q(t)=\Big[-\frac{\sigma_0}{4\mu}\frac{d}{dt}+\frac{\zeta+2\eta}{4\mu}\frac{d^3}{dt^3}\Big]\mathrm{Im}\Big[\frac{\kappa-1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{g'(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{4\kappa}{\pi i(\kappa+1)}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{q(\tau)}{\tau-t}d\tau\Big].&\qquad(3.12)
\end{aligned}
$$

现在我们对 (3.9)、(3.10)、(3.11) 和 (3.12) 进行重新标度。我们引入

$$Q(t)=\ell q(\ell t),\quad G(t)=g(\ell t).$$

于是，(3.9)–(3.12) 等价于 $[-1,1]$ 上的以下方程组：

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{Im}\,G'(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{\kappa-1}{\pi(\kappa+1)}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{Re}\,Q(\tau)}{\tau-t}d\tau+\ell\mathrm{Im}\,\Gamma'&\\
=\gamma_1(\kappa+1)\mathrm{Im}\,G''(t)-\gamma_4(\kappa+1)\mathrm{Im}\,G''''(t),&\qquad(3.13)\\
\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{Re}\,G'(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{\kappa-1}{\pi(\kappa+1)}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{Im}\,Q(\tau)}{\tau-t}d\tau+2\ell\mathrm{Re}\,\Gamma+\ell\mathrm{Re}\Gamma'&\\
=-\gamma_2(\kappa+1)\mathrm{Re}\,G''(t)+\gamma_3(\kappa+1)\mathrm{Re}\,G''''(t),&\\
-\mathrm{Im}\,Q(t)=\Big[-\gamma_1\frac{d}{dt}+\gamma_4\frac{d^3}{dt^3}\Big]\Big[\frac{\kappa-1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{Re}\,G'(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{4\kappa}{\pi(\kappa+1)}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{Im}\,Q(\tau)}{\tau-t}d\tau\Big],&\\
\mathrm{Re}\,Q(t)=\Big[-\gamma_2\frac{d}{dt}+\gamma_3\frac{d^3}{dt^3}\Big]\Big[\frac{\kappa-1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{Im}\,G'(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{4\kappa}{\pi(\kappa+1)}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{Re}\,Q(\tau)}{\tau-t}d\tau\Big].&\qquad(3.14)
\end{aligned}
$$

其中

$$\gamma_1=\frac{2\mu_s+\lambda_s}{4\mu\ell}>0,\quad \gamma_2=\frac{\sigma_0}{4\mu\ell},\quad \gamma_3=\frac{\zeta+2\eta}{4\mu\ell^3}>0,\quad \gamma_4=\frac{\ell_s^2(2\mu_s+\lambda_s)}{4\mu\ell^3}>0.$$

我们要求满足尖端条件

$$G(\pm1)=0,\quad G'(\pm1)=0,\quad Q(\pm1)=0.\qquad(3.15)$$

前两个条件确保满足尖点条件 (2.4) 和 (2.5)，而 (3.15) 中的最后一个条件则确保尖端处的应力连续性；参见 (3.7)、(3.8)。

系统 (3.13)-(3.14) 可分解为两个解耦系统，我们将在下一节对其进行分析：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{Re}\,G'(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{\kappa-1}{\pi(\kappa+1)}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{Im}\,Q(\tau)}{\tau-t}d\tau+2\ell\mathrm{Re}\,\Gamma+\ell\mathrm{Re}\Gamma'&\\
=-\gamma_2(\kappa+1)\mathrm{Re}\,G''(t)+\gamma_3(\kappa+1)\mathrm{Re}\,G''''(t),&\qquad(3.16)\\
-\mathrm{Im}\,Q(t)=\Big[-\gamma_1\frac{d}{dt}+\gamma_4\frac{d^3}{dt^3}\Big]\Big[\frac{\kappa-1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{Re}\,G'(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{4\kappa}{\pi(\kappa+1)}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{Im}\,Q(\tau)}{\tau-t}d\tau\Big],&\qquad(3.17)
\end{aligned}
$$

and

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{Im}G'(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{\kappa-1}{\pi(\kappa+1)}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{Re}Q(\tau)}{\tau-t}d\tau+\ell\operatorname{Im}\Gamma'$$
$$=\gamma_1(\kappa+1)\operatorname{Im}G''(t)-\gamma_4(\kappa+1)\operatorname{Im}G''''(t), \tag{3.18}$$

$$\operatorname{Re}Q(t)=\Big[-\gamma_2\frac{d}{dt}+\gamma_3\frac{d^3}{dt^3}\Big]\Big[\frac{\kappa-1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{Im}G'(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{4\kappa}{\pi(\kappa+1)}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{Re}Q(\tau)}{\tau-t}d\tau\Big]. \tag{3.19}$$

4. Analysis of the governing equations

本节将说明，奇异积分微分方程组 (3.16),(3.17) 可以改写为具有希尔伯特–施密特核的积分方程组。通过弗雷德霍姆择一定理，这种改写可证明方程组存在唯一解，但参数 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 中可能有一个可数集的取值例外。随后，我们将证明解具有足够的正则性，从而保证相关应力场和应变场在裂纹尖端处及其以内有界。对 (3.18)-(3.19) 也可进行类似证明，此处从略。

4.1. 变量替换。我们将 (3.16)、(3.17) 改写为关于两个未知函数 χ_1, χ_2 的形式，它们满足

$$\chi_1(t) = \operatorname{Re}G''''(t), \tag{4.1}$$
$$\chi_2(t)=2\mu\ell^2(u^+_{2,11}(\ell t)+u^-_{2,11}(\ell t)) \tag{4.2}$$
$$=\frac{d}{dt}\Big[\frac{\kappa-1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{Re}G'(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{4\kappa}{\pi(\kappa+1)}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{Im}Q(\tau)}{\tau-t}d\tau.\Big] \tag{4.3}$$
$$=\frac{\kappa-1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{Re}G''(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{4\kappa}{\pi(\kappa+1)}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{Im}Q'(\tau)}{\tau-t}d\tau. \tag{4.4}$$

最后一个等式由 (3.15) 得出。根据 (2.11) 和 (4.2)，我们要求 χ_2 满足

$$\chi_2(\pm1)=0. \tag{4.5}$$

我们记下列格林函数

$$\mathbb{G}(t,\tau)=\begin{cases}\frac{1}{24}(t-1)^2(\tau+1)^2(1+2t-2\tau-t\tau) & \tau\in[-1,t],\\ \frac{1}{24}(\tau-1)^2(t+1)^2(1+2\tau-2t-t\tau) & \tau\in[t,1],\end{cases}$$

满足

$$\mathbb{G}_{tttt}(t,\tau)=\delta(t-\tau),$$
$$\mathbb{G}(\pm1,\tau)=0,\quad \mathbb{G}_t(\pm1,\tau)=0. \tag{4.6}$$

于是，对于所有 τ、$t\in[-1,1]$ 和 $\mathbb{G}\in C^{2,1}([-1,1]\times[-1,1])$，有 $\mathbb{G}(t,\tau)=\mathbb{G}(\tau,t)$。为满足 (4.1)，我们令

$$\operatorname{Re}G(t)=\int_{-1}^{1}\mathbb{G}(t,\tau)\chi_1(\tau)d\tau. \tag{4.7}$$

其中 χ_1 为未知函数。注意，根据 (4.6)，(4.7) 自动满足了裂纹尖端尖 cusp 条件的一半：

$$\operatorname{Re}G(\pm1)=0,\quad \operatorname{Re}G'(\pm1)=0.$$

现在我们对 (4.4) 求逆。经典结果（例如参见 [39]）表明，

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\implies\varphi(t)=\frac{C}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\tau^2}{1-t^2}}\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau$$

其中 $C=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)dt$. 于是，由 (4.4) 可知，

$$(\kappa-1)\operatorname{Re}G''(t)+\frac{4\kappa}{\kappa+1}\operatorname{Im}Q'(t)=\frac{C}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\tau^2}{1-t^2}}\frac{\chi_2(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

with

$$\pi C=\int_{-1}^{1}\Big((\kappa-1)\mathrm{Re}\,G''(t)+\frac{4\kappa}{\kappa+1}\mathrm{Im}\,Q'(t)\Big)dt=\left[(\kappa-1)\mathrm{Re}\,G'(t)+\frac{4\kappa}{\kappa+1}\mathrm{Im}\,Q(t)\right]\Big|_{-1}^{1}=0,$$

根据 (3.15)。因此，为满足 (4.4)，必须有

$$(\kappa-1)\mathrm{Re}\,G''(t)+\frac{4\kappa}{\kappa+1}\mathrm{Im}\,Q'(t)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\tau^2}{1-t^2}}\frac{\chi_2(\tau)}{\tau-t}d\tau.$$

从 -1 到 t 进行积分，并利用（3.15），可得

$$\begin{aligned}(\kappa-1)\mathrm{Re}\,G'(t)+\frac{4\kappa}{\kappa+1}\mathrm{Im}\,Q(t)&=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{t}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\tau^2}{1-s^2}}\frac{\chi_2(\tau)}{\tau-s}d\tau ds,\\&=\int_{-1}^{1}\omega_1(t,\tau)\chi_2(\tau)d\tau\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\omega_1(t,\tau)&:=-\frac{1}{\pi}\sqrt{1-\tau^2}\int_{-1}^{t}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\frac{1}{\tau-s}ds\\&=-\frac{1}{\pi}\log\Big|\frac{[\tau(1-\sqrt{1-t^2})-t(1+\sqrt{1-\tau^2})][\tau+1-\sqrt{1-\tau^2}]}{[\tau(1-\sqrt{1-t^2})-t(1-\sqrt{1-\tau^2})][\tau+1+\sqrt{1-\tau^2}]}\Big|,\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\mathrm{Im}\,Q(t)=\frac{\kappa+1}{4\kappa}\int_{-1}^{1}\omega_1(t,\tau)\chi_2(\tau)d\tau+\frac{1-\kappa^2}{4\kappa}\int_{-1}^{1}\mathbb{G}_t(t,\tau)\chi_1(\tau)d\tau.\tag{4.8}$$

此外，由于 $\mathbb{G}'(\pm1,\cdot)\equiv0$ 且

$$\forall|\tau|\neq1,\quad \omega_1(\pm1,\tau)=0,$$

（4.8）意味着应力连续性条件的一半在裂纹尖端处成立：

$$\mathrm{Im}\,Q(\pm1)=0.$$

4.2. 系统的正则化。现在，我们利用（4.1）、（4.2）、（4.4）、（4.5）、（4.7）和（4.8）将（3.16）和（3.17）表示为积分方程。记下面的格林函数为

$$\mathbb{K}=\begin{cases}\frac{1}{2}(t-1)(\tau+1) & -1\le\tau\le t\le1,\\ \frac{1}{2}(t+1)(\tau-1) & -1\le t\le\tau\le1,\end{cases}$$

满足

$$\mathbb{K}_{tt}(t,\tau)=\delta(t-\tau),\quad \mathbb{K}(\pm1,\tau)=0.$$

于是，由 (3.17)、(4.3)、(4.4) 和 (4.5) 可得

$$\begin{aligned}\gamma_4\chi_2(t)=\gamma_1\int_{-1}^{1}\mathbb{K}(t,\tau)\chi_2(\tau)d\tau-\frac{\kappa+1}{4\kappa}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbb{K}(t,\tau)\omega_1(\tau,s)\chi_2(s)dsd\tau\\-\frac{1-\kappa^2}{4\kappa}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbb{K}(t,\tau)\mathbb{G}_\tau(\tau,s)\chi_1(s)dsd\tau.\end{aligned}\tag{4.9}$$

我们还可由 (4.8) 和 (3.16) 得出

$$\begin{aligned}\gamma_3(\kappa+1)\chi_1(t)=\gamma_2(\kappa+1)\int_{-1}^{1}\mathbb{G}_{tt}(t,\tau)\chi_1(\tau)d\tau+\frac{(\kappa+1)^2}{4\pi\kappa}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\mathbb{G}_\tau(\tau,s)}{\tau-t}\chi_1(s)dsd\tau\\-\frac{\kappa-1}{4\pi\kappa}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\omega_1(\tau,s)}{\tau-t}\chi_2(s)dsd\tau+2\ell\mathrm{Re}\,\Gamma+\ell\mathrm{Re}\Gamma'.\end{aligned}\tag{4.10}$$

总之，我们要求满足积分方程组 (4.10) 和 (4.9) 的 $\chi_1,\chi_2\in L^2(-1,1)$。

我们注意到，(4.9) 和 (4.10) 右端的每个积分算子都是 $L^2(-1,1)$ 上的紧算子。事实上，考虑 (4.9)。(4.9) 右端的第一个和第三个积分算子

由于 $\mathbb{G}$ 和 $\mathbb{K}$ 的光滑性，在 (t,s) 上具有连续核，因此在 $L^2(-1,1)$ 上是紧积分算子。由于 $\omega_1 \in L^2((-1,1)\times(-1,1))$ 是希尔伯特–施密特核，第二个积分算子是两个紧算子的复合，即 $f \mapsto \int_{-1}^{1} \mathbb{K}(\cdot,\tau)g(\tau)d\tau$ 和 $g \mapsto \int_{-1}^{1} \omega(\cdot,s)g(s)ds$，因此它也是紧算子。

接下来，我们考虑式 (4.10) 的右端。同样，由于 $\mathbb{G}$ 的光滑性，第一个积分算子具有连续核。第二个积分算子是两个积分算子的复合：一个是由希尔伯特变换给出的、在 $L^2(-1,1)$ 上有界的算子，另一个是由 $f \mapsto \int_{-1}^{1} \mathbb{G}_\tau(\tau,s)f(s)ds$ 给出的紧算子。由于有界算子与紧算子的复合是紧算子，因此式 (4.10) 右端的第二个积分算子是 $L^2(-1,1)$ 上的紧算子。同理，第三个积分算子是 $L^2(-1,1)$ 上的紧算子。

总之，式 (4.9) 和 (4.10) 中出现的所有积分算子都是 $L^2(-1,1)$ 上的紧算子。根据弗雷德霍姆择一定理，对于除参数 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 的可数多个取值之外的所有取值，式 (4.9) 和 (4.10) 关于 $\chi_1,\chi_2 \in L^2(-1,1)$ 都有唯一解。

4.3. 解的正则性。本节将证明，上一节得到的解所对应的应力与应变在裂纹尖端处均存在有限极限。

首先注意到，由 (4.7) 可得 $\operatorname{Re} G(t) \in H^4(-1,1)$。索博列夫嵌入意味着 $\operatorname{Re} G(t) \in C^{3,1/2}([-1,1])$，再由 (4.6) 可知，裂纹尖端处的尖点条件有一半得到满足：

$$\operatorname{Re} G(\pm 1) = 0, \quad \operatorname{Re} G'(\pm 1) = 0.$$

将前两节中的类似论证应用于 (3.18)-(3.19)，可得 $\operatorname{Im} G(t) \in C^{3,1/2}([-1,1])$，且裂纹尖端处另一半的尖点条件也得到满足

$$\operatorname{Im} G(\pm 1) = 0, \quad \operatorname{Im} G'(\pm 1) = 0.$$

为分析 Q 的正则性，我们考察 (4.8)，并将其改写为

$$\operatorname{Im} Q(t) = \frac{\kappa+1}{4\kappa}\int_{-1}^{t}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\sqrt{1-s^2}}\frac{\chi_2(\tau)}{\tau-s}d\tau ds + \frac{1-\kappa^2}{4\kappa}\int_{-1}^{1}\mathbb{G}_t(t,\tau)\chi_1(\tau)d\tau.$$

由于 $\mathbb{G} \in C^2([-1,1]\times[-1,1])$，第二项显然是连续可微的。根据 Tricomi 的有界性结果（第 204, [39] 页），$\chi_2 \in L^2(-1,1)$ 意味着

$$\phi(s) := \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\sqrt{1-s^2}}\frac{\chi_2(\tau)}{\tau-s}d\tau \in L^q(-1,1), \quad q \in (1,4/3).$$

因此，对每个 $q \in (1,4/3)$，$\operatorname{Im} Q \in W^{1,q}(-1,1)$。由索博列夫嵌入以及以下事实

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\sqrt{1-s^2}}\frac{\chi_2(\tau)}{\tau-s}d\tau ds = 0,$$

我们得出，对每个 $r \in (0,1/4)$，

$$\operatorname{Im} Q \in C^r([-1,1]) \quad \text{and} \quad \operatorname{Im} Q(\pm 1) = 0.$$

将前两节中的类似论证应用于 (3.18)-(3.19)，可知对所有 $r \in (0,1/4)$，$\operatorname{Re} Q(t) \in C^r([-1,1])$，并且应力连续性条件的另一半在裂纹尖端成立：

$$\operatorname{Re} Q(\pm 1) = 0.$$

综上所述，经重新缩放后，我们得出

$$g \in C^{3,1/2}([-\ell,\ell]), \quad g(\pm\ell) = g'(\pm\ell) = 0, \tag{4.11}$$

$$\forall r \in (0,1/4), \quad q \in C^r([-\ell,\ell]), \quad q(\pm\ell) = 0. \tag{4.12}$$

在 $[-\ell,\ell]$ 上，对满足 $f(\pm\ell)=0$ 的霍尔德连续函数 H¨older $f\colon [-\ell,\ell]\to\mathbb{C}$ 进行有限希尔伯特变换，通过将 f 在 $[-\ell,\ell]$ 之外延拓为 0，并利用奇异积分算子作用于霍尔德空间的经典结果（见 [28] 第 7 章），可得到 $[-\ell,\ell]$ 上的有界霍尔德连续函数。这一事实以及（4.11）、（4.12）、（3.5）和（3.6）表明，应力与应变在裂纹尖端处具有有限极限。

5. Numerical solution of the fracture problem

本节基于对积分方程组进行切比雪夫多项式近似，给出混合模态问题的数值解。计算结果展示了表面应变梯度模量对尖端附近场的影响，并证实在广泛的允许参数值范围内，应力与应变均保持有界。这些结果补充了解析理论，并量化了表面应变梯度项所产生的正则化效应的大小。

5.1. 数值方法。考虑方程组 (3.16)、(3.17) 和 (3.18)、(3.19)。为求得这些方程组的数值解，我们首先将未知函数近似为以下形式的切比雪夫多项式：

$$\operatorname{Im} G'(t)=\sum_{k=1}^{N+2} A_k U_k(t)\sqrt{1-t^2},\ \ \operatorname{Re} Q(t)=\sum_{k=0}^{N+1} B_k U_k(t)\sqrt{1-t^2}, \tag{5.1}$$

$$\operatorname{Re} G'(t)=\sum_{k=1}^{N+2} C_k U_k(t)\sqrt{1-t^2},\ \ \operatorname{Im} Q(t)=\sum_{k=0}^{N+1} D_k U_k(t)\sqrt{1-t^2}, \tag{5.2}$$

其中， $U_k(t)$ 表示次数为 k 的第二类切比雪夫多项式， N 对应未知函数所需的近似多项式次数。请注意，将未知函数近似为形式 (5.1)、(5.2)，即可自动满足尖端条件 (3.15)。由于公式 (5.1)、(5.2) 中含有平方根项，最后两个条件 (3.15) 得以满足；而由于 $\operatorname{Re} G'(t)$ 和 $\operatorname{Im} G'(t)$ 的公式中不含首项 $k=0$，且我们可以对函数 $G'(t)$ 积分，因此第一个条件 (3.15) 得以满足。

Ta对公式 (5.1)、(5.2) 求相应的导数可得到以下表达式：

$$\operatorname{Im} G''(t)=-\sum_{k=1}^{N+2}(k+1)A_k\frac{T_{k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}},\ \ \operatorname{Re} G''(t)=-\sum_{k=1}^{N+2}(k+1)C_k\frac{T_{k+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}, \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} G''''(t)=&\sum_{k=1}^{N+2}(k+1)(k+2)(k+3)A_k\frac{T_{k+1}(t)}{(\sqrt{1-t^2})^3}-3\sum_{k=1}^{N+2}(k+1)(k+3)A_k\frac{U_{k+1}(t)}{(\sqrt{1-t^2})^3}-\\&3\sum_{k=1}^{N+2}(k+1)A_k\frac{T_{k+3}(t)}{(\sqrt{1-t^2})^5},\\ \operatorname{Re} G''''(t)=&\sum_{k=1}^{N+2}(k+1)(k+2)(k+3)C_k\frac{T_{k+1}(t)}{(\sqrt{1-t^2})^3}-3\sum_{k=1}^{N+2}(k+1)(k+3)C_k\frac{U_{k+1}(t)}{(\sqrt{1-t^2})^3}-\\&3\sum_{k=1}^{N+2}(k+1)C_k\frac{T_{k+3}(t)}{(\sqrt{1-t^2})^5},\end{aligned} \tag{5.4}$$

其中， $T_k(t)$ 表示次数为 k 的第一类切比雪夫多项式。

此外，利用以下关于第二类切比雪夫多项式的柯西积分公式：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{U_k(t)\sqrt{1-t^2}dt}{t-x}=-T_{k+1}(x),$$

我们可以得到奇异积分的以下表达式：

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{Im} G'(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{\kappa-1}{\pi(\kappa+1)}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{Re} Q(\tau)}{\tau-t}d\tau=\sum_{k=0}^{N+2}\left(A_k+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}B_k\right)T_{k+1}(t), \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\kappa-1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{Im} G'(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{4\kappa}{\pi(\kappa+1)}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{Re} Q(\tau)}{\tau-t}d\tau&=\sum_{k=0}^{N+2}\left(-(\kappa-1)A_k+\frac{4\kappa}{\kappa+1}B_k\right)T_{k+1}(t),\\ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{Re} G'(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{\kappa-1}{\pi(\kappa+1)}\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{Im} Q(\tau)}{\tau-t}d\tau&=\sum_{k=0}^{N+2}\left(-C_k+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}D_k\right)T_{k+1}(t),\end{aligned}$$

$$\frac{\kappa-1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{Re}\,G'(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{4\kappa}{\pi(\kappa+1)}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{Im}\,Q(\tau)}{\tau-t}d\tau=\sum_{k=0}^{N+2}\left(-(\kappa-1)C_k-\frac{4\kappa}{\kappa+1}D_k\right)T_{k+1}(t),\tag{5.6}$$

为简洁起见，假设

$$A_0=0,\ \ C_0=0,\ \ B_{N+2}=0,\ \ D_{N+2}=0.$$

求取导数并利用切比雪夫多项式的性质，可得以下关系：

$$T'_{k+1}(t)=(k+1)U_k(t),\tag{5.7}$$

$$T'''_{k+1}(t)=-(k+1)(k+2)(k+3)\frac{U_k(t)}{1-t^2}-3(k+1)(k+3)\frac{T_{k+2}(t)}{(1-t^2)^2}+3(k+1)\frac{U_{k+2}(t)}{(1-t^2)^2}.\tag{5.8}$$

将公式 (5.3)-(5.4)、(5.5)-(5.6)、(5.7)、(5.8) 代入奇异积分方程组 (3.16)、(3.17) 和 (3.18)、(3.19)，并利用切比雪夫多项式的正交性：

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_j(t)T_k(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=\begin{cases}0, & j\neq k,\\ \pi/2, & j=k\neq 0,\\ \pi, & j=k=0,\end{cases}$$

由此得到以下关于系数 A_k, B_k, C_k, D_k 的线性代数方程组：

$$\sum_{k=0}^{N+2}\left(A_k+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}B_k\right)I^1_{jk}+\mathrm{Im}\Gamma'\ell J_j=-\gamma_1(\kappa+1)\sum_{k=0}^{N+2}A_k(k+1)I^2_{jk}-$$
$$\gamma_4(\kappa+1)\sum_{k=0}^{N+2}A_k(k+1)(k+2)(k+3)I^3_{jk}+3\gamma_4(\kappa+1)\sum_{k=0}^{N+2}A_k(k+1)(k+3)I^4_{jk}+$$
$$3\gamma_4(\kappa+1)\sum_{k=0}^{N+2}A_k(k+1)\delta_{j,k+3}\frac{\pi}{2},\ \ j=0,\dots,N,\tag{5.9}$$

$$\sum_{k=0}^{N+1}B_kI^5_{jk}=\gamma_2\sum_{k=0}^{N+2}\left((\kappa-1)A_k-\frac{4\kappa}{\kappa+1}B_k\right)(k+1)I^6_{jk}-$$
$$\gamma_3\sum_{k=0}^{N+2}\left((\kappa-1)A_k-\frac{4\kappa}{\kappa+1}B_k\right)\big(-(k+1)(k+2)(k+3)I^7_{jk}$$
$$-3(k+1)(k+3)\delta_{j,k+2}\frac{\pi}{2}+3(k+1)I^8_{jk}\Big),\ \ j=0,\dots,N,\tag{5.10}$$

$$\sum_{k=0}^{N+2}\left(-C_k+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}D_k\right)I^1_{jk}+(2\mathrm{Re}\Gamma+\mathrm{Re}\Gamma')\ell J_j=\gamma_2(\kappa+1)\sum_{k=0}^{N+2}C_k(k+1)I^2_{jk}+$$
$$\gamma_3(\kappa+1)\sum_{k=0}^{N+2}C_k(k+1)(k+2)(k+3)I^3_{jk}-3\gamma_3(\kappa+1)\sum_{k=0}^{N+2}A_k(k+1)(k+3)I^4_{jk}-$$
$$3\gamma_3(\kappa+1)\sum_{k=0}^{N+2}C_k(k+1)\delta_{j,k+3}\frac{\pi}{2},\ \ j=0,\dots,N,\tag{5.11}$$

$$-\sum_{k=0}^{N+1}D_kI^5_{jk}=\gamma_1\sum_{k=0}^{N+2}\left((\kappa-1)C_k+\frac{4\kappa}{\kappa+1}D_k\right)(k+1)I^6_{jk}-$$
$$\gamma_4\sum_{k=0}^{N+2}\left((\kappa-1)C_k+\frac{4\kappa}{\kappa+1}D_k\right)\big(-(k+1)(k+2)(k+3)I^7_{jk}$$
$$-3(k+1)(k+3)\delta_{j,k+2}\frac{\pi}{2}+3(k+1)I^8_{jk}\Big),\ \ j=0,\dots,N,\tag{5.12}$$

其中，系数 I_{jk}^{l} 由以下公式给出：

$$
\begin{aligned}
I_{jk}^{1} &= \int_{-1}^{1} T_{k+1}(t)T_j(t)(1-t^2)^2 dt, \\
I_{jk}^{2} &= \int_{-1}^{1} T_{k+1}(t)T_j(t)(1-t^2)^{3/2} dt, \\
I_{jk}^{3} &= \int_{-1}^{1} T_{k+1}(t)T_j(t)(1-t^2)^{1/2} dt, \\
I_{jk}^{4} &= \int_{-1}^{1} U_{k+1}(t)T_j(t)(1-t^2)^{1/2} dt, \\
I_{jk}^{5} &= \int_{-1}^{1} U_{k}(t)T_j(t)(1-t^2)^{2} dt, \\
I_{jk}^{6} &= \int_{-1}^{1} U_{k}(t)T_j(t)(1-t^2)^{3/2} dt, \\
I_{jk}^{7} &= \int_{-1}^{1} U_{k}(t)T_j(t)(1-t^2)^{1/2} dt = I_{j(k-1)}^{4}, \\
I_{jk}^{8} &= \int_{-1}^{1} \frac{U_{k+2}(t)T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \\
J_{j}^{1} &= \int_{-1}^{1} T_j(t)(1-t^2)^2 dt.
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

公式 (5.13) 中的积分可通过高斯–切比雪夫求积近似计算。最后，为了求解线性代数方程组 (5.9)、(5.10) 以及 (5.11)、(5.12)，我们需要满足尖端条件 (2.11) 和 (4.5)。这些条件得出以下方程：

$$
\sum_{k=0}^{N+2} \left((\kappa-1)A_k - \frac{4\kappa}{\kappa+1} B_k \right) (k+1)^2 (\pm 1)^k = 0, \tag{5.14}
$$

$$
\sum_{k=0}^{N+2} \left((\kappa-1)C_k + \frac{4\kappa}{\kappa+1} D_k \right) (k+1)^2 (\pm 1)^k = 0. \tag{5.15}
$$

随后可求解线性代数方程组 (5.9)、(5.10)、(5.14) 以及 (5.11)、(5.12)、(5.15)，以求得系数 A_k、B_k、C_k、D_k 的值。这些系数可用于公式 (5.1)、(5.2)，从而确定未知函数 $\mathrm{Re}\, G'(t)$、$\mathrm{Im}\ G'(t)$、$\mathrm{Re}\ Q(t)$、$\mathrm{Im}\ Q(t)$，进而可通过公式 (3.3)、(3.4) 求得应力和位移的值。

5.2. 示例。数值示例采用以下机械参数和几何参数值计算：$\mu = 26.3$ GPa、$\nu = 0.2481$、$\gamma_1 = \gamma_2 = 1.602\,\gamma$ N/m、$\gamma_4 = 1.602 \cdot 10^{-19}\gamma$ N/m^2，其中 $\gamma = 5$；$\sigma_{11}^{\infty} = \sigma_{22}^{\infty} = \sigma_{12}^{\infty} = 0.5$GPa，以及 $\ell = 5$ nm。本文引入的新参数 γ_4 取值为 $0.1\gamma_3$、γ_3和 $10\gamma_3$，对于 Steigmann-Ogden 模型则等于零。结果针对 $N = 30$绘制，并在积分计算中使用了 100 个求积节点。进一步增大这些数值并不能提高计算精度。

图 1 展示了参数 γ_4 取以下数值时，函数 $\mathrm{Re}G'(t)$（黑线）、$\mathrm{Im}G'(t)$（灰线）、$\mathrm{Re}Q(t)$（黑线）和 $\mathrm{Im}Q(t)$（灰线）的图像：$\gamma_4 = 0.1\gamma_3$（点线）、$\gamma_4 = \gamma_3$（点划线）、$\gamma_4 = 10\gamma_3$（虚线）。本文研究结果与未考虑任何表面参数的经典结果进行了比较，后者以实线表示。此外，还将结果与 Steigmann-Ogden 模型（$\gamma_4 = 0$）进行了比较，该模型的结果以带圆形标记的虚线表示，且此前已在 [51] 中报告。可以看出，本文研究结果与文献中的已知结果吻合良好。还可以看出，引入由参数 γ_4 表示的额外表面效应会显著影响结果。具体而言，图 1 显示了裂纹尖端附近的平滑效应。

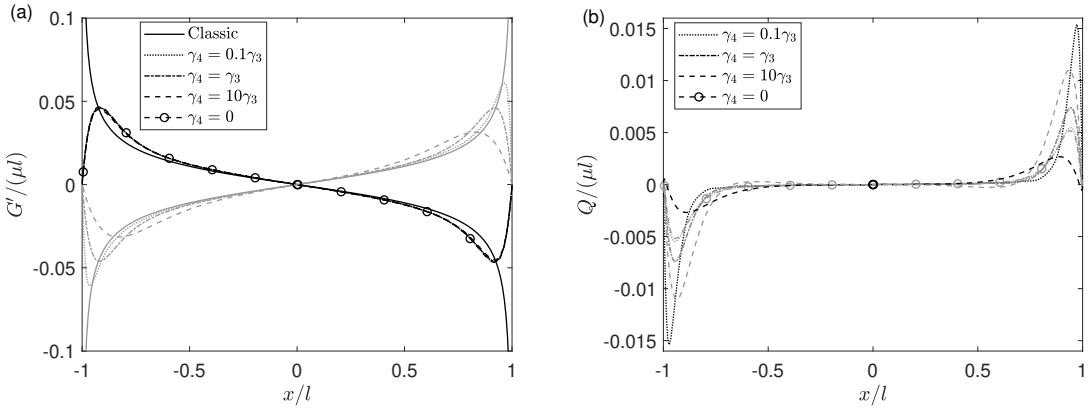
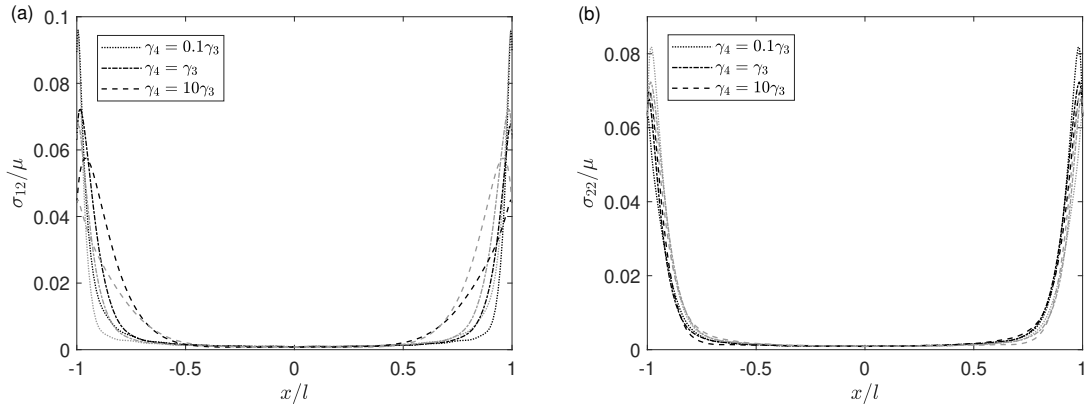


FIGURE 1. 参数 γ_4取不同值时，函数 $G'(t)$和 $Q(t)$的值。



γ_4取不同值时，应力 σ_{12}/μ 和 σ_{22}/μ 的值。

图 2 展示了在与前文相同的力学参数和几何参数取值下，归一化应力 σ_{12}/μ 和 σ_{22}/μ。图 2a 展示了裂纹上、下表面上的应力 σ_{12}^{+}/μ （黑线）和 σ_{12}^{-}/μ（灰线）的图像；图 2b 展示了 σ_{22}^{+}/μ （黑线）和 σ_{22}^{-}/μ （灰线）的图像。参数 γ_4 取以下数值： $\gamma_4 = 0.1\gamma_3$ （点线）、 $\gamma_4 = \gamma_3$ （点划线）、 $\gamma_4 = 10\gamma_3$ （虚线）。同样可以看出，参数 γ_4 对结果有显著影响，并使裂纹尖端处的应力值降低。

最后，图3给出了裂纹两侧的位移 u_1/ℓ 和 u_2/ℓ 。图3a给出了裂纹上、下两侧的位移u_1^{+}/ℓ 和u_1^{-}/ℓ 的曲线；对于参数 γ_4取以下数值时，图3b给出了u_2^{+}/ℓ 和u_2^{-}/ℓ 的曲线： $\gamma_4 = 0.1\gamma_3$ （点线）、$\gamma_4 = \gamma_3$ （点划线）、 $\gamma_4 = 10\gamma_3$ （虚线）。可以看出，较大的 γ_4 值会使裂纹尖端附近产生更加尖 cusp 状的轮廓，并导致裂纹开口变小、伸长减小。还可以看出，参数 γ_4 对位移 u_1 的影响大于对 u_2的影响。

6. CONCLUSIONS

本文在此前针对 III 型加载提出的表面应变梯度弹性框架下，研究了一个平面混合模式断裂问题。该理论通过以符合变分一致性的方式纳入伸长的表面梯度，对 Steigmann–Ogden 表面能进行了推广。

表面能和控制方程由虚功原理推导得出，并对允许的裂纹尖端条件进行了详细分析。这些尖端条件可归结为尖 cusp 意义下的裂纹闭合

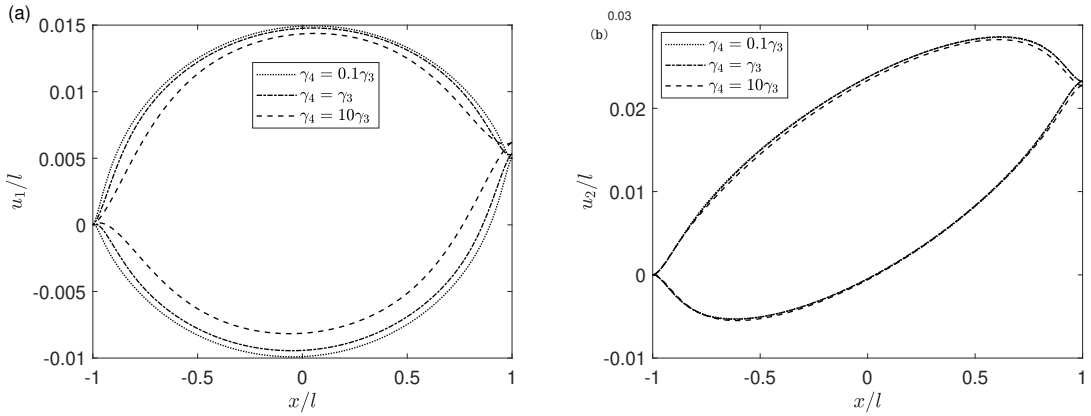


FIGURE 3. 应力的值 u_1/ℓ 以及 u_2/ℓ 参数 γ_4取不同值时的情况。

条件、裂纹尖端处应力的连续性，以及裂纹边缘处不存在额外的扭转力矩。利用应力和位移的复解析表示，断裂问题被化为一组可正则化的奇异积分微分方程。核心分析结果是严格证明所得应力场和应变场在裂纹尖端处保持有界，这种表现与经典断裂力学存在根本差异。

本文推导了一种采用切比雪夫多项式表示的数值方案，并将所得解与经典 Steigmann-Ogden 模型的结果进行了比较 [51]。结果表明，额外的表面应变梯度项可使裂纹尖端闭合更加平滑，并减小裂纹张开位移。结合 [31, 32], 的结果，分析与数值研究发现，梯度应变表面弹性能够使所有平面脆性断裂加载模式下的应力场和应变场保持有界。

未来研究的一个重要方向，是在这一框架下基于有限裂纹尖端应力或应变制定断裂准则。具体而言，所有加载模式下均不存在奇异性，这表明可以直接根据裂纹尖端处的临界应力值定义断裂准则，而非采用应力强度因子。这类准则或可为经典断裂度量提供一种物理意义直观的替代方案，值得进一步开展分析和数值研究。

REFERENCES

[1] E. C. Aifantis 和 S. B. Altan。梯度弹性中 III 型裂纹尖端的结构。 *Scripta Metallurgica et Materialia* 26 2 319 324, 1992 ,

（）：–。[2] T. L. Anderson。 *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*。CRC出版社，第4版，2017年。[3] H. Askes 和 E. C. Aifantis。静力学和动力学中的梯度弹性：公式、长度尺度识别程序、有限元实现及新结果综述。 *Int. J. Solids Struct.*, 48(13):1962–1990，2011年。[4] C. Balitactac、Y. Canzani、S. Hallyburton、J. Mott 和 C. Rodriguez。由三维各向同性应变梯度弹性推导的壳能量。 *Preprint*，arXiv。[5] D. B. Bogy 和 E. Sternberg。不连续载荷引起的奇异性中偶应力的影响。 *Int. J. Solids* ，：–。 *Struct.* 3 757 770, 1967

[6] D. B. Bogy 和 E. Sternberg。偶应力对非对称剪切载荷引起的角点奇异性的影响。*Int. J. Solids Struct.*，4:159–174，1968年。[7] K. B. Broberg。 *Cracks and Fracture*。学术出版社，圣迭戈，1999年。[8] M. Dai、A. Gharahi 和 P. Schiavone。具有界面拉伸和弯曲阻力的圆形纳米非均质体在平面应变变形下的解析解。 *Appl. Math. Model*，55:160–170，2018年。[9] L. A. Ferguson、M. Muddamallappa 和 J. R. Walton。包含界面力学的 III 型断裂数值模拟。 *Int. J. Fract.*，192(1):47–56，2015年。[10] N. Gorbushin、V. A. Eremeyev 和 G. Mishuris。具有表面应力的裂纹尖端附近的应力奇异性。 *Int. J.* ，：。 *Eng. Sci.* 146 103183, 2020

[11] A. A. Griffith。固体中的断裂与流动现象。 *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*，221:163–198，1921年。[12] M. E. Gurtin 和 A. I. Murdoch。弹性材料表面的连续介质理论。 *Arch. Rational Mech. Anal.*，57 323，1975年 291:–。[13] M. E. Gurtin 和 A. I. Murdoch。固体中的表面应力。 *Int. J. Solids. Struct.*，14(6):431–440，1978年。

[14] Z. Han、S. G. Mogilevskaya 和 D. Schillinger。具有多个纳米纤维和 Steigmann–Ogden界面的单向复合材料的局部场与整体横向性质。 *Int. J. Solids. Struct.*，147:166–182，2018年。[15] M. G. Hilgers 和 A. C. Pipkin。具有弯曲刚度的弹性薄片。 *Quart. J. Mech. Appl. Math.*，45(1):57–75，1992年。[16] G. R. Irwin。高强度钢和铝合金中快速裂纹扩展的起始。载于 *Proceedings of the Sagamore Research Conference* 289 305, 1956，第–页。

[17] G. R. Irwin。穿过板的裂纹末端附近的应力与应变分析。 *J. Appl. Mech.*，24:361–364，1957年。[18] C. I. Kim、C. Q. Ru 和 P. Schiavone。关于表面效应线弹性中裂纹尖端条件作用的澄清。 *Math. Mech. Solids*，18(1):59–66，2013年。[19] X. Li 和 C. Mi。表面张力和 Steigmann–Ogden表面弹性对赫兹接触性质的影响。 *Int. J.* ，：。[20] *Eng. Sci.* 145 103165, 2019
X. Li 和 C. Mi。弹性半空间边界 Steigmann–Ogden表面的纳米压痕硬度。 *Math. Mech.* ，（）：–。 *Solids* 24 9 2754 2766, 2019
[21] X. Li 和 C. Mi。基于 Steigmann–Ogden表面力学模型的刚性圆柱滚子作用下半空间的纳米压痕。 *Int. J. Mech. Mater. Des.*，17，03 2021年。[22] C. Mi。纳米尺度无摩擦斑块载荷下具有 Steigmann–Ogden边界的半空间的弹性行为。 *Int. J.* ，：–。 *Eng. Sci.* 129 129 144, 2018
[23] R. D. Mindlin。线弹性中的微观结构。 *Arch. Rational Mech. Anal.*，16:51–78，1964年。[24] S. G. Mogilevskaya、V. Kushch 和 A. Zemlyanova。具有球形和圆形材料表面的问题的位移表示。 *Quart. J. Mech. Appl. Math.*，72:449–471，11 2019年。[25] S. G. Mogilevskaya 和 A. Y. Zemlyanova。具有 Steigmann-Ogden界面的球形非均匀体。 *ASME J. Appl.* ，，。[26] *Mech.* 85 2018
R. Muki 和 E. Sternberg。偶应力对弹性固体中奇异应力集中的影响。 *Z. Angew. Math.* ，：–。 *Phys.* 16 611 648, 1965
[27] R. Muki 和 E. Sternberg。偶应力对裂纹周围应力集中的影响。 *Int. J. Solids Struct.*，3 69:–95，1967年。[28] C. Muscalu 和 W. Schlag。 *Classical and Multilinear Harmonic Analysis: Volume I* 137 *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* ，2013第卷。剑桥大学出版社，剑桥；纽约，。[29] N. I. Muskhelishvili。 *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*。Noordhoff，格罗宁根，1953年。由 J. R. M. Radok 从俄文翻译。[30] S. Oh、J. R. Walton 和 J. Slattery。基于将连续介质力学扩展至纳米尺度的断裂理论。*J. Appl. Mech.*，73:792–780，09 2006年。[31] C. Rodriguez。具有应变梯度弹性边界表面的弹性固体。 *J. Elast.*，156:769–797，2024年。[32] C. Rodriguez。薄型非线性梯度弹性板的中面弹性模型。 *Int. J. Eng. Sci.*，197 104026，2024年：。[33] M. P. Savruk 和 A. Kazberuk。 *Stress Concentration at Notches*。施普林格，2017年。[34] T. Sendova 和 J. R. Walton。通过将连续介质力学扩展至纳米尺度实现断裂建模与分析的新方法。 *Math. Mech. Solids*，15(3):368–413，2010年。[35] D. J. Steigmann。晶格壳的平衡。 *J. Eng. Math.*，109:47–61，2018年。[36] D. J. Steigmann 和 R. W. Ogden。具有内禀边界弹性的弹性固体平面变形。 *Proc. R. Soc.* ，：–。 *Lond. A* 453 853 877, 1997
[37] D. J. Steigmann 和 R. W. Ogden。弹性表面与基底相互作用。 *Proc. R. Soc. Lond. A*，455:437–474，1999年。[38] R. A. Toupin。偶应力弹性理论。 *Arch. Rational Mech. Anal.*，17:85–112，1964年。[39] F. G. Tricomi。关于有限希尔伯特变换。 *Q. J. Math.*，2(1):199–211，1951年。[40] J. R. Walton。关于包含表面弹性的断裂模型的注记。 *J. Elast.*，109:95–102，2012年。[41] J. R. Walton。具有依赖曲率的表面张力的平面应变断裂：混合模态加载。 *J. Elast.*，114(1):127–142，2014年。[42] J. Wang、P. Yan、L. Dong 和 S. N. Atluri。一般均匀远场应力载荷下具有 Steigmann-Ogden界面模型的球形纳米非均匀体。 *Int. J. Solids. Struct.*，185-186:311–323，2020年。[43] H. M. Westergaard。承压与裂纹。 *J. Appl. Mech.*，6:49–53，1939年。[44] A. Y. Zemlyanova。依赖曲率的表面张力对直线界面裂纹尖端奇异性的影响。 *Quart. J. Appl. Math.*，66:199–219，07 2012年。[45] A. Y. Zemlyanova。边界上具有依赖曲率的表面张力的曲线型I型/II型界面断裂。 *IMA J. Appl. Math.*，81:1112–1136，09 2014年。[46] A. Y. Zemlyanova。具有 Steigmann-Ogden边界条件的直线混合模式断裂。 *Quart. J. Mech. Appl.* ，：–。 *Math.* 70 65 86, 2017
[47] A. Y. Zemlyanova。存在 Steigmann–Ogden形式表面弹性时刚性压头与半平面的无摩擦接触。 *Math. Mech. Solids*，23(8):1140–1155，2018年。[48] A. Y. Zemlyanova。具有 Steigmann-Ogden形式表面弹性的半平面黏着接触问题。*J. Elast.*，136:103–121，2019年。[49] A. Y. Zemlyanova。存在 Steigmann-Ogden表面能时多个平面直线裂纹的相互作用。*SIAM. J. Appl. Math.*，80(5):2098–2119，2020年。[50] A. Y. Zemlyanova。Steigmann–Ogden表面能影响下硬币形裂纹的轴对称问题。 *Proc. R. Soc. Lond. A*，477，04 2021年。

[51] A. Y. Zemlyanova 和 A. Machina. 一种用于高阶奇异积分微分方程的新型 B样条配点法. *J. Comput. Appl. Math.*, 380:112949, 2020年.[52] A. Y. Zemlyanova 和 S. G. Mogilevskaya. 带有 Steigmann–Ogden界面的圆形非均匀体：局部场、中性以及 Maxwell型近似公式. *Int. J. Solids. Struct.*, 135:85–98, 2018年.[53] A. Y. Zemlyanova 和 J. R. Walton. 依赖曲率的表面张力作用下曲线平面裂纹的建模. *SIAM J. Appl. Math.*, 72(5):1474–1492, 2012年. [54] A. Y. Zemlyanova 和 L. M. White. 刚性压头压入具有表面能边界的半空间的轴对称无摩擦压入. *Math. Mech. Solids*, 27(2):334–347, 2022年.

Department of Mathematics, The University of North Carolina at Chapel Hill, CB 3250 Phillips Hall, Chapel Hill, NC 27599*E-mail address*: crodrig@email.unc.edu

Department of Mathematics, Kansas State University, 138 Cardwell Hall, Manhattan, Kansas, 66506
E-mail address: azem@ksu.edu