arXiv:2601.04546v1 [math.PR] 8 Jan 2026

钉扎半空间 Airy 线系综

Evgeni Dimitrov、Christian Serio 和 Zongrui Yang

摘要。属于 Kardar-Parisi-Zhang（KPZ）普适性类的半空间模型展现出丰富的边界现象，这些现象改变了人们从全空间模型中熟悉的渐近行为。这些系统的一个显著特征是存在一个边界参数，该参数控制着亚临界、临界和超临界区间之间的转变，而这些区间具有不同的标度指数和涨落统计。

在本文中，我们构造了钉扎半空间 *Airy* 线系综 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 在 $[0,\infty)$——这是 Airy 线系综的一个自然的半空间对应物，预计将作为超临界半空间 KPZ 模型的普适标度极限出现。该系综 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 是 [34] 中引入的临界半空间 Airy 线系综 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 在边界参数 ϖ 趋于无穷时的弱极限。

我们证明， $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 具有 Pfaffian 点过程结构，并具有显式的相关核；经过抛物线平移后，它满足一种由两两钉扎布朗运动描述的单侧布朗 Gibbs 性质。远离原点时， $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 收敛到标准 Airy 线系综；而在原点处，其分布与随机 Airy 算子的有序特征值（重数加倍）分布相同，其中算子带有 $\beta = 4$。

目录

1. 引言与主要结果 2. 核渐近 3. 有限维收敛 4. Gibbs 线系综 5. 紧集上一致收敛 6. 原点处的分布 附录 A. 高斯辛系综的边缘渐近 参考文献 1 11 16 20 33 40 53 57

1. 引言与主要结果

过去二十年间，人们对 KPZ（Kardar-Parisi-Zhang）普适类中的半空间模型的渐近分析产生了浓厚兴趣。这一方向最早的研究由 Baik 和 Rains 开展，他们分析了随机对合的最长递增子序列，以及具有几何权重 [9–11] 的对称化最后通行渗流（LPP）的渐近行为。其他受到广泛研究的半空间模型包括多核生长模型 [48], 、Schur 过程 [16, 19], 、具有指数权重的 LPP [8], 、受限（完全）非对称简单排斥过程，即 (T)ASEP [7], 、通过 ASEP [25, 44] 以及通过定向聚合物 [14, 27, 53], 研究的 KPZ 方程、随机六顶点模型 [13],、Macdonald 过程 [12], ， 以及对数伽马聚合物 [15, 40]。

半空间 KPZ 模型的局部行为与其全空间对应模型相似，但原点——应理解为区间 $[0,\infty$ 的左边界——

日期：2026年1月9日。

会引入边界效应，并以非平凡的方式影响其渐近行为。例如，在相互作用粒子系统中，原点充当储库，以随机方式注入或吸收粒子；而在最后通过渗流模型中，原点处的权重与其他位置不同。这一领域的核心目标之一，是理解此类边界效应如何在各种情形中体现，并在某些情况下证明不同模型的渐近行为保持一致。换言之，我们旨在证明这些系统展现出半空间 KPZ 普适性类所特有的普适行为。

要对这一类模型作出形式化定义，必须找出全空间 KPZ 情形中已知的普适标度极限的合适类比。近期， [34], 的作者在这方面迈出了重要一步，他们引入了一族由一个参数刻画的半空间 *Airy* 线系综$\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\varpi} = \{\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\varpi}\}_{i\geq 1}$，作为标准 Airy 线系综在 $\mathbb{R}$上的（临界）半空间对应物 $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_i\}_{i\geq 1}$ ，见图1。我们简要说明“临界”一词的含义。

在许多半空间模型中，边界效应的强度由参数 α控制，并且存在一个临界值 α_c ，使得：

- 当 $\alpha < \alpha_c$ （即亚临界区间）时，模型的涨落标度指数为$1/2$ ，且涨落呈高斯分布。
- 当 $\alpha > \alpha_c$ （即超临界区间）时，涨落标度指数和横向标度指数分别为 $1/3$ 和 $2/3$。
- 当 α随系统大小 N调节为 $\alpha = \alpha_c + \varpi N^{-1/3}$时，该模型再次具有 $1/3$涨落和 $2/3$ 横向标度指数，但极限分布现在取决于 ϖ ，并且不同于超临界区间。

我们注意到，在相关文献中，亚临界区间和超临界区间的术语有时会互换使用。

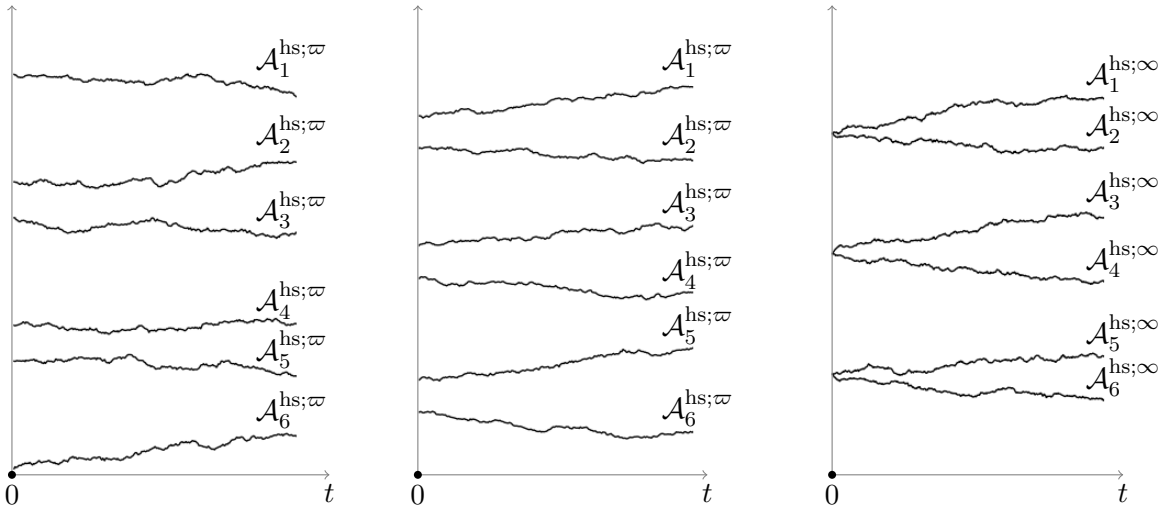

图1。该图描绘了 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 在原点附近、当 $\varpi \in (-\infty, 0)$ 时（左）， $\varpi \in (0, \infty)$ 时（中）以及 $\varpi = \infty$ 时（右）的情形。在原点处，当 $\varpi \in (-\infty, 0)$ 时，曲线 $\mathcal{A}_{2i-1}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 和 $\mathcal{A}_{2i}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 排斥得更强；当 $\varpi \in (0, \infty)$ 时，排斥得更弱；而当 $\varpi = \infty$时则发生碰撞。

在临界参数标度下， $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 中构造的线系综是某些与 Pfaffian Schur 过程（或等价地，与对称化几何最后通过渗流）相关联的离散路径系综的弱极限。关于 Pfaffian Schur 过程的背景知识，请读者参阅 [16, 19], ；其与最后通过渗流之间联系的简要说明则见 [35] 。

本文的**主要目标是以严谨的方式构造**钉扎半空间 ***Airy*** 线系综 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty} = \{\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}\}_{i\geq 1}$，它是上述超临界区间中 Airy 线系综的半空间对应物。我们将 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 作为 [34], 中的系综 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 的弱 $\varpi \to \infty$ 极限得到，并预期它将成为半空间 KPZ 普适性类中超临界模型的典范普适标度极限。例如，该模型应当是半空间 KPZ 线系综的大时间超临界极限，见 [27, 第 1.1 节。1], 此外，在即将发表的工作 [26]中，我们将证明它是超临界几何最后通过渗流的标度极限。

除了构造 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$之外，我们还描述了其远离原点处的有限维分布；在那里，该系综具有自然的 Pfaffian 点过程结构，并且相关核有显式表达。我们证明，经过抛物线平移后，该系综 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 满足单侧布朗 Gibbs 性质，其描述方式是有序成对钉扎布朗运动；这一性质最近在 [27]中得到确认。当 $T \to \infty$ （即远离边界）时，该系综$\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}(\cdot + T)$表现得如同全空间模型，并收敛到标准 Airy 线系综 $\mathcal{A}$。最后，我们证明， $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 在原点处的分布由随机 Airy 算子 $\mathcal{H}_\beta$ 在 [46] 具有 $\beta = 4$ 时的有序特征值（按重数加倍）所描述。

1.1. 全空间与临界半空间 Airy 线系综。 （全空间）*Airy* 线系综 $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_i\}_{i\geq 1}$ 是定义在 $\mathbb{R}$上的严格有序连续实值函数序列。它作为多种概率、组合及统计力学模型的边缘标度极限出现，包括 Wigner 矩阵 [49], 、菱形铺砌 [3], 以及不相交布朗桥系统（也称为布朗西瓜） [24]。它还出现在一系列关于不相交路径和最后通行渗流的可积模型中 [28]。若将收敛到其各种投影的模型也纳入考虑, 与 $\mathcal{A}$相关的模型类别还会进一步扩大，例如（$\mathcal{A}_1(t)$： $t \in \mathbb{R}$）——*Airy* 过程；固定 $t_0 \in \mathbb{R}$时的（$\mathcal{A}_i(t_0)$： $i \geq 1$）——*Airy* 点过程；以及固定 t_0时的 $\mathcal{A}_1(t_0)$——*Tracy–Widom* 分布。由于它是一个普适的标度极限，并且在定义*Airy* 薄片 [29], 中发挥根本作用，Airy 线系综在 KPZ 普适性类 [23]中占据核心地位。

Airy 线系综的显著特征之一是其具有行列式点过程的结构。为对此进行精确定义，我们首先引入一些记号。

定义 1.1。 对于固定的 $z \in \mathbb{C}$ 和 $\varphi \in (0, \pi)$，我们将从 $z + \infty e^{-\mathrm{i}\varphi}$ 定向到 $z + \infty e^{\mathrm{i}\varphi}$ 的无穷围道记为 $\mathcal{C}_z^{\varphi} = \{z + |s|e^{\mathrm{sgn}(s)\mathrm{i}\varphi}: \ s \in \mathbb{R}\}$。

定义 1.2。 对于有限集 $\mathsf{S} = \{s_1, \ldots, s_m\} \subset \mathbb{R}$，令 μ_{S} 表示 $\mathbb{R}$ 上的计数测度，其定义为 $\mu_{\mathsf{S}}(A) = |A \cap \mathsf{S}|$。我们还令 Leb 表示 $\mathbb{R}$ 上通常的勒贝格测度，并令 $\mu_{\mathsf{S}} \times \mathrm{Leb}$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 上的乘积测度。

定义 1.3。 设 $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_i\}_{i\geq 1}$ 是区间 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ 上的线系综。若几乎处处 $\mathcal{L}_i(t) > \mathcal{L}_j(t)$ 对所有 $t \in \Lambda$ 和 $1 \leq i < j$ 都成立，则称 $\mathcal{L}$ 是互不相交的。若几乎处处 $\mathcal{L}_i(t) \geq \mathcal{L}_j(t)$ 对所有 $t \in \Lambda$ 和 $1 \leq i < j$ 都成立，则称 $\mathcal{L}$ 是有序的。

定义 1.4。 （全空间）Airy 线系综 $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_i\}_{i\geq 1}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值随机连续函数序列。它由以下性质唯一刻画。该系综满足定义 1.3 中的互不相交性。此外，对于任意有限集 $\mathsf{S} = \{s_1, \ldots, s_m\} \subset \mathbb{R}$，满足 $s_1 < \cdots < s_m$，在 $\mathbb{R}^2$ 上给定的随机测度为

$$M^{\mathsf{S};\mathcal{A}}(A) = \sum_{i\geq 1}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}\left\{(s_j, \mathcal{A}_i(s_j)) \in A\right\}, \tag{1.1}$$

一个行列式点过程，其参考测度为 $\mu_{\mathsf{S}}\times$勒贝格测度（如定义 1.2 所述），其相关核为扩展 *Airy* 核，定义于 $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ 和 $t_1,\ t_2\in\mathsf{S}$ 上，具体为

$$
\begin{aligned}
&K^{\mathrm{Airy}}(s,x;t,y)=R(s,x;t,y)+\frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_\alpha^{\pi/3}}dz\int_{\mathcal{C}_\beta^{\pi/3}}dw\frac{e^{z^3/3+w^3/3-xz-yw}}{z+s+w-t},\ \text{where}\\
&R(s,x;t,y)=-\frac{\mathbf{1}\{s<t\}}{\sqrt{4\pi(t-s)}}\cdot\exp\left(\frac{-(s-t)^4+6(x+y)(s-t)^2+3(x-y)^2}{12(s-t)}\right).
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

在 (1.2) 中，$\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ 可任意选取，但须满足 $\alpha+s+\beta-t>0$，而 $\mathcal{C}_z^{\varphi}$如定义 1.1 所述。

注 1.5。扩展 Airy 核有多种表达式，(1.2) 中的表达式来自 [18, 命题 4.7 和 (11)]，经过变量代换 $u\to z+s$ 和 $w\to -w+t$得到。

注 1.6。扩展 Airy 核的提出通常归功于 [45], ，它是在多核生长模型的背景下出现的，不过它更早已见于 [36] 和 [42]。满足定义 1.4 条件的线系综的存在性 已在 [24],中得到证明，而这些条件唯一地 确定 $\mathcal{A}$ 的分布这一事实则广为人知，例如可由 [30,命题 2.13(3)], [30, 推论 2.20]和 [33, 引理 3.1]推出。

Airy 线系综 $\mathcal{A}$ 在 [24] 中通过利用布朗西瓜的局部避开布朗桥结构，将其构造为布朗西瓜的边缘极限。布朗西瓜的这种局部描述如今称为布朗吉布斯性质，而抛物型 *Airy* 线系综 $\mathcal{L}^{\mathrm{Airy}}$ 也具有这一性质，其与 $\mathcal{A}$ 的关系明确表示为

$$
\sqrt{2}\cdot\mathcal{L}_i^{\mathrm{Airy}}(t)=\mathcal{A}_i(t)-t^2\ \text{for}\ i\geq 1\ \text{and}\ t\in\mathbb{R}.
\tag{1.3}
$$

我们指出，布朗吉布斯性质并非抛物型 Airy 线系综的表面特征，而是其根本定义性特征。具体而言， [4]刻画了 $\mathcal{L}^{\mathrm{Airy}}$ ： 它本质上是唯一一个既具有布朗吉布斯性质、又拥有全局呈抛物线形状的顶曲线的线系综。

在 [34]中，第一位和第三位作者引入了一个由 $\varpi\in\mathbb{R}$索引的一参数族（临界）半空间 *Airy* 线系综 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\varpi}=\{\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\varpi}\}_{i\geq 1}$。如前所述，这些系综是某些与 Pfaffian Schur 过程相关的离散路径系综的弱极限。为了对它们进行正式介绍，我们还需要一些记号。

定义 1.7。固定 $\varpi\in\mathbb{R}$、 $m\in\mathbb{N}$和 $\mathsf{S}=\{s_1,\dots,s_m\}$，其中 $0\leq s_1<s_2<\cdots<s_m$，并令 $\mathsf{a}_i=|\varpi|+3i$对于 $i=1,\ 2,\ 3$。对于 $s,\ t\in\mathsf{S}$和 $x,\ y\in\mathbb{R}$，我们定义核

$$
\begin{aligned}
K^{\mathrm{hs};\varpi}(s,x;t,y)&=\begin{bmatrix}K_{11}^{\mathrm{hs};\varpi}(s,x;t,y) & K_{12}^{\mathrm{hs};\varpi}(s,x;t,y)\\ K_{21}^{\mathrm{hs};\varpi}(s,x;t,y) & K_{22}^{\mathrm{hs};\varpi}(s,x;t,y)\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}I_{11}^{\mathrm{hs};\varpi}(s,x;t,y) & I_{12}^{\mathrm{hs};\varpi}(s,x;t,y)+R_{12}^{\mathrm{hs};\varpi}(s,x;t,y)\\ -I_{12}^{\mathrm{hs};\varpi}(t,y;s,x)-R_{12}^{\mathrm{hs};\varpi}(t,y;s,x) & I_{22}^{\mathrm{hs};\varpi}(s,x;t,y)+R_{22}^{\mathrm{hs};\varpi}(s,x;t,y)\end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

其中核 $I_{ij}^{\mathrm{hs};\varpi}$ ， $R_{ij}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 定义如下。我们有

$$\begin{aligned}
I_{11}^{\mathrm{hs};\varpi}(s,x;t,y) =& \frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_{\mathsf{a}_1-s}^{\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_{\mathsf{a}_3-t}^{\pi/3}} dw \frac{z+s-w-t}{(z+s+w+t)(z+s)(w+t)} \\
& \times (z+s+\varpi)(w+t+\varpi)\cdot e^{z^3/3+w^3/3-xz-yw}, \\
I_{12}^{\mathrm{hs};\varpi}(s,x;t,y) =& \frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_{\mathsf{a}_3-s}^{\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_{\mathsf{a}_1-t}^{2\pi/3}} dw \frac{z+s+w+t}{2(z+s)(z+s-w-t)} \\
& \times \frac{z+\varpi+s}{w+\varpi+t}\cdot e^{z^3/3-w^3/3-xz+yw}, \\
I_{22}^{\mathrm{hs};\varpi}(s,x;t,y) =& \frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_{-\mathsf{a}_2-s}^{2\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_{-\mathsf{a}_2-t}^{2\pi/3}} dw \frac{z+s-w-t}{4(z+s+w+t)} \\
& \times \frac{1}{(z+s+\varpi)(w+t+\varpi)}\cdot e^{-z^3/3-w^3/3+xz+yw},
\end{aligned} \tag{1.5}$$

积分路径如定义 1.1 所示。我们还有 $R_{12}^{\mathrm{hs};\varpi} = R$ 如式 (1.2) 所示， $R_{22}^{\mathrm{hs};\varpi}(s,\ x;t,\ y) = -R_{22}^{\mathrm{hs};\varpi}(t,\ y;s,\ x)$，并且当 $x-s^2 > y-t^2$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
R_{22}^{\mathrm{hs};\varpi}(s,x;t,y) =& \frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\int_{\mathcal{C}_{\mathsf{a}_1}^{2\pi/3}} dz \frac{e^{(-z+s)^3/3+(\varpi+t)^3/3-x(-z+s)-y(\varpi+t)}}{4(z-\varpi)} \\
& - \frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\int_{\mathcal{C}_{-\mathsf{a}_2}^{2\pi/3}} dw \frac{e^{(-w+t)^3/3+(\varpi+s)^3/3-y(-w+t)-x(\varpi+s)}}{4(w-\varpi)} \\
& + \frac{\mathbf{1}\{s+t>0\}}{2\pi\mathsf{i}}\int_{\mathcal{C}_{-\mathsf{a}_2}^{2\pi/3}} dw \frac{we^{(-w+t)^3/3+(w+s)^3/3-y(-w+t)-x(w+s)}}{2(w-\varpi)(w+\varpi)}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

注 1.8。定义 1.7 中 $K^{\mathrm{hs};\varpi}$ 的公式最初见于 [7, 第 5 节。1]和 [8, 第 2 节。5], ，其中记作 K^{cross}。[7, 8] 中的公式存在几处笔误，后来已在这些论文的 arXiv 版本中更正——参见 [5, 第 2 节。5] 和 [6, 第 5 节。1]。我们提到，我们关于 $I_{11}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 、 $I_{12}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 和 $R_{12}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 的公式（经过简单的变量代换后）与 [5, 第 2 节。5]中的 I_{11}^{cross}、I_{12}^{cross}和 R_{12}^{cross}完全一致。由于作者在 I_{22}^{cross}和 R_{22}^{cross}的定义中选择的积分路径与我们的略有不同，这些项并不相同；不过，它们的和（恰好就是 K_{22}^{cross}）与 $K_{22}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 相同。换言之， $K^{\mathrm{hs};\varpi}$ 与 [5, 第 2 节。5]中的 K^{cross}一致。我们还提到，在 [16, 式 (4.10)] 中，作者引入了一个核 K^{v}，经过若干次（繁琐的）变量替换后，它也与 $K^{\mathrm{hs};\varpi}$ 一致，其中包括令 $\varpi = 2v$、$s = u_a$、 $t = u_b$、$x = \xi - u_a^2$、 $y = \xi' - u_b^2$、 $z = Z - s$、 $w = W - t$，并对核作共轭变换。

注记 1.9。 我们指出，由于指数函数中的三次项，变形核 $I_{ij}^{\mathrm{hs};\varpi}$, $R_{ij}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 中出现的积分路径有相当大的自由度，而不会影响积分的值。此外，对于某些取值的 ϖ, s, t 可以越过某些简单极点，从而得到显著的抵消。定义 1.7 中的围道选择是在 [34], 之后作出的，其优点之一是这些公式对 $\varpi \in \mathbb{R}$ 和 $s,t \in [0,\infty)$ 的所有取值都成立。稍后，在研究 $\varpi \to \infty$ 极限时，我们将得到（可以说）更简单且更适合渐近分析的公式——见定义 2.1 和引理 2.2。

采用上述记号后，我们可以陈述来自 [34]的主要结果。

命题 1.10. 固定 $\varpi \in \mathbb{R}$。存在定义在 $[0,\infty)$ 上的线系综 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\varpi} = \{\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\varpi}\}_{i\geq 1}$ ，满足以下性质。该系综按照定义 *1.3* 的意义是互不相交的。此外，对于任意有限集$\mathsf{S} = \{s_1,\dots,s_m\} \subset [0,\infty)$ ，若 $s_1 < s_2 < \cdots < s_m$，则随机测度

在 $\mathbb{R}^2$ 上定义为

$$M^{\mathsf{S};\mathrm{hs};\varpi}(\omega, A) = \sum_{i\geq 1}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}\{(s_j, \mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\varpi}(s_j,\omega)) \in A\} \tag{1.7}$$

是一个 *Pfaffian* 点过程，其相关核为 $K^{\mathrm{hs};\varpi}$ （如定义 *1.7* 所示），参考测度为μ_{S} ×勒贝格测度（如定义 *1.2* 所示）。

此外，若 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi} = \{\mathcal{L}_i^{\mathrm{hs};\varpi}\}_{i\geq 1}$ 是通过以下方式定义的线系综

$$\sqrt{2}\cdot \mathcal{L}_i^{\mathrm{hs};\varpi}(t) + t^2 = \mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\varpi}(t) \text{ for } i \geq 1, t \in [0,\infty), \tag{1.8}$$

则 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 满足定义 *4.9* 中的半空间布朗吉布斯性质，其参数为$\mu_i = (-1)^i\sqrt{2}\cdot\varpi$ （另见注 *1.12* 和图*1*）。

注 1.11。 鉴于 [34, 命题 5.8(3)], [30, 推论 2.20] 和 [33, 引理 3.1]，命题 1.10 中的条件唯一确定了 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 的分布。

注 1.12。 粗略地说，若线系综 $\{\mathcal{L}_i\}_{i\geq 1}$ 满足定义 4.9 中的半空间布朗吉布斯性质，参数为 $\{\mu_i\}_{i\geq 1}$，则以下条件成立。对于每个 $m \in \mathbb{N}$ 和 $T > 0$，在给定 $\{\mathcal{L}_i(T)\}_{i=1}^m$和 $\{\mathcal{L}_{m+1}(t) : t \in [0,T]\}$ 的条件下，曲线 $\{\mathcal{L}_i\}_{i=1}^m$在区间 $[0,T]$ 上的分布与 m 条漂移为 $\{\mu_i\}_{i=1}^m$、从$B_i(T) = \mathcal{L}_i(T)$出发且经条件约束而互不相交的相互独立的反向布朗运动 $\{B_i\}_{i=1}^m$的分布相同:

$$B_1(t) > B_2(t) > \cdots > B_m(t) > \mathcal{L}_{m+1}(t) \text{ for } t \in [0,T].$$

这里，我们称 B 是一个带漂移 μ 的反向布朗运动，（从 BT）$= y$ 当且仅当

$$B(t) = y + W_{T-t} + \mu(T-t) \text{ for } 0 \leq t \leq T,$$

其中（W_t： $t \geq 0$）是从零开始的标准布朗运动。

1.2. **主要结果**。 本节继续使用第 1.1 节中的记号，并给出本文的主要结果。我们的第一个主要结果表明，临界半空间 Airy 线系综 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 在 $\varpi \to \infty$时弱收敛。

定理 1.13。 设 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\varpi} = \{\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\varpi}\}_{i\geq 1}$ 如命题 *1.10* 中所述。则线系综 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\varpi}$在 $\varpi \to \infty$时弱收敛到有序线系综 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 。

注 1.14。 定理 1.13 中的收敛是随机元素在 $C(\mathbb{N}\times[0,\infty)$ 中的收敛，后一个空间赋予紧集上一致收敛的拓扑。

备注 1.15。 我们指出，尽管 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 对每个 $\varpi \in \mathbb{R}$ 都互不相交，但极限系综 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$（下文称为钉扎半空间 *Airy* 线系综）仅为有序，参见定义 1.3。如图1所示，并在定理 1.20 中得到严格证明（另见定理 1.26），系综 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 在 $(0, \infty)$ 上互不相交，但在原点处满足

$$\mathcal{A}_1^{\mathrm{hs};\infty}(0) = \mathcal{A}_2^{\mathrm{hs};\infty}(0) > \mathcal{A}_3^{\mathrm{hs};\infty}(0) = \mathcal{A}_4^{\mathrm{hs};\infty}(0) > \mathcal{A}_5^{\mathrm{hs};\infty}(0) = \mathcal{A}_6^{\mathrm{hs};\infty}(0) > \cdots. \tag{1.9}$$

本节余下部分将通过一系列定理概述定理 1.13 中钉扎半空间 Airy 线系综 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 的若干性质。首先证明 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 具有 Pfaffian 点过程结构，且相关核具有显式表达式。

定理 1.16. 设 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 如定理 *1.13* 中所述，且 $M^{\mathsf{S};\mathrm{hs};\infty}$ 如 *(1.7)* 中所述，其中 $\varpi = \infty$ 适用于 $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_m$。那么， $M^{\mathsf{S};\mathrm{hs};\infty}$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的 *Pfaffian* 点过程，其参考测度为

μ_{S} ×勒贝格测度 如定义 *1.2* 中所述，且相关核为

$$
\begin{aligned}
K^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y) &= \begin{bmatrix} K_{11}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y) & K_{12}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y) \\ K_{21}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y) & K_{22}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_{11}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y) & I_{12}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y) + R_{12}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y) \\ -I_{12}^{\mathrm{hs};\infty}(t,y;s,x) - R_{12}^{\mathrm{hs};\infty}(t,y;s,x) & I_{22}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y) + R_{22}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y) \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

其中，核 $I_{ij}^{\mathrm{hs};\infty}$ 、$R_{ij}^{\mathrm{hs};\infty}$ 定义如下。我们有

$$
\begin{aligned}
I_{11}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y) =& \frac{1}{(2\pi \mathsf{i})^2} \int_{\mathcal{C}_{1+s}^{\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_{1+t}^{\pi/3}} dw \frac{(z+s-w-t)H(z,x;w,y)}{4(z+s+w+t)(z+s)(w+t)}, \\
I_{12}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y) =& \frac{1}{(2\pi \mathsf{i})^2} \int_{\mathcal{C}_{1+s}^{\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_{1+t}^{\pi/3}} dw \frac{(z+s-w+t)H(z,x;w,y)}{2(z+s)(z+s+w-t)}, \\
I_{22}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y) =& \frac{1}{(2\pi \mathsf{i})^2} \int_{\mathcal{C}_{1+s}^{\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_{1+t}^{\pi/3}} dw \frac{(z-s-w+t)H(z,x;w,y)}{z-s+w-t},
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

其中我们令

$$
H(z,x;w,y) = e^{z^3/3+w^3/3-xz-yw}, \tag{1.12}
$$

积分路径 $\mathcal{C}_z^{\varphi}$ 与定义 *1.1* 中的一致。我们还有， $R_{12}^{\mathrm{hs};\infty} = R$ 与 *(1.2)* 中的一致，并且

$$
R_{22}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y) = \frac{H(s,x;t,y)(y-t^2-x+s^2)}{2\pi^{1/2}(t+s)^{3/2}} \cdot \exp\left(-\frac{(y-t^2-x+s^2)^2}{4(t+s)}\right). \tag{1.13}
$$

注 1.17。 核 $K^{\mathrm{hs};\infty}$ 此前曾出现在辛—酉过渡[36], 以及半空间指数最后通过程 [8, 第 2 节5]的背景中。具体而言，我们的核公式与K^{SU} [8, 第 2 节5], 中的一致，但该文的 R_{22}^{SU}有一个小笔误，应该乘以 4。

注 1.18。 我们提到，在定理 1.16 中，与命题 1.10 不同，S $\subset(0, \infty)$ 这一点至关重要。换言之，$\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 的 Pfaff 点过程结构并不 延伸到原点。对此并不意外，因为 Pfaffian 点过程几乎处处是简单的（见 [34, 命题 5.8]），而根据 (1.9)，由 $\{\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}(0)\}_{i\geq 1}$ 形成的 $\mathbb{R}$上的点过程并非如此。

注 1.19。 由 [34, 命题 5.8(3)], [30, 推论 2.20] 和 [33, 引理 3.1], 可知，至多存在一个满足定理 1.16 条件的有序线系综。因此，可以将 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 定义为满足这些条件的唯一有序系综；根据定理 1.13 和 1.16，该系综的存在性得到了保证。

下一个结果表明， $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 可以通过避开布朗运动/桥，并在原点处进行特殊钉扎，得到局部描述。

定理 1.20。 设 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 如定理 *1.13* 中所述，并通过以下方式定义 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\infty} = \{\mathcal{L}_i^{\mathrm{hs};\infty}\}_{i\geq 1}$

$$
\sqrt{2} \cdot \mathcal{L}_i^{\mathrm{hs};\infty}(t) + t^2 = \mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}(t) \text{ for } i \geq 1, t \in [0,\infty). \tag{1.14}
$$

则以下结论成立。

(a) 将$\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\infty}$限制在$(0,\infty)$上，并视为定义在$(0,\infty)$上的、以 $\mathbb{N}$为指标的线系综，它满足定义 *4.12* 中的布朗吉布斯性质。特别地，在$(0,\infty)$ 上，线系综$\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 如定义 *1.3* 所述互不相交。

(b) 在 $[0,\infty)$ 上，系综 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\infty}$ 满足定义 *4.10* 中的钉扎半空间布朗吉布斯性质。

注 1.21。 定理 1.20(a) 表明，对每个 $m \in \mathbb{N}$ 和 $b > a > 0$，在给定 $\{\mathcal{L}_i^{\mathrm{hs};\infty}(a)\}_{i=1}^m$、 $\{\mathcal{L}_i^{\mathrm{hs};\infty}(b)\}_{i=1}^m$ 以及 $\{\mathcal{L}_{m+1}^{\mathrm{hs};\infty}(t) : t \in [a,b]\}$的条件下， $\{\mathcal{L}_i^{\mathrm{hs};\infty}\}_{i=1}^m$ 在区间 $[a,b]$上的分布是 m 条相互独立的布朗桥 $\{B_i\}_{i=1}^m$ ，它们从 $B_i(a) = \mathcal{L}_i^{\mathrm{hs};\infty}(a)$出发，到达 $B_i(b) = \mathcal{L}_i^{\mathrm{hs};\infty}(b)$，并且满足互不相交的条件：

$$B_1(t) > B_2(t) > \cdots > B_m(t) > \mathcal{L}_{m+1}^{\mathrm{hs};\infty}(t) \text{ for } t \in [a,b].$$

定理 1.20(b)指出，对于每个 $m \in \mathbb{N}$ 和 $T > 0$，在给定 $\{\mathcal{L}_i(T)\}_{i=1}^{2m}$ 和 $\{\mathcal{L}_{2m+1}(t) : t \in [0,T]\}$ 的条件下，曲线 $\{\mathcal{L}_i\}_{i=1}^{2m}$ 在区间 $[0,T]$ 上的分布为 $2m$ 相互独立的反向布朗运动 $\{B_i\}_{i=1}^{2m}$ ，它们从 $B_i(T) = \mathcal{L}_i(T)$出发，并受条件约束而保持有序

$$B_1(t) \geq B_2(t) \geq \cdots \geq B_{2m}(t) \geq \mathcal{L}_{2m+1}(t) \text{ for } t \in [0,T],$$

且在原点处成对钉扎：

$$B_{2i-1}(0) = B_{2i}(0) \text{ for } i = 1, 2, \ldots, m.$$

注 1.22。 回顾注 1.12，奇数编号的曲线 $\mathcal{A}_{2i-1}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 在原点附近具有漂移$-\sqrt{2\varpi}$，而偶数编号的曲线 $\mathcal{A}_{2i}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 具有漂移 $\sqrt{2\varpi}$ （反向运行时）。由于 $\varpi \to \infty$ ，这会导致$\mathcal{A}_{2i-1}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 与 $\mathcal{A}_{2i}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 在 $i \geq 1$时发生碰撞，因为系综必须保持有序。因此， $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 的钉扎半空间布朗吉布斯性质自然地成为 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 所具有的半空间布朗吉布斯性质的 $\varpi \to \infty$ 极限。

下一个结果说明了 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 远离原点时的行为。随着人们远离零边界，其影响会逐渐减弱； $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 开始表现得像全空间模型，并且在极限下可恢复全空间艾里线系综。

定理 1.23。 设 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 如定理 *1.13* 所述，并固定一个序列 $t_n \in (0,\infty)$ ，满足 $t_n \uparrow \infty$。对每个 $n \in \mathbb{N}$ ，通过对每个 $i \geq 1$设定如下，定义 $\mathcal{A}^n = \{\mathcal{A}_i^n\}_{i\geq 1}$ 上的线系综 $\mathbb{R}$

$$\mathcal{A}_i^n(t) = \begin{cases} \mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}(t+t_n) & \text{if } t \geq -t_n, \\ \mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}(0) & \text{if } t < -t_n. \end{cases} \tag{1.15}$$

那么， $\mathcal{A}^n \Rightarrow \mathcal{A}$，其中 $\mathcal{A}$ 是定义 *1.4* 中的全空间艾里线系综。

我们关于 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 的最后一个主要结果描述了它在原点处的分布。为了准确表述该结果，并在第 6 节中加以证明，我们需要以下结论。

引理 1.24。 设 $\{\Lambda_k\}_{k\geq 0}$ 表示随机 *Airy* 算子 $\mathcal{H}_\beta$ 按升序排列的特征值，该算子来自 *[46]* 且满足 $\beta = 4$。设 M^{GSE} 为定义在 $\mathbb{R}$上的随机测度，其定义如下

$$M^{\mathrm{GSE}}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \{-2^{2/3}\Lambda_{i-1} \in A\}. \tag{1.16}$$

那么， M^{GSE} 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的 ***Pfaffian*** 点过程，其参考测度为勒贝格测度，相关核为K^{GSE}，具体如下：

$$\begin{aligned} K_{11}^{\mathrm{GSE}}(x,y) &= \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dw \frac{(z-w)H(z,x;w,y)}{4(z+w)zw}, \\ K_{12}^{\mathrm{GSE}}(x,y) = -K_{21}^{\mathrm{GSE}}(y,x) &= \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dw \frac{(z-w)H(z,x;w,y)}{4z(z+w)}, \\ K_{22}^{\mathrm{GSE}}(x,y) &= \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2} \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dw \frac{(z-w)H(z,x;w,y)}{4(z+w)}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

其中 $H(z,x;\ w,y)$ 如 *(1.12)* 所示，而围道 $\mathcal{C}_1^{\pi/3}$ 如定义 *1.1* 所示。

注 1.25。我们指出，引理 1.24 对专家而言是已知的，它可由 [46] 以及高斯辛系综特征值已得到充分研究的边缘渐近行为推出。由于我们未能在文献中找到这一结论，故在附录 A 中给出其简短证明。

以下定理确立了原点处的 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 与具有 $\beta = 4$ 的随机 Airy 算子的特征值之间的分布相等。

定理 1.26. 设 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 如定理 *1.13* 所述，且 $\{\Lambda_k\}_{k\geq 0}$ 如引理 *1.24* 所述。那么，作为 $\mathbb{R}^\infty$ 中的随机向量，我们有如下分布相等

$$(\mathcal{A}_1^{\mathrm{hs};\infty}(0), \mathcal{A}_2^{\mathrm{hs};\infty}(0), \mathcal{A}_3^{\mathrm{hs};\infty}(0), \mathcal{A}_4^{\mathrm{hs};\infty}(0), \dots) \stackrel{d}{=} (-2^{2/3}\Lambda_0, -2^{2/3}\Lambda_0, -2^{2/3}\Lambda_1, -2^{2/3}\Lambda_1, \dots). \tag{1.18}$$

注 1.27. 引理 1.24 和定理 1.26 表明，由 $\{\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}(0)\}_{i\geq 1}$ 构成的点过程本身并非 Pfaffian 点过程，而是 Pfaffian 点过程 M^{GSE} 的加倍。这结合 [34, 命题 5.8(3)], [30, 推论 2.20]，完全确定了 $\{\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}(0)\}_{i\geq 1}$ 的分布。

注 1.28. 由 $\{\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}(t)\}_{i\geq 1}$ 构成的点过程收敛至加倍点过程 $2M^{\mathrm{GSE}}$（当 $t \to 0+$ 时）这一结果，正如 [8, 注 5.1], 中的预测；尽管作者并未证明这一结论，据我们所知，定理 1.26 是对这一事实的首次严格验证。

1.3. 证明思路与论文结构。 在第 2.1 节中，我们从定义 1.7 推导出相关核 $K^{\mathrm{hs};\varpi}$ 的另一种表示形式，使其更便于进行渐近分析；参见定义 2.1 和引理 2.2。我们将这个新核记为 K^{ϖ}。在第 2.2 节中，引理 2.3 分析了 K^{ϖ} 在 $\varpi \to \infty$ 时的极限，并将其与定理 1.16 中出现的核 $K^{\mathrm{hs};\infty}$ 联系起来。随后，在第 2.3 节中，我们研究 $K^{\mathrm{hs};\infty}$ 的大时间极限，并得到扩展 Airy 核；参见引理 2.4。第 2 节的结果依赖于对核表示中的积分路径进行适当变形，并结合沿相关积分路径的细致估计。

在第 3 节中，我们建立了定理 1.13（引理 3.5）和定理 1.23（引理 3.7）的有限维类比。我们的证明改编自 [34] 中提出的一般框架，并需要验证以下性质：

(1) 系综顶曲线的从上方紧性。该结果在第 3.1 节中证明；见引理 3.1。(2) 相关点过程的弱收敛。该结果在第 3.2 节中确立；见引理 3.2 和 3.3，其中使用了我们在引理 2.3 和 2.4 中得到的核收敛结果。(3) 沿垂直切片，(2) 中点过程的弱极限几乎处处具有无限多个原子。

对于大时间极限，第三个性质是直接的，因为极限对象是 Airy 点过程，而众所周知，该过程几乎处处具有无限多个原子。 $\varpi \to \infty$极限则更加微妙，因为我们事先并不知道不同时间处极限点过程的结构 t_*。所需的结论见引理 3.4，并在第 5.4 节中证明。从较高层次来看，关键思想是利用半空间布朗吉布斯性质（ $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi}$满足该性质；见命题 1.10），将系综在“无穷远”处的行为信息——在那里相关点过程与 Airy 点过程重合——传递给有限时间系综。在构造半空间 Airy 线系综时的 [34] 中也采用了类似策略；进一步细节请参见第 5.4 节。

在第 4.1 节中，我们正式介绍了我们的系综所满足的各种布朗吉布斯性质；第 4.2 节则确立了有限布朗线系综的若干技术性质。第 4.3 节包含了主要论证所需的三个关键结果。第一个是引理 4.18，它表明，一族具有交替漂移 $(-1)^i\varpi$ 的有限个（反向）布朗运动在 $\varpi \to \infty$ 时收敛到一族两两钉扎的（反向）布朗运动；参见定义 4.7。证明沿用了 Das 和第二作者关于 -1 的一项相关结果的证明思路

。关键思路是考察半空间布朗系综中连续成对曲线的和与差，并证明它们分别收敛。这样改写的好处在于，两个互不相交的布朗运动的和与差彼此独立，因此可以分别分析每个辅助过程。

另一个核心结果是引理 4.20。粗略地说，如果一列具有交替漂移的互不相交的布朗线系综定义在 $[0,b]$ 上，其边界条件与下界曲线在 b 的某个邻域内正向分离，且始终处于某个紧窗口内，那么当漂移参数趋于无穷时，其连续模会受到一致控制。这一结果在将引理 3.5 的有限维收敛提升为在紧集上一致的收敛方面发挥了关键作用，而这正是定理 1.13 所要求的。第三个关键结果是引理 4.19，它以一种非平凡的方式参与了“无限多个原子”这一结果（引理 3.4）的证明。

在第 5 节中，我们证明定理 1.13、1.16、1.20 和 1.23。主要技术结果是命题 5.1，它表明，对于任意序列 $\varpi_n \to \infty$，命题 1.10 中的线系综 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi_n}$ 构成一个紧序列。此外，这些系综的任意子序列极限都满足正则且钉扎的半空间布朗吉布斯性质。

既然有限维收敛已经得到证明，证明紧性便归结为控制区间 $[0,b]$ 上前 $2k$ 条曲线的连续模，其中 $k \in \mathbb{N}$ 和 $b > 0$ 任意。这里的思路是使用引理 4.20，为此我们必须证明，在某个固定的正时间，这些系综中的曲线很可能彼此分离。这可通过结合引理 3.5 的有限维收敛与 [24]中的一些经典结果来实现。所有 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi_n}$ 的子序列极限都满足钉扎布朗吉布斯性质，这一事实可由标准的单调类论证推出，其中引理 4.18 提供了关键依据。

定理 1.13、1.16 和 1.20 可直接由命题 5.1、引理 3.2 的点过程收敛以及引理 3.5 的有限维收敛推出。最后，定理 1.23 是由 [24, 命题 3.6、定理 3.8], 、引理 3.7 的有限维收敛，以及在 [34, 引理 2.9]中确立的半空间 Airy 线系综的布朗吉布斯性质推得的。

在第 6 节中，我们证明定理 1.26。尽管该节开头对所采用的方法进行了更详细的说明，但我们在此指出，主要困难在于证明，由 $\{\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}(t_N)\}_{i\geq 1}$ 在 $\mathbb{R}$ 上形成的点过程在 $t_N \downarrow 0$ 时收敛于 $2M^{\mathrm{GSE}}$ （如引理 1.24 中所定义）。根据定理 1.16，对于每个固定的 $t_N > 0$，这些点过程都是 Pfaffian 点过程；然而，其极限本身并不是 Pfaffian 点过程，而是一个双重 Pfaffian 点过程。这排除了使用基于相关核逐点收敛的标准收敛方法。在公式层面上，障碍源于存在一个奇异核项，它只能获得分布意义下的极限，而不能获得函数意义下的极限。为克服这一困难，我们不直接处理核本身，而是研究与之相关的联合阶乘矩。这些矩可以表示为涉及核的积分，而额外的积分足以平滑掉奇异贡献，从而使渐近分析得以进行。

最后，附录 A 给出了引理 1.24 的证明。该证明结合了高斯辛系综的 Pfaffian 点过程结构，以及它收敛到随机 Airy 算子的性质 [46]。

致谢。E.D. 部分获得西蒙斯基金会国际通过西蒙斯奖 TSM-00014004 提供的资助。C.S. 感谢 ARCS 基金会北加州分会提供的支持。Z.Y. 部分获得 Ivan Corwin 的美国国家科学基金会（NSF）资助项目 DMS:1811143、DMS:2246576、西蒙斯基金会资助项目 929852，以及 Fernholz 基金会的“Summer Minerva Fellows”项目提供的资助。

2. 核渐近

本节旨在从定义 1.7 推导核 $K^{\mathrm{hs};\varpi}$ 的一个替代公式，并分析其 $\varpi\to\infty$ 极限（见引理 2.3）——这将在定理 1.13 的证明中用到。此外，我们还分析定理 1.16 中 $K^{\mathrm{hs};\infty}(T+\cdot,\ \cdot;\ T+\cdot,\ \cdot)$ 的 $T\to\infty$ 极限（见引理 2.4）——这将在定理 1.23 的证明中用到。

2.1. 核的替代公式。 本节推导一个来自定义 1.7 的核$K^{\mathrm{hs};\varpi}$ 的替代公式，该公式适用于渐近分析。新公式包含在以下定义中。

定义 2.1。 固定 $\varpi>1$ 和 $s,t>0$。给定这些数据，我们将核 K^{ϖ} 定义为

$$\begin{aligned}K^{\varpi}(s,x;t,y)&=\begin{bmatrix}K^{\varpi}_{11}(s,x;t,y) & K^{\varpi}_{12}(s,x;t,y)\\ K^{\varpi}_{21}(s,x;t,y) & K^{\varpi}_{22}(s,x;t,y)\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}I^{\varpi}_{11}(s,x;t,y) & I^{\varpi}_{12}(s,x;t,y)+R^{\varpi}_{12}(s,x;t,y)\\ -I^{\varpi}_{12}(t,y;s,x)-R^{\varpi}_{12}(t,y;s,x) & I^{\varpi}_{22}(s,x;t,y)+R^{\varpi}_{22}(s,x;t,y)\end{bmatrix},\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中核 $I^{\varpi}_{ij},R^{\varpi}_{ij}$定义如下。我们有

$$\begin{aligned}I^{\varpi}_{11}(s,x;t,y)=&\frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}^{\pi/3}_{1+s}}dz\int_{\mathcal{C}^{\pi/3}_{1+t}}dw\frac{(z+s-w-t)(\varpi+z+s)(\varpi+w+t)H(z,x;w,y)}{(z+s+w+t)(z+s)(w+t)},\\ I^{\varpi}_{12}(s,x;t,y)=&\frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}^{\pi/3}_{1+s}}dz\int_{\mathcal{C}^{\pi/3}_{1+t}}dw\frac{(z+s-w+t)(\varpi+z+s)H(z,x;w,y)}{2(z+s)(z+s+w-t)(\varpi-w+t)},\\ I^{\varpi}_{22}(s,x;t,y)=&\frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}^{\pi/3}_{1+s}}dz\int_{\mathcal{C}^{\pi/3}_{1+t}}dw\frac{(z-s-w+t)H(z,x;w,y)}{4(z-s+w-t)(\varpi-z+s)(\varpi-w+t)},\end{aligned}\tag{2.2}$$

其中我们按式 (1.12) 定义了 $H(z,x;\,w,y)=e^{z^3/3+w^3/3-xz-yw}$，围道 $\mathcal{C}^{\varphi}_{z}$则如定义 1.1 所述。我们还按式 (1.2) 定义了 $R^{\varpi}_{12}=R$，并且

$$R^{\varpi}_{22}(s,x;t,y)=\frac{e^{t^3/3+s^3/3-yt-xs}}{2\pi\mathsf{i}}\int_{\mathcal{C}^{\pi/2}_{0}}dw\frac{we^{w^2(t+s)-w(t^2-s^2)+yw-xw}}{2(w-\varpi)(w+\varpi)}.\tag{2.3}$$

引理 2.2。 对于固定的 $\varpi>1$以及 $s,t>0$，假设采用定义 *1.7* 和定义 *2.1* 中的相同记号。那么，对于勒贝格几乎处处的 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$K^{\mathrm{hs};\varpi}_{ij}(s,x;t,y)=K^{\varpi}_{ij}(s,x;t,y)\ \textit{for}\ i,j=1,2.\tag{2.4}$$

证明。 注意，在定义 $I^{\mathrm{hs};\varpi}_{11}$ 时，我们可以分别将围道 $\mathcal{C}^{\pi/3}{}_{\mathsf{a}_1-s}$ 和 $\mathcal{C}^{\pi/3}{}_{\mathsf{a}_3-t}$ 变形为 $\mathcal{C}^{\pi/3}_{1+s}$ 和 $\mathcal{C}^{\pi/3}_{1+t}$，且不会穿过被积函数的任何极点，因此根据柯西定理，积分值不会改变。需要指出的是，在无穷远附近变形围道所需的衰减性来自指数函数中的三次项。进行变形后，我们得到 I^{ϖ}_{11}，这就证明了当 $i=j=1$ 时的 (2.4)。

由于根据定义有 $K^{\mathrm{hs};\varpi}_{12}(s,x;t,y)=-K^{\mathrm{hs};\varpi}_{21}(t,y;\,s,x)$，且 $R^{\mathrm{hs};\varpi}_{12}=R^{\varpi}_{12}$，我们看到，要证明当 $i\neq j$ 时的 (2.4)，只需证明

$$I^{\mathrm{hs};\varpi}_{12}(s,x;t,y)=I^{\varpi}_{12}(s,x;t,y).\tag{2.5}$$

和之前一样，我们将定义 $I^{\mathrm{hs};\varpi}_{12}$ 中的积分路径 $\mathcal{C}^{\pi/3}{}_{\mathsf{a}_3-s}$ 和 $\mathcal{C}^{2\pi/3}{}_{\mathsf{a}_1-t}$ 分别变形为 $\mathcal{C}^{\pi/3}_{1+s}$ 和 $\mathcal{C}^{2\pi/3}_{-1-t}$，且不穿过任何极点。根据柯西定理，积分值保持不变。随后应用变量代换 $w\to-w$，即可得到（2.5）。

在证明的其余部分，我们验证 $i=j=2$的（2.4）。直接由定义可见，

$$K(s,x;t,y)=-K(t,y;s,x) \text{ for } K=I_{22}^{\mathrm{hs};\varpi},R_{22}^{\mathrm{hs};\varpi},I_{22}^{\varpi},R_{22}^{\varpi}.$$

因此，只需在 $x-s^2>y-t^2$ 时证明 (2.4)，以下均作此假设。

我们首先将 $I_{22}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 定义中的积分路径 $\mathcal{C}_{-}^{2\pi/3}{}_{\mathsf{a}_2-s}$ 和 $\mathcal{C}_{-}^{2\pi/3}{}_{\mathsf{a}_2-t}$ 分别变形为 $\mathcal{C}_{-1-s}^{2\pi/3}$ 和 $\mathcal{C}_{-1-t}^{2\pi/3}$。在变形过程中，我们经过简单极点 $z=-\varpi-s$ 和 $w=-\varpi-t$，因此由留数定理

$$I_{22}^{\mathrm{hs};\varpi}(s,x;t,y)=\frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_{-1-s}^{2\pi/3}}dz\int_{\mathcal{C}_{-1-t}^{2\pi/3}}dw\frac{(z+s-w-t)H(-z,x;-w,y)}{4(z+s+w+t)(z+s+\varpi)(w+t+\varpi)}+A+B,$$

其中

$$A=-\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\int_{\mathcal{C}_{-1-s}^{2\pi/3}}dz\frac{1}{4(z+s-\varpi)}\cdot e^{-z^3/3+(\varpi+t)^3/3+xz-y(\varpi+t)},$$

$$B=\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\int_{\mathcal{C}_{-1-t}^{2\pi/3}}dw\frac{1}{4(w+t-\varpi)}\cdot e^{(\varpi+s)^3/3-w^3/3-x(\varpi+s)+yw}.$$

此外，我们将 $R_{22}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 定义中的积分路径 $\mathcal{C}_{\mathsf{a}_1}^{2\pi/3}$ 和 $\mathcal{C}_{-}^{2\pi/3}{}_{\mathsf{a}_2}$ 变形为 $\mathcal{C}_{-1}^{2\pi/3}$。在变形过程中，我们在 (1.6) 第一行经过简单极点 $z=\varpi$，第二行没有经过任何极点，并在第三行经过简单极点 $w=-\varpi$。由留数定理可得

$$R_{22}^{\mathrm{hs};\varpi}(s,x;t,y)=\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\int_{\mathcal{C}_{-1}^{2\pi/3}}dw\frac{we^{(-w+t)^3/3+(w+s)^3/3-y(-w+t)-x(w+s)}}{2(w-\varpi)(w+\varpi)}+C+D+E+F,$$

其中

$$C=\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\int_{\mathcal{C}_{-1}^{2\pi/3}}dz\frac{e^{(-z+s)^3/3+(\varpi+t)^3/3-x(-z+s)-y(\varpi+t)}}{4(z-\varpi)}$$

$$D=-\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\int_{\mathcal{C}_{-1}^{2\pi/3}}dw\frac{e^{(-w+t)^3/3+(\varpi+s)^3/3-y(-w+t)-x(\varpi+s)}}{4(w-\varpi)},$$

$$E=\frac{e^{(-\varpi+s)^3/3+(\varpi+t)^3/3-x(-\varpi+s)-y(\varpi+t)}}{4},$$

$$F=-\frac{e^{(\varpi+t)^3/3+(-\varpi+s)^3/3-y(\varpi+t)-x(-\varpi+s)}}{4}.$$

通过直接的变量替换，我们得到

$$A+C=0,\ \ B+D=0,\ \ E+F=0.$$

结合前面几个方程，我们得到

$$\begin{aligned}K_{22}^{\mathrm{hs};\varpi}(s,x;t,y)=&\frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_{-1-s}^{2\pi/3}}dz\int_{\mathcal{C}_{-1-t}^{2\pi/3}}dw\frac{(z+s-w-t)H(-z,x;-w,y)}{4(z+s+w+t)(z+s+\varpi)(w+t+\varpi)}\\&+\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\int_{\mathcal{C}_{-1}^{2\pi/3}}dw\frac{we^{(-w+t)^3/3+(w+s)^3/3-y(-w+t)-x(w+s)}}{2(w-\varpi)(w+\varpi)}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

(2.6) 的第一行在作变量替换 $z\to-z$ 和 $w\to-w$ 后，与 $I_{22}^{\varpi}(s,x;t,y)$ 一致。此外，将指数函数中的多项式化简，并将 $\mathcal{C}_{-1}^{2\pi/3}$ 变形为 $\mathcal{C}_{0}^{\pi/2}$ 而不穿过任何极点后，(2.6) 的第二行与 $R_{22}^{\varpi}(s,x;t,y)$ 一致。因此，对于 $i=j=2$，(2.6) 验证了 (2.4)，从而完成了引理的证明。□

2.2. **的核渐近** $\varpi\to\infty$。本节的目标是求出定义 2.1 中核 K^{ϖ} 的 $\varpi\to\infty$ 极限。以下引理给出了精确表述。

引理 2.3. 固定 A、s、$t>0$，并令 $K^{\mathrm{hs};\infty}$、K^{ϖ} 分别如定理 *1.16* 和定义 *2.1* 中所述。则，

$$\begin{aligned}&\lim_{\varpi\to\infty}\frac{1}{4\varpi^2}K_{11}^{\varpi}(s,x;t,y)=K_{11}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y),\quad\lim_{\varpi\to\infty}K_{12}^{\varpi}(s,x;t,y)=K_{12}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y),\\&\lim_{\varpi\to\infty}K_{21}^{\varpi}(s,x;t,y)=K_{21}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y),\quad\lim_{\varpi\to\infty}4\varpi^2K_{22}^{\varpi}(s,x;t,y)=K_{22}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y),\end{aligned}\tag{2.7}$$

其中，收敛关于 x、$y\in[-A,A]$ 一致。

证明。在整个证明中，C_1 是一个较大的常数，它依赖于 s，t，A，且其取值会随推导步骤而变化。

通过分析 $z^3/3+w^3/3-xz-yw$ 的实部，我们可以找到 $C_1>0$，使得对于 x，$y\in[-A,A]$、$\varpi\geq 2$、$z\in\mathcal{C}_{1+s}^{\pi/3}$ 和 $w\in\mathcal{C}_{1+t}^{\pi/3}$，有

$$|H(z,x;w,y)|\leq\exp(-|z|^3/3-|w|^3/3+C_1|z|^2+C_1|w|^2+C_1).\tag{2.8}$$

此外，利用围道 $\mathcal{C}_{1+s}^{\pi/3}$ 和 $\mathcal{C}_{1+t}^{\pi/3}$ 与相应的极点充分分离这一点，我们可以找到 $C_1>0$，使得对于 $\varpi\geq 2$、$z\in\mathcal{C}_{1+s}^{\pi/3}$ 和 $w\in\mathcal{C}_{1+t}^{\pi/3}$，有

$$\left|\frac{(z+s-w-t)(\varpi+z+s)(\varpi+w+t)}{4\varpi^2(z+s+w+t)(z+s)(w+t)}\right|\leq C_1(1+|z|+|w|)^3,\tag{2.9}$$

$$\left|\frac{(z+s-w+t)(\varpi+z+s)}{2(z+s)(z+s+w-t)(\varpi-w+t)}\right|\leq C_1(1+|z|+|w|)^2,\tag{2.10}$$

$$\left|\frac{\varpi^2(z-s-w+t)}{(z-s+w-t)(\varpi-z+s)(\varpi-w+t)}\right|\leq C_1(1+|z|+|w|).\tag{2.11}$$

根据定义 2.1

$$\frac{1}{4\varpi^2}I_{11}^{\varpi}(s,x;t,y)=\frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_{1+s}^{\pi/3}}dz\int_{\mathcal{C}_{1+t}^{\pi/3}}dw\frac{(z+s-w-t)(\varpi+z+s)(\varpi+w+t)H(z,x;w,y)}{4\varpi^2(z+s+w+t)(z+s)(w+t)},$$

且被积函数逐点收敛到 (1.11) 中的 $I_{11}^{\mathrm{hs};\infty}(s,\ x;t,\ y)$。由控制收敛定理可得

$$\lim_{\varpi\to\infty}\frac{1}{4\varpi^2}I_{11}^{\varpi}(s,x;t,y)=I_{11}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y).$$

我们指出，(2.8) 和 (2.9) 中的界保证了控制收敛定理的应用是合理的。利用 (2.8)、(2.10) 和 (2.11)，再应用两次控制收敛定理，可得

$$\lim_{\varpi\to\infty}I_{12}^{\varpi}(s,x;t,y)=I_{12}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y)\text{ and }\lim_{\varpi\to\infty}4\varpi^2I_{22}^{\varpi}(s,x;t,y)=I_{22}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y).$$

由最后两个展示的等式、$R_{12}^{\varpi}=R=R_{12}^{\mathrm{hs};\infty}$ 如 (1.2) 所示这一事实，以及 R_{22}^{ϖ} 的定义可知，要证明 (2.7)，还需证明

$$\lim_{\varpi\to\infty}\frac{H(s,x;t,y)}{\pi\mathsf{i}}\int_{\mathcal{C}_0^{\pi/2}}dw\frac{w\varpi^2e^{w^2(t+s)-w(t^2-s^2)+yw-xw}}{(w-\varpi)(w+\varpi)}=R_{22}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y).\tag{2.12}$$

通过分析指数的实部，我们可以找到 $C_1>0$，使得对于 $\varpi\geq 2$和 $w\in\mathcal{C}_0^{\pi/2}$，有

$$\left|\frac{w\varpi^2e^{w^2(t+s)-w(t^2-s^2)+yw-xw}}{(w-\varpi)(w+\varpi)}\right|\leq(1+|w|)\cdot\exp(C_1+C_1|w|-(s+t)|w|^2).$$

根据控制收敛定理，我们得出

$$\lim_{\varpi\to\infty}\frac{H(s,x;t,y)}{\pi\mathsf{i}}\int_{\mathcal{C}_0^{\pi/2}}dw\frac{w\varpi^2e^{w^2(t+s)-w(t^2-s^2)+yw-xw}}{(w-\varpi)(w+\varpi)}$$
$$=-\frac{H(s,x;t,y)}{\pi\mathsf{i}}\int_{\mathcal{C}_0^{\pi/2}}dw\cdot we^{w^2(t+s)-w(t^2-s^2)+yw-xw}.$$

因此，为了证明（2.12），还需证明

$$R_{22}^{\mathrm{hs};\infty}(s,x;t,y)=-\frac{H(s,x;t,y)}{\pi\mathsf{i}}\int_{\mathcal{C}_0^{\pi/2}}dw\cdot we^{w^2(t+s)-w(t^2-s^2)+yw-xw}. \tag{2.13}$$

作变量替换 $w=\mathsf{i}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t+s}}\cdot u$ 后，得到

$$\int_{\mathcal{C}_0^{\pi/2}}we^{w^2(t+s)-w(t^2-s^2)+yw-xw}dw=\frac{-\pi}{t+s}\int_{\mathbb{R}}u\exp\left(-\pi u^2-2\pi\mathsf{i}u\left[\frac{t^2-s^2}{2\sqrt{\pi(t+s)}}+\frac{x-y}{2\sqrt{\pi(t+s)}}\right]\right)$$
$$=\frac{1}{2\mathsf{i}(t+s)}\cdot\frac{d}{d\xi}F(\xi)|_{\xi=\xi_0},\ \text{where } F(\xi)=e^{-\pi\xi^2}\ \text{and}\ \xi_0=\frac{t^2-s^2+x-y}{2\sqrt{\pi(t+s)}}.$$

从第一行到第二行的推导中，我们使用了傅里叶变换的基本性质，见 [50,Chapter 5] 中的命题 1.2(v) 和定理 1.4。

最后一个展示的方程以及 $R_{22}^{\mathrm{hs};\infty}$ （1.13）中的定义给出了（2.13）。 □

2.3. 关于 $T\to\infty$ 的核渐近行为。 本节的目标是从定理 1.16 获得核 $K^{\mathrm{hs};\infty}(T+\cdot,\ \cdot;T+\cdot,\ \cdot)$ 的 $T\to\infty$ 极限。精确表述包含在下面的引理中。

引理 2.4。 固定 $A>0$、 s、 $t\in\mathbb{R}$，并令 $K^{\mathrm{hs};\infty}$ 如定理 *1.16* 中所述。则以下极限关于 x、$y\in[-A,A]$ 均一致成立

$$\lim_{T\to\infty}K_{11}^{\mathrm{hs};\infty}(T+s,x;T+t,y)=0, \tag{2.14}$$

$$\lim_{T\to\infty}K_{12}^{\mathrm{hs};\infty}(T+s,x;T+t,y)=K^{\mathrm{Airy}}(s,x;t,y), \tag{2.15}$$

$$\lim_{T\to\infty}K_{22}^{\mathrm{hs};\infty}(T+s,x;T+t,y)=0, \tag{2.16}$$

其中我们回顾一下， K^{Airy} 与 *(1.2)* 中相同。

证明。 在整个证明中， C_2 是一个较大的常数，它依赖于 s， t， A，其取值会随推导过程而变化。

我们首先 证明 (2.14)。由 (1.10) 可得 $K_{11}^{\mathrm{hs};\infty}=I_{11}^{\mathrm{hs};\infty}$ ，因此由 (1.11) 可得

$$K_{11}^{\mathrm{hs};\infty}(T+s,x;T+t,y)=\frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_{1+s}^{\pi/3}}dz\int_{\mathcal{C}_{1+t}^{\pi/3}}dw\frac{(z+s-w-t)H(z,x;w,y)}{4(z+s+w+t+2T)(z+s+T)(w+t+T)},$$

其中，我们分别将积分路径 $\mathcal{C}_{1+s+T}^{\pi/3}$、 $\mathcal{C}_{1+t+T}^{\pi/3}$ 变形为 $\mathcal{C}_{1+s}^{\pi/3}$、 $\mathcal{C}_{1+t}^{\pi/3}$，且没有穿过被积函数的任何极点，因此根据柯西定理，积分值不受影响。

注意，对于 $z\in\mathcal{C}_{1+s}^{\pi/3}$、 $w\in\mathcal{C}_{1+t}^{\pi/3}$，我们有

$$\left|\frac{(z+s-w-t)}{4(z+s+w+t+2T)(z+s+T)(w+t+T)}\right|\le\frac{|z|+|w|+|s|+|t|}{4T^3}.$$

后者与 (2.8) 推出存在某个 $C_2>0$

$$\left|K_{11}^{\mathrm{hs};\infty}(T+s,x;T+t,y)\right| \le \frac{1}{4T^3}\cdot\int_{\mathcal{C}_{1+s}^{\pi/3}}|dz|\int_{\mathcal{C}_{1+t}^{\pi/3}}|dw|(|z|+|w|+|s|+|t|)$$
$$\times e^{-|z|^3/3-|w|^3/3+C_1|z|^2+C_1|w|^2+C_1}\le C_2\cdot T^{-3},$$

这就推出了 (2.14)。我们指出，在最后一个积分中，$|dz|$ 和 $|dw|$ 表示关于弧长的积分。

接下来证明 (2.15)。根据 K^{Airy} 的定义以及等式 $R_{12}^{\mathrm{hs};\infty}(T+s,x;\,T+t,y)=R(s,x;\,t,y)$，见 (1.2)，我们只需证明对所有 $x,y\in[-A,A]$，以下结论一致成立：

$$\lim_{T\to\infty} I_{12}^{\mathrm{hs};\infty}(T+s,x;T+t,y)=\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_{\mathcal{C}_\alpha^{\pi/3}}dz\int_{\mathcal{C}_\beta^{\pi/3}}dw\frac{H(z,x;w,y)}{z+s+w-t}, \tag{2.17}$$

其中 $\alpha+s+\beta-t>0$。为明确起见，令 $\alpha=1-s$ 和 $\beta=t+1$。

在 (1.11) 中，我们将 $\mathcal{C}_{1+s+T}^{\pi/3},\mathcal{C}_{1+t+T}^{\pi/3}$ 分别变形为 $\mathcal{C}_\alpha^{\pi/3},\mathcal{C}_\beta^{\pi/3}$，且不穿过任何极点，从而得到

$$I_{12}^{\mathrm{hs};\infty}(T+s,x;T+t,y)=\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_{\mathcal{C}_\alpha^{\pi/3}}dz\int_{\mathcal{C}_\beta^{\pi/3}}dw\frac{(z+s-w+t+2T)H(z,x;w,y)}{2(z+s+T)(z+s+w-t)}.$$

注意，上述被积函数逐点收敛于 (2.17) 右侧的被积函数。此外，利用 (2.8)，我们得出，对某个 $C_2>0$ 以及所有 $z\in\mathcal{C}_\alpha^{\pi/3},w\in\mathcal{C}_\beta^{\pi/3}$

$$\left|\frac{(z+s-w+t+2T)H(z,x;w,y)}{2(z+s+T)(z+s+w-t)}\right|\le C_2(1+|z|+|w|)\cdot e^{-|z|^3/3-|w|^3/3+C_1|z|^2+C_1|w|^2+C_1}.$$

由控制收敛定理，我们得到 (2.17)。

最后证明 (2.16)。我们先证明 $K_{22}^{\mathrm{hs};\infty}$ 的一个替代公式，见 (2.22)，然后在这个新公式中取 $T\to\infty$ 极限。

接下来，我们假设 T 很大，使得 $T>-s$, $T>-t$, $T>2-s$, $2T>2-s-t$。在 (1.11) 中，我们分别将 $\mathcal{C}_{1+s+T}^{\pi/3},\mathcal{C}_{1+t+T}^{\pi/3}$ 变形为 $\mathcal{C}_{1+s+T}^{\pi/2},\mathcal{C}_{1+t+T}^{\pi/2}$，且不穿过任何极点，从而得到

$$I_{22}^{\mathrm{hs};\infty}(s+T,x;t+T,y)=\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_{\mathcal{C}_{1+s+T}^{\pi/2}}dz\int_{\mathcal{C}_{1+t+T}^{\pi/2}}dw\frac{(z-s-w+t)H(z,x;w,y)}{z-s+w-t-2T}. \tag{2.18}$$

需要指出的是，无穷远附近的变形是合理的，因为对于满足 $c>0$, $d\ge0$ 和 $\phi\in[\pi/3,\pi/2]\cup[-\pi/2,-\pi/3]$ 的 $\zeta=c+de^{\mathrm{i}\phi}$，我们有

$$\begin{aligned}&\left|e^{\zeta^3/3}\right|=e^{\mathrm{Re}\,[\zeta^3/3]}=e^{c^3/3+[d^3/3]\cos(\phi)[\cos^2(\phi)-3\sin^2(\phi)]+cd^2(\cos^2(\phi)-\sin^2(\phi))+c^2d\cos(\phi)}\\&\le e^{c^3/3-cd^2/2+c^2d}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

现在我们将(2.18)中的 z围道 $\mathcal{C}_{1+s+T}^{\pi/2}$ 变形为 $\mathcal{C}_1^{\pi/2}$。在变形过程中，我们穿过了位于 $z=2T+s+t-w$处的简单极点（此处使用了 $T>2-s$）。随后，我们将w围道 $\mathcal{C}_{1+t+T}^{\pi/2}$变形为 $\mathcal{C}_1^{\pi/2}$，且没有穿过任何极点（此处使用了 $2T>2-s-t$）。根据留数定理，我们得到

$$\begin{aligned}I_{22}^{\mathrm{hs};\infty}(s+T,x;t+T,y)&=\frac{1}{(2\pi\mathrm{i})^2}\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/2}}dz\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/2}}dw\frac{(z-s-w+t)H(z,x;w,y)}{z-s+w-t-2T}\\&+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\mathcal{C}_{1+t+T}^{\pi/2}}dw(2T-2w+2t)H(s+t+2T-w,x;w,y).\end{aligned} \tag{2.20}$$

在(2.13)中作变量代换 $w \to -w$ ，并将围道 $\mathcal{C}_0^{\pi/2}$ 变形为 $\mathcal{C}_1^{\pi/2}$ ，我们得到

$$R_{22}^{\mathrm{hs};\infty}(s+T,x;t+T,y) = \frac{H(s+T,x;t+T,y)}{\pi \mathsf{i}} \times \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/2}} dw \cdot w e^{w^2(t+s+2T)+w(t^2-s^2+2Tt-2Ts)-yw+xw}. \tag{2.21}$$

现在我们注意到（通过变量替换 $w \to w+T+t$），(2.20) 的第二行恰好是$-R_{22}^{\mathrm{hs};\infty}(s+T,\ x;t+T,\ y)$。因此，将 (2.20) 和 (2.21) 相加，我们得到

$$K_{22}^{\mathrm{hs};\infty}(s+T,x;t+T,y) = \frac{1}{(2\pi \mathsf{i})^2} \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/2}} dz \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/2}} dw \frac{(z-s-w+t)H(z,x;w,y)}{z-s+w-t-2T}. \tag{2.22}$$

这就是我们所需的公式，下面我们在其中取 $T \to \infty$ 。

由 (2.22) 以及取 $c=1$ 时的 (2.19)，可知存在某个 $C_2>0$ ，使得对所有充分大的 T

$$\left|K_{22}^{\mathrm{hs};\infty}(s+T,x;t+T,y)\right| \le \frac{1}{T} \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/2}} |dz| \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/2}} |dw| (|z|+|w|+|s|+|t|) \times e^{C_2-|z-1|^2/2-|w-1|^2/2+C_2|z|+C_2|w|},$$

这就推出了 (2.16)。 □

3. 有限维收敛

本节将建立定理 1.13（见引理 3.5）和定理 1.23（见引理 3.7）的有限维类比。

3.1. 从上方紧性。 本节的目标是证明，对于每个 $t>0$ ，变量$\{\mathcal{A}_1^{\mathrm{hs};\varpi}(t):\ \varpi \ge 2\}$ 从上方紧。精确表述如下引理所示。

引理 3.1。 设 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 如命题 *1.10* 所述。则有

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{t>0} \sup_{\varpi \ge 2} \mathbb{P}\left(\mathcal{A}_1^{\mathrm{hs};\varpi}(t) \ge a\right) = 0. \tag{3.1}$$

证明。 对于 $t>0$ 和 $\varpi \in \mathbb{R}$，定义 $\mathbb{R}$ 上的随机测度为

$$M^{t;\mathrm{hs};\varpi}(A) = \sum_{i\ge 1} \mathbf{1}\{\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\varpi}(t) \in A\}. \tag{3.2}$$

根据命题 1.10、引理 2.2 和 [34, 引理 5.13], ，对所有 $\varpi > 1$, $M^{t;\mathrm{hs};\varpi}$ ，这是定义在 $\mathbb{R}$ 上、参考测度为勒贝格测度 Leb、相关核为 $K^{\varpi}(t,x;t,y)$ 的 Pfaffian 点过程。因此

$$\sum_{i\ge 1} \mathbb{P}\left(\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\varpi}(t) \ge a\right) = \mathbb{E}\left[\sum_{i\ge 1} \mathbf{1}\{\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\varpi}(t) \in [a,\infty)\}\right] = \mathbb{E}\left[M^{t;\mathrm{hs};\varpi}([a,\infty))\right]. \tag{3.3}$$

由 [30,(2.13)] 和 [34,(5.12)], 得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M^{t;\mathrm{hs};\varpi}([a,\infty))\right] &= \int_a^\infty K_{12}^{\varpi}(t,x;t,x)dx \\ &= \frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_a^\infty dx\int_{\mathcal{C}_{1+t}^{\pi/3}}dz\int_{\mathcal{C}_{1+t}^{\pi/3}}dw\frac{(z-w+2t)(\varpi+z+t)H(z,x;w,x)}{2(z+t)(z+w)(\varpi-w+t)} \\ &= \frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_a^\infty dx\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}}dz\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}}dw\frac{(z-w+2t)(\varpi+z+t)H(z,x;w,x)}{2(z+t)(z+w)(\varpi-w+t)} \\ &= \frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}}dz\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}}dw\frac{(z-w+2t)(\varpi+z+t)\cdot e^{z^3/3+w^3/3}}{2(z+t)(z+w)(\varpi-w+t)}\cdot\int_a^\infty e^{-(z+w)x}dx \\ &= \frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}}dz\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}}dw\frac{(z-w+2t)(\varpi+z+t)\cdot e^{z^3/3+w^3/3}}{2(z+t)(z+w)^2(\varpi-w+t)}\cdot e^{-(z+w)a},\end{aligned}$$

其中，在第二步中我们使用了 K_{12}^{ϖ} 的定义，并注意到在（t，x；t，x）处有 $R_{12}^{\varpi}=R=0$；在第三步中，我们将围道 $\mathcal{C}_{1+t}^{\pi/3}$（对于 z 和 w）变形为 $\mathcal{C}_1^{\pi/3}$，且没有穿过任何极点，因为 $\varpi>1$；在第四步中，我们使用Fubini定理交换了积分次序，这一点由 $e^{z^3/3+w^3/3}$ 中的三次衰减以及当 $x>0$和 z，$w\in\mathcal{C}_1^{\pi/3}$ 时 $|e^{-(z+w)x}|\le e^{-2x}$ 这一事实得到证明；最后一步则计算了关于 x的积分。

接下来我们估计被积函数的绝对值。对于任意 z，$w\in\mathcal{C}_1^{\pi/3}$、$t>0$ 和 $\varpi\ge 2$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-w+2t}{2(z+t)}\right| &\le 1+\frac{|w+z|}{|2(z+t)|}\le 1+\frac{1}{2}|w+z|\le 1+2|z|+2|w|,\\ \left|\frac{\varpi+z+t}{\varpi-w+t}\right| &\le 1+\frac{|z+w|}{|\varpi-w+t|}\le 1+\frac{2}{\sqrt{3}}|z+w|\le 1+2|z|+2|w|.\end{aligned}$$

在第一行中我们使用了 $|2(z+t)|\ge 2$，在第二行中使用了 $|\varpi-w+t|\ge\sqrt{3}/2$。我们还注意到，对于 $a>0$，有 $|e^{-(z+w)a}|\le e^{-2a}$。因此，对于 $a>0$，我们有

$$\sup_{t>0}\sup_{\varpi\ge 2}\mathbb{E}\left[M^{t;\mathrm{hs};\varpi}([a,\infty))\right]\le\frac{e^{-2a}}{4\pi^2}\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}}|dz|\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}}|dw|\,(1+2|z|+2|w|)^2\cdot\left|\frac{e^{z^3/3+w^3/3}}{(z+w)^2}\right|,$$

其收敛于 0，因为积分有限。利用 (3.3)，我们得出证明 f. □

3.2. **点过程收敛**。本节中，我们证明命题 1.10 中的点过程 $M^{\mathsf{S};\mathrm{hs};\varpi}$ 弱收敛于 Pfaffian 点过程 $M^{\mathsf{S};\infty}$，当 $\varpi\to\infty$ 时。随后，我们证明经过适当平移后，$M^{T+\mathsf{S};\infty}$ 当 $T\to\infty$ 时收敛于 (1.1) 中的扩展Airy点过程 $M_{\mathsf{S};\mathcal{A}}$。我们的证明结合了第2.2节和第2.3节中的核收敛结果，以及 [34] 中的若干结论。

引理 3.2。沿用命题 *1.10* 和定理 *1.16* 中的记号，则以下结论成立。

(a) 取有限集 $S=\{s_1,\dots,s_m\}\subset(0,\infty)$，其中 $s_1<s_2<\cdots<s_m$。则 $M^{S;\mathrm{hs};\varpi}\Rightarrow M^{\mathsf{S};\infty}$ 当 $\varpi\to\infty$ 时成立，其中 $M^{\mathsf{S};\infty}$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上、参考测度为 $\mu_{\mathsf{S}}\times$ *Leb*、相关核为 $K^{\mathrm{hs};\infty}$ 的 *Pfaffian* 点过程。*(b)* 对固定的 $t>0$ 和 $\varpi\in\mathbb{R}$，令 $M^{t;\mathrm{hs};\varpi}$ 如 *(3.2)* 中所示。则 $M^{t;\mathrm{hs};\varpi}\Rightarrow M^{t;\infty}$ 当 $\varpi\to\infty$ 时成立，其中 $M^{t;\infty}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上、参考测度为 *Leb*、相关核为 $K^{t;\infty}(x,y)=K^{\mathrm{hs};\infty}(t,x;t,y)$ 的 *Pfaffian* 点过程。

证明。由命题 1.10、引理 2.2 以及 [34, 命题 5.8(4)] 与 $f(x)=1/(2\varpi)$ 可知，对于所有 $\varpi>1$，$M^{\mathsf{S};\mathrm{hs};\varpi}$ 都是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上、以 $\mu_{\mathsf{S}}\times$ 勒贝格测度为参考测度的 Pfaffian 点过程，并且其

相关核

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4\varpi^2}K_{11}^{\varpi}(s,x;t,y) & K_{12}^{\varpi}(s,x;t,y) \\ K_{21}^{\varpi}(s,x;t,y) & 4\varpi^2 K_{22}^{\varpi}(s,x;t,y) \end{bmatrix}.$$

部分 (a) 现由 [34, 命题 5.10], 得出，其条件根据引理 2.3 以及 $K_{ij}^{\mathrm{hs};\infty}(s,\ x;t,\ y)$ 在 $(x,\ y)$ 上对固定的 $s,\ t>0$ 的连续性而得到满足。

由命题 1.10、引理 2.2, [34, 、引理 5.13], 以及 [34, 命题 5.8(4)] ，其中 $f(x)=1/(2\varpi)$，可知对所有 $\varpi>1$ ， $M^{t;\mathrm{hs};\varpi}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上、参考测度为勒贝格测度 Leb 且相关核为下式的 Pfaffian 点过程

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4\varpi^2}K_{11}^{\varpi}(t,x;t,y) & K_{12}^{\varpi}(t,x;t,y) \\ K_{21}^{\varpi}(t,x;t,y) & 4\varpi^2 K_{22}^{\varpi}(t,x;t,y) \end{bmatrix}.$$

部分 (b) 现由引理 2.3 和 [34, 命题 5.10] 得出。 □

引理 3.3。 设定义 *1.4* 和引理 *3.2* 中的记号相同。则以下陈述成立。

(a) 固定一个有限集合 $\mathsf{S}=\{s_1,\ldots,s_m\}\subset\mathbb{R}$，满足 $s_1<s_2<\cdots<s_m$，并令 $T+\mathsf{S}:=\{T+s_1,T+s_2,\ldots\ldots,\ T+s_m\}$。若 $\phi_T(s,\ x)=(s-T,\ x)$，则 $M^{T+\mathsf{S};\ \infty}\phi_T^{-1}\Rightarrow M^{\mathsf{S};\ \mathcal{A}}$ 当 $T\to\infty$ 时。*(b)* 对固定的 $t_0\in\mathbb{R}$，通过下式定义 $\mathbb{R}$ 上的随机测度

$$M^{t_0;\mathcal{A}}(A)=\sum_{i\geq 1}\mathbf{1}\{\mathcal{A}_i(t_0)\in A\}. \tag{3.4}$$

于是 $M^{T+t_0;\ \infty}\Rightarrow M^{t_0;\ \mathcal{A}}$ 当 $T\to\infty$ 时。

证明。 由引理 3.2(a) 和 [34, 命题 5.8(5)],, 对于 $T>-s_1$，我们有 $M^{T+\mathsf{S};\ \infty}\phi_T^{-1}$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上、以 $\mu_{\mathsf{S}}\times$勒贝格测度为参考测度且相关核为下式的 Pfaffian 点过程:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{\mathrm{hs};\infty}(T+s,x;T+t,y) & K_{12}^{\mathrm{hs};\infty}(T+s,x;T+t,y) \\ K_{21}^{\mathrm{hs};\infty}(T+s,x;T+t,y) & K_{22}^{\mathrm{hs};\infty}(T+s,x;T+t,y) \end{bmatrix}.$$

由引理 2.4 和 [34, 命题 5.10],, 我们得出 $M^{T+\mathsf{S};\ \infty}\phi_T^{-1}$ 收敛到一个定义在 $\mathbb{R}^2$ 上、以 $\mu_{\mathsf{S}}\times$勒贝格测度为参考测度且相关核为下式的 Pfaffian 点过程:

$$\begin{bmatrix} 0 & K^{\mathrm{Airy}}(s,x;t,y) \\ -K^{\mathrm{Airy}}(t,y;s,x) & 0 \end{bmatrix}.$$

由 [34, 引理 5.9] 和 [30, 命题 2.13(3)], 我们得出该极限点过程与 $M^{\mathsf{S};\mathcal{A}}$ 具有相同的分布。这就证明了 (a) 部分。

由引理 3.2(b)、 [34, 引理 5.13] 和 [34, 命题 5.8(5)], , 对于 $T>-t_0$ ，我们有$M^{T+t_0;\ \infty}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上、以勒贝格测度为参考测度且相关核为下式的 Pfaffian 点过程:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{\mathrm{hs};\infty}(T+t_0,x;T+t_0,y) & K_{12}^{\mathrm{hs};\infty}(T+t_0,x;T+t_0,y) \\ K_{21}^{\mathrm{hs};\infty}(T+t_0,x;T+t_0,y) & K_{22}^{\mathrm{hs};\infty}(T+t_0,x;T+t_0,y) \end{bmatrix}.$$

由引理 2.4 和 [34, 命题 5.10], 可得， $M^{T+t_0;\ \infty}$收敛到 $\mathbb{R}$上的一个 Pfaffian 点过程，其参考测度为勒贝格测度，相关核为

$$\begin{bmatrix} 0 & K^{\mathrm{Airy}}(t_0,x;t_0,y) \\ -K^{\mathrm{Airy}}(t_0,y;t_0,x) & 0 \end{bmatrix}.$$

由 [34, 引理 5.9]和 [30,命题 2.13(3)], ， 我们得出该极限点过程与 $M^{t_0;\mathcal{A}}$具有相同的分布。这就证明了（b）部分。□

3.3. 的有限维收敛 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\varpi}$。 本节旨在证明定理 1.13 的有限维版本——即下文的引理 3.5。为了确立该结果，我们需要以下辅助引理，其证明将推迟至第 5.4 节。

引理 3.4. F 对于固定的 $t>0$，令 $M^{t;\infty}$ 如引理 *3.2(b)* 中所述。于是 $\mathbb{P}\left(M^{t;\infty}(\mathbb{R})=\infty\right)=1$。

引理 3.5. 采用命题 *1.10* 中的相同记号。固定一个有限集 $\mathsf{S}=\{s_1,\dots,s_m\}\subset(0,\infty)$，满足 $s_1<s_2<\cdots<s_m$。那么，对于某个 $X^{\mathsf{S}}=\left(X_i^{j,\mathsf{S}}:\ i\geq 1, j=1,\dots,m\right)\in\mathbb{R}^{\infty}$

$$\left(\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\varpi}(s_j):i\geq 1,j=1,\dots,m\right)\overset{f.d.}{\to}\left(X_i^{j,\mathsf{S}}:i\geq 1,j=1,\dots,m\right)$$

当 $\varpi\to\infty$ 时。此外，我们有向量 X^{S} 几乎处处满足

$$X_1^{j,\mathsf{S}}>X_2^{j,\mathsf{S}}>\cdots \text{ for } j=1,\dots,m, \tag{3.5}$$

并且，如果我们将随机测度 $M^{\mathsf{S};X}$ 定义在 $\mathbb{R}^2$ 上，使其满足

$$M^{\mathsf{S};X}(A)=\sum_{i\geq 1}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{1}\{(s_j,X_i^{j,\mathsf{S}})\in A\}, \tag{3.6}$$

那么 $M^{\mathsf{S};X}$ 是一个与引理 *3.2(a)* 中的 $M^{\mathsf{S};\infty}$ 具有相同分布的点过程。

注 3.6。由 [30, 推论 2.20] 可知，(3.5) 和 $M^{\mathsf{S};X}\overset{d}{=}M^{\mathsf{S};\infty}$ 唯一确定了 X^{S} 的分布。

证明。我们只需对每个满足 $\varpi_k\to\infty$ as $k\to\infty$ 的序列 $\varpi_k\in\mathbb{R}, k=1,\ 2,$ ..... 证明该结果，因为根据注 3.6，极限向量 X^{S} 对每个这样的序列都具有相同的分布。假设

pp对于每个 $i\geq 1$ 和 $j=1,\cdots,m$, 我们知道

$$\{\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\varpi_k}(s_j)\}_{k\geq 1}\text{ is tight.} \tag{3.7}$$

由引理 3.2(a)可知，$M^{\mathsf{S};\mathrm{hs};\varpi_k}\Rightarrow M^{\mathsf{S};\infty}$ 当 $k\to\infty$时成立。后者与 (3.7) 验证了 [30,命题 2.19], 的条件，从而推出该引理的结论，但其仅能保证

$$X_1^{j,\mathsf{S}}\geq X_2^{j,\mathsf{S}}\geq\cdots \text{ for } j=1,\dots,m.$$

下面简要说明如何由此得到 (3.5)。到目前为止，我们已经证明了 $M^{\mathsf{S};X}\overset{d}{=}M^{\mathsf{S};\infty}$，根据引理 3.2(b)，这是 $\mathbb{R}^2$上的 Pfaffian 点过程。由 [34, 命题 5.8(1)], 可得，$M^{\mathsf{S};X}$ 是一个简单点过程，因此几乎处处 $\{X_i^{j,\mathsf{S}}\}_{i\geq 1}$ 两两不同，从而得到 (3.5)。

在证明的其余部分，我们证明 (3.7)。固定 $j\in\{1,\dots,m\}$。为了证明 (3.7)，我们希望将 [30, 命题 2.21] 应用于 $\mathbb{R}^{\infty}$中的随机向量序列 $(\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\varpi_k}(s_j):\ i\geq 1),\ k=1,\ 2,\ \dots$。

由引理 3.2(b)，测度 $M^{s_j;\mathrm{hs};\varpi_k}$弱收敛于 $M^{s_j;\infty}$（当 $k\to\infty$ 时），从而验证了 [30, 命题 2.21]中的条件 (1)。此外，由引理 3.4 可知它们满足条件 (2)，由引理 3.1 可知它们满足条件 (3)。根据 [30, 命题 2.21]，我们得出 (3.7)。□

3.4. 的有限维收敛 X^{S}。本节旨在证明定理 1.23 的有限维版本。具体陈述见下述引理。

引理 3.7。取有限集 $\mathsf{S}=\{s_1,\dots,s_m\}\subset\mathbb{R}$，满足 $s_1<s_2<\cdots<s_m$，并令 $T+\mathsf{S}:=\{T+s_1,T+s_2,\dots,T+s_m\}$ $T>-s_1$ $X^{T+\mathsf{S}}$ *3 5* $X^{T+\mathsf{S}}\overset{f.d.}{\to}$。对于，令其如引理 所述。则，$(\mathcal{A}_i(s_j):\ i\geq 1,j=1,\dots,m)$ 当 $T\to\infty$ 时，其中 $\mathcal{A}$ 是定义 *1.4* 中的 *Airy* 线系综。

证明。 证明与上文引理 3.5 的证明类似。和之前一样，只需对每个满足 $T_k \to \infty$ 的序列 $T_k > -s_1$, $k = 1, 2, \ldots$ 证明结果，其中 $k \to \infty$。

假设对于每个 $i \geq 1$ 和 $j = 1, \ldots\ldots, m$，我们都知道

$$\{X_i^{j;T_k+\mathsf{S}}\}_{k\geq 1} \text{ is tight.} \tag{3.8}$$

根据引理 3.5，我们知道对于 $T_k > -s_1$ ，这些测度

$$\tilde{M}^{\mathsf{S};k}(A) = \sum_{i\geq 1}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{1}\{(s_j, X_i^{j,T_k+\mathsf{S}}) \in A\}$$

与 $M^{T_k+\mathsf{S};\infty}\phi_{T_k}^{-1}$ 具有相同的分布，其中 $\phi_T(s, x) = (s - T, x)$。根据引理 3.3(a)，我们得出 $\tilde{M}^{\mathsf{S};k} \Rightarrow M^{\mathsf{S};\mathcal{A}}$，当 $k \to \infty$时成立。后者与 (3.8) 验证了命题 2.19],的条件，从而推出引理中的结论。因此，我们只需证明 (3.8)。

固定 $j \in \{1, \ldots, m\}$。为了证明 (3.8)，我们试图将命题 2.21] 应用于由 $\mathbb{R}^\infty$中的随机向量构成的序列 $(X^{j,T_k+\mathsf{S}i} : i \geq 1)$, $k = 1, 2, \ldots\ldots$。如果我们证明这三个条件均得到满足，该命题便可推出 (3.8)。

我们定义在 $\mathbb{R}$ 上的随机测度

$$\tilde{M}^{s_j;k}(A) = \sum_{i\geq 1} \mathbf{1}\{X_i^{j,T_k+\mathsf{S}} \in A\},$$

并注意到 $\tilde{M}^{s_j;\,k} \stackrel{d}{=} M^{T_k+s_j;\,\infty}$，其中后者如引理 3.3(b) 所述。理解后者的一种方法是利用这两个测度都是定义在 $\mathbb{R}$ 上、具有相同参考测度和相关核的 Pfaffian 点过程（由引理 3.2(b)、引理 3.5 和 [34, 引理 5.13] 可知），因此根据 [34, 命题 5.8(3)]，它们具有相同的分布。

由上述观察和引理 3.3(b)，我们得出 $\tilde{M}^{s_j;\,k} \Rightarrow M^{s_j;\,\mathcal{A}}$，这验证了 [30,命题 2.21] 中的条件 (1)。条件 (2) 则由一个众所周知的事实推出：Airy 点过程几乎处处有无限多个原子，参见例如 [30,公式 (7.11)]。

由引理 3.5， $\mathcal{A}_1^{\mathrm{hs};\varpi}(T_k+s_j) \Rightarrow X^{j,\,T_k+\mathsf{S}\,1}$ 当 $\varpi \to \infty$ 时。由 Portmanteau 定理，我们对每个 $a > 0$ 得出

$$\mathbb{P}\left(X_1^{j,T_k+\mathsf{S}} > a\right) \leq \liminf_{\varpi\to\infty} \mathbb{P}\left(\mathcal{A}_1^{\mathrm{hs};\varpi}(T_k + s_j) > a\right) \leq \sup_{t>0}\sup_{\varpi\geq 2} \mathbb{P}\left(\mathcal{A}_1^{\mathrm{hs};\varpi}(t) \geq a\right).$$

对两边取上极限$a\to\infty$ 并应用引理 3.1，我们得出

$$\limsup_{a\to\infty} \mathbb{P}\left(X_1^{j,T_k+\mathsf{S}} > a\right) = 0,$$

从而验证了 [30, 命题 2.21]中的最后一个条件 (3)。 □

4. Gibbs 线系综

在命题 1.10 中，我们提到 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi}$ 满足半空间布朗吉布斯性质，该性质通过具有交替漂移的互不相交的反向布朗运动对这一系综作出局部描述；精确定义见定义 4.9。本节旨在利用这一性质确立三个关键结论。

第一个是引理 4.20，它给出了若干互不相交的反向布朗运动的连续模估计。这将在定理 1.13 的证明中用于建立紧性，并将引理 3.5 中的有限维收敛结果提升为函数型极限结论。

第二个是引理 4.19，它将使我们能够对每个 $t \in (0, T)$，把某些信息从 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi}(T)$ 传回 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi}(t)$。后者将以一种不平凡的方式用于“无限多个原子”引理（引理 3.4）的证明，因为它实际上使我们能够对每个 $t \in (0, \infty)$，将同一种传递机制从 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi}(\infty)$ 应用于 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi}(t)$。

第三个是引理 4.18，它基本上指出，在 $\varpi \to \infty$ 极限下，半空间布朗吉布斯性质会变为钉扎半空间布朗吉布斯性质。这将用于定理 1.20 的证明。

4.1. 线系综的定义与记号。 本节回顾一些关于线系综的基本定义和记号，主要遵循 [34, 第 2] 节。

给定两个整数 $a \le b$，我们令 $[\![a,b]\!]$ 表示集合 $\{a, a+1, \dots, b\}$。当 $a > b$, $[\![a, \infty]\!] = \{a, a+1, a+2, \dots\}$, $[\![-\infty, b]\!] = \{b, b-1, b-2, \dots\}$ 且 $[\![-\infty, \infty]\!] = \mathbb{Z}$ 时，我们还令 $[\![a, b]\!] = \emptyset$。给定一个区间 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$，我们赋予它 $\mathbb{R}$ 上通常拓扑的子空间拓扑。我们用 $(C(\Lambda)\ \mathcal{C})$ 表示连续函数 $f\colon \Lambda \to \mathbb{R}$ 所构成的空间，该空间赋予紧集上一致收敛拓扑，参见 [43, 第 7 章第 46], 节，以及 Borel σ-代数 $\mathcal{C}$。给定一个集合 $\Sigma \subseteq \mathbb{Z}$，我们赋予它离散拓扑，并用 $\Sigma \times \Lambda$ 表示所有满足 $i \in \Sigma$ 且 $x \in \Lambda$ 的有序对 (i, x) 所构成的集合，并赋予其积拓扑。我们还用 $(C(\Sigma \times \Lambda)\ \mathcal{C}_\Sigma)$ 表示 $\Sigma \times \Lambda$ 上实值连续函数所构成的空间，该空间赋予紧集上一致收敛拓扑，且具有 Borel σ- 代数 $\mathcal{C}_\Sigma$。通常我们取 $\Sigma = [\![1, N]\!]$，并令 $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。下面给出线系综的定义。

定义 4.1. 设 $\Sigma \subseteq \mathbb{Z}$ 和 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间。Σ索引线系综 $\mathcal{L}$ 是定义在概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上、取值于 $(C(\Sigma \times \Lambda)\ \mathcal{C}_\Sigma)$ 的随机变量。直观地说，$\mathcal{L}$是一组由 Σ索引的随机连续曲线（有时称为线），每条曲线都将 Λ映射到 $\mathbb{R}$。我们通常会稍微滥用记号，写作 $\mathcal{L}\colon \Sigma \times \Lambda \to \mathbb{R}$，尽管作为函数的并非 $\mathcal{L}$ 本身，而是对每个 $\omega \in \Omega$，$\mathcal{L}(\omega)$ 都是这样的函数。对于 $i \in \Sigma$，我们将曲线写作 $\mathcal{L}_i(\omega) = (\mathcal{L}(\omega))(i, \cdot)$，其指标为 i；并注意，后者是一个映射 $\mathcal{L}_i : \Omega \to C(\Lambda)$，且是 $\mathcal{F}/\mathcal{C}$ 可测的。若 $a, b \in \Lambda$ 满足 $a \le b$，我们用 $\mathcal{L}_i[a, b]$ 表示 $\mathcal{L}_i$ 在 $[a, b]$上的限制。我们还回顾一下，有序线系综和不相交线系综的概念已在定义 1.3 中引入。

注4.2。如 [32, 引理 2.2], 所示，$C(\Sigma \times \Lambda)$ 是一个波兰空间，因此线系综 $\mathcal{L}$ 就是 $C(\Sigma \times \Lambda)$ 中的随机元素，其意义见 [17, 第 3]节。

我们用 W_t 表示标准一维布朗运动；若 $y,\ \mu \in \mathbb{R}$，则定义从 $B(0) = y$ 出发、漂移为的布朗运动 μ 为

$$B(t) = y + W_t + \mu t. \tag{4.1}$$

若 $b \in (0, \infty)$，我们还定义从 $B(b) = y$ 出发、漂移为 μ 的反向布朗运动为

$$B(t) = B(b - t) \text{ for } 0 \le t \le b. \tag{4.2}$$

对于 $k \in \mathbb{N}$，我们用 W_k°和 W_k表示 $\mathbb{R}^k$中的开魏尔腔和闭魏尔腔，即

$$W_k^\circ = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : x_1 > x_2 > \cdots > x_k\},\ \overline{W}_k = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_k\}. \tag{4.3}$$

接下来，我们定义避开 g 的反向布朗线系综。

定义 4.3. 假设 $\vec{y}, \vec{\mu} \in \mathbb{R}^k$, $b > 0$和 $g\colon [0, b] \to [-\infty, \infty)$ 是一个连续函数（即，要么处处为 $g \in C([0, b])$, 要么处处为 $g = -\infty$），且 $g(b) < y_k$。我们将定义在 $[0, b]$ 上的 k 个相互独立的反向布朗运动的分布记为 $\mathbb{P}^{b,\vec{y},\vec{\mu}}$ free，其中这些运动的漂移为 μ_i，并且满足 B_i 和 $B_i(b) = y_i$；将关于此测度的期望记为 $\mathbb{E}^{b,\vec{y},\vec{\mu}}$ free。若 $\vec{y} \in W_k^\circ$，我们还将 $\mathbb{P}^{b,\vec{y},\vec{\mu},g}$ avoid 定义为 $\mathbb{P}^{b,\vec{y},\vec{\mu}}$ free 在事件以下条件下的分布

$$E_{\text{avoid}} = \left\{ B_1(r) > B_2(r) > \cdots > B_k(r) > g(r) \text{ for all } r \in [0, b] \right\},$$

并记 $\mathbb{E}^{b,\vec{y},\vec{\mu},g}$ 表示相对于此测度的期望。当 $g = -\infty$ 时，我们省略最后一个上标。

注记 4.4. 如 [34, 注记 2.6], 中所述，我们有 $\mathbb{P}^{b,\vec{y},\vec{\mu}}$ 自由 $(E_{\text{avoid}}) > 0$，因此 $\mathbb{P}^{b,\vec{y},\vec{\mu},g}$ 避开是良定义的；类似论证见 [33, 定义 2.4] 。

接下来，我们定义边界处具有成对钉扎的互不相交布朗线系综。Das 与第二作者在 [27] 中引入了这一性质；下文基本上是对其中定义的重述，只是采用了更接近本文的记号。我们首先需要定义三维贝塞尔桥。

定义 4.5. 设 $b, y > 0$。令 $\{\vec{W}_t\}_{t\geq 0}$ 为标准三维布朗运动。在 $[0,b]$ 上从 y 出发的三维贝塞尔桥 是随机过程 $\{V_t = \|\vec{W}_t\|_2 \colon t \in [0,b]\}$ 在给定$V_b = y$的条件下得到。（关于此条件的形式化定义，见 [47, 第 XI 节3]。）

注 4.6. 从 $\{V_t\}_{t\in[0,b]}$ 到 y 的三维贝塞尔桥 $\{V_t\}_{t\in[0,b]}$ 由其有限维分布唯一确定，这些分布可见于 [47, 第 464]，页，下面我们将回顾它们。对于 $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$，定义标准热核 $p_t(x,y) = (2\pi t)^{-1/2} e^{-(x-y)^2/2t}$。固定 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < t_{k+1} = b$,$y_1, \ldots, y_k > 0$，以及 $y_{k+1} = y$。那么 $(V_{t_1}, \ldots, V_{t_k})$ 的联合密度 $f_{(t_1,\ldots,t_k)}$ 为

$$f_{(t_1,\ldots,t_k)}(y_1,\ldots,y_k) = \frac{b}{t_1}\cdot\frac{y_1}{y}\cdot\frac{p_{t_1}(0,y_1)}{p_b(0,y)}\prod_{i=1}^{k}\left[p_{t_{i+1}-t_i}(y_i,y_{i+1}) - p_{t_{i+1}-t_i}(y_i,-y_{i+1})\right]. \tag{4.4}$$

接下来我们定义避开 g 的钉扎反向布朗线系。

定义 4.7. 设 $\vec{y} \in W_{2k}^{\circ}$、 $b > 0$ 和 $g\colon [0,b] \to [-\infty,\infty)$ 是一个连续函数，且 $g(b) < y_{2k}$。令 $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ 为定义在 $[0,b]$ 上、从 $U_i(b)$ 到 $= 2^{-1/2}(y_{2i-1} + y_{2i})$ 的相互独立的反向布朗运动（无漂移），并令 $\{V_i\}_{i=1}^{k}$ 为定义 4.5 中所述、定义在 $[0,b]$ 上且终止于 $V_i(b) = 2^{-1/2}(y_{2i-1} - y_{2i})$ 的相互独立的三维贝塞尔桥。对 $1 \leq i \leq k$，定义 $B_{2i-1} = 2^{-1/2}(U_i + V_i)$ 和$B_{2i} = 2^{-1/2}(U_i - V_i)$。于是我们用 $\mathbb{P}^{b,\vec{y},g}$ 钉扎表示 $\{B_i\}_{i=1}^{2k}$ 在以下事件条件下的分布

$$E_{\text{avoid}}^{\text{pin}} = \{B_{2i}(r) > B_{2i+1}(r) \text{ for all } i \in [\![1,k]\!],\, r \in (0,b)\},$$

其中 $B_{2k+1} = g$。关于此分布的期望记为 $\mathbb{E}^{b,\,\vec{y},\,g}$ 钉扎。当 $g = -\infty$ 时，我们省略最后一个上标。

备注 4.8。我们简要说明为何可以对 E^{pin} 避开进行条件化，以及为何 $\mathbb{P}^{b,\,\vec{y},\,g}$ 钉扎 是良定义的。首先，满足 E^{pin} 避开 中的不等式的函数所构成的集合是 $C([\![1,\ 2k]\!]\times[0,b])$ 中的开集，因此 E^{pin} 避开 是可测的。因此，只需证明 $\mathbb{P}\left(E^{\text{pin}}{}_{\text{避开}}\right) > 0$。

当 $k = 1$ 且 $g = -\infty$ 时， E^{pin} 避开 中的条件显然成立，因此 $\mathbb{P}(E^{\text{pin}}$ 避开$) = 1$。因此，对于 $k = 1$, $\mathbb{P}^{b,\,\vec{y},\,-\infty}$ 钉扎 是良定义的。对于一般的 $k \geq 1$ 和 g，我们可以找到 $\varepsilon > 0$ 和连续函数 $h_i^{\pm}$，使得对于 $1 \leq i \leq k$，有：

- $\varepsilon < (1/4)$ 的最小值为 $_{i\in[\![1,\ 2k]\!]}(y_i - y_{i+1})$，其中 $y_{2k+1} = g(b)$;
- $h_i^-(t) + \varepsilon < h_i^+(t)$，当 $i \in [\![1,\ k]\!]$ 且 $t \in [0,b]$ 时;
- $h_i^-(b) + \varepsilon \leq y_{2i}$ 且 $h_i^+(b)$，当 $i \in [\![1,\ k]\!]$ 时;
- $h_i^-(t) > h_{i+1}^+(t)$，对于 $i \in [\![1,\ k]\!]$ 且 $t \in [0,b]$，其中 $h_{k+1}^+(t) = g(t)$。

特别地，我们看到

$$E_{\text{avoid}}^{\text{pin}} \supseteq \cap_{i=1}^{k}\{h_i^-(t) \leq B_{2i}(t) \leq B_{2i-1}(t) \leq h_i^+(t) \text{ for all } t \in [0,b]\},$$

因此，由独立性可知

$$\mathbb{P}\left(E_{\text{avoid}}^{\text{pin}}\right) \geq \prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}(h_i^-(t) \leq B_{2i}(t) \leq B_{2i-1}(t) \leq h_i^+(t) \text{ for all } t \in [0,b]) > 0,$$

其中，在最后一个不等式中，我们使用了引理 4.16，并且有 $f(t) = h_i^+(t) - \varepsilon$ 以及 $g(t) = h_i^-(t) + \varepsilon$。

接下来我们介绍本节的两个主要定义—— [34, 定义2.7] 中的半空间布朗吉布斯性质，以及钉扎半空间布朗吉布斯性质。

定义 4.9。固定一个集合 $\Sigma = [\![1, N]\!]$，其中 $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$；一个区间 $\Lambda = [0,T]$ 或 $\Lambda = [0,T)$，其中 $T \in (0,\infty]$；以及 $\mu_i \in \mathbb{R}$，对于 $i \in [\![1, N-1]\!]$。对于 $k \in [\![1, N-1]\!]$ 和 $b \in \Lambda \cap (0,\infty)$，我们记作 $\vec{\mu}_k = (\mu_1, \ldots\ldots, \mu_k)$、$D_{[\![1,k]\!],b} = [\![1, k]\!] \times [0,b)$ 以及 $D^c_{[\![1,k]\!],b} = (\Sigma \times \Lambda) \setminus D_{[\![1,k]\!],b}$。

一个由 Σ 索引的线系综 $\mathcal{L}$ 在 Λ 上满足具有参数的半空间布朗吉布斯性质 $\{\mu_i\}_{i \in [\![1,N-1]\!]}$，如果它互不相交，并且对于任意 $b \in \Lambda \cap (0,\infty)$、任意 $k \in [\![1, N-1]\!]$ 以及任意有界博雷尔可测函数 $F\colon C([\![1,k]\!] \times [0,b]) \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\left[F\left(\mathcal{L}|_{[\![1,k]\!]\times[0,b]}\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_{\mathrm{ext}}([\![1,k]\!] \times [0,b))\right] = \mathbb{E}^{b,\vec{y},\vec{\mu}_k,g}_{\mathrm{avoid}}\left[F(\mathcal{Q})\right], \quad \mathbb{P}\text{-almost surely}, \tag{4.5}$$

其中 $\mathcal{L}|_{[\![1,k]\!]\times[0,b]}$ 是将 $\mathcal{L}$ 限制到 $[\![1,k]\!] \times [0,b]$所得的结果，$g = \mathcal{L}_{k+1}[0,b]$, $\vec{y} = (\mathcal{L}_1(b) \ldots, \mathcal{L}_k(b))$，并且

$$\mathcal{F}_{\mathrm{ext}}([\![1,k]\!] \times [0,b)) := \sigma\left(\mathcal{L}_i(s) : (i,s) \in D^c_{[\![1,k]\!],b}\right).$$

在 (4.5) 的右侧，我们有 $\mathcal{Q}$ 的分布为 $\mathbb{P}^{b,\ \vec{y},\ \vec{\mu}_k,\ g}$ 避开。

定义 4.10. 固定一个集合 $\Sigma = [\![1,\ N]\!]$ 满足 $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，以及一个区间 $\Lambda = [0,T]$ 或 $\Lambda = [0,T)$ 满足 $T \in (0,\infty]$。若一个以 Σ 为指标的线系综 $\mathcal{L}$ 定义在 Λ 上，且其在 $\Lambda \cap (0,\infty)$ 上的限制互不相交，并且对于任意 $b \in \Lambda \cap (0,\infty)$、任意$k \in [\![1,\ \lfloor (N-1)/2 \rfloor]\!]$，以及任意有界博雷尔可测函数 $F\colon C([\![1,\ 2k]\!] \times [0,b]) \to \mathbb{R}$，则称其满足钉扎半空间布朗吉布斯性质，

$$\mathbb{E}\left[F\left(\mathcal{L}|_{[\![1,2k]\!]\times[0,b]}\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_{\mathrm{ext}}([\![1,2k]\!] \times [0,b))\right] = \mathbb{E}^{b,\vec{y},g}_{\mathrm{pin}}\left[F(\mathcal{Q})\right], \quad \mathbb{P}\text{-almost surely}, \tag{4.6}$$

其中 $g = \mathcal{L}_{2k+1}[0,b]$, $\vec{y} = (\mathcal{L}_1(b) \ldots, \mathcal{L}_{2k}(b)) \in \mathbb{R}^{2k}$，且 $\mathcal{F}_{\mathrm{ext}}$ 如上所述。

本节最后回顾 [24, 定义 2.2], 另见 [32, 定义 2.8] 中的布朗吉布斯性质。为陈述该性质，我们需要 [32, 定义 2.7] 中 (f,g)-避开布朗桥系综的概念。

定义 4.11。固定 $k \in \mathbb{N}$, $\vec{x}, \vec{y} \in W^\circ_k$, $a, b \in \mathbb{R}$，其中 $a < b$，并取两个连续函数$f\colon [a,b] \to (-\infty,\infty]$ 和 $g\colon [a,b] \to [-\infty,\infty)$。如前所述，后者表示 $f \in C([a,b])$ 或 $f \equiv \infty$，对 g 也有类似定义。此外，我们假设对 $t \in [a,b]$, $f(a) > x_1$,$f(b) > y_1$, $g(a) < x_k$, $g(b) < y_k$，有 $f(t) > g(t)$。给定这些数据，我们令 $\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y},f,g}$ avoid;Br 表示以下分布：k 个相互独立的布朗桥 $\{B_i\colon [a,b] \to \mathbb{R}\}_{i=1}^k$，从 $B_i(a) = x_i$ 到 $B_i(b) = y_i$，并以事件为条件

$$E = \{f(t) > B_1(t) > B_2(t) > \cdots > B_k(t) > g(t) \text{ for all } t \in [a,b]\}.$$

我们注意到，$\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y},f,g}$ avoid;Br 在 $C([\![1,k]\!] \times [a,b])$ 上的分布是良定义的；参见 [32, 定义 2.7]。关于 $\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y},f,g}$ avoid;Br 的期望记作 $\mathbb{E}^{a,b,\vec{x},\vec{y},f,g}$ avoid;Br。

定义 4.12. 一个以 $\mathbb{N}$ 为指标的线系综 $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_i\}_{i \geq 1}$ 定义在区间 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ 上，若其互不相交且满足以下条件，则称其具有布朗吉布斯性质：对于所有 $[a,b] \subseteq \Lambda$ 和 $1 \leq k_1 \leq k_2$，令 $K = [\![k_1, k_2]\!]$，则对于任意有界博雷尔可测函数 $F : C(K \times [a,b]) \to \mathbb{R}$，我们几乎处处有 $\mathbb{P}$-几乎处处

$$\mathbb{E}\left[F\left(\mathcal{L}|_{K\times[a,b]}\right) \middle| \mathcal{F}_{\mathrm{ext}}(K \times (a,b))\right] = \mathbb{E}^{a,b,\vec{x},\vec{y},f,g}_{\mathrm{avoid;Br}}\left[F(\tilde{\mathcal{Q}})\right]. \tag{4.7}$$

在 (4.7) 的左侧，我们有

$$\mathcal{F}_{\mathrm{ext}}(K \times (a,b)) = \sigma\left\{\mathcal{L}_i(s) : (i,s) \in (\mathbb{N} \times \Lambda) \setminus (K \times (a,b))\right\},$$

且 $\mathcal{L}|_{K\times[a,b]}$ 是 $\mathcal{L}$ 在集合 $K \times [a,b]$上的限制。在 (4.7) 的右侧，我们有$\vec{x} = (\mathcal{L}_{k_1}(a) \ldots, \mathcal{L}_{k_2}(a))$, $\vec{y} = (\mathcal{L}_{k_1}(b) \ldots, \mathcal{L}_{k_2}(b))$, $f = \mathcal{L}_{k_1-1}[a,b]$，约定若 $k_1 = 1$，则 $f = \infty$，且 $g = \mathcal{L}_{k_2+1}[a,b]$。此外，$\mathcal{Q} = \{\mathcal{Q}_i\}_{i=1}^{k_2-k_1+1}$ 的分布为 $\mathbb{P}^{a,\ b,\ \vec{x},\ \vec{y},\ f,\ g}$ 避开; Br，如定义 4.11 所述，并且 $\tilde{\mathcal{Q}} = \{\tilde{\mathcal{Q}}_i\}_{i=k_1}^{k_2}$ 满足 $\tilde{\mathcal{Q}}_i = \mathcal{Q}_{i-k_1+1}$。

4.2. 半空间布朗线系的性质。本节的目标是确立具有如下分布的系综的若干基本性质： $\mathbb{P}^{b,\,\vec{y},\,\vec{\mu},\,g}$ 避开，如定义 4.3 所述； $\mathbb{P}^{b,\,\vec{y},\,g}$ 钉扎，如定义 4.7 所述；以及 $\mathbb{P}^{a,\,b,\,\vec{x},\,\vec{y},\,f,\,g}$ 避开; Br，如定义 4.11 所述。

下面的陈述表明，对于固定的漂移向量 $\vec{\mu}$，系综 $\mathbb{P}^{b}$、$\vec{y}$、$\vec{\mu}$、g 可以按照其边界数据 $\vec{y}$ 和 g单调地耦合。

引理 *4.13.* 固定 $k\in\mathbb{N}$、 $b>0$、 $\vec{\mu}\in\mathbb{R}^k$，以及两个连续函数 g^{b}、g^{t}：$[0,b]\to[-\infty,\infty)$，满足 $g^{\mathrm{b}}(t)\le g^{\mathrm{t}}(t)$，对任意 $t\in[0,b]$ 均成立。令 $\vec{y}^{\mathrm{b}}\vec{y}^{\mathrm{t}}\in W_k^{\circ}$满足 $y_i^{\mathrm{b}}\le y_i^{\mathrm{t}}$，对 $i\in[\![1,\,k]\!]$、$g^{\mathrm{b}}(b)<y_k^{\mathrm{b}}$ 均成立，且 $g^{\mathrm{t}}(b)<y_k^{\mathrm{t}}$。那么存在一个概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$，其上支撑着两个以 $[\![1,\,k]\!]$ 为指标的线系综 $\mathcal{L}^{\mathrm{b}}$ 和 $\mathcal{L}^{\mathrm{t}}$，定义在 $[0,b]$ 上，使得：

- $\mathcal{L}^{\mathrm{b}}$ 和 $\mathcal{L}^{\mathrm{t}}$ 在 $\mathbb{P}$ 下的分布分别由 $\mathbb{P}^{b,\vec{y}^{\mathrm{b}},\vec{\mu},g^{\mathrm{b}}}$ 避开 以及 $\mathbb{P}^{b,\vec{y}^{\mathrm{t}},\vec{\mu},g^{\mathrm{t}}}$ 避开 给出；
- $\mathbb{P}$-几乎处处有 $\mathcal{L}^{\mathrm{b}i}(t)\le\mathcal{L}^{\mathrm{t}i}(t)$ 对于 $i\in[\![1,\,k]\!]$、$t\in[0,b]$。

证明。 这一单调耦合引理的离散类比已在 [34, 引理 2.20]中建立。如下文所示，当前设置中的耦合是作为扩散尺度极限得到的，利用 [34, 引理 2.22], 引理 2.20]中的耦合。回顾定义 2.12], 中的记号 $\mathbb{P}^{B,Y,\vec{q},G}$ Inter,Geom，它们用于表示区间 $[\![0,B]\!]$ 上反向 G-交错几何线系综的分布，其跳跃参数为 $\vec{q}$，出口数据为 Y。

步骤 1. 在此步骤中，我们构造引理陈述中所需的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$，但暂且不证明几个断言。对 $n\in\mathbb{N}$，令 $B_n=\lceil bn\rceil$，并通过以下方式定义函数 $g_n^{\mathrm{b}},g_n^{\mathrm{t}}$：$[0,B_n/n]\to[-\infty,\infty)$ 和 $G_n^{\mathrm{b}},G_n^{\mathrm{t}}$：$[0,B_n]\to[-\infty,\infty)$：

$$g_n^{\star}(t)=\inf_{y\in[0,b]}\left\{g^{\star}(y)+\sqrt{n/2}\,|t-y|\right\},\quad G_n^{\star}(s)=\sqrt{2n}\cdot g_n^{\star}(s/n)+s,\qquad \star\in\{\mathrm{b},\mathrm{t}\}.$$

此外，通过以下方式定义 $\vec{Y}^{n,\mathrm{b}}$ $\vec{Y}^{n,\mathrm{t}}\in\mathbb{Z}^k$ 和 $\vec{q}^{n}\in(0,1)^k$：

$$Y_i^{n,\star}=\lceil\sqrt{2n}\cdot y_i^{\star}+B_n\rceil,\quad q_i^n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\mu_i n^{-1/2},\qquad i\in[\![1,k]\!],\,\star\in\{\mathrm{b},\mathrm{t}\}.$$

我们声称，对于 $\star\in\{\mathrm{b},\,\mathrm{t}\}$ 和 $g^{\star}\neq-\infty$，有：

1. $g_n^{\star}$ 是常数为 $\sqrt{n/2}$的利普希茨连续函数；2. $g_n^{\star}\to g^{\star}$ 在 $[0,b]$上一致收敛；3. $\lim_{n\to\infty}|g_n^{\star}(B_n/n)-g^{\star}(b)|=0$；4. 函数 $G_n^{\star}$ 是递增的。

现在，在假设这些断言成立的前提下，我们构造$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$。

由于 $G_n^{\mathrm{b}},G_n^{\mathrm{t}}$ 是递增的，对于 $i\in[\![1,k]\!]$，有 $G_n^{\mathrm{b}}\le G_n^{\mathrm{t}}$, $Y^{n,\mathrm{b}}{}_i\le Y_i^{n,\mathrm{t}}$；并且对所有充分大的 n，$G_n^{\star}(B_n)\le Y^{n,\star}{}_k$ 对$\star\in\{\mathrm{b},\mathrm{t}\}$ 成立，因此我们可以应用 [34, 引理2.20]。后者确保存在概率空间$(\Omega_n,\mathcal{F}_n,\mathbb{P}_n)$，其上支撑着离散线系综 $\mathfrak{Q}^{n,\mathrm{b}}=\{Q_i^{n,\mathrm{b}}\}_{i=1}^k$, $\mathfrak{Q}^{n,\mathrm{t}}=\{Q_i^{n,\mathrm{t}}\}_{i=1}^k$，满足以下性质。在 $\mathbb{P}_n$ 下，系综 $\mathfrak{Q}^{n,\star}$ 服从$\mathbb{P}^{B_n,\vec{Y}^n,\star,\vec{q}^n,G_n^{\star}}$ Inter,Geom分布，并且几乎必然有 $\mathbb{P}_n$，$Q^{n,}{}_i{}^{\mathrm{b}}(r)\le Q^{n,}{}_i{}^{\mathrm{t}}(r)$，其中 $i\in[\![1,k]\!],r\in[\![0,B_n]\!]$。在 $[0,b]$ 上定义重缩放后的线系综 $\mathcal{Q}^{n,\star}$ 如下

$$\mathcal{Q}_i^{n,\star}(t)=\frac{1}{\sqrt{2n}}(Q_i^{n,\star}(tn)-tn),\qquad i\in[\![1,k]\!],\,t\in[0,b].$$

于是，几乎必然有 $\mathcal{Q}^{n,}{}_i{}^{\mathrm{b}}(t)\le\mathcal{Q}^{n,}{}_i{}^{\mathrm{t}}(t)$，对所有 $i\in[\![1,k]\!],\,t\in[0,b]$ 都成立。此外，上述构造确保满足 [34, 引理 2.22] 的条件，其中 $p=1/2$，这证明了 $\mathcal{Q}^{n,\star}$ 依分布收敛到 $\mathbb{P}^{b,\vec{y}^{\star},\vec{\mu},g^{\star}}$ 避开，当 $n\to\infty$ 时。

令 $\Omega_0 = C([\![1,k]\!]\times[0,b])$，并令 π_n 表示在 $\mathbb{P}_n$ 下 $(\mathcal{Q}^{n,\mathrm{b}},\mathcal{Q}^{n,\mathrm{t}})$ 的联合分布，$\mu_n^\star$ 表示 $\mathcal{Q}^{n,\star}$ 的边缘分布。由于 $\mu_n^{\mathrm{b}},\mu_n^{\mathrm{t}}$ 是紧的，π_n 也是紧的。因此，我们可以找到一个子列 π_{n_j}，它收敛到 Ω 上的某个概率测度 $\mathbb{P}:=\Omega_0\times\Omega_0$，赋予积拓扑及相应的 σ-代数 $\mathcal{F}:=\mathcal{C}_{[\![1,k]\!]}\otimes\mathcal{C}_{[\![1,k]\!]}$。注意，集合 $A=\{(\mathcal{L}^{\mathrm{b}},\mathcal{L}^{\mathrm{t}}):\mathcal{L}_i^{\mathrm{b}}(t)\le\mathcal{L}_i^{\mathrm{t}}(t)$ 对所有 $i\in[\![1,k]\!],t\in[0,b]\}\subset\Omega$ 都成立，是闭集；且 $\pi_n(A)=1$ 对所有 n 都成立。根据 Portmanteau 定理，$\mathbb{P}(A)\ge\limsup\pi_{n_j}(A)=1$。因此，概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 满足引理陈述中的条件，只要我们令 $(\mathcal{L}^{\mathrm{b}},\mathcal{L}^{\mathrm{t}}):=(\omega_{\mathrm{b}},\omega_{\mathrm{t}})$，其中 $(\omega_{\mathrm{b}},\omega_{\mathrm{t}})\in\Omega_0\times\Omega_0=$。

步骤 2。在此步骤中，我们证明步骤 1 中的断言1–4。固定 $s_1,\ s_2\in[0,B_n]$ 且 $s_1<s_2$。根据三角不等式，对于任意 $y\in[0,b]$，有

$$g^\star(y)+\sqrt{n/2}\cdot|y-s_2/n|\ge g^\star(y)+\sqrt{n/2}\cdot|y-s_1/n|-\sqrt{n/2}(s_2/n-s_1/n)$$

对两边取下确界，得到

$$g_n^\star(s_2/n)\ge g_n^\star(s_1/n)-\sqrt{n/2}\cdot(s_2/n-s_1/n).$$

类似的论证得到

$$g_n^\star(s_1/n)\ge g_n^\star(s_2/n)-\sqrt{n/2}\cdot(s_2/n-s_1/n),$$

结合这两点即可推出断言1。

为说明 $g_n^\star\to g^\star$ 一致地成立，首先注意到，在下确界中取 $y=t$ 时，有 $g_n^\star(t)\le g^\star(t)$。另一方面，令 $w^\star(\delta)=\sup_{|x-y|<\delta}|g^\star(x)-g^\star(y)|$ 为 $g^\star$的连续模。由于 $g^\star$ 是一致连续函数，当 $\delta\downarrow0$ 时，$w^\star(\delta)\to0$。给定 $\varepsilon>0$，选择 $\delta>0$，使得 $w^\star(\delta)<\varepsilon$。令 $\mathrm{osc}(g^\star)=\sup(g^\star)-\inf(g^\star)<\infty$，并固定足够大的 N_0，使得 $\mathrm{osc}(g^\star)\le\delta\sqrt{N_0}/2$。对于$n\ge N_0$，有

$$g^\star(y)+\sqrt{n/2}|t-y|\ge\begin{cases}g^\star(t)-\mathrm{osc}(g^\star)+\delta\sqrt{n/2}\ge g^\star(t), & |t-y|\ge\delta,\\ g^\star(t)-w^\star(\delta)\ge g^\star(t)-\varepsilon, & |t-y|<\delta.\end{cases}$$

因此，对于 $n\ge N_0$，我们有 $g^\star(t)\ge g_n^\star(t)\ge g^\star(t)-\varepsilon$ 对所有 $t\in[0,b]$均成立。这证明了断言2。由断言1和断言2，以及 $|B_n/n-b|\le1/n$ 这一事实，我们得到

$$|g_n^\star(B_n/n)-g^\star(b)|\le\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{n}+|g_n^\star(b)-g^\star(b)|\to0,$$

从而证明了断言3。

最后，由断言1，对于 $s_1,\ s_2\in[0,B_n]$，其中 $s_1<s_2$，我们有

$$\begin{aligned}G_n^\star(s_2)-G_n^\star(s_1)&=\sqrt{2n}\cdot(g_n^\star(s_2/n)-g_n^\star(s_1/n))+(s_2-s_1)\\&\ge-\sqrt{2n}\cdot\sqrt{n/2}\cdot(s_2/n-s_1/n)+(s_2-s_1)=0,\end{aligned}$$

从而证明了断言4。 □

下一个引理指出，反向布朗运动触碰但不穿过固定连续曲线的概率为 0。其证明可直接由 [24, 推论 2.9] 得出；另请参见 [34, 引理 2.3]。

引理 4.14。固定 $b>0$, $\mu,y\in\mathbb{R}$，并令 B 如 *(4.2)* 所示。若 $f,g\in C([0,b])$ 满足 $g(b)<y<f(b)$，则

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(B(t)\ge g(t)\ \textit{for all}\ t\in[0,b]\ \textit{and}\ \min_{s\in[0,b]}|B(s)-g(s)|=0\right)=0,\\&\mathbb{P}\left(B(t)\le f(t)\ \textit{for all}\ t\in[0,b]\ \textit{and}\ \min_{s\in[0,b]}|B(s)-f(s)|=0\right)=0.\end{aligned}\tag{4.8}$$

下面的引理给出一对钉扎反向布朗运动的类似不相交结论。

引理 4.15. 固定 $b>0$, $\vec{y}\in W_2^\circ$，并令 $f,g\in C([0,b])$ 满足 $f(b)>y_1>y_2>g(b)$。那么

$$\mathbb{P}_{\mathrm{pin}}^{b,\vec{y}}\left(\mathcal{Q}_2(t)\geq g(t)\ \textit{for all}\ t\in[0,b]\ \textit{and}\ \min_{s\in[0,b]}|\mathcal{Q}_2(s)-g(s)|=0\right)=0, \tag{4.9}$$

$$\mathbb{P}_{\mathrm{pin}}^{b,\vec{y}}\left(\mathcal{Q}_1(t)\leq f(t)\ \textit{for all}\ t\in[0,b]\ \textit{and}\ \min_{s\in[0,b]}|\mathcal{Q}_1(s)-f(s)|=0\right)=0. \tag{4.10}$$

证明. 我们将证明该结论是引理 4.14 的推论。这里只给出 (4.9) 的证明，(4.10) 的证明类似。

回顾定义 4.7，$\mathcal{Q}_2=2^{-1/2}(B-V)$，其中 B 是从 $2^{-1/2}(y_1+y_2)$ 出发、定义在$[0,b]$ 上的反向布朗运动，V是到达 $2^{-1/2}(y_1-y_2)$、定义在 $[0,b]$ 上的独立三维贝塞尔桥。特别地，$V\in C([0,b])$ 几乎必然成立。(4.9) 中的事件可写为

$$E:=\left\{B(t)\geq h(t)\text{ for all }t\in[0,b]\text{ and }\min_{s\in[0,b]}|B(s)-h(s)|=0\right\},$$

其中 $h(t):=2^{1/2}g(t)+V(t)$。在给定 V 的条件下，$h\in C([0,b])$ 几乎必然成立；根据假设，$h(b)=2^{1/2}g(b)+V(b)<2^{1/2}y_2+2^{-1/2}(y_1-y_2)=2^{-1/2}(y_1+y_2)$。由引理 4.14（取 $\mu=0$,$y=2^{-1/2}(y_1+y_2)$ 和 $g=h$）可得，$\mathbb{P}(E\mid V)=0$ 几乎必然成立。对 V 积分即得 (4.9)。□

下一个引理表明，一对钉扎反向布朗运动以正概率被限制在任意固定连续函数的管状邻域内。

引理 4.16。固定 $b>0$, $\vec{y}\in W_2^\circ$ 和 $f,g\in C([0,b])$，使得 $f(b)\geq y_1>y_2\geq g(b)$，且$f(t)>g(t)$ 对于 $t\in[0,b]$ 成立。对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，它取决于 $\varepsilon,b,y_1,y_2,f,g$，使得

$$\mathbb{P}_{\mathrm{pin}}^{b,\vec{y}}\left(g(t)-\varepsilon\leq\mathcal{Q}_2(t)\leq\mathcal{Q}_1(t)\leq f(t)+\varepsilon\ \textit{for all}\ t\in[0,b]\right)\geq\delta. \tag{4.11}$$

现在固定 $M>0$，并进一步假设 $f(t)=y_1+m(b-t)$ 以及 $g(t)=y_2+m(b-t)$ 对于某个$m\in\mathbb{R}$成立，其中 $|m|\leq M$。那么，(4.11) 中的下界 δ可以取为仅依赖于 ε,b,M。

证明。根据定义 4.7，$\mathcal{Q}_1=2^{-1/2}(U+V)$ 和 $\mathcal{Q}_2=2^{-1/2}(U-V)$，其中 U 是 $[0,b]$ 上从 $U(b)=2^{-1/2}(y_1+y_2)$ 出发的反向布朗运动，而 V 是在 $[0,b]$ 上到$V(b)=2^{-1/2}(y_1-y_2)$ 的独立三维贝塞尔桥。

根据我们的假设，对于 $t\in[0,b]$，$f(b)\geq y_1>y_2\geq g(b)$，且 $f(t)>g(t)$，我们可以找到 $\tilde{f},\tilde{g}\in C([0,b])$，使得 $f(b)=y_1$、$\tilde{g}(b)=y_2$，并且对于 $t\in[0,b]$，$f(t)\geq\tilde{f}(t)>\tilde{g}(t)\geq g(t)$。结合后面的不等式、三角不等式以及 U 和 V 的独立性，我们看到，(4.11) 中的概率下界为

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\left|U(t)-2^{-1/2}[\tilde{f}(t)+\tilde{g}(t)]\right|\leq 2^{-1/2}\varepsilon\text{ for all }t\in[0,b]\right)\\&\times\mathbb{P}\left(V(t)\leq 2^{-1/2}[\tilde{f}(t)-\tilde{g}(t)]+2^{-1/2}\varepsilon\text{ for all }t\in[0,b]\right).\end{aligned} \tag{4.12}$$

根据 [27] 中的引理 7.8 和引理 7.9（其中的记号$\mathbf{P}_{\infty,\infty}$ 表示 V的分布），(4.12) 中的两个概率都严格为正，因此可得 (4.11)。

现在假设 $f(t)=\tilde{f}(t)=y_1+m(b-t)$，$g(t)=\tilde{g}(t)=y_2+m(b-t)$，其中 $|m|\leq M$。那么 (4.12) 中的第二个因子等于

$$\mathbb{P}\left(V(t)\leq 2^{-1/2}(y_1-y_2)+2^{-1/2}\varepsilon\text{ for all }t\in[0,b]\right),$$

根据引理 7.8]，该值有一个正的下界 δ_1，且该下界仅取决于 ε，b [27, 。(4.12) 中的第一个因子等于

$$\mathbb{P}\left(\left|U(t)-2^{-1/2}(y_1+y_2)-2^{1/2}m(b-t)\right|\le 2^{-1/2}\varepsilon \text{ for all } t\in[0,b]\right). \tag{4.13}$$

我们注意到，(4.13) 是 m 的连续函数。事实上，$U(t)-2^{-1/2}(y_1+y_2)-2^{1/2}m(b-t)$ 是从 0 出发、定义在 $[0,b]$ 上且带有漂移 $-2^{1/2}m$ 的反向布朗运动；将其分布记为 $\mathbb{P}_{-2^{1/2}m}$。对于固定的 m_0，当 $m\to m_0$、$\mathbb{P}_{-2^{1/2}m}\to\mathbb{P}_{-2^{1/2}m_0}$ 弱收敛时，$\{x\in C[0,b]:\sup_{t\in[0,b]}|x(t)|\le 2^{-1/2}\varepsilon\}$ 是 $\mathbb{P}_{-2^{1/2}m_0}$ 的连续性集合，因此由 Portmanteau 定理可得所需的连续性。因此，(4.13) 在 $m\in[-M,M]$ 上取得最小值，也就是说，它有下界 $\delta_2=\delta_2(\varepsilon,\ b,\ M)>0$。取 $\delta=\delta(\varepsilon,\ b,\ M):=\delta_1\delta_2$ 作为 (4.12) 的下界，即可验证引理中的第二个结论。□

我们以一个引理结束本节，该引理表明：如果边界数据收敛，则一列（f，g）-避开的布朗桥系综弱收敛。

引理 *4.17.* 固定 $k\in\mathbb{N}$、$\vec{x}$、$\vec{y}\in W_k$、a、$\overline{b}\in\mathbb{R}$，其中 $a<b$，以及两个连续函数 f：$[a,b]\to(-\infty,\infty]$ 和 g：$[a,b]\to[-\infty,\infty)$。此外，我们假设对于 $t\in[a,b]$、$f(a)\ge x_1$、$f(b)\ge y_1$、$g(a)\le x_k$、$g(b)\le y_k$，有 $f(t)\ge g(t)$。

假设 $\vec{x}^n$、$\vec{y}^n\in W_k^\circ$、f^n：$[a,b]\to(-\infty,\infty]$ 和 g^n：$[a,b]\to[-\infty,\infty)$ 是连续函数，并满足：

(1) 极限$_{n\to\infty}\vec{x}^n=\vec{x}$，极限$_{n\to\infty}\vec{y}^n=\vec{y}$；*(2)* 极限$_{n\to\infty}f^n=f$，极限$_{n\to\infty}g^n=g$，其意义是存在某个 $\epsilon_n\to 0+$，使得对所有 $t\in[a,b]$

$$f^n(t)-\epsilon_n\le f(t)\le f^n(t)+\epsilon_n,\ and\ g^n(t)-\epsilon_n\le g(t)\le g^n(t)+\epsilon_n;$$

(3) $f^n(t)>g^n(t)$ 对 $t\in[a,b]$，$f^n(a)>x_1^n$，$f^n(b)>y_1^n$，$g^n(a)<x_k^n$，$g^n(b)<y_k^n$。

于是，当 $n\to\infty$时，测度 $\mathbb{P}^a$、b、$\vec{x}^n$、$\vec{y}^n$、f^n、g^n 避开；Br 弱收敛到 C（$[\![1,\ k]\!]\times[a,b]$）上的一个概率测度，我们将其记为 $\mathbb{P}^a$、b、$\vec{x}$、$\vec{y}$、f、g 避开；Br。

证明。正如下面将要说明的，该结论是 [4,引理4.8和21.1]的直接推论。

由条件 (1) 和 (2)，我们可以找到 $\delta_n\downarrow 0$，使得对所有 $n\ge 1$

$$u_j^n:=x_j-j\delta_n\le x_j^n\le x_j+\delta_n,\ \ v_j^n:=y_j-j\delta_n\le y_j^n\le y_j+\delta_n \text{ for } j\in[\![1,k]\!],$$

并且对所有 $t\in[a,b]$,

$$\tilde{g}^n(t):=g(t)-(k+1)\delta_n\le g^n(t)\le g(t)+\delta_n,\ \ f(t)-\delta_n\le f^n(t)\le f(t)+\delta_n.$$

由 [4, 引理 21.1], 我们知道，$\mathbb{P}^a$,b,$\vec{u}^n$,$\vec{v}^n$,f,$\tilde{g}^n$ 避开；Br 随 $n\to\infty$ 弱收敛。另一方面，根据 [4, 引理 4.8(1)],，我们可以在同一个概率空间上耦合 $\{B_i^n\}_{i=1}^k$（其分布为 $\mathbb{P}^a$），b,$\vec{x}^n$,$\vec{y}^n$,f^n,g^n 避开；Br，以及 $\{\tilde{B}_i^n\}_{i=1}^k$（其分布为$\mathbb{P}^a$），$b$,$\vec{u}^n$,$\vec{v}^n$,$f$,$\tilde{g}^n$ 避开；Br，使得几乎处处

$$|B_i^n(t)-\tilde{B}_i^n(t)|\le(k+1)\delta_n \text{ for all } (i,t)\in[\![1,k]\!]\times[a,b].$$

由收敛 一起定理，见 [17, 定理 3.1], , 引理的结论随即成立。 □

4.3. 三个关键引理。 在本节中，我们将证明我们在第 4 节开头讨论的三个关键引理。

我们的第一个结果表明，当漂移参数趋于无穷时，由带有交替漂移的避碰反向布朗运动组成的线系综收敛到钉扎反向布朗线系。

引理 4.18. 固定 $k\in\mathbb{N}$, $b>0$, $\vec{y}\in W_{2k}^\circ$ 以及连续函数 g：$[0,b]\to[-\infty,\infty)$，满足$y_{2k}>g(b)$。假设给定序列 $\varpi_n\in\mathbb{R}$, $\vec{y}^n\in W_{2k}^\circ$以及连续函数$g_n$：$[0,b]\to[-\infty,\infty)$，使得

$$\varpi_n\to\infty,\ \ \vec{y}^n\to\vec{y},\ \ g_n\to g\ as\ n\to\infty\ and\ y_{2k}^n>g_n(b)\ for\ all\ n\ge 1.$$

$g_n \to g$ 在 $[0,b]$ 上一致收敛，并且当 $g=-\infty$ 时，这意味着对所有充分大的 n，都有 $g_n=-\infty$。最后，假设 $\mathcal{L}^n$ 的分布为 $\mathbb{P}^{b,\vec{y}^n,\vec{\mu}^n,g_n\text{避开}}$，其中 $\mu_i^n=(-1)^i\varpi_n$，对于 $i\in[\![1,2k]\!]$，且 $\mathcal{L}$ 的分布为 $\mathbb{P}^{b,\vec{y},g\text{ 钉扎}}$。那么当 $n\to\infty$ 时，$\mathcal{L}^n\Rightarrow\mathcal{L}$。

证明。我们将证明分为四个步骤。在步骤 1 至 3 中，我们先证明没有下界且仅有两条曲线这一特殊情形下的结论，然后在步骤 4 中将其推广到一般情形。

步骤 1。在 这一步中，我们证明当 $k=1$ 和 $g_n=-\infty$时该引理成立。定义随机过程

$$U^n=2^{-1/2}(\mathcal{L}_1^n+\mathcal{L}_2^n),\qquad V^n=2^{-1/2}(\mathcal{L}_1^n-\mathcal{L}_2^n).$$

根据定义 4.3，$(\mathcal{L}_1^n,\mathcal{L}_2^n)$的分布与 $\mathbb{P}^{b,\vec{y},\vec{\mu}}$ free（相互独立的反向布朗运动）相同，并以事件 $E_{\text{avoid}}=\{V^n(r)>0\text{ 对所有 }r\in[0,b]\}$成立为条件。由于两个相互独立的标准布朗运动之和与差本身也是相互独立的布朗运动，且扩散系数为 2，我们看到，当$(\mathcal{L}_1^n,\mathcal{L}_2^n)$的分布为 $\mathbb{P}^{b,\vec{y},\vec{\mu}}$ free时，随机过程 U^n和 V^n的分布分别为从 $w^n:=2^{-1/2}(y_1^n+y_2^n)$和 $z^n:=2^{-1/2}(y_1^n-y_2^n)$出发、定义在 $[0,b]$ 上的相互独立的反向布朗运动，漂移分别为 0 和 $-2^{1/2}\varpi_n$。由于事件 E_{avoid} 仅取决于 V^n，因此它与 U^n相互独立。由此可知，当$(\mathcal{L}_1^n,\mathcal{L}_2^n)$的分布为 $\mathbb{P}^{b,\vec{y},\vec{\mu}}$avoid时，在以 E_{avoid}为条件的情况下，U^n仍是一个定义在 $[0,b]$ 上、从 w^n 出发且漂移为 0 的反向布朗运动，而 V^n 则是一个从 z^n 出发、漂移为 $-2^{1/2}\varpi_n$的独立反向布朗运动。

由 $n\to\infty$，我们看到 U^n弱收敛于从 w 出发、定义在 $[0,b]$ 上的漂移为 0 的反向布朗运动 $U:=2^{-1/2}(y_1+y_2)$。我们声称，正如定义 4.5 所述，V^n 弱收敛于到达 z、定义在 $[0,b]$ 上的三维贝塞尔桥 $V:=2^{-1/2}(y_1-y_2)$。我们将在步骤 2 和步骤 3 中证明这一声称。假设该声称成立，我们便看到 $(\mathcal{L}_1^n,\ \mathcal{L}_2^n)\to\left(2^{-1/2}[U+V],\ 2^{-1/2}[U-V]\right)$，当 $n\to\infty$ 时。根据定义 4.7，这恰好是分布 $\mathbb{P}^{b,\ \vec{y}\text{ 钉扎}}$。

步骤 2。在这一步中，我们证明前一步中的过程 V^n 在有限维意义下收敛于到达 z 的三维贝塞尔桥 $\{V_t\}_{t\in[0,b]}$，当 $n\to\infty$ 时。我们先证明 $V^n(0)\Rightarrow 0$。根据 [20, 附录 1.17], ，我们有 $V^n(0)$ 的密度为

$$f_n(y)\propto\mathbf{1}\{y>0\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi b}}\cdot e^{2^{1/2}\varpi_n(z^n-y)-b\varpi_n^2}\cdot\left(\exp\left(-\frac{(z^n-y)^2}{2b}\right)-\exp\left(-\frac{(z^n+y)^2}{2b}\right)\right).$$

对上述结果积分，得到 $y>0$

$$\mathbb{P}(V^n(0)>y)=\frac{\left[1-\Phi\left(\frac{y-z^n+2^{1/2}b\varpi_n}{\sqrt{b}}\right)\right]-e^{2^{3/2}\varpi_n z^n}\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{y+z^n+2^{1/2}b\varpi_n}{\sqrt{b}}\right)\right]}{\left[1-\Phi\left(\frac{-z^n+2^{1/2}b\varpi_n}{\sqrt{b}}\right)\right]-e^{2^{3/2}\varpi_n z^n}\cdot\left[1-\Phi\left(\frac{z^n+2^{1/2}b\varpi_n}{\sqrt{b}}\right)\right]},$$

其中 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^x\varphi(y)dy$ 且 $\varphi(y)=\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$。根据 [1, 7.1.23]，我们有 $x\to\infty$，使得 $1-\Phi(x)=x^{-1}\varphi(x)+O(x^{-3}\varphi(x))$，因此若令 $\Delta_n=z^n+2^{1/2}b\varpi_n$，便得到 $n\to\infty$

$$\mathbb{P}(V^n(0)>y)\sim\frac{\frac{1}{\sqrt{2b\varpi_n}}\cdot e^{2^{3/2}\varpi_n z^n-(\Delta_n+y)^2/2b}\cdot\left(e^{2z^n y/b}-1\right)}{\frac{z^n}{b^{3/2}\varpi_n^2}\cdot e^{2^{3/2}\varpi_n z^n-\Delta_n^2/2b}}\to 0.$$

由于对所有 $y>0$，$\mathbb{P}(V^n(0)>y)\to 0$，且 $V^n(0)\geq 0$，我们得出 $V^n(0)\Rightarrow 0$。

现在，让我们证明 V^n 在整个区间 $[0,b]$ 上有限维收敛于三维贝塞尔桥 V。V^n 的转移密度已在 [39, 定理 3.1] 中明确写出。对于 $0<t_1<\cdots<t_k<t_{k+1}=b$、$y_1$，……，$y_k>0$ 以及 $y_{k+1}=z$，$f^n_{(t_1,\ldots,t_k)}$ 的联合密度

（$V^n(t_1)$ ....., $V^n(t_k)$ ）由下式给出

$$f^n_{(t_1,\dots,t_k)}(y_1,\dots,y_k)=\prod_{i=1}^{k}\left[p_{t_{i+1}-t_i}(y_i-y_{i+1})-p_{t_{i+1}-t_i}(y_i+y_{i+1})\right]\cdot\frac{I_n(t_1,y_1)}{I_n(b,z)}, \tag{4.14}$$

$$\text{where}\quad I_n(t,y)=\int_0^\infty e^{-2^{1/2}\varpi_n u}(p_t(u-y)-p_t(u+y))\,du,$$

并且我们已设定 $p_t(z)=(2\pi t)^{-1/2}e^{-z^2/2t}$。我们对积分作变量替换，得到 $u=\frac{v}{2^{1/2}\varpi_n}$，并在分子和分母中同时引入常数因子 $2\varpi_n^2$，将该比值改写为

$$\frac{I_n(t_1,y_1)}{I_n(b,z)}=\frac{J_n(t_1,y_1)}{J_n(b,z)},\quad \text{where } J_n(t,y)=\int_0^\infty 2^{1/2}\varpi_n e^{-v}\left(p_t\left(\tfrac{v}{2^{1/2}\varpi_n}-y\right)-p_t\left(\tfrac{v}{2^{1/2}\varpi_n}+y\right)\right)dv.$$

设定 $\alpha=\frac{1}{2^{1/2}\varpi_n}$，使得当 $n\to\infty$ 时 $\alpha\to 0$。然后根据洛必达法则，当 $n\to\infty$ 时，被积函数在 $J_n(t,\ y)$ 中的逐点极限等于当 $\alpha\to 0$ 时下式的极限

$$e^{-v}\frac{p_t(\alpha v-y)-p_t(\alpha v+y)}{\alpha}\to\frac{2y}{t}ve^{-v}p_t(y).$$

此外，利用不等式 $|e^{-A}-e^{-B}|\le|A-B|$（对于 $A,\ B\ge 0$，由中值定理可得），$J_n(t,\ y)$ 中的被积函数对所有 n 均有界，且有界于

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}e^{-v}\varpi_n\left|\left(\frac{v}{2^{1/2}\varpi_n}-y\right)^2-\left(\frac{v}{2^{1/2}\varpi_n}+y\right)^2\right|=\frac{4}{\sqrt{2\pi t}}yve^{-v},$$

该函数在 v 上可积。因此，根据控制收敛定理，$J_n(t,\ y)\to\frac{2y}{t}p_t(y)\int_0^\infty ve^{-v}\,dv$。回到（4.14），并回忆由（4.4）给出的联合密度 $f_{(t_1,\dots,t_k)}$ $(V(t_1)\dots,\ V(t_k))$ 的公式，我们得到

$$f^n_{(t_1,\dots,t_k)}(y_1,\dots,y_k)\to f_{(t_1,\dots,t_k)}(y_1,\dots,y_k).$$

由舍费引理可知，$(V^n(t_1)\dots,V^n(t_k))\to(V(t_1)\dots,V(t_k))$依分布收敛，证毕。

步骤 3. 我们声称，对每个 $\rho>0$,

$$\lim_{\delta\to 0+}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(w(V^n,\delta)\ge\rho)=0, \tag{4.15}$$

其中，对于 $f\in C([0,b])$，我们定义通常的连续模

$$w(f,\delta)=\sup_{\substack{x,y\in[0,b]\\|x-y|\le\delta}}|f(x)-f(y)|. \tag{4.16}$$

由 [17, 定理 7.5], 可知，(4.15) 将上一步的有限维收敛提升为紧集上一致收敛拓扑。此步骤的其余部分将证明 (4.15)。

固定 $\varepsilon>0$。令 $B\in C([0,b])$ 为一个分布为 $\mathbb{P}^{0}{}_{,b,0,z,\infty,}{}^{0}$ 避开; Br 的随机连续函数，如引理 4.17 所述。由 B 的连续性，我们可以找到 $\delta>0$，使得

$$\mathbb{P}(w(B,\delta)\ge\rho)\le\varepsilon. \tag{4.17}$$

由于 $V^n\Rightarrow 0$ 来自步骤 2，根据斯科罗霍德表示定理 [17, 定理 6.7], ，我们可以假设 $V^n(0)$ 定义在同一个概率空间上，且 $V^n(0)\to 0$ 几乎必然成立。由引理 4.17 和 Portmanteau 定理，我们有

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}^{0,b,V^n(0),z^n,\infty,0}_{\text{avoid;Br}}(w(B,\delta)\ge\rho)\le\mathbb{P}^{0,b,0,z,\infty,0}_{\text{avoid;Br}}(w(B,\delta)\ge\rho)\le\varepsilon, \tag{4.18}$$

在最后一个不等式中，我们使用了 (4.17)。

由于 V^n 是从 z^n 出发、带有漂移 $-2^{1/2}\varpi_n$ 且条件为保持正值的反向布朗运动，我们知道，给定 $V^n(0)$ 后， V^n 的条件分布是从 $V^n(0)$ 到 z^n、条件为保持正值的布朗桥分布。换言之，它由 $\mathbb{P}^{0,\,b,\,V^n(0)\,z^n,\,\infty,\,0}$ 避开 ;Br 给出，如第 4.2 节所示。我们得出结论

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}(w(V^n,\delta)\geq\rho)&=\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\mathbb{P}^{0,b,V^n(0),z^n,\infty,0}_{\text{avoid;Br}}(w(B,\delta)\geq\rho)\right]\\&\leq\mathbb{E}\left[\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}^{0,b,V^n(0),z^n,\infty,0}_{\text{avoid;Br}}(w(B,\delta)\geq\rho)\right]\leq\varepsilon,\end{aligned}$$

其中，第一个等式用到了条件期望的塔式性质。第二行的不等式由反向 Fatou 引理得出，见 [21, 第 10], 页；最后一个不等式则由 (4.18) 得出。由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，我们看到最后一个不等式蕴含 (4.15)。

步骤 4. 在这一步中，我们完成对所有 k 和 g_n 的引理证明。我们要证明，对于任意有界连续函数 $F\colon C(\llbracket 1,2k\rrbracket\times[0,b])\to\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{b,\vec{y}^n,\vec{\mu}^n,g_n}_{\text{avoid}}[F(\mathcal{L}^n)]=\mathbb{E}^{b,\vec{y},g}_{\text{pin}}[F(\mathcal{L})]. \tag{4.19}$$

对于 $i\in\llbracket 1,k\rrbracket$，令 (B^n_{2i-1},B^n_{2i}) 为分布为 $\mathbb{P}^{b,\vec{y}^{n,i},\vec{\mu}}$ 避开 的独立对，其中 $\vec{y}^{n,i}=(y^n_{2i-1},y^n_{2i})$。对所有 $i\in\llbracket 1,k\rrbracket$, $r\in(0,b)\}\subset C(\llbracket 1,2k+1\rrbracket\times[0,b])$，定义集合 $S_{\text{avoid}}=\{f_{2i}(r)>f_{2i+1}(r)$。那么根据定义 4.7，我们可以写出

$$\mathbb{E}^{b,\vec{y}^n,\vec{\mu}^n,g_n}_{\text{avoid}}[F(\mathcal{L}^n)]=\frac{\mathbb{E}[F(B^n)\mathbf{1}_{S_{\text{avoid}}}(B^n,g^n)]}{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{S_{\text{avoid}}}(B^n,g^n)]}, \tag{4.20}$$

其中，我们将 $(B^n,\ g^n)$ 简写为 $(B^n_1,\ \ldots,\ B^n_{2k},\ g^n)$。

根据步骤 1，每一对独立的 $(B^n_{2i-1},\ B^n_{2i})$ 在 $n\to\infty$ 趋于 $(B_{2i-1},\ B_{2i})$ 时弱收敛，其分布为 $\mathbb{P}^{b,\ \vec{y}^i}$ 钉扎，其中 $\vec{y}^i=(y_{2i-1},\ y_{2i})$。根据斯科罗霍德表示定理， [17, 定理 6。7], 我们可以假设， $B^n=(B^n_1,\ \ldots,\ B^n_{2k})$ 和 $B=(B_1,\ \ldots,\ B_{2k})$ 定义在同一个概率空间上，并且该收敛 $B^n\to B$（在 $C(\llbracket 1,\ 2k\rrbracket\times[0,b])$ 中）几乎处处成立。

利用 $B^n\to B$ 和 $g^n\to g$，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbf{1}_{S_{\text{avoid}}}(B^n,g^n)\to 1\text{ a.s. on the event }E_1=\{(B,g)\in S_{\text{avoid}}\},\\&\mathbf{1}_{S_{\text{avoid}}}(B^n,g^n)\to 0\text{ a.s. on the event }E_2=\left\{(B,g)\in\overline{S_{\text{avoid}}}^c\right\}.\end{aligned}$$

此外，由引理 4.15，我们有 $\mathbb{P}(E_1\cup E_2)=1$。根据有界收敛定理，

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[F(B^n)\mathbf{1}_{S_{\text{avoid}}}(B^n,g^n)]=\mathbb{E}[F(B)\mathbf{1}_{S_{\text{avoid}}}(B,g)]\\&\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[\mathbf{1}_{S_{\text{avoid}}}(B^n,g^n)]=\mathbb{E}[\mathbf{1}_{S_{\text{avoid}}}(B,g)]>0,\end{aligned} \tag{4.21}$$

其中，在最后一个不等式中，我们使用了 $\mathbb{P}\left(E^{\text{pin}}\text{ 避开}\right)>0$，如注 4.4 所述；这由引理 4.16 得出。结合 (4.20) 和 (4.21)，我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{b,\vec{y}^n,\vec{\mu}^n,g_n}_{\text{avoid}}[F(\mathcal{L}^n)]=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}[F(B^n)\mathbf{1}_{S_{\text{avoid}}}(B^n,g^n)]}{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{S_{\text{avoid}}}(B^n,g^n)]}=\frac{\mathbb{E}[F(B)\mathbf{1}_{S_{\text{avoid}}}(B,g)]}{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{S_{\text{avoid}}}(B,g)]},$$

注意到，由定义 4.7，右侧为 $\mathbb{E}^{b,\ \vec{y},\ g\text{ 钉扎}}[F(\mathcal{L})]$，即可推出 (4.19)。 □

下面的结果表明，如果一个具有 $2k$ 条曲线的 g-避开反向布朗线系综在时刻 $b>0$ 不太低，那么它在每个时刻 $t\in[0,b]$ 都不太低。

引理 4.19。 固定 $k\in\mathbb{N}$、 $b>0$ 和 $\varepsilon\in(0,1)$。我们可以找到 $M>0$ 和 $\varpi_0\in\mathbb{R}$，它们取决于k、b、ε，使得对于每个满足条件的 $\vec{\mu}\in\mathbb{R}^{2k}$、 $\vec{y}\in W^\circ_{2k}$ 和连续函数 $g\colon[0,b]\to[-\infty,\infty)$，

$$y_{2k}>g(b),\ \ \mu_i=(-1)^i\varpi\ \textit{for some}\ \varpi\geq\varpi_0\ \textit{and}\ i\in\llbracket 1,2k\rrbracket,$$

我们有

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{b,\vec{y},\vec{\mu},g}\left(\mathcal{Q}_{2k}(t)\geq y_{2k}-M \text{ for all } t\in[0,b]\right)\geq 1-\varepsilon. \tag{4.22}$$

证明。我们取 $C>1$ 足够大，使得

$$\mathbb{P}_{\text{pin}}^{b,(1,0)}\left(-C<\mathcal{Q}_2(t)<\mathcal{Q}_1(t)<C \text{ for all } t\in[0,b]\right)\geq 1-\varepsilon/(2k). \tag{4.23}$$

根据引理 4.18，应用于 $k=1$、$\vec{y}=(1,\ 0)\in W_2^\circ$ 和 $g_n=g=-\infty$，我们知道，当 $\varpi\to\infty$ 时，概率分布 $\mathbb{P}^{b,\ (1,0),\ (-\varpi,\varpi)}$ 避开 弱收敛到 $\mathbb{P}^{b,\ (1,0)}$ 钉扎。利用 (4.23)，我们可以取 $\varpi_0\in\mathbb{R}$ 足够大，使得对所有 $\varpi\geq\varpi_0$，都有

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{b,(1,0),(-\varpi,\varpi)}\left(-C<\mathcal{Q}_2(t)<\mathcal{Q}_1(t)<C \text{ for all } t\in[0,b]\right)\geq 1-\varepsilon/k. \tag{4.24}$$

We 在上述选取的 ϖ_0 和 $M=(2k+1)C$ 下，我们继续证明该引理。

通过平移该系综，不妨设 $y_{2k}=0$。我们定义 $\vec{y}^{\text{新的}}=(y_1^{\text{new}}、\ldots\ldots、\ y_{2k}^{\text{new}})\in W_{2k}^\circ$，其中 $y_{2i-1}^{\text{new}}=-2iC+1$，并且当 $i\in[\![1,\ k]\!]$ 时 $y_{2i}^{\text{new}}=-2iC$。由于 $C>1$，我们有 $0>-2C+1=y_1^{\text{new}}>y_2^{\text{new}}>\cdots>y_{2k}^{\text{new}}$。利用单调耦合引理 4.13，取 $g^{\text{t}}=g$、$g^{\text{b}}=-\infty$、$\vec{y}^{\,\text{t}}=\vec{y}$ 以及 $\vec{y}^{\,\text{b}}=\vec{y}^{\,\text{new}}$，(4.22) 左侧可由在 $\mathbb{P}^{b,\ \vec{y}^{\text{new}},\ \vec{\mu}}$ 避开 下同一事件的概率作下界。

根据定义 4.7，概率测度 $\mathbb{P}^{b,\ \vec{y}^{\text{new}},\ \vec{\mu}}$ 避开 可以视为乘积测度 $\otimes_{i=1}^{k}\mathbb{P}^{b,\ (y_{2i-1}^{\text{new}},y_{2i}^{\text{new}}),\ (-\varpi,\ \varpi)}$ 避开，条件是 E_{avoid}。因此，我们有

$$\begin{aligned}&[\text{left side of (4.22)}]\geq\\ &\otimes_{i=1}^{k}\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{b,(y_{2i-1}^{\text{new}},y_{2i}^{\text{new}}),(-\varpi,\varpi)}\left(E_{\text{avoid}}\cap\{\mathcal{Q}_{2k}(t)\geq-(2k+1)C \text{ for all } t\in[0,b]\}\right).\end{aligned} \tag{4.25}$$

接下来，我们考虑这些事件

$$E_i:=\left\{-(2i+1)C<\mathcal{Q}_{2i}(t)<\mathcal{Q}_{2i-1}(t)<-(2i-1)C \text{ for all } t\in[0,b]\right\},\quad i\in[\![1,k]\!],$$

并令 $E=E_1\cap\cdots\cap E_k$。注意，在事件 E 上，我们有 $\mathcal{Q}_{2k}(t)>-(2k+1)C$ 且 $\mathcal{Q}_1(t)>\cdots>\mathcal{Q}_{2k}(t)$ 对所有 $t\in[0,b]$ 均成立。后者与 (4.25) 得到

$$\begin{aligned}&[\text{(4.22) 的左侧}]\geq\\ &\prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{b,(y_{2i-1}^{\text{new}},y_{2i}^{\text{new}}),(-\varpi,\varpi)}\left(-(2i+1)C<\mathcal{Q}_{2i}(t)<\mathcal{Q}_{2i-1}(t)<-(2i-1)C \text{ for all } t\in[0,b]\right).\end{aligned}$$

对于 $i\in[\![1,\ k]\!]$，为了给上面积中的第 i 项提供下界，我们将系综向上平移 $2iC$，使用定义 $y_{2i-1}^{\text{new}}=-2iC+1$ 和 $y_{2i}^{\text{new}}=-2iC$，并应用 (4.24)。因此，第 i 项的下界为 $1-\varepsilon/k$。上面的右侧以下式 $(1-\varepsilon/k)^k\geq1-\varepsilon$ 为下界。□

下一个引理将在漂移参数一致的情况下，对一个 g-避开的反向布朗线系综的连续模进行控制，前提是边界条件彼此正分离且位于一个紧窗口内。

引理 4.20。固定 $k\in\mathbb{N}$、b、M、M^{bot}、$\delta^{\text{sep}}>0$ 和 $\Delta^{\text{sep}}\in(0,b]$。固定 ε、$\eta>0$，并假设 $\vec{\mu}\in\mathbb{R}^{2k}$、$\vec{y}\in W_{2k}^\circ$ 以及 $g:\ [0,b]\to[-\infty,\infty)$ 是连续函数，满足 $\mu_i=(-1)^i\varpi$ 对于某个 $\varpi\in\mathbb{R}$，且 $|y_i|\leq M$ 对于 $i\in[\![1、\ 2k]\!]$，$y_i-y_{i+1}\geq\delta^{\text{sep}}$ 对于 $i\in[\![1、\ 2k-1]\!]$，$\sup^{t\in[0,b]}g(t)\leq M^{\text{bot}}$，以及 $y_{2k}-\sup^{t\in[b-\Delta^{\text{sep}},b]}g(t)\geq\delta^{\text{sep}}$。存在 $\delta>0$ 和 $\varpi_0\in\mathbb{R}$，它们取决于 ε、η、k、b、M、M^{bot}、δ^{sep}、Δ^{sep}，使得对于 $\varpi\geq\varpi_0$，

$$\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{b,\vec{y},\vec{\mu},g}\left(\max_{i\in[\![1,2k]\!]}w(\mathcal{Q}_i,\delta)>\eta\right)<\varepsilon, \tag{4.26}$$

其中回顾一下，$w(f,\delta)$ 是 (4.16) 中的连续模。

证明。我们声称，存在 $\varpi_1 \in \mathbb{R}$和 $c > 0$，它们取决于 k、 b、 M、 M^{bot}、 δ^{sep}和 Δ^{sep}，使得对于所有 $\varpi \geq \varpi_1$,

$$\mathbb{P}^{b,\vec{y},\vec{\mu}}_{\mathrm{avoid}}(\mathcal{Q}_{2k}(t) > g(t) \text{ for all } t \in [0,b]) > c. \tag{4.27}$$

我们进一步声称，存在 $\varpi_2 \in \mathbb{R}$ 和 $\delta > 0$，它们取决于相同的参数集合以及 ε， η， c，使得对于 $\varpi \geq \varpi_2$

$$\mathbb{P}^{b,\vec{y},\vec{\mu}}_{\mathrm{avoid}}\left(\max_{i\in[\![1,2k]\!]} w(\mathcal{Q}_i,\delta) > \eta\right) < c\varepsilon. \tag{4.28}$$

假设 (4.27) 和 (4.28)，我们得到对于 $\varpi \geq \varpi_0 := \max(\varpi_1, \varpi_2)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{b,\vec{y},\vec{\mu},g}_{\mathrm{avoid}}\left(\max_{i\in[\![1,2k]\!]} w(\mathcal{Q}_i,\delta) > \eta\right) &= \mathbb{P}^{b,\vec{y},\vec{\mu}}_{\mathrm{avoid}}\left(\max_{i\in[\![1,2k]\!]} w(\mathcal{Q}_i,\delta) > \eta \middle| \mathcal{Q}_{2k}(t) > g(t) \text{ for all } t \in [0,b]\right)\\ &\leq c^{-1}\mathbb{P}^{b,\vec{y},\vec{\mu}}_{\mathrm{avoid}}\left(\max_{i\in[\![1,2k]\!]} w(\mathcal{Q}_i,\delta) > \eta\right) < c^{-1}\cdot c\varepsilon = \varepsilon,\end{aligned}$$

这就说明了该引理的结论。

（4. 的证明 27）。对于 $i \in [\![1,\ 2k]\!]$，我们定义确定性线性函数 $\ell_i\colon [0,b] \to \mathbb{R}$ b y

$$\ell_i(t) = y_i + \frac{M^{\mathrm{bot}} + M + 1}{\Delta^{\mathrm{sep}}} \cdot (b - t).$$

根据我们的假设，对于所有 $t \in [0,b]$ and$\ell_i(b) = y_i$，有 $g(t) < \ell_{2k}(t) < \ell_{2k-1}(t) < \cdots < \ell_2(t) < \ell_1(t)$。定义这些事件。

$$E^j_{\mathrm{corr}} = \{\ell_{2j}(t) \leq \mathcal{Q}_{2j}(t) < \mathcal{Q}_{2j-1}(t) \leq \ell_{2j-1}(t) \text{ for all } t \in [0,b]\}, \qquad j \in [\![1,k]\!].$$

根据定义 4.7，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{b,\vec{y},\vec{\mu}}_{\mathrm{avoid}}(\mathcal{Q}_{2k}(t) > g(t) \text{ for all } t \in [0,b]) &\geq \frac{\bigotimes_{j=1}^k \mathbb{P}^{b,(y_{2j-1},y_{2j}),(\mu_{2j-1},\mu_{2j})}_{\mathrm{avoid}}(\bigcap_{j=1}^k E^j_{\mathrm{corr}})}{\bigotimes_{j=1}^k \mathbb{P}^{b,(y_{2j-1},y_{2j}),(\mu_{2j-1},\mu_{2j})}_{\mathrm{avoid}}(E_{\mathrm{avoid}})}\\ &\geq \prod_{j=1}^k \mathbb{P}^{b,(y_{2j-1},y_{2j}),(\mu_{2j-1},\mu_{2j})}_{\mathrm{avoid}}(E^j_{\mathrm{corr}}).\end{aligned} \tag{4.29}$$

注意，每个 ℓ_i 的斜率都被 $(M^{\mathrm{bot}} + M + 1)/\Delta^{\mathrm{sep}}$ 从上方界定。因此，由引理 4.16 可知，存在 $\epsilon_0 > 0$，它依赖于 b， M， M^{bot}， δ^{sep}， Δ^{sep}，使得

$$\prod_{j=1}^k \mathbb{P}^{b,(y_{2j-1},y_{2j})}_{\mathrm{pin}}(E^j_{\mathrm{corr}}) \geq \epsilon_0^k.$$

将引理 4.18 应用于最后一个乘积中的每一项，可知存在 $\varpi_1 \in \mathbb{R}$，使得对于 $\varpi \geq \varpi_1$

$$\prod_{j=1}^k \mathbb{P}^{b,(y_{2j-1},y_{2j}),(\mu_{2j-1},\mu_{2j})}_{\mathrm{avoid}}(E^j_{\mathrm{corr}}) \geq (\epsilon_0/2)^k.$$

后者与 (4.29) 推出 (4.27)，其中 $c = (\epsilon_0/2)^k$。

（4.28）的证明。反设不存在这样的 ϖ_2 和 δ。那么，对于每个 $\delta_n = 1/n$，我们都可以找到 $\varpi^n \geq n$，以及满足引理条件的 $\vec{y}^n \in W^\circ_{2k}$和 $\vec{\mu}^n \in \mathbb{R}^{2k}$，其中 $\varpi = \varpi^n$，使得

$$\mathbb{P}^{b,\vec{y}^n,\vec{\mu}^n}_{\mathrm{avoid}}\left(\max_{i\in[\![1,2k]\!]} w(\mathcal{Q}_i,\delta_n) > \eta\right) \geq c\varepsilon. \tag{4.30}$$

由于当 $i \in [\![1$时，$|y_i^n| \le M$和 $y_i^n - y_{i+1}^n \ge \delta^{\mathrm{sep}}\ 2k-1]\!]$，因此通过适当选取子列，我们可以假设 $\vec{y}^n \to \vec{y} \in W_{2k}^{\circ}$。利用引理 4.18 中的弱收敛（由构造可知，$\vec{y}^n \to \vec{y} \in W_{2k}^{\circ}$和 $\varpi^n \to \infty$，故该引理适用）以及 Portmanteau 定理，我们得出对每个 $\delta > 0$，

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\mathrm{avoid}}^{b,\vec{y}^n,\vec{\mu}^n}\left(\max_{i\in[\![1,2k]\!]} w(\mathcal{Q}_i,\delta) \ge \eta\right) \le \mathbb{P}_{\mathrm{pin}}^{b,\vec{y}}\left(\max_{i\in[\![1,2k]\!]} w(\mathcal{Q}_i,\delta) \ge \eta\right).$$

结合 后者与 (4.30)，并利用 $\delta_n \downarrow 0$，我们得出对所有 $\delta >$ 0

$$\mathbb{P}_{\mathrm{pin}}^{b,\vec{y}}\left(\max_{i\in[\![1,2k]\!]} w(\mathcal{Q}_i,\delta) \ge \eta\right) \ge c\varepsilon.$$

后者给出了我们所需的矛盾，因为 $\mathbb{P}^{b,\ \vec{y}}$钉扎-几乎必然地，$\lim_{\delta\to 0+} \max_{i\in[\![1,\ 2k]\!]} w(\mathcal{Q}_i,\ \delta) = 0$。 □

5. 紧集上一致收敛

本节的目标是证明定理 1.13、1.16、1.20 和 1.23。我们要建立的主要技术结果是命题 5.1，它表明，对于任意序列 $\varpi_n \to \infty$，命题 1.10 中的线系综$\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi_n}$ 构成一个紧序列。这一结论是第 5.1 节的内容。在第 5.2 节中，我们将命题 5.1 与引理 3.5 中的有限维收敛结果结合起来，证明定理 1.13 和 1.20。该节还包含定理 1.16 的证明，它本质上是引理 3.2 的推论。在第 5.3 节中，我们结合引理 3.7 中的有限维收敛与 [24]中的一些结果，证明定理 1.23。最后，第 5.4 节给出了“无限多个原子”引理（引理 3.4）的证明。

5.1. 紧性。

我们继续采用第 1 节和第 4 节中的记号。本节的目标是证明以下结论。

命题 5.1。假设采用命题 *1.10* 中相同的记号。设 $\varpi_n \in \mathbb{R}$ 是一个满足 $\lim_{n\to\infty} \varpi_n = \infty$ 的序列。那么，$\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi_n}$ 在 $C(\mathbb{N}\times[0,\infty))$ 中构成一个紧序列。此外，若 $\mathcal{L}^{\infty}$ 是任意一个子序列极限，则 $\mathcal{L}^{\infty}$ 满足定义 *4.10* 中的钉扎半空间布朗吉布斯性质，并且 $\mathcal{L}^{\infty}$ 在 $\mathbb{N}\times(0,\infty)$ 上的限制满足定义 *4.12* 中关于 $\Lambda = (0,\infty)$ 的布朗吉布斯性质。

证明。为便于说明，我们将证明分为四个步骤。前三个步骤证明紧性，步骤 4 则确立子序列极限的吉布斯性质。

步骤 1。本步骤证明紧性。由 [32, 引理 2.4], ，只需证明对每个$k \in \mathbb{N}$，序列 $\{\mathcal{L}_k^{\mathrm{hs};\varpi_n}(1)\}_{n\ge1}$ 都是紧的；并且对任意 $\varepsilon,\eta > 0$ 和 $b > 3$（这在后面会很方便），我们都能找到 $\delta > 0$ 和 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \ge n_0$,

$$\mathbb{P}\left(w(\mathcal{L}_k^{\mathrm{hs};\varpi_n}[0,b],\delta) > \eta\right) < \varepsilon, \tag{5.1}$$

其中我们回顾一下，$w(f,\ \delta)$ 是(4.16)中的连续模。在引理 3.5中，我们证明了当 $n\to\infty$ 时，$\mathcal{L}_k^{\mathrm{hs};\varpi_n}(1)$ 弱收敛，因此构成一个紧序列。 consequently，我们只需证明(5.1)。在证明的其余部分，我们固定 $\varepsilon,\ \eta > 0$, $b > 3$，并且我们遇到的所有常数都依赖于 $b,\ \varepsilon,\ \eta$ 以及序列 $\{\varpi_n\}_{n\ge1}$——下文不再特别说明这一点。

我们声称存在 $M^{\mathrm{bot}} > 0$ 和 $n_1 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \ge n_1$,

$$\mathbb{P}(A^c) < \varepsilon/4, \text{ where } A := \left\{\sup_{t\in[0,b]} \mathcal{L}_{2k+1}^{\mathrm{hs};\varpi_n}(t) \le M^{\mathrm{bot}}\right\}. \tag{5.2}$$

此外，我们声称可以找到 $\delta^{\mathrm{sep}},\ M>0, \Delta^{\mathrm{sep}} \in (0,\ b]$ 和 $n_2 \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geq n_2, \mathbb{P}(B^c) < \varepsilon/4$，其中

$$B := \left\{ \max_{1\leq i\leq 2k} |\mathcal{L}_i^{\mathrm{hs};\varpi_n}(b)| \leq M \right\} \cap \left\{ \min_{1\leq i\leq 2k-1} \left(\mathcal{L}_i^{\mathrm{hs};\varpi_n}(b) - \mathcal{L}_{i+1}^{\mathrm{hs};\varpi_n}(b) \right) \geq \delta^{\mathrm{sep}} \right\}$$
$$\cap \left\{ \mathcal{L}_{2k}^{\mathrm{hs};\varpi_n}(b) - \sup_{t\in[b-\Delta^{\mathrm{sep}},b]} \mathcal{L}_{2k+1}^{\mathrm{hs};\varpi_n}(t) \geq \delta^{\mathrm{sep}} \right\}.$$

我们在步骤 2 和 3 中验证这两个断言。此处假设它们成立，并证明 (5.1)。

令 C 表示 (5.1) 中的事件。利用 $A,\ B \in \mathcal{F}_{\mathrm{ext}}(\llbracket 1,\ 2k\rrbracket \times [0,b])$，由半空间布朗吉布斯性质（见定义 4.9），可得

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A\cap B\cap C) &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{A\cap B}\cdot \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_C \mid \mathcal{F}_{\mathrm{ext}}(\llbracket 1,2k\rrbracket\times[0,b])\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{A\cap B}\cdot \mathbb{P}_{\mathrm{avoid}}^{b,\vec{y}^n,\vec{\mu}^n,g^n}\left(w(\mathcal{Q}_k,\delta)>\eta\right)\right], \end{aligned} \tag{5.4}$$

其中 $\vec{y}^n = (\mathcal{L}_1^{\mathrm{hs};\varpi_n}(b)\ldots,\ \mathcal{L}_{2k}^{\mathrm{hs};\varpi_n}(b))$，$\mu_i^n = (-1)^i\sqrt{2}\,\varpi_n$，且 $g^n = \mathcal{L}_{2k+1}^{\mathrm{hs};\varpi_n}[0,b]$。

在事件 $A\cap B$ 上，满足引理 4.20 的条件。取足够大的 $n_0 \geq \max(n_1,\ n_2)$，使得对所有 $n\geq n_0$ 都有 $\sqrt{2}\,\varpi_n \geq \varpi_0$，则可找到 $\delta>0$，使得 (5.4) 第二行期望中的概率对 $n\geq n_0$ 至多为 $\varepsilon/2$。因此，由 (5.2)、(5.3)、(5.4) 和并集界可得，对 $n\geq n_0$ 有 $\mathbb{P}(C)<\varepsilon$，从而证明了 (5.1)。

步骤 2. 在这一步中，我们为序列 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi_n}$ 建立一个“无大最大值”估计，这尤其意味着 (5.2)。我们将证明，对于任意 $b,\ \varepsilon>0$，存在 $H>0$ 和 $n_1\in\mathbb{N}$，使得对所有 $n\geq n_1$，

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,b]} \mathcal{L}_1^{\mathrm{hs};\varpi_n}(t) > H\right) < \varepsilon. \tag{5.5}$$

由于 $\mathcal{L}_{2k+1}^{\mathrm{hs};\varpi_n}(t) \leq \mathcal{L}_1^{\mathrm{hs};\varpi_n}(t)$ 几乎必然成立，因此将 ε 替换为 $\varepsilon/4$、将 H 替换为 M^{bot} 后，即可得到 (5.2)。

根据引理 3.5，我们可以找到 $M_1,\ M_2>0$ 和 $n_1\in\mathbb{N}$，使得对所有 $n\geq n_1$，

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(F^c)<\varepsilon/4,\ \text{where } F := \left\{\mathcal{L}_1^{\mathrm{hs};\varpi_n}(2b) \geq -M_1\right\}, \\ &\mathbb{P}(G)<\varepsilon/8,\ \text{where } G := \left\{\mathcal{L}_1^{\mathrm{hs};\varpi_n}(b) \geq M_2\right\}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

现在令 $H := 2M_2 + M_1$，并继续证明 (5.5)。

固定一个鳝 取集合 $\mathsf{S} = \{s_1,\ldots,s_m\} \subset (0,\ b)$，其中 $s_1<s_2<\cdots<s_m$，并定义事件

$$E_i^{H;\mathsf{S}} = \{\mathcal{L}_1^{\mathrm{hs};\varpi_n}(s_i) > H \text{ and } \mathcal{L}_1^{\mathrm{hs};\varpi_n}(s_j) \leq H \text{ for } j\in\llbracket 1,i-1\rrbracket\},\ \text{and } E^{H;\mathsf{S}} = \bigsqcup_{i=1}^m E_i^{H;\mathsf{S}}.$$

根据 [34, 引理 2.9]，$\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi_n}$ 满足定义 4.12 中的布朗吉布斯性质。利用这一性质以及布朗桥系综的随机单调性，结合 [24, 引理 2.6、2.7], ，可得

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(E_i^{H;\mathsf{S}}\cap F\cap G\right) &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{E_i^{H;\mathsf{S}}\cap F}\cdot \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_G \mid \mathcal{F}_{\mathrm{ext}}(\{1\}\times(s_i,2b))\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{E_i^{H;\mathsf{S}}\cap F}\cdot \mathbb{P}_{\mathrm{avoid;Br}}^{s_i,2b,\mathcal{L}_1^{\mathrm{hs},\varpi_n}(s_i),\mathcal{L}_1^{\mathrm{hs};\varpi_n}(2b),\infty,\mathcal{L}_2^{\mathrm{hs};\varpi_n}[0,2b]}\left(\mathcal{Q}_1(b)\geq M_2\right)\right] \\ &\geq \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{E_i^{H;\mathsf{S}}\cap F}\cdot \mathbb{P}_{\mathrm{free;Br}}^{s_i,2b,H,-M_1}\left(\mathcal{Q}_1(b)\geq M_2\right)\right], \end{aligned} \tag{5.7}$$

其中 $\mathbb{P}^{s_i,\ 2b,\ H,\ -M_1}$ 自由；布朗桥是一个从 $\mathcal{Q}_1(s_i)$ 到 $\mathcal{Q}_1(2b)$ 的布朗桥的分布。

注意，由于 $\mathcal{Q}_1$ 的分布为 $\mathbb{P}^{s_i,\ 2b,\ H,\ -M_1}$ 自由；布朗桥，我们知道 $\mathcal{Q}_1(b)$ 是一个均值为

$$\frac{b}{2b-s_i}\cdot H+\frac{b-s_i}{2b-s_i}\cdot(-M_1)\geq\frac{1}{2}(2M_2+M_1)-\frac{1}{2}M_1\geq M_2,$$

其中我们用到了 $H=2M_2+M_1$ 和 $s_i\in(0,\ b)$。后者意味着 (5.7) 最后一行中的概率至少为 $1/2$，因此

$$\mathbb{P}(E_i^{H;\mathsf{S}}\cap F\cap G)\geq(1/2)\mathbb{P}\left(E_i^{H;\mathsf{S}}\cap F\right).$$

对 i 求和，我们得到

$$\mathbb{P}(G)\geq\mathbb{P}(E^{H;\mathsf{S}}\cap F\cap G)\geq(1/2)\mathbb{P}\left(E^{H;\mathsf{S}}\cap F\right)\geq(1/2)\mathbb{P}\left(E^{H;\mathsf{S}}\right)-(1/2)\mathbb{P}(F^c).$$

将 最后一个不等式与 (5.6) 结合起来，我们得到对所有有限集 $\mathsf{S}\subset(0,\ b)$ 和 $n\geq n_1$，都有 t

$$\varepsilon/2>\mathbb{P}\left(E^{H;\mathsf{S}}\right).$$

固定有限集 $\mathsf{S}_1\subset\mathsf{S}_2\subset\cdots$，使得 $\mathbb{Q}\cap(0,\ b)=\cup_{m=1}\mathsf{S}_m$，由测度从下连续性可知，对所有 $n\geq n_1$，

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in(0,b)\cap\mathbb{Q}}\mathcal{L}_1^{\mathrm{hs};\varpi_n}(t)>H\right)=\lim_{m\to\infty}\mathbb{P}\left(E^{H;\mathsf{S}_m}\right)\leq\varepsilon/2.$$

最后一个等式推出 (5.5)，因为 $\mathcal{L}_1^{\mathrm{hs};\varpi_n}$是连续函数，且 $\mathbb{Q}\cap(0,\ b)$ 在 $[0,b]$ 中稠密。

步骤 3。在此步骤中，我们证明（5.3）。

根据引理 3.5，应用于 $m=1$ 和 $s_1=b$，我们知道 $\{\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\varpi_n}(b)\}_{i\geq1}$ 收敛于一个随机向量 $X=\{X_i\}_{i\geq1}$，其几乎处处满足 $X_1>X_2>\cdots$。由于 $\mathcal{L}_i^{\mathrm{hs};\varpi_n}(b)=2^{-1/2}(\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\varpi_n}(b)-b^2)$，我们可以找到 $n_{2,\ 1}$，δ_1^{sep}，$M>0$，使得对于 $n\geq n_{2,\ 1}$

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq2k}|\mathcal{L}_i^{\mathrm{hs};\varpi_n}(b)|>M\right)<\varepsilon/12,\ \mathbb{P}\left(\min_{1\leq i\leq2k-1}\left(\mathcal{L}_i^{\mathrm{hs};\varpi_n}(b)-\mathcal{L}_{i+1}^{\mathrm{hs};\varpi_n}(b)\right)<\delta_1^{\mathrm{sep}}\right)<\varepsilon/12.\tag{5.8}$$

我们声称可以找到 δ_2^{sep}，$\Delta^{\mathrm{sep}}\in(0,\ b]$ 和 $n_{2,\ 2}\in\mathbb{N}$，使得对于所有 $n\geq n_{2,\ 2}$，

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{L}_{2k}^{\mathrm{hs};\varpi_n}(b)-\sup_{t\in[b-\Delta^{\mathrm{sep}},b]}\mathcal{L}_{2k+1}^{\mathrm{hs};\varpi_n}(t)<\delta_2^{\mathrm{sep}}\right)<\varepsilon/12.\tag{5.9}$$

注意到（ 5.8）和（5.9）推出了（5.3），其中 $n_2=$为max($n_{2,\ 1},\ n_{2,\ 2}$)，而 $\delta^{\mathrm{sep}}=$为min($\delta_1^{\mathrm{sep}},\ \delta_2^{\mathrm{sep}}$)。

我们由引理 3.5 和 [24, 命题 3.6] 推出 (5.9)。

令 $\mathcal{K}^n$ 表示定义在 $[-3,3]$ 上、以 $[\![1,2k+2]\!]$ 为指标的线系综，由 $\mathcal{K}_i^n(t)=\mathcal{L}_i^{\mathrm{hs};\varpi_n}(t+b)$ 给出（这里我们终于用到了 $b>3$）。我们声称，$\{\mathcal{K}^n\}_{n\geq1}$ 满足假设 $(H)_{2k+1,T+2}$（定义 3.3]）中的三个条件，其中 $T=1$。事实上，假设 $(H1)_{2k+1,3}$ 表明 $\mathcal{K}^n$ 是具有布朗吉布斯性质的不相交线系综，这直接由 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi_n}$ 的布朗吉布斯性质以及 [34, 引理 2.9] 得出。假设 $(H2)_{2k+1,3}$ 表明，对每个有限集 $\mathsf{S}\subseteq[-3,3]$，$\{\mathcal{K}_i^n(s):\ i\in[\![1,2k+1]\!],s\in\mathsf{S}\}$ 的联合分布弱收敛，这由引理 3.5 得出。最后，$(H3)_{2k+1,3}$ 表明，对每个 $\hat{}\varepsilon>0$ 和 $t\in[-3,3]$，我们都可以找到 $\hat{}\delta>0$，使得当 n 足够大时，

$$\mathbb{P}(\min_{1\leq i\leq2k}|\mathcal{K}_i^n(t)-\mathcal{K}_{i+1}^n(t)|>\hat{\delta})<\hat{\varepsilon},$$

which 再次由引理 3.5 得出，尤其是由 (3.5) 中的严格不等式得出 .

由 [24, 命题 3.6] 可知，$\mathcal{K}^n$ 在 $[\![1,\ 2k+1]\!]\times[-1,1]$ 上的限制在 $n\to\infty$ 时弱收敛（在一致拓扑下）到一个互不相交的线系综。特别地，

向右平移 b后，这意味着 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi_n}$ 在 $[\![1,\ 2k+1]\!]\times[b-1,b+1]$ 上的限制在 $n\to\infty$ 时弱收敛到一个互不相交线系综，我们将其记为 $\mathcal{L}^{\infty}$。因此，我们可以找到 $\delta_2^{\mathrm{sep}}>0$ 和 $\Delta^{\mathrm{sep}}\in$ （0，1），使得

$$\mathbb{P}\left(\inf_{t\in[b-1,b+1]}\left(\mathcal{L}_{2k}^{\infty}(t)-\mathcal{L}_{2k+1}^{\infty}(t)\right)<2\delta_2^{\mathrm{sep}}\right)<\frac{\varepsilon}{24},\quad \mathbb{P}\left(\sup_{|t-b|\le\Delta^{\mathrm{sep}}}|\mathcal{L}_{2k}^{\infty}(t)-\mathcal{L}_{2k}^{\infty}(b)|>\delta_2^{\mathrm{sep}}\right)<\frac{\varepsilon}{24}.$$

鉴于弱收敛，由并集界可知，当 n 足够大时，(5.9) 成立。

步骤 4. 在最后一步中，我们证明任意子序列极限 $\mathcal{L}^{\infty}$ of $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi_n}$ 都满足钉扎半空间布朗吉布斯性质，并且在 $\Lambda=(0,\infty)$ 上满足布朗吉布斯性质。设 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi_{n_v}}$ 是弱收敛到 $\mathcal{L}^{\infty}$ 的子列。根据斯科罗霍德表示定理 [17,定理 6.7], ，我们可以假设 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi_{n_v}}$、 $\mathcal{L}^{\infty}$ 定义在同一空间上，并且当 $v\to\infty$ 时，收敛几乎必然在紧集 $\mathbb{P}$ 上一致。

回顾定义 4.10 和 4.12，我们看到需要证明以下陈述。首先，对每个 $k\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{L}_i^{\infty}(t)>\mathcal{L}_{i+1}^{\infty}(t)\text{ for all }t\in(0,\infty),i\in[\![1,2k]\!]\right)=1. \tag{5.10}$$

其次，对于每个 $[a,b]\subset(0,\infty)$， $k\in\mathbb{N}$、 $S=[\![s_1,s_2]\!]\subseteq[\![1,2k]\!]$，有界的博雷尔可测 F:$C(S\times[a,b])\to\mathbb{R}$ 以及 $U\in\mathcal{F}_{\mathrm{ext}}(S\times(a,b))$，我们有

$$\mathbb{E}\left[F\left(\mathcal{L}^{\infty}|_{S\times[a,b]}\right)\cdot\mathbf{1}_U\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}^{a,b,\vec{x},\vec{y},f,g}_{\text{avoid;Br}}\left[F(\mathcal{Q})\right]\cdot\mathbf{1}_U\right], \tag{5.11}$$

其中 $\vec{x}=(\mathcal{L}_{s_1}^{\infty}(a)\ldots,\mathcal{L}_{s_2}^{\infty}(a))$，$\vec{y}=(\mathcal{L}_{s_1}^{\infty}(b)\ldots,\mathcal{L}_{s_2}^{\infty}(b))$，$g=\mathcal{L}_{s_2+1}[a,b]$，$f=\mathcal{L}_{s_1-1}^{\infty}[a,b]$ 当 $s_1\ge 2$时，以及当 $s_1=1$时的 $f=\infty$ 。此外， $\mathcal{Q}$ 的分布为 $\mathbb{P}^{a,b,\vec{x},\vec{y},f,g}$ 避开;Br，如定义 4.11 中所述，但曲线的指标为 S，而非 $[\![1,\ldots,s_2-s_1+1]\!]$。

最后，对每个 $b>0$，$k\in\mathbb{N}$，有界的博雷尔可测函数 G： $C([\![1,2k]\!]\times[0,b])\to\mathbb{R}$ 和$V\in\mathcal{F}_{\mathrm{ext}}([\![1,2k]\!]\times[0,b))$，我们有

$$\mathbb{E}\left[G\left(\mathcal{L}^{\infty}|_{[\![1,2k]\!]\times[0,b]}\right)\cdot\mathbf{1}_V\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}^{b,\vec{y},g}_{\text{pin}}\left[G(\mathcal{Q})\right]\cdot\mathbf{1}_V\right], \tag{5.12}$$

其中 $\vec{y}=(\mathcal{L}_1^{\infty}(b)\ldots,\mathcal{L}_{2k}^{\infty}(b))$、 $g=\mathcal{L}_{2k+1}[0,b]$ 和 $\mathcal{Q}$ 的分布为 $\mathbb{P}^{b,\ \vec{y},\ g}$ 钉扎，如定义 4.7 所述。

根据条件期望的定义性质，我们有，(5.10) 和 (5.11) 验证了定义 4.12 的条件，而 (5.10) 和 (5.12) 验证了定义 4.10 的条件。我们还指出，由引理 3.5 可知，对于所有 $i\ge 1$ 和 $b>a>0$，几乎处处有 $\mathcal{L}_i^{\infty}(a)>\mathcal{L}_{i+1}^{\infty}(a)$ 和 $\mathcal{L}_i^{\infty}(b)>\mathcal{L}_{i+1}^{\infty}(b)$，因此 (5.11) 和 (5.12) 右侧的期望均有定义。

如今，证明 (5.10)、(5.11) 和 (5.12) 这类陈述已相当常见，参见例如 [32, 定理 2.26(ii)] 和 [31,定理 5.1], 的证明，因此我们将从简。首先，我们可以逐字重复 [31, 定理 5.1] 证明中步骤 1 的论证，从而得出 (5.10) 由 (5.11) 推出。于是只剩下证明 (5.11) 和 (5.12)。

证明（5.11）。固定 $m\in\mathbb{N}$、 k_1、……、$k_m\in\mathbb{N}$、 t_1、……、$t_m\in(0,\ \infty)$ 以及有界连续h_1、……、h_m： $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$。定义 $R=\{i\in[\![1,m]\!]:\ k_i\in S,\ t_i\in[a,b]\}$。我们声称

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m}h_i(\mathcal{L}_{k_i}^{\infty}(t_i))\right]=\mathbb{E}\left[\prod_{i\notin R}h_i(\mathcal{L}_{k_i}^{\infty}(t_i))\cdot\mathbb{E}^{a,b,\vec{x},\vec{y},f,g}_{\text{avoid;Br}}\left[\prod_{i\in R}h_i(\mathcal{Q}_{k_i}(t_i))\right]\right]. \tag{5.13}$$

由 [34, 引理 2.9], 我们知道 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi_{n_v}}$ 满足布朗吉布斯性质，并且 s o

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m}h_i(\mathcal{L}_{k_i}^{\mathrm{hs};\varpi_{n_v}}(t_i))\right]=\mathbb{E}\left[\prod_{i\notin R}h_i(\mathcal{L}_{k_i}^{\mathrm{hs};\varpi_{n_v}}(t_i))\cdot\mathbb{E}^{a,b,\vec{x}^v,\vec{y}^v,f^v,g^v}_{\text{avoid;Br}}\left[\prod_{i\in R}h_i(\mathcal{Q}_{k_i}(t_i))\right]\right], \tag{5.14}$$

其中 $\vec{x}^v = (\mathcal{L}_{s_1}^{\mathrm{hs};\varpi_{n_v}}(a)\ldots,\mathcal{L}_{s_2}^{\mathrm{hs};\varpi_{n_v}}(a))$, $\vec{y}^v = (\mathcal{L}_{s_1}^{\mathrm{hs};\varpi_{n_v}}(b)\ldots,\mathcal{L}_{s_2}^{\mathrm{hs};\varpi_{n_v}}(b))$, $g^v = \mathcal{L}_{s_2+1}[a,b]$, $f^v = \mathcal{L}_{s_1-1}^{\mathrm{hs};\varpi_{n_v}}[a,b]$ 对于 $s_1 \geq 2$, 而当 $s_1 = 1$时, $f^v = \infty$。利用 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi_{n_v}}$ 在紧集上一致收敛到 $\mathcal{L}^\infty$, 以及 h_i的连续性, 我们可知 (5.14) 左右两侧的随机变量分别收敛到 (5.13) 中的随机变量。我们指出, 这种收敛

$$\lim_{v\to\infty} \mathbb{E}_{\mathrm{avoid;Br}}^{a,b,\vec{x}^v,\vec{y}^v,f^v,g^v}\left[\prod_{i\in R} h_i(\mathcal{Q}_{k_i}(t_i))\right] \overset{a.s.}{=} \mathbb{E}_{\mathrm{avoid;Br}}^{a,b,\vec{x},\vec{y},f,g}\left[\prod_{i\in R} h_i(\mathcal{Q}_{k_i}(t_i))\right]$$

由引理 4.17 得出。

从上一段可知, 取 (5.14) 中的 $v\to\infty$ 极限并应用有界收敛定理, 即可得到 (5.13)。现在, 由步骤 2 中 [31,定理 5.1], 的证明可逐字照搬的单调类论证, 可知 (5.13) 蕴含 (5.11)。

(5.12) 的证明。固定 $m \in \mathbb{N}$, $k_1,\ldots,k_m \in \mathbb{N}$, $t_1,\ldots,t_m \in [0,\infty)$ 以及有界连续$h_1,\ldots,h_m\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$。定义 $R = \{i \in [\![1,m]\!]\colon k_i \in [\![1,2k]\!], t_i \in [0,b]\}$。我们断言

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^m h_i(\mathcal{L}_{k_i}^\infty(t_i))\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i\notin R} h_i(\mathcal{L}_{k_i}^\infty(t_i))\cdot \mathbb{E}_{\mathrm{pin}}^{b,\vec{y},g}\left[\prod_{i\in R} h_i(\mathcal{Q}_{k_i}(t_i))\right]\right]. \tag{5.15}$$

由命 题 1.10, $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi_{n_v}}$ 满足半空间布朗吉布斯性质, 因此

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^m h_i(\mathcal{L}_{k_i}^{\mathrm{hs};\varpi_{n_v}}(t_i))\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i\notin R} h_i(\mathcal{L}_{k_i}^{\mathrm{hs};\varpi_{n_v}}(t_i))\cdot \mathbb{E}_{\mathrm{avoid}}^{b,\vec{y}^v,\vec{\mu}_{2k}^v,g^v}\left[\prod_{i\in R} h_i(\mathcal{Q}_{k_i}(t_i))\right]\right], \tag{5.16}$$

其中 $\vec{y}^v = (\mathcal{L}_1^{\mathrm{hs};\varpi_{n_v}}(b)\ldots,\mathcal{L}_{2k}^{\mathrm{hs};\varpi_{n_v}}(b))$、 $g^v = \mathcal{L}_{2k+1}[0,b]$ 和 $\vec{\mu}_{2k}^v \in \mathbb{R}^{2k}$ 具有奇数坐标$-\sqrt{2\varpi_{n_v}}$ 和偶数坐标 $\sqrt{2\varpi_{n_v}}$。

与之前一样, 在 (5.16) 中取 $v\to\infty$ 极限并应用有界收敛定理, 即可得到 (5.15)。这里我们用到了

$$\lim_{v\to\infty} \mathbb{E}_{\mathrm{avoid}}^{b,\vec{y}^v,\vec{\mu}_{2k}^v,g^v}\left[\prod_{i\in R} h_i(\mathcal{Q}_{k_i}(t_i))\right] \overset{a.s.}{=} \mathbb{E}_{\mathrm{pin}}^{b,\vec{y},g}\left[\prod_{i\in R} h_i(\mathcal{Q}_{k_i}(t_i))\right],$$

这由引理 4.18 得出。(5.15) 蕴含 (5.12) 这一事实, 可通过逐字重复定理 5.1] 的证明中步骤 2 的单调类论证得出。□

5.2. 定理 1.13、1.16 和 1.20 的证明。

定理 *1.13* 和 *1.20* 的证明。 令 $\{\varpi_n\}_{n\geq 1}$ 为任意一个趋于无穷大的序列。由命题 5.1 可知, $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi_n}$ 构成一个紧序列。假设 $\mathcal{L}^{\infty,1}$ 和 $\mathcal{L}^{\infty,2}$ 是两个子序列极限。根据引理 3.5 和连续映射定理 [17, 定理 2.7], , 我们知道, 对于任意有限集 $\mathsf{S} = \{s_1,\ldots,s_m\} \subset (0,\infty)$, 都有

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{L}_i^{\infty,1}(s_j) : i\geq 1, j\in[\![1,m]\!]\right) &\overset{f.d.}{=} \left(2^{-1/2}(X_i^{j,\mathsf{S}} - s_j^2) : i\geq 1, j\in[\![1,m]\!]\right), \text{ and}\\
\left(\mathcal{L}_i^{\infty,2}(s_j) : i\geq 1, j\in[\![1,m]\!]\right) &\overset{f.d.}{=} \left(2^{-1/2}(X_i^{j,\mathsf{S}} - s_j^2) : i\geq 1, j\in[\![1,m]\!]\right).
\end{aligned}$$

由于有限维集合构成一个分离类, 参见 [33, 引理 3.1], , 我们得出 $\mathcal{L}^{\infty,\,1} \overset{d}{=} \mathcal{L}^{\infty,\,2}$。后者表明 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi_n}$ 至多有一个子序列极限, 而由紧性可知它恰有一个。我们将其称为 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\infty}$, 且它满足 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi_n} \Rightarrow \mathcal{L}^{\mathrm{hs};\infty}$。

注意, 如果我们选取不同的序列 $\tilde{\varpi}_n \to \infty$ 和 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\tilde{\varpi}_n} \Rightarrow \tilde{\mathcal{L}}^{\mathrm{hs};\infty}$, 则有 $\tilde{\mathcal{L}}^{\mathrm{hs};\infty} \overset{d}{=} \mathcal{L}^{\mathrm{hs};\infty}$, 因此极限 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\infty}$ 不依赖于我们所选的特定序列 $\{\varpi_n\}_{n\geq 1}$。为说明后者, 我们可以取交错序列 $\hat{}\varpi_{2i} = \varpi_i$ 和 $\hat{}\varpi_{2i-1} = \tilde{\varpi}_i$, 根据

上述论证， $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\hat{\varpi}_n}$ 是弱收敛的。由于 $\tilde{\mathcal{L}}^{\mathrm{hs};\infty}$， $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\infty}$ 都是 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\hat{\varpi}_n}$的弱子列极限，由弱极限的唯一性可得 $\tilde{\mathcal{L}}^{\mathrm{hs};\infty} \overset{d}{=} \mathcal{L}^{\mathrm{hs};\infty}$。

到目前为止，我们的工作表明 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi_n} \Rightarrow \mathcal{L}^{\mathrm{hs};\infty}$，且极限与序列 $\{\varpi_n\}_{n\geq 1}$ 无关。由 (1.8) 和连续映射定理 [17, 定理 2.7],，我们得出 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\varpi_n} \Rightarrow \mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$，其中后者满足 (1.14)。这证明了定理 1.13 中的弱收敛。

由命题 5.1，我们知道 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\infty}$ 在 $(0, \infty)$ 上满足布朗吉布斯性质，因此在那里互不相交。由连续性，我们得出 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\infty}$ 在 $[0,\infty)$ 上有序。根据 (1.14)，我们得出 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$也满足同样的结论，从而完成定理 1.13 的证明。

事实上 at $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\infty}$ 满足定理 1.20 的条件，这一点可由命题 5.1 得出。 □

定理 *1.16* 的证明。由定理 1.13 和引理 3.5，我们知道

$$\left(\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\varpi}(s_j) : i \geq 1, j \in [\![1,m]\!]\right) \overset{f.d.}{=} \left(X_i^{j;\mathsf{S}} : i \geq 1, j \in [\![1,m]\!]\right).$$

由 [30, 推论 2.20],，我们得出 $M^{\mathsf{S};X} \overset{d}{=} M^{\mathsf{S};\mathrm{hs};\infty}$，如 (1.7) 所示。由引理 3.5，我们得出$M^{\mathsf{S};\mathrm{hs};\infty} \overset{d}{=} M^{\mathsf{S};\infty}$，如引理 3.2(a) 所示。最后一个分布相等关系和引理 3.2(a) 蕴含了该定理的结论。□

5.3. **定理 1.23 的证明**。定义线系综 $\mathcal{L}^n$ 为 $\sqrt{2}\cdot\mathcal{L}_i^n(t)+t^2 = \mathcal{A}_i^n(t),$¯并注意到根据定义

$$\mathcal{L}_i^n(t) = \mathcal{L}_i^{\mathrm{hs};\infty}(t+t_n) + 2^{-1/2}t_n^2 - 2^{1/2}t_n \cdot t \text{ for } i \geq 1, t \in [-t_n, t_n]. \tag{5.17}$$

我们首先检验 $\mathcal{L}^n$ 满足假设 $(H)_{k,\ T}$ 其中 [24, 来自定义 3.3] ，对每个 $k \in \mathbb{N}$ 和$T > 0$均成立。事实上，根据定理 1.20(a)，我们知道 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\infty}$ 在 $(0, \infty)$ 上满足布朗吉布斯性质。由于后者在平移和仿射平移下保持不变，我们由 (5.17) 得出$\mathcal{L}^n$ 在 $(-t_n, t_n)$ 上满足布朗吉布斯性质，从而验证了 $(H1)_{k,\ T}$。由引理 3.7 和连续映射定理，我们从 (1.3) 得出 $\mathcal{L}_i^n \overset{f.d.}{\to} \mathcal{L}^{\mathrm{Airy}}$。由于 $\mathcal{L}^{\mathrm{Airy}}$互不相交，我们看到 $(H2)_{k,\ T}$ 和 $(H3)_{k,\ T}$ 也成立。

现在我们已经验证了 $(H)_{k,\ T}$，因此可以应用 [24, 命题 3.6] 得出 $\mathcal{L}^n \Rightarrow \mathcal{L}^{\mathrm{Airy}}$。根据连续映射定理，后者意味着 $\mathcal{A}^n \Rightarrow \mathcal{A}$。

5.4. **无限多个原子**。 本节旨在证明引理 3.4。我们需要以下辅助结果。

引理 5.2。 设 $\{M^N\}_{N\geq 1}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的一列点过程，它们弱收敛于点过程 M^∞。假设对于任意固定的 $a \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$，序列 $p_N^a := \mathbb{P}\left(M^N(\mathbb{R}) \geq a\right)$关于 N 单调递减，且 $\mathbb{P}(M^\infty(\mathbb{R}) = \infty) = 1$。那么，对所有 $N \in \mathbb{N}$，都有 $\mathbb{P}(M^N(\mathbb{R}) = \infty) = 1$。

证明。 证明与 [34, 引理 5.4], 的证明完全相同，只需将其中的每一处 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 替换为 $2\mathbb{Z}_{\geq 0}$。 □

有了上述结果，我们现在来证明引理 3.4。

引理 *3.4* 的证明。 证明过程与 [34, 引理 6.11]的证明非常相似。固定 $t \in (0, \infty)$，并令 $s_n = t + n$，其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。我们希望将引理 5.2 应用于序列 $\{M^{s_n;\ \infty}\}_{n\geq 0}$，如引理 3.2 中那样。为清晰起见，我们将证明分为三个步骤。

步骤 1。 我们断言，对于任意固定的 $a \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，都有

$$p_n^a \geq p_{n+1}^a, \text{ where } p_n^a := \mathbb{P}(M^{s_n;\infty}(\mathbb{R}) \geq a). \tag{5.18}$$

我们将证明 在下面的步骤中证明 (5.18)。这里，我们假设其成立，并证明该引理 a.

根据引理 3.3 (b)，当 $n \to \infty$, $M^{s_n;\infty}$ 弱收敛到 Airy 点过程时，该点过程几乎处处有无限多个原子，参见例如 [30, 公式 (7.11)]。结合上述事实与 (5.18)，我们知道序列 $M^{s_n;\infty}$ 满足引理 5.2 的条件，因此$\mathbb{P}(M^{t;\infty}(\mathbb{R}) = \infty) = \mathbb{P}(M^{s_0;\infty}(\mathbb{R}) = \infty) = 1$，正如所需。

步骤 2. 在证明的其余部分，我们固定 $a \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 并证明 (5.18)。不妨设 $p_{n+1}^a > 0$和 $a \geq 2$, 因为 $p_n^0 = 1$。我们还将固定一个序列 $\varpi_N \in \mathbb{R}$，使得当 $N \to \infty$时满足 $\varpi_N \to \infty$。

对每个 u, $v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $x \in \mathbb{R}$，我们对序列 $M^{s_v;\mathrm{hs};\varpi_N}$ 应用 [34, 引理 5.3]，并得出 e

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(M^{s_v;\mathrm{hs};\varpi_N}([x,\infty)) \leq u\right) = \mathbb{P}\left(M^{s_v;\infty}([x,\infty)) \leq u\right). \tag{5.19}$$

事实上，引理的条件 (1) 由引理 3.1 满足，条件 (2) 由引理 3.2 (b) 满足，而条件 (3) 则由以下事实满足：对每个 $x \in \mathbb{R}$，我们有

$$\mathbb{E}\left[M^{s_v;\infty}(\{x\})\right] = \int_{\{x\}} K_{12}^{\mathrm{hs};\infty}(s_v, y; s_v, y)dy = 0.$$

固定 $\varepsilon \in (0, 1)$。利用 $p_{n+1}^a > 0$ 和单调收敛定理，我们可以找到 $x_0 \in \mathbb{R}$，使得

$$\mathbb{P}\left(M^{s_{n+1};\infty}([x_0,\infty)) \geq a\right) \geq (1-\varepsilon)p_{n+1}^a. \tag{5.20}$$

然后我们利用 (5.19)，得出对于所有充分大的 N,

$$\mathbb{P}\left(M^{s_{n+1};\mathrm{hs};\varpi_N}([x_0,\infty)) \geq a\right) \geq (1-2\varepsilon)p_{n+1}^a. \tag{5.21}$$

现在我们断言，存在 $R \geq 0$ 和 $\hat{}\varpi \in \mathbb{R}$，它们依赖于 x_0, t, n, a, ε，使得对于所有 $\varpi \geq \hat{}\varpi$,

$$\mathbb{P}\left(M^{s_n;\mathrm{hs};\varpi}([x_0-R,\infty)) \geq a \middle| M^{s_{n+1};\mathrm{hs};\varpi}([x_0,\infty)) \geq a\right) \geq 1-\varepsilon. \tag{5.22}$$

我们将在下一步证明 (5.22)。这里，我们先假设它成立，并证明 (5.18)。

结合 (5.21) 和 (5.22)（取 $\varpi = \varpi_N$），我们得出对于所有充分大的 N,

$$\mathbb{P}\left(M^{s_n;\mathrm{hs};\varpi_N}([x_0-R,\infty)) \geq a\right) \geq (1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)p_{n+1}^a.$$

取上文中的 $N \to \infty$，并利用 (5.19)，我们得出

$$\begin{aligned} p_n^a &= \mathbb{P}\left(M^{s_n;\infty}(\mathbb{R}) \geq a\right) \geq \mathbb{P}\left(M^{s_n;\infty}([x_0-R,\infty)) \geq a\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(M^{s_n;\mathrm{hs};\varpi_N}([x_0-R,\infty)) \geq a\right) \geq (1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)p_{n+1}^a. \end{aligned}$$

取上文中的 $\varepsilon \to 0$，我们便完成了 (5.18) 的证明。

步骤 3。在这最后一步中，我们证明（5.22）。根据 $M^{s_n;\mathrm{hs};\varpi}$ 的定义，我们只需证明：对于任意固定的 $t \in (0, \infty)$、$a \in 2\mathbb{Z}_{\geq 1}$、$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、$x_0 \in \mathbb{R}$ 和 $\varepsilon \in (0, 1)$，存在 $R \geq 0$ 和 $\hat{}\varpi \in \mathbb{R}$，使得对所有 $\varpi \geq \hat{}\varpi$，都有

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{A}_a^{\mathrm{hs};\varpi}(s_n) \geq x_0 - R \middle| \mathcal{A}_a^{\mathrm{hs};\varpi}(s_{n+1}) \geq x_0\right) \geq 1-\varepsilon. \tag{5.23}$$

鉴于（1.8），只需证明：对于任意 $x_1 \in \mathbb{R}$，存在 $M \geq 0$ 和 $\hat{}\varpi \in \mathbb{R}$，使得对所有 $\varpi \geq \hat{}\varpi$，都有

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{L}_a^{\mathrm{hs};\varpi}(s_n) \geq x_1 - M \middle| \mathcal{L}_a^{\mathrm{hs};\varpi}(s_{n+1}) \geq x_1\right) \geq 1-\varepsilon. \tag{5.24}$$

事实上，利用 (1.8)，令 $x_0 = \sqrt{2x_1 + s_{n+1}^2}$ and$R = \sqrt{2M + s_{n+1}^2 - s_n^2}$ 后，上述 (5.24) 等价于 (5.23)。

在证明的其余部分，我们证明 (5.24)。我们根据引理 4.19 选取 $M>0$ and $\varpi_0\in\mathbb{R}$，其中令 $\underline{k}=a/2$ and $b=s_{n+1}$，并针对这组 M and $\hat{}\varpi:=\sqrt{2}\varpi_0$ 证明 (5.24)。

为简便起见，我们将 $\mathcal{L}_i^{\mathrm{hs};\varpi}$ 记作 L_i，表示 $i\in\mathbb{N}$。我们还将 $\vec{\mu}\in\mathbb{R}^a$ 记作 $\mu_i=(-1)^i\sqrt{2\varpi}$，表示 $i\in[\![1,a]\!]$、$\vec{y}=(y_1,\ldots,y_a)=(L_1(s_{n+1})\ldots L_a(s_{n+1}))\in W_a^\circ$和 $g(s)=L_{a+1}(s)$，表示 $s\in[0,s_{n+1}]$。令 $E=\{L_a(s_{n+1})\geq x_1\}$，并且

$$\mathcal{F}=\sigma\left(\{L_i(s_{n+1})\text{ for }i\in[\![1,a]\!]\text{ and }L_{a+1}(s)\text{ for }s\in[0,s_{n+1}]\}\right).$$

我们有以下不等式链

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\{L_a(s_n)\geq x_1-M\}\cap E\right)=\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_E\cdot\mathbb{E}\left[\mathbf{1}\left\{L_a(s_n)\geq x_1-M\right\}|\mathcal{F}\right]\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_E\cdot\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{b,\vec{y},\vec{\mu},g}\left(\mathcal{Q}_a(s_n)\geq x_1-M\right)\right]\\
&\geq\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_E\cdot\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{b,\vec{y},\vec{\mu},g}\left(\mathcal{Q}_a(s_n)\geq L_a(s_{n+1})-M\right)\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_E\cdot\mathbb{P}_{\text{avoid}}^{b,\vec{y},\vec{\mu},g}\left(\mathcal{Q}_a(s_n)\geq y_a-M\right)\right]\\
&\geq(1-\varepsilon)\cdot\mathbb{P}(E).
\end{aligned}\tag{5.25}$$

我们指出，第一个等式由条件期望的塔式性质以及$E\in\mathcal{F}$得出；第二个等式由命题 1.10 中线系综 $\mathcal{L}^{\mathrm{hs};\varpi}=\{L_i\}_{i\geq1}$ 的半空间布朗吉布斯性质（参数为$\vec{\mu}$）得出；第三个不等式由以下事实得出：在 E 上，我们有 $L_a(s_{n+1})\geq x_1$；第四个等式由 $\vec{y}$的定义得出，特别是 $y_a=L_a(s_{n+1})$；第五个不等式则由引理 4.19（取 $t=s_n$）得出。

公式 (5.25) 蕴含公式 (5.24)，从而完成引理的证明。 □

6. 原点处的分布

本节的目标是证明定理 1.26。为此所需的关键结果包含在下面的引理中。

引理 6.1。 定义随机测度 M 在 $\mathbb{R}$上为

$$M(A)=\sum_{i\geq1}\mathbf{1}\{\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}(0)\in A\}.\tag{6.1}$$

那么，$M\overset{d}{=}2M^{\mathrm{GSE}}$，其中 $M_{\text{高斯辛系综}}$ 在引理 *1.24* 中定义。

我们在第 6.3 节证明引理 6.1。现在利用它迅速推出定理 1.26。

定理 *1.26* 的证明。 由引理 6.1，对于任意 $k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{N}$和 $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$，我们有

$$\mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^n\{M(a_i,\infty)<k_i\}\right)=\mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^n\{2M^{\mathrm{GSE}}(a_i,\infty)<k_i\}\right).\tag{6.2}$$

若现在按照引理 1.24 令 $(X_1,X_2,\ldots)=(-2^{2/3}\Lambda_0,-2^{2/3}\Lambda_0,-2^{2/3}\Lambda_1,-2^{2/3}\Lambda_1,\ldots)$，则有 $X_1\geq X_2\geq\cdots$，并且

$$2M^{\mathrm{GSE}}(A)=\sum_{i\geq1}\mathbf{1}\{X_i\in A\}.$$

将后者与 $\mathcal{A}_1^{\mathrm{hs};\infty}(0)\geq\mathcal{A}_2^{\mathrm{hs};\infty}(0)\geq\cdots$(由定理 1.13) 结合起来，我们得到 (6.2) 等价于

$$\mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^n\{\mathcal{A}_{k_i}^{\mathrm{hs};\infty}(0)\leq a_i\}\right)=\mathbb{P}\left(\cap_{i=1}^n\{X_{k_i}\leq a_i\}\right),$$

这就推出了该定理的结论。 □

设 $t_N \to 0+$ 为任意序列，并在 $\mathbb{R}$ 上定义随机测度 M^N：

$$M^N(A) = \sum_{i\geq 1} \mathbf{1}\{\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}(t_N) \in A\}. \tag{6.3}$$

我们证明引理 6.1 的方法是证明

(1) $M^N \Rightarrow 2M^{\mathrm{GSE}}$，(2)

$M^N \to M$ 几乎处处。

正如我们将在第 6.3 节中看到的，第二点可直接由第一点以及定理 1.13 中已建立的$\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 的连续性推出。因此，大部分工作都集中在第一点上。

由定理 1.16 和 [34, 引理 5.13], 可知，随机测度 M^N 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的 Pfaffian 点过程，其参考测度为勒贝格测度，相关核为 $\hat{K}^N(x,\ y) = K^{\mathrm{hs};\infty}(t_N,\ x;\ t_N,\ y)$，其中 $K^{\mathrm{hs};\infty}$ 如 (1.10) 所示。当 $t_N \in (0,\ 1/2]$ 时，我们可以写成

$$\hat{K}^N(x,y) = K^N(x,y) + \Delta^N(x,y), \tag{6.4}$$

其中

$$\begin{aligned} K_{11}^N(x,y) =& \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dw \frac{(z-w)H(z,x;w,y)}{4(z+w+2t_N)(z+t_N)(w+t_N)}, \\ K_{12}^N(x,y) = -K_{21}^N(y,x) =& \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dw \frac{(z-w)H(z,x;w,y)}{2(z+t_N)(z+w)}, \\ K_{22}^N(x,y) =& \frac{1}{(2\pi \mathrm{i})^2}\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dw \frac{(z-w)H(z,x;w,y)}{z+w-2t_N}, \end{aligned} \tag{6.5}$$

and

$$\Delta^N(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_N(x,y) \end{bmatrix} \text{ with } \delta_N(x,y) = e^{2t_N^3/3 - t_N(x+y)} \cdot \frac{(y-x)}{2\pi^{1/2}(2t_N)^{3/2}} \cdot \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{8t_N}\right). \tag{6.6}$$

我们指出，令 $s = t = t_N$ 并将 $I_{ij}^{\mathrm{hs};\infty}$ 定义中的积分路径变形为 $\mathcal{C}_1$，即可直接从 (1.10) 得到 (6.4)。我们不会穿过任何极点，是因为假设 $t_N \in (0,\ 1/2]$。

证明 Pfaffian 点过程弱收敛的标准方法是证明其核逐点收敛。但这种方法在这里行不通，因为这会意味着极限点过程本身也是 Pfaffian 点过程，因而是简单点过程，而 $2M^{\mathrm{GSE}}$ 并非如此。从公式层面来看，由于 δ_N 具有奇异性，这种方法也无法奏效，因此我们需要对其加以改进。

我们通过证明 $M^N \Rightarrow 2M^{\mathrm{GSE}}$ 来展示这一点：M^N 的联合阶乘矩 收敛到 $2M^{\mathrm{GSE}}$ 的联合阶乘矩。这些联合阶乘矩可以表示为有限个积分之和，其中涉及 K_{ij}^N 与 δ_N 的乘积。对 δ_N 与光滑函数的乘积进行积分，而非直接考察 δ_N，便可得到更光滑且确实收敛的表达式。

本节其余内容安排如下。第 6.1 节计算若干 δ_N 与光滑函数乘积所涉积分序列的极限，见引理 6.3。第 6.2 节利用这一结果证明 M^N 的阶乘矩收敛到 $2M_{\text{高斯辛系综}}$ 的阶乘矩。最后，第 6.3 节给出引理 6.1 的证明。

6.1. 的渐近作用 δ_N。我们先介绍一些有用的定义和记号。本节中我们采用以下多重指标记号：

- A multi-index is $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,
- $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$,
- $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$,
- for $x = (x_1, \ldots, x_n)$ and $a = (a_1, \ldots, a_n)$, we write $(x-a)^\alpha = (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n - a_n)^{\alpha_n}$,

- $D^\alpha f(a) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}(a)$,
- $C^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ 是 k 次连续可微函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 的集合,
- 对于博雷尔集 $A \subseteq \mathbb{R}^n$，我们用 $\int_A dy$ 表示 $\int_A dy_1 dy_2 \cdots dy_n$,
- 若 $J_1, \ldots, J_m$ 是两两不交的有限指标集，满足 $J_k = \{j_1^k, \ldots, j_{r_k}^k\}$，且 $A_1, \ldots, A_m \subseteq \mathbb{R}$ 是博雷尔集，则我们用 $\int_{A_1^{J_1} \times \cdots \times A_m^{J_m}} dy$ 表示

$$\int_{A_1} dy_{j_1^1} \int_{A_1} dy_{j_2^1} \cdots \int_{A_1} dy_{j_{r_1}^1} \int_{A_2} dy_{j_1^2} \int_{A_2} dy_{j_2^2} \cdots \int_{A_2} dy_{j_{r_2}^2} \cdots \int_{A_m} dy_{j_1^m} \int_{A_m} dy_{j_2^m} \cdots \int_{A_m} dy_{j_{r_m}^m}.$$

我们还在下面的定义中总结一些记号。

定义 6.2. 固定 $m \in \mathbb{N}$ 以及整数 $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$。定义集合

$$I_1 = \{1, \ldots, n_1\} \text{ and } I_i = \{n_1 + \cdots + n_{i-1} + 1, \ldots, n_1 + \cdots + n_i\} \text{ for } i = 2, \ldots, m.$$

我们进一步令 $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ 和 $n = n_1 + \cdots + n_m$。设 $r \in \mathbb{N}$，且 $n \geq 2r$。对于任意两两不同的整数 $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_r \in \{1, \ldots, n\}$，我们令 #tra 表示满足以下条件的指标对 $1 \leq i < j \leq 2r$ 的数量： $w_i > w_j$，其中 w 是这个词

$$w = (w_1, \ldots, w_{2r}) = (u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_r, v_r). \tag{6.7}$$

我们还定义 w 的符号，记作 $(-1)^w$，令其等于 $(-1)^{\#\mathrm{tra}}$。

如果能够找到两两不相交的指标集 $J_1, \ldots, J_m \subseteq \{1, \ldots, n\}$，使得.....，则称 $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_r$ 是 $\vec{n}$-相容的。

$$|J_i| = r_i, \ u_j, v_j \in I_i \text{ for } i = 1, \ldots, m \text{ and } j \in J_i, \text{ and } r_1 + \cdots + r_m = r.$$

注意，若 $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_r$ 是 $\vec{n}$-相容的，则对所有 $i = 1, \ldots, m$，都有 $n_i \geq 2r_i$。此外，我们注意到，$\vec{r} = (r_1, \ldots, r_m)$ 由 $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_r$ 唯一确定，并称其为它们的轮廓。我们还定义 $I_k^u = \{u_j\colon j \in J_k\}$，$I_k^v = \{v_j\colon j \in J_k\}$，以及 $I_k^{vc} = I_k \setminus I_k^v$，其中 $k = 1, \ldots, m$。

有了上述记号之后，我们现在转向本节的主要结果 .

引理 6.3。采用定义 *6.2* 中的相同记号。设 $t_N \in (0, 1/2]$ 是一个满足 $\lim_{N\to\infty} t_N = 0$ 的序列，并令 δ_N 如 *(6.6)* 所示。设 $f_N \in C^{r+1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ 是一个序列，且存在某个 $f_\infty \in C^{r+1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$

$$\lim_{N\to\infty} D^\alpha f_N(x) = D^\alpha f_\infty(x), \tag{6.8}$$

对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $|\alpha| \leq r+1$ 均成立。此外，设有 m 两两不相交区间$[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$，并令 $A = \min_{i=1,\ldots,m} a_i$、 $B = \max_{i=1,\ldots,m} b_i$。我们假设存在一个常数$C(n, r, A, B) > 0$，使得对所有 $x \in [A, B]^n$、 $|\alpha| \leq r+1$ 和 $N \in \mathbb{N}$

$$|D^\alpha f_N(x)| \leq C(n, r, A, B). \tag{6.9}$$

如果 u_1、.....、 u_r、 v_1、.....、 v_r 不是 $\vec{n}$–相容的，则

$$\int_{[a_1,b_1]^{n_1} \times \cdots \times [a_m,b_m]^{n_m}} dx \, |\delta_N(x_{u_1}, x_{v_1}) \cdots \delta_N(x_{u_r}, x_{v_r}) f_N(x)| \leq C_1 e^{-c_1/t_N}, \tag{6.10}$$

对于某些正的 C_1、 $c_1 > 0$，它们取决于 n、 r、 m、 $\{a_i\}_{i=1}^m$、 $\{b_i\}_{i=1}^m$ 和 C（n、 r、 A、 B）。

如果 u_1、.....、 u_r、 v_1、.....、 v_r 是 $\vec{n}$–相容的，则

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to\infty} \int_{[a_1,b_1]^{n_1} \times \cdots \times [a_m,b_m]^{n_m}} dx \delta_N(x_{u_1}, x_{v_1}) \cdots \delta_N(x_{u_r}, x_{v_r}) f_N(x) \\ &= \int_{[a_1,b_1]^{I_1^{vc}} \times \cdots \times [a_m,b_m]^{I_m^{vc}}} dy \left[(\partial_{x_{v_1}} - \partial_{x_{u_1}}) \cdots (\partial_{x_{v_r}} - \partial_{x_{u_r}}) f_\infty \right](\bar{y}), \end{aligned} \tag{6.11}$$

其中 $\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \in \mathbb{R}^n$ 由 y 通过令 $\bar{y}_j = y_j$ （当 $j \notin \{v_1, \ldots, v_r\}$ 时）以及 $\bar{y}_{v_i} = y_{u_i}$（当 $i = 1$ 时，$\ldots, r$）得到。

证明。 在整个证明过程中，我们记

$$A_N := \int_{[a_1,b_1]^{n_1}\times\cdots\times[a_m,b_m]^{n_m}} dx\delta_N(x_{u_1},x_{v_1})\cdots\delta_N(x_{u_r},x_{v_r})f_N(x).$$

为清晰起见，我们将证明分为四个步骤。在步骤 1 中，我们证明（6.10）。在第二步中，通过将 u_i 与 v_i 交换，对 A_N 进行部分对称化，条件为 $i=1$、.....、 r，并表示 $A_N = B_N + \mathrm{Err}_N$，见（6.16）。我们进一步将命题归结为证明 B_N 收敛（见（6.17））， 以及 Err_N 随 t_N 衰减（见（6.18））。等式（6.17）在第三步中得到证明，等式（6.18）在第四步中得到证明。在整个证明过程中，所有常数均依赖于 n、 r、 m、$\{a_i\}_{i=1}^m$、 $\{b_i\}_{i=1}^m$ 以及 C（n、 r、 A、 B）——对此我们不再另行说明。

步骤 1。 假设 u_1、.....、 u_r、 v_1、.....、 v_r 不与 $\vec{n}$ 兼容。那么，对于某些 $1\le i\ne j\le m$ 和 $k\in\{1,\dots,r\}$，我们有 $u_k\in I_i$ 和 $v_k\in I_j$。 由于 $\{[a_i,b_i]\}_{i=1}^m$ 两两不相交，我们可以找到 $\epsilon>0$，使得

$$|x-y|\ge\epsilon \text{ for } x\in[a_i,b_i] \text{ and } y\in[a_j,b_j].$$

根据 (6.6) 中 δ_N 的定义，我们可以找到 $C_0>0$，使得对于 $N\ge 1$

$$\begin{aligned}&|\delta_N(x,y)|\le C_0 t_N^{-3/2} \text{ if } x,y\in[A,B], \text{ and}\\ &|\delta_N(x,y)|\le C_0 t_N^{-3/2} e^{-\epsilon^2/8t_N} \text{ if } x\in[a_i,b_i], y\in[a_j,b_j].\end{aligned}\tag{6.12}$$

由后者和 (6.9) 可知，对于所有 $x\in[a_1,b_1]^{n_1}\times\cdots\times[a_m,b_m]^{n_m}$ 和 $N\ge 1$，我们有

$$|\delta_N(x_{u_1},x_{v_1})\cdots\delta_N(x_{u_r},x_{v_r})f_N(x)|\le C_0^r t_N^{-3r/2}\cdot C(n,r,A,B)\cdot e^{-\epsilon^2/8t_N},$$

由此立即得到 (6.10)。

步骤 2. 在下文中，我们假设 $u_1,\dots,u_r,v_1,\dots,v_r$ 是 $\vec{n}$-相容的。对于一个置换$\sigma\in S_n$ 以及定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 f，我们记

$$f^\sigma(x)=f^\sigma(x_1,\dots,x_n)=f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}).$$

利用 $\delta_N(x,y)=-\delta_N(y,x)$，将积分拆分到满足 $\{x_{u_i}\le x_{v_i}\}$ 或 $\{x_{u_i}\ge x_{v_i}\}$ 的集合上并作变量替换后，得到

$$A_N=\sum_{\sigma\in S_2^r}(-1)^\sigma\int_{[a_1,b_1]^{n_1}\times\cdots\times[a_m,b_m]^{n_m}} dx\prod_{i=1}^r \mathbf{1}\{x_{u_i}\le x_{v_i}\}\delta_N(x_{u_i},x_{v_i})\cdot f_N^\sigma(x),\tag{6.13}$$

其中 S_2^r 是置换群 S_n 的子群，由换位 $\{(u_i,v_i): i=1,\dots,r\}$ 生成。

根据泰勒公 式，参见例如 [22, 定理 3.18]，，对于所有 $f\in C^{r+1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ 以及 $x,\ a\in\mathbb{R}^n$

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\le r}\frac{D^\alpha f(a)(x-a)^\alpha}{\alpha!}+R_r(f;a,x),\tag{6.14}$$

其中余项 $R_r(f;a,x)$ 为

$$R_r(f;a,x)=\sum_{|\alpha|=r+1}\int_0^1 dt\frac{D^\alpha f(a+t(x-a))(x-a)^\alpha}{\alpha!}(1-t)^r.\tag{6.15}$$

将 (6.14) 代入 $f=f_N^\sigma$ 和 $a=(a_1,\ .....,\ a_n)$，使得

$$a_{v_i}=x_{u_i} \text{ for } i=1,\dots,r \text{ and } a_j=x_j \text{ for } j\notin\{v_1,\dots,v_r\},$$

代入（6.13），得到

$$A_N=B_N+\mathrm{Err}_N,\tag{6.16}$$

其中

$$B_N = \sum_{|\alpha|\le r} \int_{[a_1,b_1]^{n_1}\times\cdots\times[a_m,b_m]^{n_m}} dx \prod_{i=1}^{r} \mathbf{1}\{x_{u_i} \le x_{v_i}\}\delta_N(x_{u_i},x_{v_i}) \sum_{\sigma\in S_2^r} (-1)^\sigma \frac{[D^\alpha f_N^\sigma](a)(x-a)^\alpha}{\alpha!},$$

$$\mathrm{Err}_N = \int_{[a_1,b_1]^{n_1}\times\cdots\times[a_m,b_m]^{n_m}} dx \prod_{i=1}^{r} \mathbf{1}\{x_{u_i} \le x_{v_i}\}\delta_N(x_{u_i},x_{v_i}) \sum_{\sigma\in S_2^r} (-1)^\sigma R_r(f_N^\sigma; a, x).$$

我们声称

$$\lim_{N\to\infty} B_N = \int_{[a_1,b_1]^{I_1^{vc}}\times\cdots\times[a_m,b_m]^{I_m^{vc}}} dy \sum_{\sigma\in S_2^r} (-1)^\sigma [\partial_{x_{v_1}}\cdots\partial_{x_{v_r}} f_\infty^\sigma](\bar{y}), \tag{6.17}$$

其中 $\hat{}\bar{y}$ 如下所示（6.11）。此外，我们声称存在某个 $C_1 > 0$，使得对所有 $N \ge 1$

$$|\mathrm{Err}_N| \le \hat{C}_1 t_N^{1/2}. \tag{6.18}$$

利用对任意 $f \in C^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$

$$\sum_{\sigma\in S_2^r} (-1)^\sigma [\partial_{x_{v_1}}\cdots\partial_{x_{v_r}} f^\sigma](\bar{y}) = \left[(\partial_{x_{v_1}} - \partial_{x_{u_1}})\cdots(\partial_{x_{v_r}} - \partial_{x_{u_r}}) f\right](\bar{y}), \tag{6.19}$$

可知，（6.16）、（6.17）和（6.18）推出（6.11）。因此，证明归结为证明（6.17）和（6.18）。

步骤 3. 在这一步中，我们证明（6.17）。注意，对任意 $f \in C^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha|\le r}\sum_{\sigma\in S_2^r} (-1)^\sigma \frac{[D^\alpha f^\sigma](a)(x-a)^\alpha}{\alpha!} = \\ &= \sum_{\sigma\in S_2^r} (-1)^\sigma [\partial_{x_{v_1}}\partial_{x_{v_2}}\cdots\partial_{x_{v_r}} f^\sigma](a)(x_{v_1}-x_{u_1})\cdots(x_{v_r}-x_{u_r}). \end{aligned} \tag{6.20}$$

事实上，由于 $a_j = x_j$ 对于 $j \notin \{v_1,\dots,v_r\}$，我们看到，只有满足 $\alpha_j = 0$ 对于 $j \notin \{v_1,\dots,v_r\}$的项才会对（6.20）的第一行作出贡献。此外，如果对于某个 i有 $\alpha_{u_i} = \alpha_{v_i} = 0$，且 $\tau_i =$ （u_i， v_i），则由于 $a_{u_i} = a_{v_i}$，我们有 $[D^\alpha f]$（a） $= [D^\alpha f^{\tau_i}]$（a）。将其与（f^σ）结合，$\tau_i = f^{\tau_i\sigma}$表明每个求和项

$$\frac{[D^\alpha f_N^\sigma](y)(x-a)^\alpha}{\alpha!}$$

满足 $\alpha_{u_i} = \alpha_{v_i} = 0$的项都可以与相应的项配对，其中将 σ 替换为 $\tau_i\sigma$，由于它们带有相反的符号，二者相互抵消。上述讨论表明，唯一的非零贡献来自满足 $\alpha_j = 0$ 对于 $j \notin \{v_1,\dots,v_r\}$且 $\alpha_{v_i} \ge 1$ 对于 $i = 1,\ \dots,\ r$的 α。由于我们有$|\alpha| \le r$，可见唯一有贡献的项是 $\alpha_j = 0$ 对于 $j \notin \{v_1,\dots,v_r\}$ 且 $\alpha_{v_i} = 1$ 对于$i = 1,\ \dots,\ r$，从而得到（6.20）。

我们将 (6.20) 代入 B_N 的定义，以及 (6.6) 中的 $\delta_N(x_{u_i},x_{v_i})$，并作变量替换 $x_j = y_j$ for $j \notin \{v_1,\dots,v_r\}$ 和 $x_{v_i} = y_{u_i} + t_N^{1/2} z_i$，得到

$$\begin{aligned} B_N = &\int_{[a_1,b_1]^{I_1^{vc}}\times\cdots\times[a_m,b_m]^{I_m^{vc}}} dy \int_{[0,\infty)^r} dz \prod_{i=1}^{r} \mathbf{1}\{z_i \le t_N^{-1/2}(b_{s(i)} - y_{u_i})\} \\ &\times \prod_{i=1}^{r} e^{2t_N^3/3 - t_N(2y_{u_i} + t_N^{1/2} z_i)} \frac{z_i^2 e^{-z_i^2/8}}{4(2\pi)^{1/2}} \cdot \sum_{\sigma\in S_2^r} (-1)^\sigma [\partial_{x_{v_1}}\cdots\partial_{x_{v_r}} f_N^\sigma](\bar{y}), \end{aligned} \tag{6.21}$$

其中 $s(i)$ 满足 $u_i \in I_{s(i)}$。将 (6.21) 中的被积函数记为 $g_N(y,z)$，由 (6.8) 可知，对几乎处处的 (y,z)，有 $\in [a_1,b_1]^{I_1^{vc}} \times \cdots \times [a_m,b_m]^{I_m^{vc}} \times [0,\infty)^r$

$$\lim_{N\to\infty} g_N(y,z) = \prod_{i=1}^{r} \frac{z_i^2 e^{-z_i^2/8}}{4(2\pi)^{1/2}} \cdot \sum_{\sigma\in S_2^r} (-1)^\sigma [\partial_{x_{v_1}} \cdots \partial_{x_{v_r}} f_\infty^\sigma](\bar{y}). \tag{6.22}$$

此外 ，由 (6.9) 以及 $t_N \in (0,1/2]$, $|y_i| \le |A| + |B|$ 这一事实可知，对所有 $N \geq 1$

$$|g_N(y,z)| \le \prod_{i=1}^{r} \frac{z_i^2 e^{1+|A|+|B|+|z_i|-z_i^2/8}}{4(2\pi)^{1/2}} \cdot 2^r C(n,r,A,B). \tag{6.23}$$

由控制收敛定理可得

$$\lim_{N\to\infty} B_N = \int_{[a_1,b_1]^{I_1^{vc}}\times\cdots\times[a_m,b_m]^{I_m^{vc}}} dy \int_{[0,\infty)^r} dz \prod_{i=1}^{r} \frac{z_i^2 e^{-z_i^2/8}}{4(2\pi)^{1/2}} \sum_{\sigma\in S_2^r} (-1)^\sigma [\partial_{x_{v_1}} \cdots \partial_{x_{v_r}} f_\infty^\sigma](\bar{y}).$$

将后者与

$$\int_0^\infty \frac{z^2 e^{-z^2/8}}{4(2\pi)^{1/2}} dz = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 e^{-z^2/8}}{2(2\pi)^{1/2}} dz = 1,$$

结合可得 (6.17)。

步骤 4. 在这一步中，我们证明 (6.18)。由 (6.9) 和 (6.15)，可知存在某个 $C_3 > 0$，使得对所有 $x \in [A,B]^n$、$\sigma \in S_2^r$和 $N \geq 1$，

$$|R_r(f_N^\sigma; a, x)| \le C_3 \left(\sum_{i=1}^{r} |x_{u_i} - x_{v_i}| \right)^{r+1}.$$

我们指出，在推导最后一个不等式时，我们利用了根据定义，(6.15) 中的非零项必须满足$\alpha_j = 0$，其中 $j \notin \{v_1,\ldots,v_r\}$，而 $a_j = x_j$。

对 Err_N应用上文 (6.21) 中相同的变量代换，代入 (6.6) 中的 $\delta_N(x_{u_i}, x_{v_i})$，并使用最后一个余项上界，得到

$$|\mathrm{Err}_N| \le t_N^{1/2} \int_{[a_1,b_1]^{I_1^{vc}}\times\cdots\times[a_m,b_m]^{I_m^{vc}}} dy \int_{[0,\infty)^r} dz \prod_{i=1}^{r} e^{2t_N^3/3 - t_N(2y_i + t_N^{1/2} z_i)} \frac{z_i e^{-z_i^2/8}}{4(2\pi)^{1/2}} \cdot 2^r C_3 \left(\sum_{i=1}^{r} z_i \right)^{r+1}.$$

使用 $|y_i| \le |A| + |B|$、$t_N \in (0, 1/2]$ 后，最后一个显示的等式便推出 (6.18)。 □

6.2. 阶乘矩的收敛。 我们首先回顾一些关于 Pfaffian 的基本定义和记号，遵循 [51]。

对于 $n \in \mathbb{N}$，我们用 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ 表示由复数元素构成的 $n \times n$ 矩阵的集合。我们还用 $\mathrm{Skew}_{2n}(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{C})$ 表示由斜对称 $2n \times 2n$ 矩阵构成的集合。若 $J \subseteq \{1,\ldots,n\}$ 和 $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$，则用 M_J 表示将 M 限制到由 J 索引的行和列所得的矩阵。

若 $A \in \mathrm{Skew}_{2n}(\mathbb{C})$，我们将其 *Pfaffian* 定义为

$$\mathrm{Pf}[A] = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma\in S_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)\sigma(2)} A_{\sigma(3)\sigma(4)} \cdots A_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}. \tag{6.24}$$

Pfaffian 还有以下另一种表达式

$$\mathrm{Pf}[A] = \sum_{w=(i_1,j_1,\ldots,i_n,j_n)} (-1)^w A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_n j_n}, \tag{6.25}$$

其中，和是对满足以下条件的词 $w = (i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_n, j_n)$ 求取的：w 是 $\{1,\ldots,2n\}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ 的一个置换，并且对于 $k = 1, \ldots, n$, $i_k < j_k$。w 的符号 $(-1)^w$ 采用置换的通常定义，或者等价地，采用定义 6.2 中的定义。

若 $K:\mathbb{R}^2\to\mathrm{Skew}_2(\mathbb{C})$，我们记作

$$K(x,y)=\begin{bmatrix}K_{11}(x,y) & K_{12}(x,y)\\ K_{21}(x,y) & K_{22}(x,y)\end{bmatrix},$$

对于 $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，我们将 $\mathrm{Pf}[K(x_i,x_j)]_{i,j=1}^n$ 记作由 2×2 块 $K(x_i,x_j)$（其中 $1\le i,j\le n$）组成的 $2n\times 2n$ 反对称矩阵的 Pfaffian。

下一个引理给出了两个矩阵之和的 Pfaffian 公式。

引理 6.4。 *[51, 引理 4.2]* 对于 $A,B\in$ 反对称$_{2n}(\mathbb{C})$，有

$$\mathrm{Pf}[A+B]=\sum_{I\subseteq\{1,\dots,2n\}:|I|\ even}(-1)^{\Sigma(I)-|I|/2}\mathrm{Pf}[A_I]\mathrm{Pf}[B_{I^c}], \tag{6.26}$$

其中 $\Sigma(I)=\sum_{i\in I}i$，$I^c=\{1,\dots,2n\}\setminus I$，且 $\mathrm{Pf}[A_\emptyset]=\mathrm{Pf}[B_\emptyset]=1$。

采用上述记号后，我们可以转向本节的主要结果。

引理 6.5。 取定 $m\in\mathbb{N}$，$n_1,\dots,n_m\in\mathbb{N}$ 及 m 两两不相交区间 $[a_i,b_i]\subset\mathbb{R}$。若$M^{\mathrm{GSE}},K^{\mathrm{GSE}}$如引理 *1.24* 中所述，则

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^m\frac{\big(2M^{\mathrm{GSE}}([a_i,b_i])\big)!}{(2M^{\mathrm{GSE}}([a_i,b_i])-n_i)!}\right]=\sum_{k_1=\lceil n_1/2\rceil}^{n_1}\cdots\sum_{k_m=\lceil n_m/2\rceil}^{n_m}B(k_1,\dots,k_m),\ \ where\\ &B(k_1,\dots,k_m)=\prod_{i=1}^m\frac{n_i!2^{2k_i-n_i}}{(n_i-k_i)!(2k_i-n_i)!}\cdot\int_{[a_1,b_1]^{k_1}\times\cdots\times[a_m,b_m]^{k_m}}\mathrm{Pf}\left[K^{\mathrm{GSE}}(x_i,x_j)\right]_{i,j=1}^k dx,\end{aligned} \tag{6.27}$$

并且我们设 $k=k_1+\cdots+k_m$。如果 $t_N\to 0+$ 和 M^N 如 *(6.3)* 中所述，那么

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^m\frac{\big(M^N([a_i,b_i])\big)!}{(M^N([a_i,b_i])-n_i)!}\right]=\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^m\frac{\big(2M^{\mathrm{GSE}}([a_i,b_i])\big)!}{(2M^{\mathrm{GSE}}([a_i,b_i])-n_i)!}\right]. \tag{6.28}$$

证明。 为清晰起见，我们将证明分为五个步骤。第一步证明 (6.27)。第二步分析 (6.5) 中 K^N 的逐点极限及其导数。在同一步中，我们将极限核 K^∞ 与 K^{GSE}联系起来，见 (6.35)。第三步将有限 N 时 (6.28) 的左侧表示为积分之和，见 (6.38)。(6.38) 中的展开基于 [34, (B.2)] 中的 Pfaffian 过程的联合阶乘矩公式以及引理 6.4。此外，(6.38) 中的每个求和项都具有适于应用引理 6.3 的形式。在同一步中，我们应用引理 6.3，求出 (6.38) 中每个求和项的渐近贡献，见 (6.40) 和 (6.41)。(6.41) 中的极限表达式包含一个依赖于步骤 2 中极限核 K^∞ 的 Pfaffian；在步骤 4 中，我们用 K^{GSE}给出它的另一种表达式，见 (6.42)。第五步也是最后一步，我们结合步骤 3 中的展开式 (6.38) 和步骤 4 中求和项极限的另一种表达式 (6.42)，从而完成 (6.28) 的证明。

步骤 1。 对于 $n\in\mathbb{N}$，我们令 $P_n(x)=\binom{x}{n}=\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^n(x-i+1)$。通过多次应用二项式定理，对于 $x\in\mathbb{N}$，我们有

$$(1+t)^{2x}=\sum_{k=0}^\infty\binom{2x}{k}t^k\ \text{and}\ (1+t)^{2x}=(1+2t+t^2)^x=\sum_{k=0}^\infty\binom{x}{k}(2t+t^2)^k=\sum_{k=0}^\infty\binom{x}{k}t^k\sum_{j=0}^k\binom{k}{j}2^{k-j}t^j.$$

比较两边 t^n 的系数可得

$$P_n(2x)=\sum_{k=\lceil n/2\rceil}^n\binom{k}{n-k}2^{2k-n}\cdot P_k(x),$$

其同时作为两种 si des 是次数为 n 的多项式，这一结论推广到所有 $x \in \mathbb{C}$。对于 $Q_n(x) = n!P_n(x)$，我们得 t

$$Q_n(2x) = n! \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n} \binom{k}{n-k} 2^{2k-n} \cdot P_k(x) = \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n} \frac{n! 2^{2k-n}}{(n-k)!(2k-n)!} \cdot Q_k(x). \tag{6.29}$$

由 [34, (B.2)] 可知，对于任意 k_1，.....，$k_m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m} Q_{k_i}(M^{\mathrm{GSE}}([a_i,b_i]))\right] = \int_{[a_1,b_1]^{k_1}\times\cdots\times[a_m,b_m]^{k_m}} \mathrm{Pf}[K^{\mathrm{GSE}}(x_i,x_j)]_{i,j=1}^{k} dx.$$

此外，由 (6.29) 可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\big(2M^{\mathrm{GSE}}([a_i,b_i])\big)!}{(2M^{\mathrm{GSE}}([a_i,b_i])-n_i)!}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m} Q_{n_i}(2M^{\mathrm{GSE}}([a_i,b_i]))\right] \\
&= \sum_{k_1=\lceil n_1/2 \rceil}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=\lceil n_m/2 \rceil}^{n_m} \prod_{i=1}^{m} \frac{n_i! 2^{2k_i-n_i}}{(n_i-k_i)!(2k_i-n_i)!} \cdot \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m} Q_{k_i}(M^{\mathrm{GSE}}([a_i,b_i]))\right].
\end{aligned}$$

最后两个显示的方程给出 (6.27)。

步骤 2。 在证明的余下部分，我们着重证明 (6.28)；并且在必要时取子列后，以下始终假设 $t_N \in (0,\ 1/2]$。在这一步中，我们分析 (6.5) 中的核 K^N。注意，对于任意 $L > 0$，我们都可以找到一个仅依赖于 L 的常数 $c_1 > 0$，使得对于$z \in \mathcal{C}_1^{\pi/3}$ 和 $x \in [-L, L]$

$$|\exp(z^3/3 - zx)| \le \exp(-|z|^3/3 + c_1 + c_1|z|^2). \tag{6.30}$$

此外，利用 $t_N \in (0,\ 1/2]$，我们有，对于 $z,\ w \in \mathcal{C}_1^{\pi/3}$

$$\left|\frac{z-w}{(z+w+2t_N)(z+t_N)(w+t_N)}\right|, \left|\frac{z-w}{(z+t_N)(z+w)}\right|, \left|\frac{z-w}{z+w-t_N}\right| \le |z| + |w|. \tag{6.31}$$

利用 (6.30) 和 (6.31) 中的界直接应用控制收敛定理，可知对于每个 N，K_{ij}^N 都是 $\mathbb{R}^2$ 上的光滑函数，其导数可通过在积分号下求导得到。对于 K_{ij}^{GSE}，同样的结论也成立。由 (1.17) 和 (6.5)，我们可以明确得到

$$\begin{aligned}
\partial_x^n \partial_y^m K_{11}^N(x,y) &= \frac{1}{(2\pi \mathsf{i})^2} \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dw \frac{(z-w)(-z)^n(-w)^m H(z,x;w,y)}{4(z+w+2t_N)(z+t_N)(w+t_N)}, \\
\partial_x^n \partial_y^m K_{12}^N(x,y) &= -\partial_x^m \partial_y^n K_{21}^N(y,x) \\
&= \frac{1}{(2\pi \mathsf{i})^2} \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dw \frac{(z-w)(-z)^n(-w)^m H(z,x;w,y)}{2(z+t_N)(z+w)}, \\
\partial_x^n \partial_y^m K_{22}^N(x,y) &= \frac{1}{(2\pi \mathsf{i})^2} \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dw \frac{(z-w)(-z)^n(-w)^m H(z,x;w,y)}{z+w-2t_N},
\end{aligned} \tag{6.32}$$

$$\begin{aligned}
\partial_x^n \partial_y^m K_{11}^{\mathrm{GSE}}(x,y) &= \frac{1}{(2\pi \mathsf{i})^2} \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dw \frac{(z-w)(-z)^n(-w)^m H(z,x;w,y)}{4(z+w)zw}, \\
\partial_x^n \partial_y^m K_{12}^{\mathrm{GSE}}(x,y) &= -\partial_x^m \partial_y^n K_{21}^{\mathrm{GSE}}(y,x) \\
&= \frac{1}{(2\pi \mathsf{i})^2} \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dw \frac{(z-w)(-z)^n(-w)^m H(z,x;w,y)}{4z(z+w)}, \\
\partial_x^n \partial_y^m K_{22}^{\mathrm{GSE}}(x,y) &= \frac{1}{(2\pi \mathsf{i})^2} \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dw \frac{(z-w)(-z)^n(-w)^m H(z,x;w,y)}{z+w}.
\end{aligned} \tag{6.33}$$

利用该界　　结合 (6.30) 和 (6.31) 中的 s，以及控制收敛定理，我们得出　　t

$$\lim_{N\to\infty}\partial_x^n\partial_y^m\begin{bmatrix}K_{11}^N(x,y) & K_{12}^N(x,y)\\ K_{21}^N(x,y) & K_{22}^N(x,y)\end{bmatrix}=\partial_x^n\partial_y^m\begin{bmatrix}K_{11}^\infty(x,y) & K_{12}^\infty(x,y)\\ K_{21}^\infty(x,y) & K_{22}^\infty(x,y)\end{bmatrix}, \tag{6.34}$$

其中

$$\begin{bmatrix}K_{11}^\infty(x,y) & K_{12}^\infty(x,y)\\ K_{21}^\infty(x,y) & K_{22}^\infty(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{11}^{\mathrm{GSE}}(x,y) & 2K_{12}^{\mathrm{GSE}}(x,y)\\ K_{21}^{\mathrm{GSE}}(x,y) & 4K_{22}^{\mathrm{GSE}}(x,y)\end{bmatrix}. \tag{6.35}$$

此外，由（6.30）、（6.31）和（6.32），我们可以得出：对于任意 $L>0$，都可以找到一个仅依赖于 L 的 $c_2>0$，使得对于 $x,\ y\in[-L,L]$、$m+n\le L$、$N\ge 1$ 以及 $i,\ j\in\{1,2\}$

$$\left|\partial_x^n\partial_y^m K_{ij}^N(x,y)\right|\le c_2. \tag{6.36}$$

通过观察（6.33）和（6.35），我们以此步骤结束：

$$\begin{aligned}&\partial_y K_{11}^\infty(x,y)=-K_{12}^{\mathrm{GSE}}(x,y),\ \partial_x K_{11}^\infty(x,y)=-K_{21}^{\mathrm{GSE}}(x,y),\\ &\partial_{xy}K_{11}^\infty(x,y)=K_{22}^{\mathrm{GSE}}(x,y),\ \ \partial_x K_{12}^\infty(x,y)=-2K_{22}^{\mathrm{GSE}}(x,y).\end{aligned} \tag{6.37}$$

步骤 3。在此步骤中，我们寻求应用引理 6.3。由核分解公式（6.4）和引理 6.4，我们得到

$$\mathrm{Pf}[\hat{K}^N(x_i,x_j)]_{i,j=1}^n=\sum_{r=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\sum_{I\subseteq\{1,2,\dots,2n\}:|I|=2r}(-1)^{\Sigma(I)-r}\cdot\mathrm{Pf}[\Delta_I^N(x)]\cdot\mathrm{Pf}[K_{I^c}^N(x)].$$

注意，如果 $2s+1\in I$，那么 $\Delta_I^N(x)$ 有一行或一列全为零，因此 $\mathrm{Pf}[\Delta_I^N(x)]=0$。于是，我们可以将上述和限制为 $I\subseteq\{2,4,\dots,2n\}$，在这种情况下，$\Sigma(I)$ 为偶数。由此公式简化为

$$\mathrm{Pf}[\hat{K}^N(x_i,x_j)]_{i,j=1}^n=\sum_{r=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\sum_{I\subseteq\{2,4,\dots,2n\}:|I|=2r}(-1)^{r}\cdot\mathrm{Pf}[\Delta_I^N(x)]\cdot\mathrm{Pf}[K_{I^c}^N(x)].$$

将上一个等式与联合阶乘矩公式 [34, (B.2)] 以及应用于 $\Delta_I^N(x)$的 Pfaffian 展开公式 (6.25) 相结合，我们得到

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^m\frac{(M^N([a_i,b_i]))!}{(M^N([a_i,b_i])-n_i)!}\right]=\sum_{r=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\sum_{I\subseteq\{2,4,\dots,2n\}:|I|=2r}(-1)^r\sum_w(-1)^w P^N(w), \tag{6.38}$$

其中，最右侧的和是对 I的置换 $w=(u_1,v_1,\dots,u_r,v_r)$ 求和，且对于 $i=1,\dots,r,\ \ u_1<\cdots<u_r$，$u_i<v_i$，符号 $(-1)^w$ 与定义 6.2 中相同，并且

$$P^N(w)=\int_{[a_1,b_1]^{n_1}\times\cdots\times[a_m,b_m]^{n_m}}dx\delta_N(x_{u_1},x_{v_1})\cdots\delta_N(x_{u_r},x_{v_r})\mathrm{Pf}[K_{I^c}^N(x)]. \tag{6.39}$$

现在，我们希望将引理 6.3 应用于 $f_N(x)=\mathrm{Pf}[K_{I^c}^N(x)]$，并取 $P^N(w)$ 的极限。利用 Pfaffian 展开式 (6.24) 或 (6.25) 以及 (6.32)，可知 $\mathrm{Pf}[K_{I^c}^N(x)]$ 是光滑函数。此外，由 (6.34) 可知，其所有导数都收敛到 $\mathrm{Pf}[K_{I^c}^\infty(x)]$, 的相应导数，这验证了 (6.8)。最后，(6.36) 保证了 (6.9) 中的导数界。总之，我们得出结论：引理 6.3 的所有条件均已满足。下文采用定义 6.2 中的记号。

如果 u_1、……、u_r、v_1、……、v_r 不具有 $\vec{n}$-相容性，根据引理 6.3，我们有

$$\lim_{N\to\infty}P^N(w)=0. \tag{6.40}$$

另一方面，如果它们是 $\vec{n}$-相容的，那么

$$\lim_{N\to\infty}P^N(w)=\int_{[a_1,b_1]^{I_1^{vc}}\times\cdots\times[a_m,b_m]^{I_m^{vc}}}dy\left[(\partial_{x_{v_1}}-\partial_{x_{u_1}})\cdots(\partial_{x_{v_r}}-\partial_{x_{u_r}})\mathrm{Pf}[K_{I^c}^\infty(x)]\right]|_{x=\bar{y}}.$$

利用对称化恒等式 (6.19)，以及以下事实：若我们按照置换 σ 对一个反对称矩阵的行和列进行置换，其 Pfaffian 会变为 $(-1)^\sigma$，我们便得到

$$\left[(\partial_{x_{v_1}}-\partial_{x_{u_1}})\cdots(\partial_{x_{v_r}}-\partial_{x_{u_r}})\mathrm{Pf}[K^\infty_{I^c}(x)]\right]|_{x=\bar y}=2^r\left[\partial_{x_{v_1}}\cdots\partial_{x_{v_r}}\mathrm{Pf}[K^\infty_{I^c}(x)]\right]|_{x=\bar y},$$

因此

$$\lim_{N\to\infty}P^N(w)=2^r\int_{[a_1,b_1]^{I_1^{vc}}\times\cdots\times[a_m,b_m]^{I_m^{vc}}}dy\left[\partial_{x_{v_1}}\cdots\partial_{x_{v_r}}\mathrm{Pf}[K^\infty_{I^c}(x)]\right]|_{x=\bar y}. \tag{6.41}$$

步骤 4. 在此步骤中，我们假设 $u_1,\dots,u_r,v_1,\dots,v_r$ 是 $\vec n$-相容的，并且希望证明对每个 $y\in[a_1,b_1]^{I_1^{vc}}\times\cdots\times[a_m,b_m]^{I_m^{vc}}$

$$\left[\partial_{x_{v_1}}\cdots\partial_{x_{v_r}}\mathrm{Pf}[K^\infty_{I^c}(x)]\right]|_{x=\bar y}=(-1)^w\cdot(-1)^r2^{n-2r}\cdot\mathrm{Pf}[K^{\mathrm{GSE}}(y_i,y_j)]_{i,j\in I_1^{vc}\sqcup\cdots\sqcup I_m^{vc}}. \tag{6.42}$$

我们首先注意到

$$\partial_{x_{v_1}}\cdots\partial_{x_{v_r}}\mathrm{Pf}[K^\infty_{I^c}(x)]=(-1)^w\mathrm{Pf}[K'(x)], \tag{6.43}$$

其中 $K'(x)$ 是 $(2n-2r)\times(2n-2r)$ 矩阵，定义为

$$\begin{aligned}
K'(x)&=\begin{bmatrix}A'&B'\\-(B')^T&D'\end{bmatrix},\ \text{with } A'=\begin{pmatrix}K^\infty_{11}(x_{u_i},x_{u_j})&[\partial_yK^\infty_{11}](x_{u_i},x_{v_j})\\[\partial_xK^\infty_{11}](x_{v_i},x_{u_j})&[\partial_x\partial_yK^\infty_{11}](x_{v_i},x_{v_j})\end{pmatrix}_{i,j=1,\dots,r},\\
B'&=\begin{pmatrix}K^\infty_{11}(x_{u_i},x_{p_j})&K^\infty_{12}(x_{u_i},x_{p_j})\\[\partial_xK^\infty_{11}](x_{v_i},x_{p_j})&[\partial_xK^\infty_{12}](x_{v_i},x_{p_j})\end{pmatrix}_{i=1,\dots,r;j=2r+1,\dots,n},\\
D'&=\begin{pmatrix}K^\infty_{11}(x_{p_i},x_{p_j})&K^\infty_{12}(x_{p_i},x_{p_j})\\K^\infty_{21}(x_{p_i},x_{p_j})&K^\infty_{22}(x_{p_i},x_{p_j})\end{pmatrix}_{i,j=2r+1,\dots,n},
\end{aligned} \tag{6.44}$$

其中 $p_{2r+1},\dots,p_n$ 是 $\{1,\dots,n\}\setminus\{u_1,\dots,u_r,v_1,\dots,v_r\}$ 中按升序排列的元素。通过利用 (6.24) 展开两个 Pfaffian 并比较所得各项，可以直接验证方程 (6.43)。我们指出，符号 $(-1)^w$ 可追溯到这样一个事实：索引为 $u_1,v_1,u_2,v_2,\dots,u_r,v_r$ 的行/列 $K^\infty_{I^c}(x)$ 已在 $K'(x)$ 中移至顶部/左侧的 $2r$ 行/列。

令 $x=\bar y$ 并应用 (6.35) 和 (6.37)，可得

$$\begin{aligned}
K'(\bar y)&=\begin{bmatrix}A''&B''\\-(B'')^T&D''\end{bmatrix},\ \text{where } A''=\begin{pmatrix}K^{\mathrm{GSE}}_{11}(y_{u_i},y_{u_j})&-K^{\mathrm{GSE}}_{12}(y_{u_i},y_{u_j})\\-K^{\mathrm{GSE}}_{21}(y_{u_i},y_{u_j})&K^{\mathrm{GSE}}_{22}(y_{u_i},y_{u_j})\end{pmatrix}_{i,j=1,\dots,r},\\
B''&=\begin{pmatrix}K^{\mathrm{GSE}}_{11}(y_{u_i},y_{p_j})&K^{\mathrm{GSE}}_{12}(y_{u_i},y_{p_j})\\-K^{\mathrm{GSE}}_{21}(y_{u_i},y_{p_j})&-2K^{\mathrm{GSE}}_{22}(y_{u_i},y_{p_j})\end{pmatrix}_{i=1,\dots,r;j=2r+1,\dots,n},\\
D''&=\begin{pmatrix}K^{\mathrm{GSE}}_{11}(y_{p_i},y_{p_j})&2K^{\mathrm{GSE}}_{12}(y_{p_i},y_{p_j})\\2K^{\mathrm{GSE}}_{21}(y_{p_i},y_{p_j})&4K^{\mathrm{GSE}}_{22}(y_{p_i},y_{p_j})\end{pmatrix}_{i,j=2r+1,\dots,n}.
\end{aligned} \tag{6.45}$$

最后我们观察到

$$\mathrm{Pf}[K'(\bar y)]=(-1)^r2^{n-2r}\cdot\mathrm{Pf}[K^{\mathrm{GSE}}(y_i,y_j)]_{i,j\in I_1^{vc}\sqcup\cdots\sqcup I_m^{vc}}. \tag{6.46}$$

与前面一样，通过利用 (6.24) 展开两边并比较所得各项，即可验证 (6.46)。根据 (6.45) 中的分块形式，$\mathrm{Pf}[K'(\bar y)]$ 的展开中的每一项都会出现在 $\mathrm{Pf}[K^{\mathrm{GSE}}(y_i,y_j)]_{i,j\in I_1^{vc}\sqcup\cdots\sqcup I_m^{vc}}$ 的展开中，但会乘以一个常数。具体来说，对于每一行/列 $2r+2,2r+4,\dots,2n-2r$，每一项都会额外乘以 2；对于每一行/列 $1,2,\dots,r$，还会乘以因子 -1，总的结果为 $(-1)^r2^{n-2r}$。

公式 (6.42) 现在可由 (6.43) 和 (6.46) 得出。

步骤 5. 在这一步中，我们完成 (6.28) 的证明。由 (6.40) 可知，如果 $u_1,\dots,u_r,v_1,\dots,v_r$ 不 $\vec n$-相容，那么它们对 (6.38) 右侧的渐近贡献为零。在

另一方面，如果 $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_r$ 与 $\vec{n}$ 相容，且具有轮廓 $\vec{r} = (r_1, \dots, r_m)$（如定义 6.2 所述），那么由 (6.41) 和 (6.42) 可得

$$\lim_{N\to\infty} P^N(w) = (-1)^w \cdot (-1)^r 2^{n-r} \int_{[a_1,b_1]^{n_1-r_1}\times\cdots\times[a_m,b_m]^{n_m-r_m}} \operatorname{Pf}\left[K^{\mathrm{GSE}}(x_i,x_j)\right]_{i,j=1}^{k} dx. \tag{6.47}$$

我们提到，在推导 (6.47) 时，也对 (6.41) 做了简单的变量代换，这不会影响 Pfaffian 的符号。

注意，(6.47) 的符号恰好与 (6.38) 中 $P_N(w)$ 前面的符号相抵消。因此，每个轮廓为 $\vec{r}$ 的 $\vec{n}$-相容 u_1、……、u_r、v_1、……、v_r 对 (6.38) 右侧的贡献都相同。由于这样的项恰有 $\prod_{i=1}^m \binom{n_i}{2r_i} \cdot \frac{2r_i!\, 2^{r_i} r_i!}{n_i!\,(n_i-2r_i)!\, r_i!\, 2^{r_i}} = \prod_{i=1}^m \frac{1}{(n_i-2r_i)!\, r_i!\, 2^{r_i}}$ 个，由 (6.38) 和 (6.47) 可得

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^m \frac{\left(M^N([a_i,b_i])\right)!}{\left(M^N([a_i,b_i])-n_i\right)!}\right] = \sum_{r_1=0}^{\lfloor n_1/2\rfloor} \cdots \sum_{r_m=0}^{\lfloor n_m/2\rfloor} \prod_{i=1}^m \frac{n_i! 2^{n_i}}{(n-2r_i)! r_i! 2^{2r_i}}$$
$$\times \int_{[a_1,b_1]^{n_1-r_1}\times\cdots\times[a_m,b_m]^{n_m-r_m}} \operatorname{Pf}\left[K^{\mathrm{GSE}}(x_i,x_j)\right]_{i,j=1}^{k} dx.$$

最后显示的等式和 (6.27) 表明，只要令 $k_i = n_i - r_i$ 取 $i = 1$、……、m，就可得到 (6.28)。 □

6.3. 引理 6.1 的证明。 本节给出引理 6.1 的证明。我们沿用第 6.1 节之前相同的记号，并将证明分为三个步骤。第一步中，我们假设 $M^N \Rightarrow 2M^{\mathrm{GSE}}$，并据此得出引理的结论。第二步中，我们将 $M^N \Rightarrow 2M^{\mathrm{GSE}}$ 的证明归结为证明三个断言。这些断言是应用 [30, 推论 2.4] 所必需的。同一步中，我们还验证其中第三个断言，该断言表明 $2M^{\mathrm{GSE}}$ 的阶乘矩增长不会过快，见式 (6.55)。第三步中，我们通过调整命题 2.2] 的证明中的论证，验证步骤 2 中的前两个断言。

步骤 1。 我们声称，对于任意序列 $t_N \to 0+$

$$M^N \Rightarrow 2M^{\mathrm{GSE}}. \tag{6.48}$$

我们将在第二步证明式 (6.48)。这里，我们假设该式成立，并据此完成引理的证明。

根据定理 1.13，我们知道 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 是有序的，因此几乎必然有 $\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}(t) \geq \mathcal{A}_{i+1}^{\mathrm{hs};\infty}(t)$，对 $i \geq 1$和 $t \in [0,\infty)$ 均成立。特别地，$\lim_{k\to\infty} \mathcal{A}_k^{\mathrm{hs};\infty}(t)$ 在 $[-\infty,\infty)$ 中存在。我们对 $L \in \mathbb{N}$ 定义以下事件

$$E_L = \left\{\lim_{k\to\infty} \mathcal{A}_k^{\mathrm{hs};\infty}(0) \geq -L\right\}.$$

我们的首要任务是证明，对每个 $L \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(E_L) = 0. \tag{6.49}$$

我们采用 反证法，并假设对于某个 $\varepsilon > 0$，有 $\mathbb{P}(E_L) \geq \varepsilon$。取一个足够大的 $L_1 \geq L$，使得 t

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_1^{\mathrm{hs};\infty}(0) > L_1) \leq \varepsilon/2.$$

设 f 是一个支撑于 $[-L_1-2, L_1+2]$ 且 $f(x) = 1$（对任意 $x \in [-L_1-1, L_1+1]$）的非负连续函数。固定任意 $n \in \mathbb{N}$，由 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 的连续性可知

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^n f(\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}(t_N)) = \sum_{i=1}^n f(\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}(0)). \tag{6.50}$$

固定 $\omega \in E_L \cap \{\mathcal{A}_1^{\mathrm{hs};\infty}(0) \le L_1\}$，注意到由 $\mathcal{A}_1^{\mathrm{hs};\infty}$ 和 $\mathcal{A}_n^{\mathrm{hs};\infty}$ 的连续性可知，我们可以找到 $N_0 = N_0(\omega)$，使得对任意 $N \ge N_0$

$$-L_1 - 1 \le \mathcal{A}_n^{\mathrm{hs};\infty}(0) - 1 \le \mathcal{A}_n^{\mathrm{hs};\infty}(t_N) \le \mathcal{A}_{n-1}^{\mathrm{hs};\infty}(t_N) \le \cdots \le \mathcal{A}_1^{\mathrm{hs};\infty}(t_N) \le \mathcal{A}_1^{\mathrm{hs};\infty}(0) + 1 \le L_1 + 1.$$

上述不等式组以及 f 的定义表明，对所有 $N \ge N_0$

$$M^N f = \sum_{i\ge 1} f(\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}(t_N)) \ge \sum_{i=1}^{n} f(\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}(t_N)) = n.$$

由于 n 是任意的，我们得出：几乎必然地，在事件 $E_L \cap \{\mathcal{A}_1^{\mathrm{hs};\infty}(0) \le L_1\}$ 上（按构造，该事件的概率至少为 $\varepsilon/2$），有 $M^N f \to \infty$。但由 (6.48) 可知，$M^N f \Rightarrow 2M^{\text{高斯辛系综}} f$，且后者是一个取有限实数值的随机变量。这就得到了我们所需的矛盾，从而证明了 (6.49)。

由 (6.49) 可知，M 几乎必然是局部有限的。固定 $L > 0$，并取定义在 $\mathbb{R}$ 上、支撑于 $[-L, L]$ 的连续函数 g。我们的第二个任务是证明，几乎必然地

$$\lim_{N\to\infty} M^N g = Mg. \tag{6.51}$$

由 (6.49) 可找到 $K = K(\omega)$，使得对 $k \ge K+1$ 有 $\mathcal{A}_k^{\mathrm{hs};\infty}(0) \le -L - 1$。此外，由于 $\mathcal{A}_{K+1}^{\mathrm{hs};\infty}$ 的连续性，我们可找到 $N_0 = N_0(\omega)$，使得对 $N \ge N_0$ 和 $k \ge K+1$

$$\mathcal{A}_k^{\mathrm{hs};\infty}(t_N) \le \mathcal{A}_{K+1}^{\mathrm{hs};\infty}(t_N) \le \mathcal{A}_{K+1}^{\mathrm{hs};\infty}(0) + 1 \le -L.$$

利用上述不等式，我们得出对所有 $N \ge N_0$

$$M^N g = \sum_{i=1}^{\infty} g(\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}(t_N)) = \sum_{i=1}^{K} g(\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}(t_N)) \text{ and } M^\infty g = \sum_{i=1}^{\infty} g(\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}(0)) = \sum_{i=1}^{K} g(\mathcal{A}_i^{\mathrm{hs};\infty}(0)).$$

最后一个显示的等式以及 g 和 $\mathcal{A}^{\mathrm{hs};\infty}$ 的连续性给出 (6.51)。

由 (6.51) 可知，M^N 几乎处处在模糊拓扑下收敛到 M，因此也弱收敛。由于弱极限是唯一的，由 (6.48) 可得 $M \overset{d}{=} 2M^{\mathrm{GSE}}$。

步骤 2. 在这一步中，我们证明 (6.48)。取 $m \in \mathbb{N}$, $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, m 两两不相交区间$[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$，满足 $b_i > a_i$，并令 $\vec{n} = (n_1, \dots, n_m)$、$\vec{a} = (a_1, \dots, a_m)$ 和 $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$。由引理 6.5 中的等式 (6.28)，我们有

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\big(M^N([a_i,b_i])\big)!}{(M^N([a_i,b_i]) - n_i)!}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\big(2M^{\mathrm{GSE}}([a_i,b_i])\big)!}{(2M^{\mathrm{GSE}}([a_i,b_i]) - n_i)!}\right]. \tag{6.52}$$

注意，由于 (6.27)，(6.52) 的右侧是有限的。此外，由 (6.38) 可知，当 N 有限时，左侧也是有限的。特别地，我们得出可以找到 $C(\vec{n}, \vec{a}, \vec{b}) > 0$，使得

$$\sup_{N\ge 1} \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\big(M^N([a_i,b_i])\big)!}{(M^N([a_i,b_i]) - n_i)!}\right] \le C(\vec{n}, \vec{a}, \vec{b}). \tag{6.53}$$

在下文中，我们使用 (6.52) 和 (6.53)，并改编 [30, 命题 2.2]中的论证来证明 (6.48)。需要指出的是，[30, 命题 2.2] 不能直接应用于此处，因为该命题中的区间并未假设为充分分离，而在我们的情形中则有此假设。

我们提出以下断言：

(1) $\{M^N\}_{N\ge 1}$是局部有界测度的紧序列。

(2) 任意子序列极限 M^∞的 $\{M^N\}_{N\geq 1}$都是点过程，并且满足

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^m \frac{\big(2M^{\mathrm{GSE}}((A_i,B_i])\big)!}{(2M^{\mathrm{GSE}}((A_i,B_i])-n_i)!}\right]=\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^m \frac{(M^\infty((A_i,B_i]))!}{(M^\infty((A_i,B_i])-n_i)!}\right], \tag{6.54}$$

其中 $(A_i、 B_i]$ 是允许为空的两两不相交区间。

(3) 对任意 $b>a$，我们都可以找到 $\epsilon>0$，使得

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\epsilon^n}{n!}\cdot\mathbb{E}\left[\frac{\big(2M^{\mathrm{GSE}}((a,b])\big)!}{(2M^{\mathrm{GSE}}((a,b])-n)!}\right]<\infty. \tag{6.55}$$

由 (6.54) 和 (6.55) 可知， [30,推论 2.4] 的条件得到满足，从而证明了 $M^\infty \overset{d}{=} 2M_{\text{高斯辛系综}}$。由于 M^∞是 M^N的任意子序列极限，而根据上面的第一个断言， M^N是紧的，因此我们得到 $M^N \Rightarrow 2M_{\text{高斯辛系综}}$，如所要求。

目前为止的工作将引理的证明归结为确立上述三个断言。前两个断言将在下一步中证明。在本步骤的剩余部分，我们使用 (6.27) 中的阶乘矩公式验证 (6.55)。

回顾引理 6.5 的证明中的步骤 2， $K_{ij}^{\mathrm{GSE}}(x、 y)$是光滑函数，因此对于 $x、 y\in[a,b]$有界。由 (6.27) 以及 Pfaffian 展开公式 (6.24)，我们可以找到一个常数 $C>0$ （取决于 a 、 b），使得

$$\mathbb{E}\left[\frac{\big(2M^{\mathrm{GSE}}((a,b])\big)!}{(2M^{\mathrm{GSE}}((a,b])-n)!}\right]\leq\sum_{k=\lceil n/2\rceil}^n \frac{n!2^{2k-n}}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot C^k\cdot\frac{(2k)!}{k!2^k}.$$

若 $\epsilon>0$ 足够小，使得 $4C\epsilon(1+\epsilon/2)<1$，则得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^\infty \frac{\epsilon^n}{n!}\cdot\mathbb{E}\left[\frac{\big(2M^{\mathrm{GSE}}((a,b])\big)!}{(2M^{\mathrm{GSE}}((a,b])-n)!}\right]\leq\sum_{n=1}^\infty\frac{\epsilon^n}{n!}\sum_{k=\lceil n/2\rceil}^n \frac{n!2^{2k-n}}{(n-k)!(2k-n)!}\cdot C^k\cdot\frac{(2k)!}{k!2^k}\\
&=\sum_{k=1}^\infty\frac{(2k)!}{k!}[2C]^k\sum_{n=k}^{2k}\frac{[\epsilon/2]^n}{(n-k)!(2k-n)!}=\sum_{k=1}^\infty\frac{(2k)!}{k!k!}[C\epsilon]^k\sum_{m=0}^k\frac{k![\epsilon/2]^m}{m!(k-m)!}\\
&=\sum_{k=1}^\infty\frac{(2k)!}{k!k!}[C\epsilon]^k(1+\epsilon/2)^k=\sum_{k=1}^\infty\binom{2k}{k}[C\epsilon]^k(1+\epsilon/2)^k\leq\sum_{k\geq 1}[4C\epsilon(1+\epsilon/2)]^k<\infty.
\end{aligned}$$

我们指出，从第二行到第三行时用到了二项式定理，而倒数第二个不等式用到了 $\binom{2k}{k}\leq 2^{2k}$。最后一个不等式推出了 (6.55)。

步骤 3. 在最后一步中，我们证明步骤 2 中的前两个结论。设 F 为有界 Borel 集，并设 $[a,b]$ 满足 $F\subseteq[a,b]$。由切比雪夫不等式可得

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{N\geq 1}\mathbb{P}(M^N(F)\geq r)\leq\lim_{r\to\infty}\sup_{N\geq 1}\mathbb{P}(M^N([a,b])\geq r)\leq\lim_{r\to\infty}r^{-1}C(1,a,b)=0,$$

其中最后一个不等式用到了 (6.53)。由 [41, 定理 4.10] 可知， $\{M^N\}_{N\geq 1}$是一个由局部有限测度组成的紧序列。根据斯科罗霍德表示定理 [17, 定理 6.7]，我们可以假设 $\{M^{N_v}\}_{v\geq 1}$， M^∞都定义在同一个概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}，\ \mathbb{P})$ 上，并且对每个 $\omega\in\Omega$,

$$M^{N_v}(\omega)\xrightarrow{v}M^\infty(\omega).$$

最后一个方程的一个推论是，由于 M^{N_v} 是整数值测度， M^∞ 也同样如此。换言之， M^∞ 是一个点过程。

剩下的工作是证明 (6.54)。固定 k_1、……、$k_m \in \mathbb{N}$ 以及 m 个两两不相交区间 $[c_i, d_i] \subset \mathbb{R}$，其中 $d_i > c_i$。根据 [41, 引理 4.1]，我们有 $\liminf_{v\to\infty} M^{N_v}([c_i, d_i]) \geq M^{\infty}((c_i,\ d_i))$，这意味着

$$\liminf_{v\to\infty} \prod_{i=1}^{m} \frac{\big(M^{N_v}([c_i,d_i])\big)!}{(M^{N_v}([c_i,d_i])-k_i)!} \geq \prod_{i=1}^{m} \frac{(M^{\infty}((c_i,d_i)))!}{(M^{\infty}((c_i,d_i))-k_i)!}.$$

将后者与 Fatou 引理及 (6.52) 结合，得到

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\big(2M^{\mathrm{GSE}}([c_i,d_i])\big)!}{(2M^{\mathrm{GSE}}([c_i,d_i])-n_i)!}\right] \geq \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m} \frac{(M^{\infty}((c_i,d_i)))!}{(M^{\infty}((c_i,d_i))-k_i)!}\right]. \tag{6.56}$$

由 [41, 引理 4.1] 可得 $\limsup_{v\to\infty} M^{N_v}([c_i, d_i]) \leq M^{\infty}([c_i, d_i])$，从而

$$\limsup_{v\to\infty} \prod_{i=1}^{m} \frac{\big(M^{N_v}([c_i,d_i])\big)!}{(M^{N_v}([c_i,d_i])-k_i)!} \leq \prod_{i=1}^{m} \frac{(M^{\infty}([c_i,d_i]))!}{(M^{\infty}([c_i,d_i])-k_i)!}.$$

将后者与反向 Fatou 引理结合，参见 [21, 第 10], 页及 (6.52)，得到

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\big(2M^{\mathrm{GSE}}([c_i,d_i])\big)!}{(2M^{\mathrm{GSE}}([c_i,d_i])-k_i)!}\right] \leq \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m} \frac{(M^{\infty}([c_i,d_i]))!}{(M^{\infty}([c_i,d_i])-k_i)!}\right]. \tag{6.57}$$

需要指出的是，在使用 [21], 中的反向 Fatou 引理时，我们隐含地用到了这些随机变量

$$X_N = \prod_{i=1}^{m} \frac{\big(M^{N}([c_i,d_i])\big)!}{(M^{N}([c_i,d_i])-k_i)!}$$

一致可积。由 $\sup_{N\geq 1} \mathbb{E}[X_N^2] < \infty$ 这一事实可推出这一点（见 [17,(3.18)]），而该事实又由 (6.53) 得出。

现在假设 a_i，b_i，n_i 与步骤 2 开始时的情形相同。令 $\varepsilon > 0$ 充分小，使得$[a_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon]$ 仍然两两不相交。将 (6.57) 与 $c_i = a_i$、$d_i = b_i$、$k_i = n_i$ 以及 (6.56) 与 $c_i = a_i - \varepsilon$、$d_i = b_i + \varepsilon$、$k_i = n_i$结合，得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\big(2M^{\mathrm{GSE}}([a_i,b_i])\big)!}{(2M^{\mathrm{GSE}}([a_i,b_i])-n_i)!}\right] &\leq \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m} \frac{(M^{\infty}([a_i,b_i]))!}{(M^{\infty}([a_i,b_i])-n_i)!}\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\big(2M^{\mathrm{GSE}}([a_i-\varepsilon,b_i+\varepsilon])\big)!}{(2M^{\mathrm{GSE}}([a_i-\varepsilon,b_i+\varepsilon])-n_i)!}\right].\end{aligned}$$

由 (6.27) 和有界收敛定理可知，当 $\varepsilon \to 0+$ 时，上式右边收敛到左边。因此，最后一个方程推出

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\big(2M^{\mathrm{GSE}}([a_i,b_i])\big)!}{(2M^{\mathrm{GSE}}([a_i,b_i])-n_i)!}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{m} \frac{(M^{\infty}([a_i,b_i]))!}{(M^{\infty}([a_i,b_i])-n_i)!}\right]. \tag{6.58}$$

如果 $(A_i, B_i]$ 两两不相交且非空，那么我们可以找到一个递减序列 $a_i^s \downarrow A_i$，使得$a_i^s \in (A_i, B_i)$。将 $a_i = a_i^s$ 和 $b_i = B_i$ 代入 (6.58)，并取 $s \to \infty$ 极限，由单调收敛定理可得 (6.54)。如果对于某个 i 有 $A_i = B_i$，那么 (6.54) 显然成立，因为等式两边都等于零。至此，(6.54) 的证明完成，引理也得证。

附录 A. 高斯辛系综的边缘渐近

本节旨在证明引理 1.24。在 A.1 节中，我们证明由高斯辛系综（GSE）的特征值构成的点过程，在边缘缩放下收敛到一个 Pfaffian 点过程，其相关核为 (1.17) 中的 K^{GSE}，参考测度为勒贝格测度，见引理 A.1。GSE 的边缘渐近已得到广泛研究，参见例如 [52]和 [37, 第 7.6 节5]。由于我们未能在文献中找到引理 A.1 的确切表述，

我们在此给出一个简短的证明。在 A.2 节中，我们结合引理 A.1 与 [46, 定理 1.1]，给出引理 1.24 的证明。

A.1. 点过程收敛。 本节中，我们将自由使用 [34, 第 5] 节中关于点过程的定义和记号。

设 $X^N=(X_1^N,\ldots\ldots,X_N^N)$ 是一个具有如下密度的随机向量：

$$f_N(x_1,\ldots,x_N)=\frac{\mathbf{1}\{x_1>x_2>\cdots>x_N\}}{Z_N}\prod_{1\le i<j\le N}(x_i-x_j)^4\prod_{i=1}^N e^{-2x_i^2}, \tag{A.1}$$

其中 Z_N 是归一化常数。已知 f_N 是高斯辛系综的联合特征值密度，见 [37,命题 1.3.4]。我们还通过以下方式引入点过程$M^{\mathrm{GSE};N}$：

$$M^{\mathrm{GSE};N}(A)=\sum_{i=1}^N\mathbf{1}\{\tilde{X}_i^N\in A\},\ \text{where } \tilde{X}_i^N=2^{7/6}N^{1/6}\left(X_i^N-(2N)^{1/2}\right). \tag{A.2}$$

有了上述记号，我们可以陈述本节的主要结果。

引理 A.1. 测度 $M_{\text{高斯辛系综；}N}$弱收敛于一个 *Pfaffian* 点过程 $M^{\mathrm{GSE};\infty}$，其相关核为 K^{GSE}（*1.17*）中的核，参考测度为勒贝格测度。

证明。令 M^N 为由 $X_1^N,\ldots\ldots,X_N^N$ 构成的点过程。由 [37,（6.55）]可知， M^N 是 $\mathbb{R}$ 上的一个 Pfaffian 点过程，其参考测度为勒贝格测度，相关核为

$$K^N(x,y)=\begin{bmatrix}\int_x^y S_4^N(x,u)du & S_4^N(x,y)\\ -S_4^N(y,x) & \partial_x S_4^N(x,y)\end{bmatrix}. \tag{A.3}$$

我们提到，在 [37, (6.55)]中，相关函数写成四元数行列式的形式；要得到上述形式，需要使用 [37, 命题 6.1 5]。

利用 [37, (7.91)和 (6.59)]，，我们有

$$\begin{aligned}&S_4^N(x,y)=A_4^N(x,y)+B_4^N(x,y),\ \text{where}\\ &A_4^N(x,y)=\frac{e^{-x^2}e^{-y^2}}{\pi^{1/2}2^{2N+2}(2N)!}\cdot\frac{H_{2N}(\sqrt{2}x)H_{2N}'(\sqrt{2}y)-H_{2N}'(\sqrt{2}x)H_{2N}(\sqrt{2}y)}{x-y},\\ &B_4^N(x,y)=-\frac{e^{-y^2}H_{2N}(\sqrt{2}y)}{\pi^{1/2}2^{2N+1/2}(2N-1)!}\int_{\sqrt{2}x}^\infty e^{-t^2/2}H_{2N-1}(t)dt.\end{aligned} \tag{A.4}$$

在最后一个方程中， $H_n(x)$ 是经典的厄米特多项式 $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$。我们提到，要从 [37, (6.59)] 得到 (A.4)，需要令 $V(x)=\tilde{V}_4(x)=x^2/2$、 $p_n(x)=2^{-n}H_n(x)$（见 [37,(5.46)]）、（p_n， p_n）$_2=\pi^{1/2}2^{-n}n!$（见 [37,(5.48)]）、 $c_{2N-1}=(p_{2N},\ p_{2N})_2$（见 [37,(5.65)]），并使用 Christoffel-Darboux 公式 [37, (5.10)]

$$K_{2N}(x,y)=\frac{e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}}{(p_{2N-1},p_{2N-1})_2}\cdot\frac{p_{2N}(x)p_{2N-1}(y)-p_{2N-1}(x)p_{2N}(y)}{x-y},$$

以及 $H_n'(x)=2nH_{n-1}(x)$（参见 [38, (8.952)]）。

令 $\phi_N(x)=2^{7/6}N^{1/6}[x-(2N)^{1/2}]$，并注意到 $M_{\text{高斯辛系综；}N}=M^N\phi_N^{-1}$。将后者与 [34,命题 5.8(5)]（对于 $\phi=\phi_N$）以及 [34,命题 5.8(6)]（对于 $c_1=c_2=2^{-7/12}N^{-1/12}$）结合起来，我们得到，$M^{\mathrm{GSE};N}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的 Pfaffian 点过程，其参考测度为勒贝格参考测度，相关核为

$$K^{\mathrm{GSE};N}(x,y)=2^{-7/6}N^{-1/6}\cdot K^N\left((2N)^{1/2}+\frac{x}{2^{7/6}N^{1/6}},(2N)^{1/2}+\frac{y}{2^{7/6}N^{1/6}}\right).$$

由 [37, (7.99)] 可知，该结论对有界 x， $y \in \mathbb{R}$ 一致成立：

$$\lim_{N\to\infty} K^{\mathrm{GSE};N}(x,y) = K^{\mathrm{GSE};\infty}(x,y) := \begin{bmatrix} \int_x^y S_4(x,u)du & S_4(x,y) \\ -S_4(y,x) & \partial_x S_4(x,y) \end{bmatrix}, \tag{A.5}$$

其中

$$S_4(x,y) = \frac{1}{2}\cdot K_{\mathrm{Ai}}(x,y) - \frac{1}{4}\cdot \mathrm{Ai}(y)\int_x^\infty \mathrm{Ai}(v)dv. \tag{A.6}$$

这里，Ai 表示艾里函数

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi \mathsf{i}}\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} e^{z^3/3-xz},$$

其中围道 $\mathcal{C}_1^{\pi/3}$ 如定义 1.1 所述，而 K_{Ai} 是 Airy核

$$K_{\mathrm{Ai}}(x,y) = \frac{\mathrm{Ai}(x)\mathrm{Ai}'(y) - \mathrm{Ai}'(x)\mathrm{Ai}(y)}{x-y}.$$

方程 (A.5) 验证了 [34, 命题 5.10] 关于所有 N的条件，其中 $\lambda_N =$ 为勒贝格测度。这意味着存在一个 Pfaffian 点过程 $M^{\mathrm{GSE};\infty}$，其参考测度为勒贝格测度，相关核为 $K^{\mathrm{GSE};\infty}$，此外 $M^{\mathrm{GSE};N} \Rightarrow M_{\text{高斯辛系综;}\ \infty}$。为了证明引理的结论，还需对所有 $n \geq 1$ 和 x_1，…， $x_n \in \mathbb{R}$ 证明

$$\mathrm{Pf}[K^{\mathrm{GSE};\infty}(x_i,x_j)]_{i,j=1}^n = \mathrm{Pf}[K^{\mathrm{GSE}}(x_i,x_j)]_{i,j=1}^n. \tag{A.7}$$

利用上文给出的 Ai(x) 的围道积分公式以及 Airy 核的双围道积分公式，参见例如 [2, (2.30)]，或者直接在 (1.2) 中令 $s=t$，

$$K_{\mathrm{Ai}}(x,y) = \frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dw \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dz \frac{e^{z^3/3+w^3/3-xz-yw}}{z+w},$$

我们得到 $S_4(x,\ y)$ 等于

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dw \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dz \frac{e^{z^3/3+w^3/3-xz-yw}}{z+w} - \frac{1}{4(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dw e^{w^3/3-yw}\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dz \int_x^\infty dv e^{z^3/3-vz} \\ &= \frac{1}{2(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dw \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dz e^{z^3/3+w^3/3-xz-yw}\cdot\left[\frac{1}{z+w} - \frac{1}{2z}\right]. \end{aligned}$$

我们指出，在写出第一行时，我们隐式地使用了Fubini定理来重新排列积分的顺序。

最后一个方程和 (1.17) 给出

$$S_4(x,y) = K_{12}^{\mathrm{GSE}}(x,y). \tag{A.8}$$

利用 (1.17) 和 (A.8)，我们得到

$$\int_x^y S_4(x,u)du = \frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dw \frac{(z-w)e^{z^3/3-xz-w^3/3}(e^{-xw}-e^{-yw})}{4zw(z+w)} = -K_{11}^{\mathrm{GSE}}(x,y). \tag{A.9}$$

在最后一个等式中，我们用到了

$$\frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dz \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dw \frac{(z-w)e^{z^3/3-xz-w^3/3-xw}}{4zw(z+w)} = 0,$$

只需交换 z 和 w的角色即可观察到这一点。类似地，由 (1.17) 和 (A.8) 可得

$$\partial_x S_4(x,y) = \frac{1}{(2\pi\mathsf{i})^2}\int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dw \int_{\mathcal{C}_1^{\pi/3}} dz \frac{-ze^{z^3/3+w^3/3-xz-yw}}{4z(z+w)} = -K_{22}^{\mathrm{GSE}}(x,y). \tag{A.10}$$

由 (A.8)、(A.9) 和 (A.10) 可得

$$K^{\mathrm{GSE};\infty}(x,y)=\begin{bmatrix}-K_{11}^{\mathrm{GSE}}(x,y) & K_{12}^{\mathrm{GSE}}(x,y)\\ K_{21}^{\mathrm{GSE}}(x,y) & -K_{22}^{\mathrm{GSE}}(x,y)\end{bmatrix},$$

根据 Pfaffian 的定义 (6.24)，这意味着 (A.7)。 □

本节最后给出以下简单引理，它是 [30,命题 2.19]的直接推论。

引理 A.2. 设 $X^N=\{X_i^N\}_{i\geq 1}$ 是 $\mathbb{R}^\infty$中的随机向量序列，使得几乎必然

$$X_1^N\geq X_2^N\geq\cdots. \tag{A.11}$$

假设对于每个 $i\in\mathbb{N}$，$\{X_i^N\}_{N\geq 1}$ 都是紧随机变量序列。此外，假设由下式定义的 $\mathbb{R}$上的随机测度 M^N

$$M^N(A)=\sum_{i\geq 1}\mathbf{1}\{X_i^N\in A\}, \tag{A.12}$$

是点过程，并且弱收敛到点过程 M。那么， X^N 弱收敛到某个满足 *(A.11)* 的X^∞ 。此外，令 $N=\infty$ ，则 *(A.12)* 中的随机测度 M^∞ 是一个点过程，其分布与 M相同。

证明. 定义 $\mathbb{R}^2$ 上的随机点过程 $\tilde{M}^N$ 如下

$$\tilde{M}^N(A)=\sum_{i\geq 1}\mathbf{1}\{(0,X_i^N)\in A\}. \tag{A.13}$$

由于 $M^N\Rightarrow M$，我们得出 $\tilde{M}^N\Rightarrow\tilde{M}$，其中 $\tilde{M}(A)=M(A_0)$ 满足 $A_0=\{y\colon(0,\ y)\in A\}$。由 [30, 命题 2.19] （应用于 $r=1$ 和 $t_1=0$），我们得出可以找到满足 (A.11) 的 X^∞，使得 $X^N\Rightarrow X^\infty$；此外，(A.13) 中的 $\tilde{M}^\infty$ 与 $N=\infty$ 具有相同的分布，即 $\tilde{M}$。后者意味着所需的 $M^\infty\stackrel{d}{=}M$。□

A.2. **引理 1.24 的证明**。令 $\{\tilde{X}_i^N\}_{i=1}^N$ 和 $M^{\mathrm{GSE};N}$ 如 (A.2) 中所示。定义 $\hat{}X^N=\{\hat{}X_i^N\}_{i\geq 1}$如下:

$$\hat{X}_i^N=\tilde{X}_i^N\text{ for }i=1,\dots,N,\text{ and }\hat{X}_i^N=\min(\tilde{X}_N^N,-i)\text{ for }i\geq N+1.$$

我们还通过下式定义 $\mathbb{R}$ 上的点过程 $\hat{}M^N$

$$\hat{M}^N(A)=\sum_{i\geq 1}\mathbf{1}\{\hat{X}_i^N\in A\}=M^{\mathrm{GSE};N}(A)+M_{>N}^N(A),\text{ where }M_{>N}^N(A)=\sum_{i\geq N+1}\mathbf{1}\{\hat{X}_i^N\in A\}.$$

由 [46,定理 1.1], ，我们有

$$\hat{X}^N\Rightarrow(-2^{2/3}\Lambda_0,-2^{2/3}\Lambda_1,-2^{2/3}\Lambda_2,\dots), \tag{A.14}$$

作为 $\mathbb{R}^\infty$ 中的随机向量，或者等价地，在有限维意义下。我们指出，常数 $2^{2/3}$ 源于我们对 (A.2) 中 $\tilde{X}_i^N$所采用的特定缩放，以及在 (A.1) 中， [46]的作者使用了以 x^2 取代 $2x^2$ 的密度这一事实。

由引理 A.1 可知， $M^{\text{高斯辛系综};\ N}\Rightarrow M^{\mathrm{GSE};\infty}$，其中后者是定义在$\mathbb{R}$ 上的 Pfaffian 点过程，其相关核为 (1.17) 中的 K^{GSE} ，参考测度为勒贝格测度。由于 $M_{>N}^N\Rightarrow 0$ 是按构造得到的，我们得出 $\hat{}M^N\Rightarrow M^{\mathrm{GSE};\infty}$。

现在我们可以将引理 A.2 应用于 $\hat{}X^N$。事实上，(A.11) 根据我们对 $\hat{}X^N$ 的定义得以满足，而上一段说明了 $\hat{}M^N\Rightarrow M^{\mathrm{GSE};\infty}$。最后，(A.14) 中的有限维收敛尤其意味着，对于每个 $i\geq 1$， $\{\hat{}X_i^N\}_{N\geq 1}$ 是一个紧序列。

由引理 A.2，我们得出 $\hat{}_{X^N} \Rightarrow \hat{}X^\infty$，其中存在某个 $\hat{}X^\infty$ 和 $\hat{}M^\infty \overset{d}{=} M^{\mathrm{GSE};\infty}$，使得

$$\hat{M}^\infty(A) = \sum_{i\geq 1} \mathbf{1}\{\hat{X}_i^\infty \in A\}.$$

由于弱极限是唯一的，由 (A.14) 可得

$$\hat{X}^\infty \overset{d}{=} (-2^{2/3}\Lambda_0, -2^{2/3}\Lambda_1, -2^{2/3}\Lambda_2, \dots),$$

因此 $\hat{}_{M^\infty} \overset{d}{=} M^{\text{高斯辛系综}}$。结合上述几条结论，我们得出 $M^{\mathrm{GSE}} \overset{d}{=} M^{\text{高斯辛系综};\infty}$。证明至此完成。

参考文献

1. M. Abramowitz and I. Stegun, 《数学函数手册：公式、图表与数学表格》, 第10次印刷版, 美国国家标准局, 华盛顿特区, 1964年, 应用数学丛书第55卷。2. M. Adler、P. Ferrari 和 P. Van Moerbeke, 《带漫游者的 Airy 过程与新的普适类》, 《概率年刊》38 (2010), 714–769。3. A. Aggarwal 和 J. Huang, 《多边形菱形铺砌的边缘统计, II：Airy 线系综》, arXiv:2021:12874v3 (2021)。4., 《Airy 线系综的强刻画》, 《数学发明》 (2025), 1–313, https://doi.org/10.1007/s00222-025-01381-6。5. J. Baik、G. Barraquand、I. Corwin 和 T. Suidan, 《半象限中的 Pfaffian Schur 过程与最后通行渗流》, arXiv:1606.00525 (2016)。6., 《促进排斥过程》, arXiv:1707.01923 (2017)。7., 《促进排斥过程》, 载于：Abel 研讨会 (2018), 1–35。8., 《半象限中的 Pfaffian Schur 过程与最后通行渗流》, 《概率年刊》46 6, 3015 2018 3089 ( ), 第 – 期。9. J. Baik 和 E.M. Rains, 《递增子序列的代数方面》, 《杜克数学杂志》109 (2001), 第1期, 1–65。10., 《对合的单调子序列的渐近行为》, 《杜克数学杂志》109 (2001), 第2期, 205–281。11., 《对称化随机排列》, 《随机矩阵模型及其应用》, 《数学科学研究所丛书》40 (2001), 1–19。12. G. Barraquand、A. Borodin 和 I. Corwin, 《半空间 Macdonald 过程》, 《数学论坛·皮》8 (2020), e11。13. G. Barraquand、A. Borodin、I. Corwin 和 M. Wheeler, 《半象限中的随机六顶点模型与半直线开放非对称简单排斥过程》, 《杜克数学杂志》167 (2018), 第13期, 2457–2529。14. G. Barraquand 和 I. Corwin, 《半空间中对数伽马聚合物与 KPZ 方程的平稳测度》, 《概率年刊》51 (2023), 第5期, 1830–1869。15. G. Barraquand、I. Corwin 和 S. Das, 《半空间对数伽马聚合物的 KPZ 指数》, 《概率理论与相关领域》 (2024), 1–131。16. D. Betea、J. Bouttier、P. Nejjar 和 M. Vuletić, 《自由边界 Schur 过程及其应用 I》, 《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》19 (2018), 2106–2150。17. P. Billingsley, 《概率测度的收敛》, 第2版, John Wiley and Sons, 纽约, 1999。18. A. Borodin 和 J. Kuan, 《无限维酉群的 Plancherel 测度渐近行为》, 《数学进展》219 (2008), 894–931。19. A. Borodin 和 E.M. Rains, 《Eynard–Mehta 定理、Schur 过程及其 Pfaffian 类比》, 《统计物理学杂志》121 (2005), 291–317。20. A. Borodin 和 P. Salminen, 《布朗运动手册——事实与公式》, 第2版（更正重印版）, 《概率及其应用》, Birkhäuser Basel, 巴塞尔, 2015年, 第2版更正重印本。21. R. Cairoli 和 R. C. Dalang, 《序贯随机优化》, John Wiley & Sons, 2011。22. J.J. Callahan, 《高等微积分：几何视角》, 第1卷, Springer, 2010。23. I. Corwin, 《Kardar-Parisi-Zhang 方程与普适类》, 《随机矩阵：理论与应用》1 (2012)。24. I. Corwin 和 A. Hammond, 《Airy 线系综的布朗吉布斯性质》, 《数学发明》195 (2014), 441–508。25. I. Corwin 和 H. Shen, 《弱非对称区域中的开放 ASEP》, 《纯粹与应用数学通讯》71 (2018), 第10期, 2065–2128。26. S. Das、E. Dimitrov 和 Z. Yang, 《非临界半空间几何末次通过渗流中的钉扎》, 准备中 (2026+)。27. S. Das 和 C. Serio, 《半空间 KPZ 线系综及其标度极限》, 预印本：arXiv:2506.07939 (2025)。28. D. Dauvergne、M. Nica 和 B. Virág, 《一致收敛到 Airy 线系综》, 《亨利·庞加莱研究所年刊》 (B) 59 (2023), 第4期, 2220–2256。

29. D. Dauvergne、J. Ortmann 和 B. Virág，《有向景观》，《数学学报》**229** (2022)，第2期，201–285。30. E. Dimitrov，《Airy 漫游者线系综》，arXiv:2408.08445 (2024)。31.，《交错几何随机游走桥的紧性》，arXiv:2410.23899 (2024)。32. E. Dimitrov、X. Fang、L. Fesser、C. Serio、C. Teitler、A. Wang 和 W. Zhu，《伯努利 Gibbs 线系综的紧性》，《电子概率杂志》**26** (2021)，1–93，DOI: 10.1214/21-EJP698。33. E. Dimitrov 和 K. Matetski，《布朗 Gibbs 线系综的刻画》，《概率年刊》**49** (2021)，第5期，2477–2529。34. E. Dimitrov 和 Z. Yang，《半空间 Airy 线系综》，(2025)，预印本：arXiv:2505.01798。35.，《关于最后通行渗流与 Schur 过程的注记》，(2025)，预印本：arXiv:2510.04713。36. P. J. Forrester、T. Nagao 和 G. Honner，《硬边缘与软边缘处正交－酉和辛－酉转变的相关性》，《核物理B》**53** (1999)，第3期，601–643。37. P.J. Forrester，《对数气体与随机矩阵》，伦敦数学学会专著，普林斯顿大学出版社，2010。38. I.S. Gradshteyn 和 I.M. Ryzhik，《积分、级数与乘积表》，Academic Press，2014。39. F. Iafrate 和 E. Orsingher，《带漂移布朗游走的一些结果》，《理论概率杂志》**33** (2019)，1034–1060。40. T. Imamura、M. Mucciconi 和 T. Sasamoto，《KPZ 类中的可解模型：通过周期与自由边界 Schur 测度进行研究》，arXiv:2204.08420 (2022)。41. O. Kallenberg，《随机测度：理论与应用》，Springer International Publishing Switzerland，2017，10 1007 978 3 319 41598 7 . / - - - - . 42. A.M.S. Macêdo，《随机矩阵系综谱软边缘处的普适参数相关性》，《欧洲物理快报》**26** (1994)，641。43. J. Munkres，《拓扑学》，第2版，Prentice Hall, Inc.，新泽西州上萨德尔河，2003。44. S. Parekh，《具有边界的 ASEP 的 KPZ 极限》，《数学物理通讯》**365** (2019)，569–649。45. M. Prähofer 和 H. Spohn，《PNG 液滴与 Airy 过程的尺度不变性》，《统计物理学杂志》**108** (2002)，1071–1106。46. J. Ramirez、B. Rider 和 B. Virág，《Beta 系综、随机 Airy 谱与扩散》，《美国数学会杂志》**24** (2011)，第4期，919–944。47. D. Revuz 和 M. Yor，《连续鞅与布朗运动》，第3版，Springer，1999。48. T. Sasamoto 和 T. Imamura，《半空间中一维多核生长模型的涨落》，《统计物理学杂志》**115** (2004)，749–803。49. S. Sodin，《时变 Wigner 矩阵角落的谱边缘极限定理》，《国际数学研究通知》**2015** (2015)，7575–7607。50. E.M. Stein 和 R. Shakarchi，《傅里叶分析：导论》，第1卷，普林斯顿大学出版社，2011。51. J.R. Stembridge，《不相交路径、Pfaffian 与平面分拆》，《数学进展》**83** (1990)，96–131。52. C. Tracy 和 H. Widom，《高斯正交系综与辛系综的矩阵核》，《傅里叶研究所年刊》，第55卷，2005年，第2197–2207页。53. X. Wu，《半空间定向聚合物的中间无序区间》，《统计物理学杂志》**181**(2020)，第6期，2372–2403。