一种用于在物质点法中简单、准确施加诺伊曼热边界的方法：虚拟热通量法

Jidu YU[a, b, *], Jidong ZHAO[a, *]

[a]香港科技大学土木与环境工程系，香港，中国[b]加利福尼亚大学伯克利分校土木与环境工程系，美国

arXiv:2601.04570v1 [math-ph] 8 Jan 2026

摘要

在物质点法（MPM）中，由于复杂且不断变化的材料边界与固定背景网格之间天然不相协调，准确施加诺伊曼型热边界条件，尤其是对流热流边界，仍然是一项重大挑战。本文提出一种新颖的虚拟热通量法（VHFM），以克服这一局限。其核心思想是在物理边界周围的辅助域上构造一个虚拟通量场，使其精确满足指定边界条件。由此，弱形式中的曲面积分可转化为等价且易于计算的体积分。因此，VHFM 无需显式进行边界追踪、设置专用边界粒子或执行复杂的表面重构。本文给出了统一的公式，表明该方法可直接推广至一般的标量、向量和张量诺伊曼条件。通过一系列数值基准测试，严格验证了 VHFM 的准确性、稳健性和收敛性；这些测试包括一维瞬态分析、二维和三维曲线边界，以及存在大转动和复杂运动几何体的问题。结果表明，VHFM 的精度可与协调的基于节点的施加方法相媲美，且显著优于传统的基于粒子的方法。该方法简单、计算效率高且稳健，因此是将准确热边界条件融入热-力耦合及其他多物理场物质点法框架的理想方案。

关键词： 物质点法、热传递、诺伊曼边界条件、非协调边界、虚拟热通量法、多物理场建模

1. 引言

物质点法（MPM）是一种网格-粒子混合计算框架，结合了Sulsky 等人，1994，1995；Bardenhagen 等人，2004）。在过去几十年间，

*通讯作者电子邮箱： jyubu@connect.ust.hk (Jidu YU), jzhao@ust.hk (Jidong ZHAO)

物质点法发展迅速，现已成为计算力学领域广泛采用的工具。与传统的基于网格的有限元法（FEM）相比，物质点法在模拟大变形方面具有显著优势。其核心思想是将质量、速度、应力和应变等材料属性存储在物质点上，同时利用背景网格映射并更新场变量。这种混合策略有效缓解了与网格畸变相关的数值问题。此外，物质点法在模拟复杂物理过程方面具有很强的通用性，包括多相流（Chen 等人，2018；Chandra 等人，2024；Kularathna 等人，2021）、断裂与破坏（Liang 等人，2022，2021c）以及接触相互作用（Liang 等人，2024）。凭借这些能力，物质点法已成功应用于众多领域，例如地质灾害分析（如滑坡、泥石流和雪崩）（Soga 等人，2016；Gaume 等人，2017，2018，2019；Li 等人，2021b；Alonso，2021）、土-流体-结构相互作用（Cheng 等人，2026；Liang 等人，2021b，a）、生物力学（Guilkey 等人，2006；Li 等人，2021a）以及计算机图形学（Stomakhin 等人，2013，2014；Liang 和 Zhao，2019；Su 等人，2021）。

近年来，经典物质点法框架（Sulsky et al., 1994）已得到广泛拓展，以纳入多种多物理场耦合公式，包括热-力耦合（Nairn and Guilkey, 2015; Tao et al., 2018a; Zhao et al., 2022）和热-水-力耦合模型（Pinyol et al., 2018; Lei et al., 2021; Yu et al., 2025年）。热-力耦合物质点法已广泛用于研究温度演化对材料行为的影响，例如大变形下的热膨胀与收缩（Tao et al., 2018a; Zhao et al., 2022）、热致增压（Pinyol et al., 2018; Lei et al., 2024）、热致材料软化（Yu et al., 2024b; Lei et al., 2025年），以及塑性耗散引起的热生成（Nairn and Guilkey, 2015; Yu et al., 2026），其应用涵盖冻土力学（Yu et al., 2024c,a）、天然气水合物分解（Yu et al., 2026）和地热能开采。这些情形涉及紧密耦合的热场、水力场和力学场，对数值公式的精度、鲁棒性和稳定性提出了严格要求。尽管多物理场耦合物质点法已取得显著进展，尤其是在时间积分格式（Kularathna et al., 2021; Zheng et al., 2022）和空间离散策略（Yamaguchi et al., 2021）方面有所改进，但对边界条件精确施加的关注相对有限（Coombs, 2023）。

在热耦合多物理场问题的模拟中，准确施加热边界条件至关重要，因为温度场会通过强耦合机制直接影响其他物理场。典型的热边界条件包括指定温度（狄利克雷边界条件或本质边界条件）和指定热通量（诺伊曼边界条件或自然边界条件）。虽然在物质点法中通常较容易施加温度边界条件，

但准确施加热通量边界条件要困难得多。不过，热流边界在自然系统和工程系统中无处不在，它们决定着各种能量交换过程，例如大气与地球表面之间、流动流体与固体结构之间以及材料界面之间的热传递。典型的工程应用包括永久冻土和冰冻圈土壤中的冻融循环（Hjort 等人，2022；Luo 等人，2019），以及地热能系统和地热桩中的热交换（Tounsi 等人，2019；Rad 和 Fung，2016；Bayer 等人，2014）。在这些问题中，施加的热边界条件若存在误差，可能会在耦合系统中传播，并显著影响水力和力学响应。

在物质点法中施加热通量边界条件之所以困难，主要是因为材料边界与背景网格之间存在不相容关系（Liang 等人，2023）。物质点法通常采用规则且固定的背景网格，而材料则由一组拉格朗日材料点表示，其几何形状可能十分复杂，并会因大变形和旋转而发生显著演变。因此，除了高度理想化的情况外，材料边界很少与网格线对齐。如图 1a 所示，与网格对齐的正方形区域可以得到精确处理；而即使只是简单旋转，也会导致边界不相容（见图 1b）。对于更复杂的几何形状，例如倾斜或弯曲区域（如图 1c-e）或高度不规则的形状（如图 1f 中的斯坦福兔子）

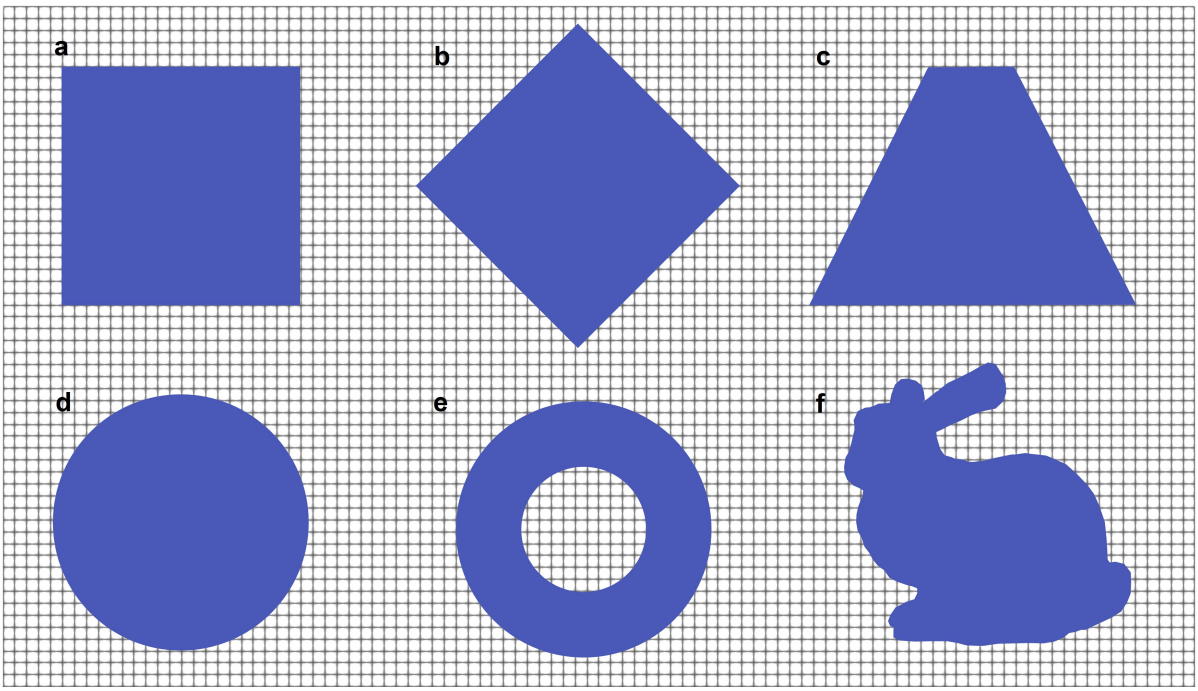


图 1：嵌入规则背景网格中的不同几何形状材料域示意图。除 (a) 中的正方形区域外，其他所有几何形状相对于网格均部分或完全不相容。

（Curless 和 Levoy，1996年），要使边界与规则背景网格对齐实际上是不可能的。在这种情况下，直接在网格节点或物质点上施加热通量条件会导致精度降低、数值误差增大。因此，在不相容且不断演化的边界上施加热通量边界条件，仍是物质点法模拟中一项关键且尚未解决的挑战。

尽管明确聚焦于在物质点法中施加热通量边界条件的研究相对较少，但现有的牵引力边界条件施加策略提供了有价值的参考。一种常见方法是直接对边界附近的物质点施加边界条件；然而，由于物质点通常并不与精确的几何边界重合，且积分中所用边界层的有效厚度难以界定，这种方法往往精度有限且收敛性较差（Al-Kafaji，2013）。为改善边界表示，一些研究在边界附近引入虚拟粒子或辅助粒子，这虽能提高精度，却需要额外的粒子生成和跟踪步骤，从而增加算法复杂度和计算成本（Liang 等人，2024）。另一种方法是采用移动网格或自适应网格技术，使背景网格更好地贴合材料边界，从而更准确地施加边界条件（Wang 等人，2017）。然而，对于复杂或高度不规则的几何形状，要实现一致的边界贴合仍然很困难，尤其是在采用规则背景网格时，这限制了这些方法的稳健性和普适性。

上述所有方法都依赖于对边界粒子或网格进行额外追踪或重构。尽管这些策略可以提高精度，但不可避免地会增加算法复杂度和计算成本。近期，有研究提出了一种虚拟应力边界法，无需显式追踪材料域边界，即可在物质点法中准确施加牵引边界条件，为此提供了一种有前景的新思路（Liang 等人，2023；Given 等人，2024）。受这一思路启发，本研究提出了一种新颖且计算高效的虚拟热通量法（VHFM），用于在非协调边界上准确施加诺伊曼边界条件。VHFM 的核心思想是在背景网格上构造虚拟热通量场，使其能够再现给定的边界热通量，从而无需显式进行边界追踪或边界—网格对齐。在此基础上，我们对控制方程进行了重新表述，并推导出虚拟热通量场的统一表达式。所提出的方法不仅适用于热传导和热-力学问题，还可自然地扩展至更复杂的多物理场应用。

本文其余部分安排如下。第2 节介绍带热流边界条件的控制热传导方程及其在物质点法框架中的离散化方法。

第3节介绍虚拟热通量法（VHFM），包括其基本概念、修正后的控制方程强形式与弱形式，以及相应的求解算法。第4节通过一系列基准问题，系统验证所提出方法的精度和收敛性。最后，第5节总结全文并展望未来工作。

2. 用于热传递问题的物质点法

本节介绍用于热传递分析的基本物质点法框架，包括控制方程、热边界条件及其在物质点法公式中的离散化。首先介绍本文采用的数学符号。符号$\dot{\Box}$表示一阶物质时间导数。算子 $\Box \cdot \Box$ 和 $\Box\colon\ \Box$ 分别表示单重和双重张量缩并，而 $\Box \otimes \Box$ 表示张量积。此外，下标 $\Box_p$和 $\Box_I$ 分别表示与物质点（亦称粒子，以 p为索引）和背景网格节点（以 I为索引）相关的量。本文使用粗体或黑板粗体表示张量形式的空间变量。

2.1. 传热方程

我们考虑材料域内仅由热传导控制的瞬态传热问题$\Omega \subset \mathbb{R}^d\,(d=2$ 或$3)$，其边界为$\partial\Omega$，时间区间为 $\mathcal{T}=[0,t]$。在不存在机械功和相变的情况下，局部能量平衡可表示为（Tao 等，2018b；Zhao 等，2020年），

$$\rho c \dot{T} + \nabla \cdot \boldsymbol{q} = Q \quad \text{in } \Omega \times \mathcal{T}\,, \tag{1}$$

其中，T 为温度，ρ 为材料密度，c 为比热容，$\boldsymbol{q}$为导热通量矢量（$\mathrm{W\cdot m^{-2}}$），Q 表示体积热源（$\mathrm{W\cdot m^{-3}}$）。

假设热传导遵循傅里叶定律，

$$\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{\kappa}\nabla T\,, \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{\kappa}$ 为热导率。本研究假设热传递是各向同性的，因此 $\boldsymbol{\kappa}$ 可简化为标量常数 κ。

边界 $\partial\Omega$被分解为两个互不重叠的部分 $\partial\Omega_T$ 和 $\partial\Omega_q$，分别施加温度（狄利克雷）和热流（诺伊曼）边界条件。热边界条件定义如下：

$$T = \hat{T} \qquad\qquad \text{on } \partial\Omega_T \times \mathcal{T}\,, \tag{3}$$

$$\hat{-}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}=q \qquad \text{on } \partial\Omega_q\times\mathcal{T}\,, \tag{4}$$

$$-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}=\gamma(T-T_a) \qquad \text{on } \partial\Omega_q\times\mathcal{T}\,. \tag{5}$$

$\hat{}$其中，T 表示 $\partial\Omega_T$上的指定温度，$\hat{}q$ 表示 $\partial\Omega_q$上的指定向内热通量，且 $\boldsymbol{n}$ 为边界的外向单位法向量。式（4）表示导热通量边界条件，而式（5）描述了材料表面与周围环境之间的对流换热，其中 γ 为对流换热系数，T_a 为环境温度。对流边界条件描述了自然界和工程系统中常见的表面换热过程，例如地表与大气之间，或固体结构与周围流体之间的热传递。

2.2. 弱形式与物质点法离散

令 δT 表示满足本质（狄利克雷）边界条件的容许虚温度场。将传热方程乘以 δT，在域 Ω 上进行积分，并结合分部积分与散度定理，可得到热传导方程的弱形式：

$$\int_\Omega \rho c\dot{T}\,\delta T\,dV=\int_\Omega \boldsymbol{q}\cdot\nabla\delta T\,dV-\int_{\partial\Omega_q}\hat{q}\,\delta T\,dS+\int_\Omega Q\,\delta T\,dV\,, \tag{6}$$

其中，$\nabla\delta T$ 表示虚温度场的梯度。

在物质点法中，材料域被离散为 n_p 个物质点（粒子），每个物质点携带质量、体积和状态变量，体积分可通过对粒子求和近似表示如下：

$$\int_\Omega(\cdot)dV=\sum_{p=1}^{n_p}(\cdot)V_p\,, \tag{7}$$

其中 V_p 为物质点体积。因此，弱形式方程（6）可离散为求和形式，

$$\sum_{p=1}^{n_p}V_p\rho_p c_p\dot{T}_p\,\delta T_p=\sum_{p=1}^{n_p}V_p\boldsymbol{q}_p\cdot\nabla\delta T_p+\sum_{p=1}^{n_p}V_pQ_p\,\delta T_p-\int_{\partial\Omega_q}\hat{q}\,\delta T\,dS\,, \tag{8}$$

其中，ρ_p、c_p、T_p、$\boldsymbol{q}_p$和 Q_p 分别表示粒子密度、热容、温度、导热通量和体积热源。若边界上未施加指定热通量（即 $\hat{}q=0$），则边界积分为零。

物质点温度 T_p 及其对应的虚温度 δT_p 通过背景网格节点值，利用物质点法形函数 S_{Ip} 插值得到：

$$T_p=\sum_{I=1}^{n_n}S_{Ip}T_I\,,\qquad \delta T_p=\sum_{I=1}^{n_n}S_{Ip}\delta T_I\,, \tag{9}$$

其中， T_I 和 δT_I 分别为节点 I处的节点温度和虚温度， n_n为网格节点的数量。

将式（9）代入式（8，并利用 δT_I 的任意性，可得半离散节点温度方程：

$$\mathcal{C}_I \dot{T}_I = \mathcal{E}_I^{\text{int}} + \mathcal{E}_I^{\text{ext}} , \tag{10}$$

其中，节点热容量、内部热贡献和外部热贡献定义如下：

$$\mathcal{C}_I = \sum_{p=1}^{n_p} V_p \rho_p c_p S_{Ip} , \tag{11}$$

$$\mathcal{E}_I^{\text{int}} = \sum_{p=1}^{n_p} V_p \boldsymbol{q}_p \cdot \nabla S_{Ip} , \tag{12}$$

$$\mathcal{E}_I^{\text{ext}} = \sum_{p=1}^{n_p} V_p Q_p S_{Ip} - \int_{\partial\Omega_q} \hat{q}\, S_I \, dS . \tag{13}$$

在式（12）中，根据傅里叶定律，由插值温度梯度计算每个物质点处的导热通量：

$$\boldsymbol{q}_p = -\kappa \nabla T_p = -\kappa \sum_{I=1}^{n_n} T_I \nabla S_{Ip} . \tag{14}$$

对瞬态热方程进行时间离散时所采用的显式前向欧拉积分格式是条件稳定的。为防止数值振荡并确保解收敛，时间步长 Δt 必须受到临界时间步长 Δt_{cr}的限制，该临界时间步长由适用于扩散问题的 Courant–Friedrichs–Lewy（CFL）条件推导得到：

$$\Delta t \le \Delta t_{\text{cr}} = \frac{h_{\min}^2}{\alpha} , \tag{15}$$

其中， $h_{\min}$ 表示最小网格尺寸， $\alpha = k/（\rho c）$为热扩散率。

2.3. 传统热通量边界施加

如式（6）的弱形式所示，施加热通量边界条件需要对诺伊曼边界 $\partial\Omega_q$进行曲面积分。在有限元法（FEM）中，这一操作十分直接，因为网格节点和单元面与材料边界明确对齐，因此可以利用边界单元直接进行数值积分。然而，在物质点法（MPM）中，如前所述，背景网格通常无法贴合不断变化的材料边界。在 MPM 中施加热通量边界条件的一种常用策略是使用边界粒子。这些粒子是物质点的一个子集，被识别为位于边界 $\partial\Omega_q$附近。指定热通量被

施加到这些边界粒子上，由此产生的热贡献随后被转换为节点量。

在此方法中，指定热通量的边界积分近似为：

$$\int_{\partial\Omega_q} \hat{q} S_I \, dS \approx \sum_{p=1}^{n_p} A_p \hat{q}_p S_{Ip} = \sum_{p=1}^{n_p} V_p h_p^{-1} \hat{q}_p S_{Ip} \,, \tag{16}$$

其中， A_p 表示与边界粒子相关的有效表面积， V_p 为物质点体积， h_p 表示假设的边界粒子沿表面法向的特征厚度。尽管这种传统的基于边界粒子的方法在概念上很简单，但仍存在若干固有局限。首先，粒子表面积 A_p 及相关厚度 h_p 的定义并不明确，尤其对于不规则几何或曲线边界更是如此。其次，边界粒子的识别依赖启发式方法且受网格影响；随着材料发生大变形或粒子重新分布，边界表示可能因此不一致。

或者，也可以直接在网格节点层级施加热通量边界条件，而无需引入边界粒子。在这种基于节点的方法中，指定热通量的曲面积分近似为：

$$\int_{\partial\Omega_q} \hat{q} S_I \, dS \approx \sum_{I=1}^{n_I} A_I \hat{q}_I S_I \,, \tag{17}$$

其中， A_I 表示与节点 I相关的有效边界表面积，$\hat{}q_I$为施加于该节点的指定热通量。这种方法需要明确识别边界节点，并为其分配适当的节点表面积。同样，由于物质点法中的背景网格与材料边界不相贴合， A_I 的确定并不唯一，且通常依赖于网格。

传统热通量边界施加方法存在的这些缺点，促使人们开发替代性的边界处理策略，以避免显式表面重构，并在物质点法框架内更加稳健、准确地施加热通量边界条件。

3. 虚拟热通量法（VHFM）

本文提出了虚拟热通量法（VHFM），用于在物质点法（MPM）中施加热通量边界条件，而无需进行显式的边界重建、使用边界粒子或执行节点表面积分。其核心思想是：将表面热流贡献替换为定义在辅助虚拟域上的等效体积贡献。

3.1. 虚拟域与虚拟热通量

我们引入一个辅助虚拟域 $\bar{\Omega}$，使其与物理域 Ω 的交集恰好与材料边界重合，

$$\bar{\Omega} \cap \Omega = \partial\Omega \,. \tag{18}$$

如图所示，虚拟域可以选为包围材料边界的任意一层。[2]它并不代表物体的物理区域，而是一种数学构造，用于将表面边界贡献改写为等效的体积项。

在 $\bar{\Omega}$ 内，定义虚拟热通量场 $\bar{\boldsymbol{q}}$，使其满足指定热通量边界条件，

$$\bar{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{n} = \begin{cases} \hat{q}, & \text{on } \partial\Omega_q \,, \\ 0, & \text{on } \partial\Omega \setminus \partial\Omega_q \,, \end{cases} \tag{19}$$

这种构造确保沿法向精确施加指定热通量，同时在未施加热流的边界上自然衰减为零。

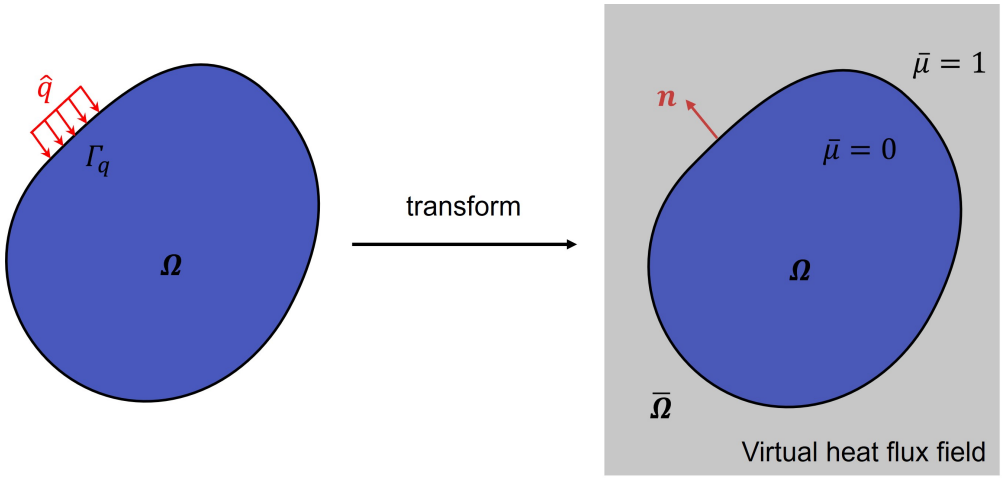


图 2：虚拟域 $\bar{\Omega}$ 包围物理域 Ω 及其相应虚拟热通量场的示意图。

此外，虚拟热通量场还必须在虚拟域内满足齐次热传递方程，

$$\rho c \dot{T} + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{q}} = 0 \quad \text{in } \bar{\Omega} \,, \tag{20}$$

其中，T 是一个仅为理论一致性而定义的辅助温度场。重要的是，T 并非物理温度，无需对其进行显式求解。其唯一作用是确保虚拟热通量场具有与控制方程相容的散度形式，从而使边界热通量贡献能够作为体积项纳入弱形式。

从概念上讲，虚拟域及其相关场充当了一种数学装置，将边界热通量“吸收”并重新分配到内部弱形式中。因此，与诺伊曼边界条件相关的原始曲面积分被一个涉及 $\bar{\boldsymbol{q}}$ 的等价体积分所取代，该体积分可以使用标准的物质点法粒子积分进行稳健计算。这一变换正是 VHFM 的核心思想。

3.2. 修正后的控制方程与物质点法离散

为区分物理域和虚拟域中定义的量，我们引入指示函数 $\bar{\mu}$,

$$\bar{\mu} = \begin{cases} 1, & \text{in } \bar{\Omega}\,, \\ 0, & \text{in } \Omega\,. \end{cases} \tag{21}$$

利用该指示函数，物理域和虚拟域中的控制方程可在扩展域 $\Omega \cup \bar{\Omega}$ 上统一表示为

$$(1-\bar{\mu})\left(\rho c\dot{T} + \nabla\cdot\boldsymbol{q} - Q\right) + \bar{\mu}\left(\rho c\dot{\bar{T}} + \nabla\cdot\bar{\boldsymbol{q}}\right) = 0\,. \tag{22}$$

这一组合表达式仅作为一种中间数学手段，用于将边界贡献纳入体积形式。

利用虚拟域中的齐次控制方程，即式（20），并将所得表达式限制在物理域 Ω内，可得

$$\rho c\left(\dot{T} - \dot{\bar{T}}\right) + \nabla\cdot(\boldsymbol{q} - \bar{\boldsymbol{q}}) - Q = 0 \quad \text{in } \Omega\,. \tag{23}$$

由于辅助温度场 $\bar{T}$ 仅为确保变分一致性而定义，且不进行显式求解，因此，差值（$T - \bar{T}$）可解释为一种有效温度变化率，用以考虑给定热通量边界条件的影响。

对于显式时间积分，这一有效变化率近似为下一时间步的温度前向变化率，从而得到修改后的强形式

$$\rho c\dot{T}^{k+1} + \nabla\cdot\left(\boldsymbol{q}^{k} - \bar{\boldsymbol{q}}^{k+1}\right) - Q = 0 \quad \text{in } \Omega\,. \tag{24}$$

该表达式与经典热方程的区别仅在于增加了一个与虚拟热通量相关的散度项，该项体现了诺伊曼边界条件。

将式（24）乘以一个许可的虚温度 δT，并在物理域上积分，即可得到弱形式，

$$\int_{\Omega} \rho c\,\delta T\,\dot{T}^{k+1}\,dV - \int_{\Omega}\left(\boldsymbol{q}^{k} - \bar{\boldsymbol{q}}^{k+1}\right)\cdot\nabla\delta T\,dV - \int_{\Omega}\delta T\,Q\,dV = 0\,. \tag{25}$$

与传统弱形式相比，与指定热通量相关的边界积分并未显式出现。其作用通过涉及 $\bar{\boldsymbol{q}}$ 的体积项纳入其中，该项由散度定理自然导出。

采用标准物质点法离散后，温度场和试函数均用节点形函数近似。代入式（25）可得半离散节点温度方程

$$\mathcal{C}_{IJ}\dot{T}_J = \widetilde{\mathcal{E}}_I^{\text{int}} + \widetilde{\mathcal{E}}_I^{\text{ext}}\,, \tag{26}$$

其中，$\mathcal{C}_{IJ}$ 为一致节点热容矩阵。内、外热力向量分别为

$$\widetilde{\mathcal{E}}_I^{\text{int}} = \sum_{p=1}^{n_p} V_p\,\boldsymbol{q}_p\cdot\nabla S_{Ip} - \sum_{p=1}^{n_p} V_p\,\bar{\boldsymbol{q}}_p\cdot\nabla S_{Ip}\,, \tag{27}$$

$$\widetilde{\mathcal{E}}_I^{\text{ext}} = \sum_{p=1}^{n_p} V_p\,Q_p\,S_{Ip}\,. \tag{28}$$

值得注意的是，诺伊曼边界 $\partial\Omega_q$ 上的传统曲面积分被完全消除。指定热通量不再通过该积分施加，而是通过与虚拟热通量场相关的体积贡献施加。这种重新表述得到的边界处理方式与物质点法的粒子积分框架完全兼容，无需显式进行曲面离散化，并且在大变形和边界演化过程中仍保持稳健。

3.3. 虚拟热通量场的选择

原则上，任何满足式（19）的虚拟热通量场均可采用。虚拟场并非唯一，只要能够恢复边界上的指定法向通量，就可以构造不同的选择。本文采用一种尤为简单且稳健的选择，

$$\bar{\boldsymbol{q}} = \hat{q}\,\boldsymbol{n}\,. \tag{29}$$

其中，$\boldsymbol{n}$ 是物理域 Ω 的外向单位法向量。

这种选择具有若干理想特性。首先，它能够严格满足指定热通量边界条件，

$$\bar{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{n} = \hat{q}\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = \hat{q}\,. \tag{30}$$

其次，虚拟热通量完全垂直于边界，因此不会引入虚假的切向通量分量。第三，$\bar{\boldsymbol{q}}$ 的定义只需要外向单位法向量，因此易于实现。

注释 1. 需要强调的是，虚拟热通量场并非用于表示物体内部的物理热流。相反，它充当一个辅助场，其散度

在弱形式中产生等效的体积贡献，从而替代表面的原始热通量积分。这种非唯一性提供了灵活性，但鉴于复杂度最低且性能稳定，本文选择的形式更为理想。

备注 2. VHFM公式不限于热学问题，还可以直接应用于物质点法中的一般诺伊曼型边界条件。根据给定边界量的性质，相应的虚拟场可按如下方式构造。

标量诺伊曼边界条件。 对于给定的标量通量 $\hat{} \; j$ （例如热流或流体通量），

$$\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n} = \hat{j} \quad \text{on } \partial\Omega_N, \tag{31}$$

可定义一个虚拟矢量场

$$\bar{\boldsymbol{J}} = \hat{j}\, \boldsymbol{n}\,, \tag{32}$$

$^{-}$ $\hat{}$，从而保证 $\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n} = j$。

*Vec*矢量诺伊曼边界条件。 对于给定的矢量边界牵引力 $\hat{\boldsymbol{t}}$,

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{t}} \quad \text{on } \partial\Omega_t\,, \tag{33}$$

可引入相应的二阶虚拟应力张量

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{t}} \otimes \boldsymbol{n}\,, \tag{34}$$

其满足

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n} = (\hat{\boldsymbol{t}} \otimes \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{t}}\,. \tag{35}$$

张量诺伊曼边界条件。 更一般地，对于高阶或张量值诺伊曼边界条件，可以通过将给定边界量与外法向量进行张量积，构造适当阶数的虚拟场。该构造确保虚拟场与法向量的缩并能够准确恢复给定的边界条件。

这些构造表明，VHFM 提供了一个统一且系统的框架，用于施加不同张量阶数的诺伊曼边界条件，同时保持纯体积弱形式。

3.4. 通过标量场进行表面法向估计

表面法向可采用质量梯度法计算，该方法简单且已广泛应用于物质点法（MPM）。靠近材料边界时，节点质量场会发生剧烈变化，其梯度可自然地近似外法向方向。该方法无需额外进行边界重建，并且能够自然地融入标准物质点法公式

中。对于各向同性材料，物质点 p 处的外向单位法向量计算如下：

$$\boldsymbol{n}_p = \frac{\nabla m_p}{\|\nabla m_p\|}, \tag{36}$$

with

$$\nabla m_p = \sum_{I=1}^{n_I} m_I \nabla S_{Ip}, \tag{37}$$

其中，m_I 为节点质量，S_{Ip} 表示物质点法形函数。然而，当材料密度分布不均匀时，质量梯度法的精度可能会降低。

另一种方法是引入一个统一标量场 ϕ，使其在物理域 Ω 内的所有物质点处取恒定值（例如 $\phi = 1$），在域外取零，由此计算所需的单位外法向量。该场的梯度自然指向指示函数增长最快的方向，而这个方向与边界处的外法向方向一致。

通过标准物质点法映射获得标量场的节点值，

$$\phi_I = \sum_p S_{Ip}\, \phi_p\, V_p, \tag{38}$$

其中，对所有物质点均有 $\phi_p = 1$。随后计算物质点处的梯度，

$$\nabla \phi_p = \sum_I \phi_I\, \nabla S_{Ip}. \tag{39}$$

最后，单位外法向量为，

$$\boldsymbol{n}_p = \frac{\nabla \phi_p}{\|\nabla \phi_p\|}. \tag{40}$$

这种常标量梯度法 将法向估计与材料的密度分布解耦。因此，对于涉及较大密度差异、非均匀质量分布或未定义质量的纯几何模型的问题，该方法具有良好的稳健性。

3.5. 求解算法

以下给出 VHFM 的数值实现，并总结于算法 1。

1. 边界节点检测。通过体积分数法识别边界节点。如果单元内物质点总体积（记为 $\mathcal{V}_{p\in c}$）与单元体积（记为 $\mathcal{V}_c$）之比低于指定阈值 $\eta \in (0,1)$，则该单元的所有节点均归类为自由表面节点（图 $\mathcal{N}_1$ 3 中的节点集 3）。默认情况下，η取值为 0.5。随后，将与这些边界节点相关联的物质点指定为边界粒子（图 $\mathcal{P}_2$ 3 中的粒子集 3）。也可以采用其他自由表面检测方法（Liang 等人，2023；Given 等人，2024）。

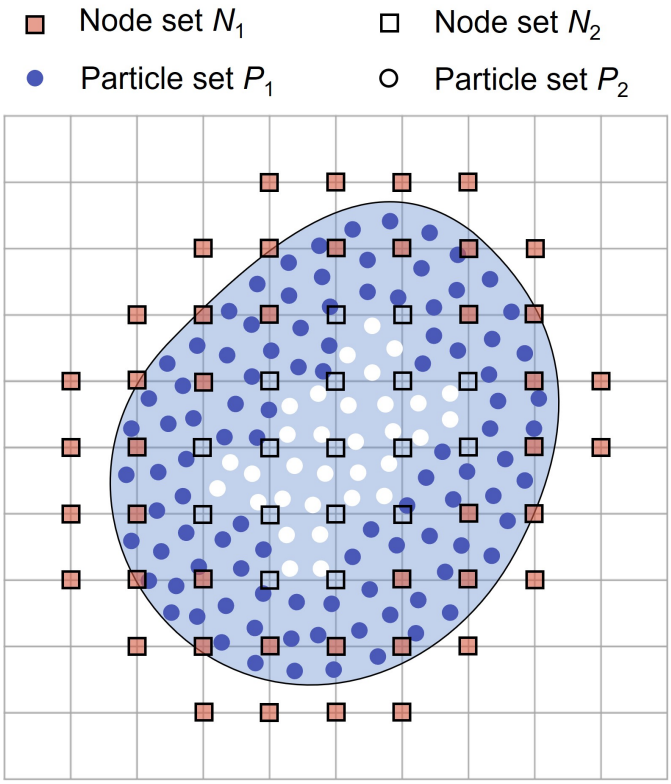


图 3：表面节点和表面物质点的概念示意图。 P_1：表面物质点集； P_2：非表面物质点集； N_1：表面节点集； P_2：非表面节点集。

2. 边界粒子外向单位法向量的计算。使用质量梯度法计算每个边界粒子处的外向单位法向量。通过对形函数梯度加权的节点质量贡献求和，计算粒子质量梯度，然后将其归一化以获得单位法向量（式（36））。

3. 热流边界条件的施加。识别自由表面节点并计算相应的粒子外向法向量后，使用虚拟通量公式以弱形式施加给定热通量边界条件。在边界粒子处定义的虚拟热通量仅映射到自由表面节点的节点内部热量。

4. 数值算例

本节评估所提出的 VHFM 在物质点法中施加热流边界的性能。针对不同的材料几何形状和热流边界，进行了五个数值算例，每个算例都有特定目的：

1. 首先，开展具有恒定热流边界和对流热流边界的一维半无限杆测试，通过与解析结果直接比较，验证 VHFM 的基本精度和空间收敛性。

算法1 虚拟热通量法热边界条件施加

要求：

1: **步骤 1：识别自由表面节点**2: $\mathcal{N}_1 \leftarrow \emptyset$3: $N_c \leftarrow$ 活动单元数量； $V_{p\in cJ} \leftarrow$ 单元内粒子的总体积 J； $V_J \leftarrow$ 单元的体积 J；4: **对于** $J = 1$ 至 N_c **执行**5: **如果** $0 < V_{p\in cJ}/V_{cJ} < \eta$ **则** ▷ 体积分数 判据 6: $\mathcal{N}_1 \leftarrow \mathcal{N}_1 \cup \{$节点 $\in J\}$7: 结束如果 8: 结束循环 9: 步骤2: 通过标量梯度计算表面法向量 10: $n_p \leftarrow$ 粒子数 11: 对于每个节点 $p = 1$ 至 n_p 执行 12: 与物质点连接的节点数 $n_n \leftarrow$ 至 p13: 对于每个节点 $I = 1$ 至 n_n 执行 14: $\phi_I \leftarrow \phi_p S_{Ip}$15: 结束循环 16: 结束循环 17: 对于每个粒子 $p = 1$ 至 n_p 执行 18: 计算标量梯度： $\nabla\phi_p = \sum_I \phi_I \nabla S_{Ip}$19: 计算单位法向量： $\boldsymbol{n}_p = \dfrac{\nabla\phi_p}{\|\nabla\phi_p\|}$20: 结束循环 21: 步骤3: 通过 VHFM 施加边界通量 22: 对于每个粒子 $p = 1$ 至 n_p 执行 23: 对于每个节点 $I = 1$ 至 n_n 执行 24: 如果 $I \in \mathcal{N}_1$ 则 25: $\mathcal{E}_I^{\text{int}} \leftarrow \mathcal{E}\text{int}_I \quad + V_p \hat{} q_p \, \boldsymbol{n}_p \cdot \nabla S_{Ip}$26: 结束如果 27: 结束循环 28: 结束循环 29: 返回更新后的 $\mathcal{E}_I^{\text{int}}$

---

2. 其次，模拟二维圆环（包含凹形和凸形边界）的加热过程，旨在展示该方法在无需边界贴合的情况下处理复杂静态几何体的能力，并通过与参考有限差分解进行比较来验证。

3. 第三，模拟三维球体的对流冷却过程，以展示该方法在三维场景建模中的有效性。此外，还研究了每单元粒子数对精度的影响。

4. 此外，我们模拟了旋转二维方形块的加热过程，包括固定角度和连续旋转两种构型，旨在验证该方法在刚体运动下动态演化的非共形边界问题中的准确性和稳健性。

5. 最后，我们将该方法应用于一个实际问题：复杂几何形状的旋转风扇冷却，旨在展示该方法在模拟具有复杂移动边界的热传递过程时的稳健性和适用性。

4.1. 一维示例：半无限长杆的瞬态传热

在第一个示例中，我们模拟半无限长杆在热流边界下的瞬态传热问题。该问题可简化为一维情形，如图4a所示，其中左侧边界施加热流 q_s。为近似半无限条件，杆长 L设为足够大的20 m，而我们仅关注前5 m范围内的结果。模拟采用统一材料假设，所有材料属性均设为1，包括密度 ρ(kg/m^3)、比热容 c(J/(kg $\cdot$°C))和热导率κ(W/(m $\cdot$°C))。初始温度 T_0设为0°C。我们考察了恒定热流边界和对流热流边界条件。对于前者，施加的热流 q_s 设为1 W/m^2。对于后者，环境温度T_a设为1°C，对流换热系数 γ 也设为1 W/(m$^2\cdot$°C)。

位置 x 和时间 t 处的温度解析解如下：

- 对于恒定热流边界：

$$T(x,t) = T_0 + 2\frac{q_s}{\kappa}\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}}\left[\exp\left(\frac{-x^2}{4\alpha t}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{\frac{\pi}{\alpha t}}, \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)\right], \tag{41}$$

- 对于对流热流边界：

$$T(x,t) = T_0 + (T_a - T_0)\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \exp\left(\frac{\gamma x}{\kappa} + \frac{\gamma^2 \alpha t}{\kappa^2}\right)\cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{\gamma\sqrt{\alpha t}}{\kappa}\right)\right], \tag{42}$$

其中 $\alpha = \kappa/(\rho c)$ 为热扩散率，erfc 表示余误差函数。上述解析解的详细推导见 附录 A

模拟采用单元尺寸为 0.1 m 的背景网格。物质点尺寸设为网格尺寸的一半，即 0.05 m。考虑两种不同的物质点

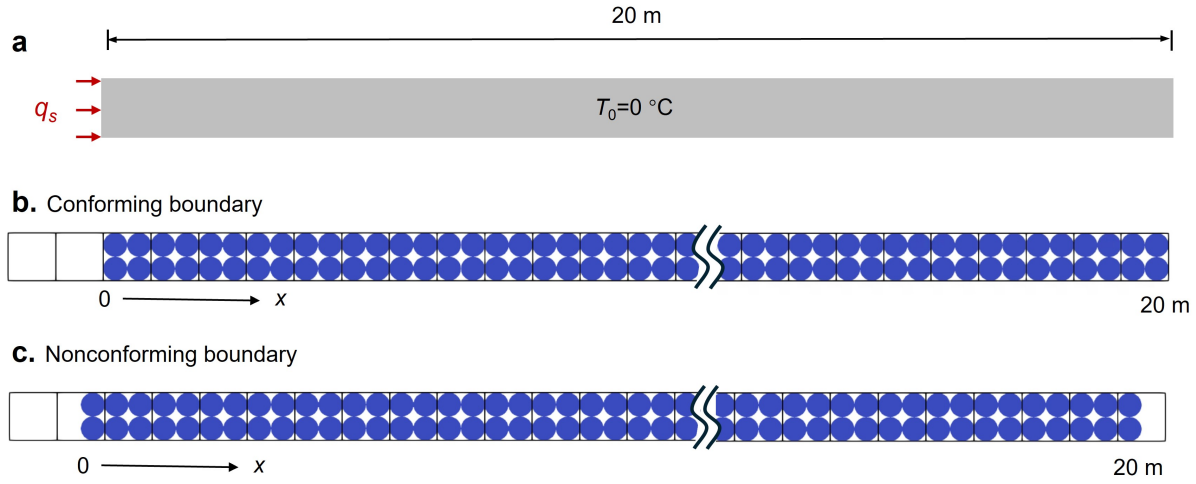


图 4：一维半无限长杆中的瞬态传热：（a）模型几何形状、初始条件和边界条件，（c）相容边界配置，以及（b）非相容边界配置。

布置方式，如图 4 所示。在图 4b 中，物质点采用相容边界配置，每个网格单元内均匀分布四个物质点，且左边界处的物质点与网格边界对齐。相比之下，图 4c 展示了非相容边界配置，其中所有物质点均向左平移半个网格尺寸。在这种情况下，最左侧的网格单元中仅包含两个物质点。采用 VHFM 对相容和非相容边界配置进行测试。作为对比，在相容边界配置下，还通过分别直接在节点或物质点处施加边界条件，进行了两组额外模拟。模拟采用均匀时间步长 $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$ s。

备注 3。 请注意，在我们的模拟中，物质点采用了常用的等距配置，位于每个网格单元内 0.25 h和 0.75 h的位置，而不是精确布置在高斯积分点处。尽管这种布置可能会引入额外的积分误差，但这些误差在所有情况下都是一致的，因此不会影响我们结论的有效性。

图 5a 和 b 比较了时间 $t = 0.1$ s 和$t = 0.5$ s时，采用结合 VHFM 的物质点法与解析解得到的温度分布。可以观察到，对于恒定热流边界和对流热流边界，无论边界是相容的还是非相容的，使用 VHFM 模拟得到的温度场都与理论解非常吻合。

为定量分析模拟误差，图 5c 和 d 绘出了绝对误差 $e_p = T_{\mathrm{mpm},p} - T_{\mathrm{ana},p}$，其中 $T_{\mathrm{mpm},p}$ 和 $T_{\mathrm{ana},p}$分别表示物质点 p 处的模拟温度和理论温度。此外，还计算了物质点法

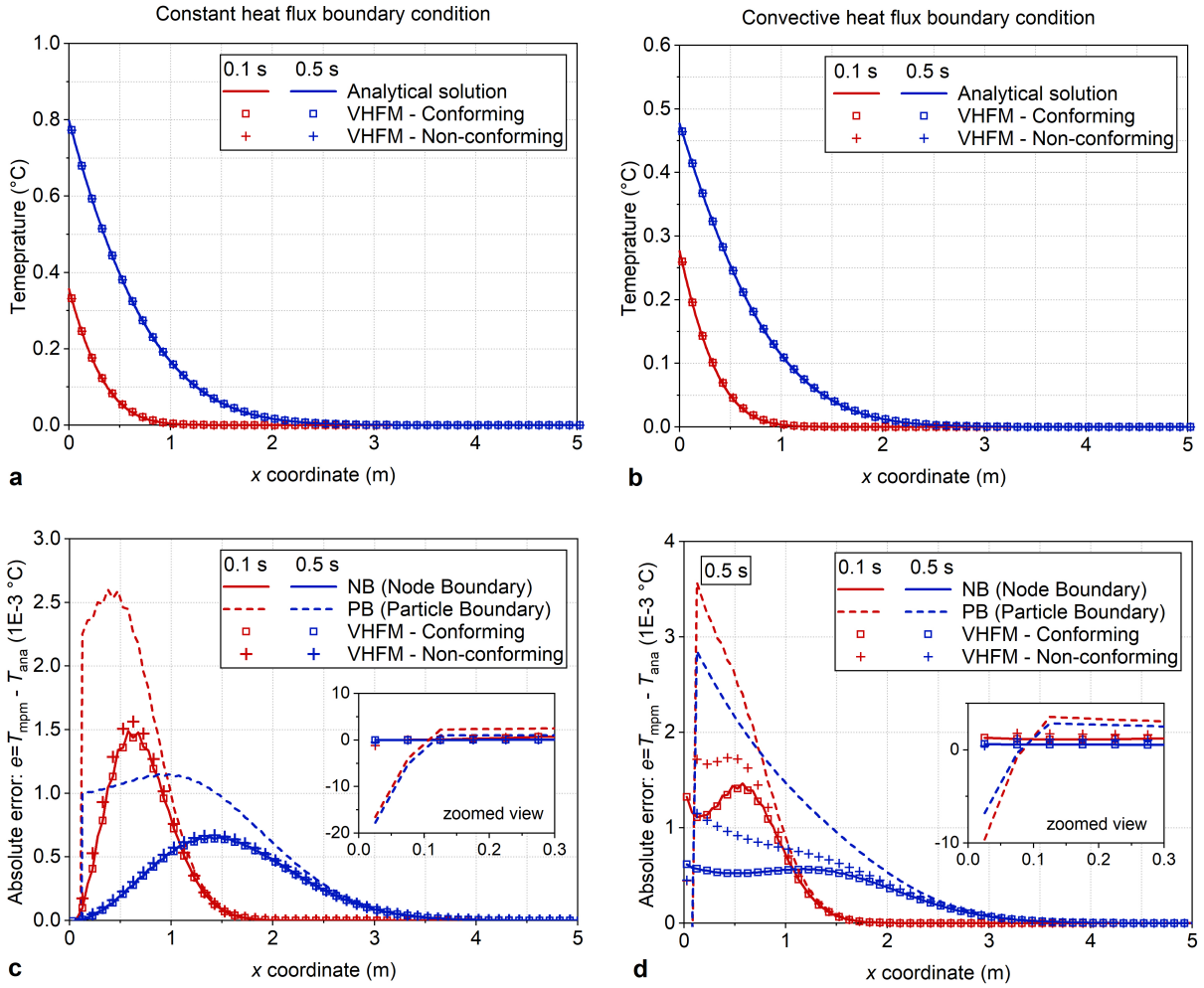


图 5：具有恒定热流边界（左列）和对流热流边界（右列）的一维半无限长杆中的瞬态传热：(a-b) 对比采用 VHFM 的 MPM 与解析解在 0.1 s 和 0.5 s 时的温度分布；(c-d) 对比不同边界条件施加方法的绝对误差。(c) 和 (d) 中的局部放大图突出显示了原点附近，即热流边界处的误差，表明直接在粒子边界施加热流会导致边界附近出现显著误差。

计算模拟与解析解，

$$\varepsilon_{\mathrm{err}} = \sqrt{\frac{1}{N_p}\sum_{p=1}^{N_p}(T_{\mathrm{mpm},\,p} - T_{\mathrm{ana},\,p})^2}\,, \tag{43}$$

其中 N_p 是物质点的总数。

图 5c 和 d 进一步比较了使用 VHFM 与传统粒子边界和节点边界方法（均采用协调条件）所获得的绝对误差。表 1 总结了不同热流施加方法在不同时间点计算得到的 $\varepsilon_{\mathrm{err}}$。结果表明，对于协调边界，VHFM 模拟的精度与直接在节点处施加边界条件的精度相同

表1：一维半无限长杆的瞬态传热：使用不同边界条件施加方法的均方根误差对比 ε_{err}

恒定热流边界条件				
Time	节点边界（NB）	粒子边界（PB）	VHFM协调型	VHFM非协调型
0.1 秒	2.420×10^{-4}	9.714×10^{-4}	2.420×10^{-4}	2.599×10^{-4}
0.5 秒	1.608×10^{-4}	9.803×10^{-4}	1.608×10^{-4}	1.661×10^{-4}
1.0 秒	1.352×10^{-4}	9.826×10^{-4}	1.352×10^{-4}	1.383×10^{-4}
对流热流边界条件				
Time	节点边界 (NB)	粒子边界 (PB)	VHFM协调型	VHFM非协调型
0.1 s	2.810×10^{-4}	7.173×10^{-4}	2.810×10^{-4}	2.065×10^{-4}
0.5 s	1.748×10^{-4}	6.159×10^{-4}	1.748×10^{-4}	2.574×10^{-4}
2.5 s	8.463×10^{-5}	5.756×10^{-4}	8.463×10^{-5}	3.392×10^{-4}

，且二者的精度都显著高于在物质点处施加边界条件的方法。对于非协调边界，VHFM 的精度略低，但仍接近采用基于节点的边界施加的协调条件精度，并且仍远高于基于粒子的方法。这些结果表明，所提出的 VHFM 在施加热流边界时具有出色的精度。

为了验证该方法的收敛性，我们进一步测试了不同网格尺寸下的误差 ε_{err}。我们考虑了五种网格尺寸：0.5、0.2、0.1、0.05 和 0.02 m。由于采用显式积分，每种情况下的时间步长都必须足够小，以确保稳定性。由于时间步长也会影响误差大小，为了进行公平比较，我们将每种网格尺寸对应的时间步长设为 $0.1t_{\text{CFL}}$。对应的时间步长分别为 2.5×10^{-2}、 4×10^{-3}、 1×10^{-3}、 2.5×10^{-4}和 4×10^{-5} s。本研究仅测试了非协调边界条件。图6 绘出了 ε_{err} 相对于 $1/h$ 在双对数坐标中的变化。显然，对于恒定热流边界和对流热流边界，该方法均实现了清晰的二阶收敛率。

4.2. 二维示例：圆环加热

第二个示例模拟二维（2D）圆环的加热，旨在验证 VHFM 对曲线边界的准确性。如图7a 所示，圆环的外半径和内半径分别为 $R_1 = 5\text{m}$ 和 $R_2 = 1\text{m}$。热流 q_s 同时施加于圆环的内、外边界。圆环的初始温度设为 $0\,^{\circ}\text{C}$。考虑两种热流边界条件：恒定热流 $q_s = 1\text{W/m}^2$, 和对流热流边界条件 $q_s = \gamma(T - T_a)$，其中环境温度为 $T_a = 1\,^{\circ}\text{C}$，传热系数为 $\gamma = 1\text{W}/(\text{m}^2 \cdot {}^{\circ}\text{C})$。同样，我们假设圆环材料参数均为 1，即

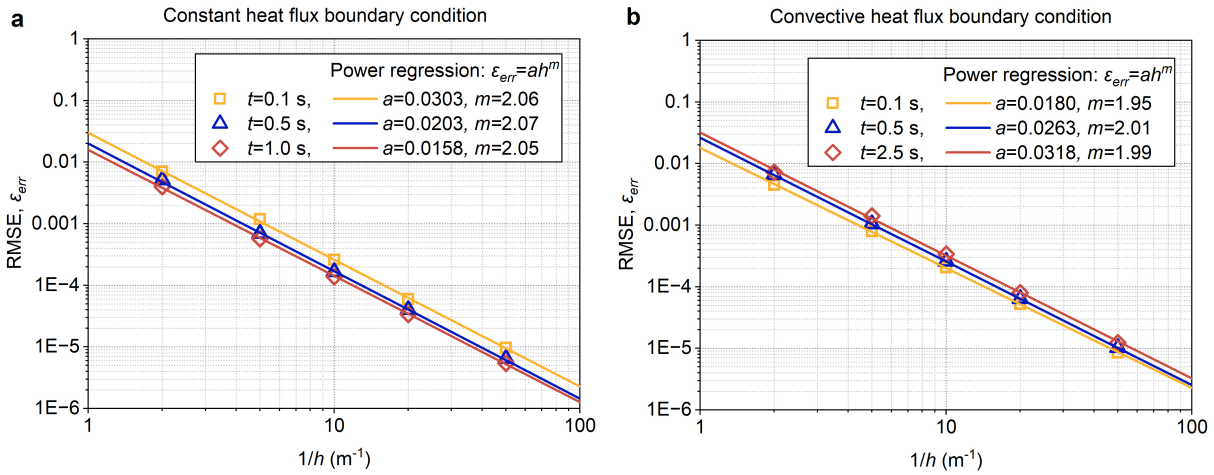


图6：一维半无限长杆的瞬态热传递：对 (a) 恒定热流边界和 (b) 对流热流边界进行网格细化收敛性测试。

圆环的密度为 $\rho = 1\,\mathrm{kg/m^3}$,，比热容为 $c = 1\mathrm{J/(kg\cdot °C)}$，热导率为 $\kappa = 1\mathrm{W/(m\cdot °C)}$。

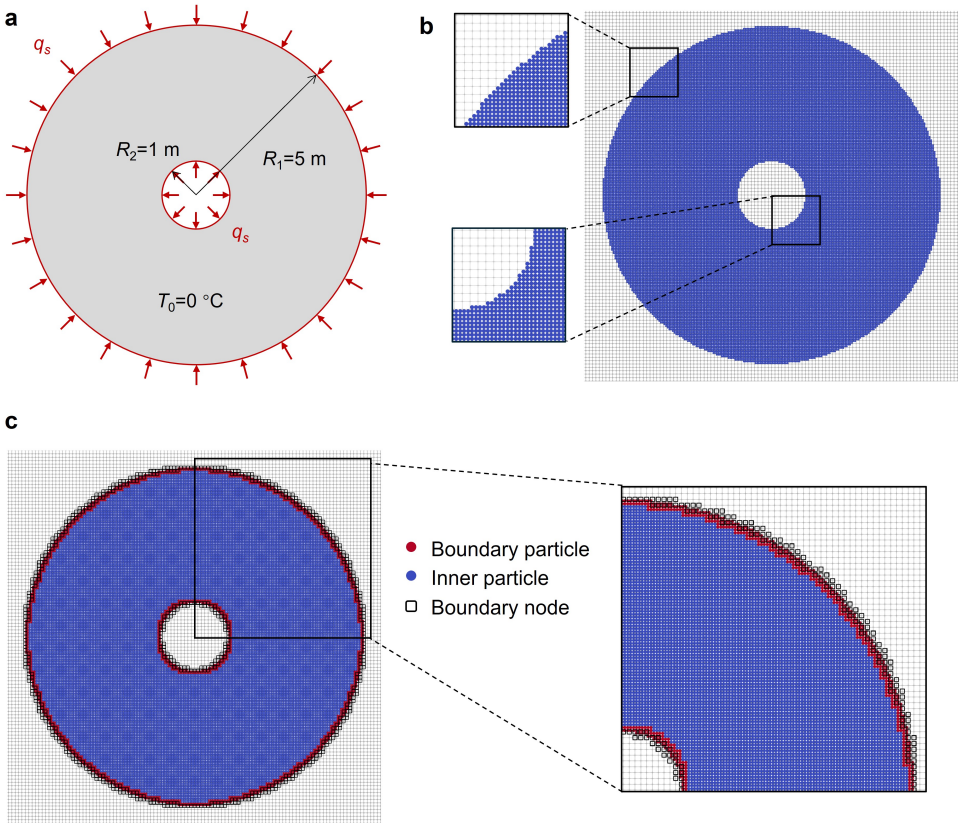


图7：圆环的双向加热：(a) 模型几何形状、初始条件和边界条件，(b) 背景网格和物质点离散，以及 (c) 基于体积分数法检测到的表面节点和表面粒子。

采用网格尺寸为 0.1 m 的四边形背景网格，材料

物质点尺寸设为 0.05m。为离散圆环，我们首先生成一个 5 m ×5m 正方形，然后移除圆环区域外的物质点。得到的物质点分布如图 7b 所示。可以观察到，圆环边界呈阶梯状，且与背景网格不对齐。时间步长设为 $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$ s。体积分数阈值设为 0.55，检测到的表面节点和表面粒子如图 7c 所示。由于该问题没有可用的解析解，我们将物质点法结果与有限差分法结果进行比较。该二维问题所采用的有限差分法算法见 附录 B。

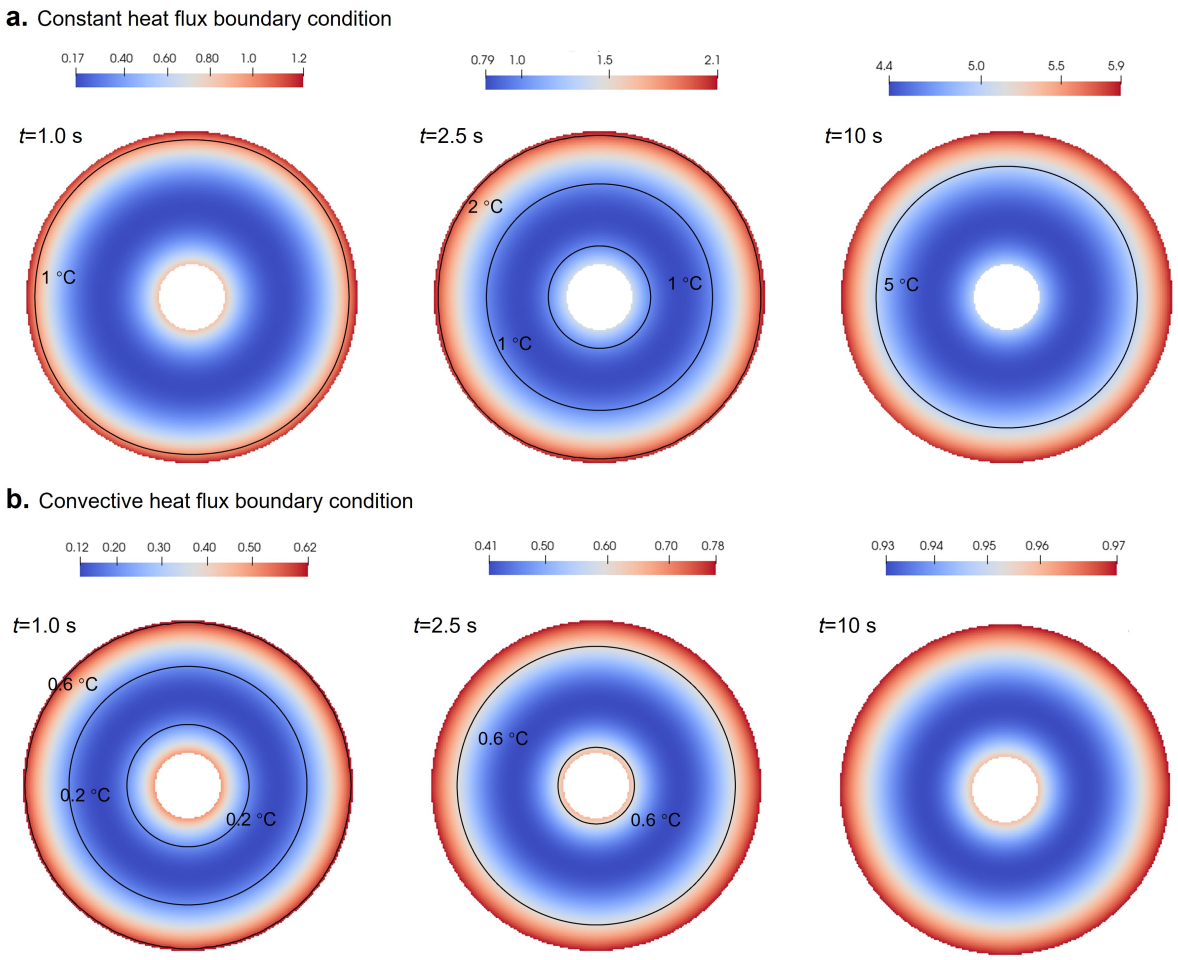


图 8：圆环的双向加热：在 $t = 1.0$、2.5 和 10 s 时，(a) 恒定热流边界条件和 (b) 对流热流边界条件下的温度等值线。黑线表示等温线。

图 9 定量比较了在 t =1 s 时环的径向温度分布，该分布由物质点法模拟和有限差分计算得到。对于此问题，有限差分法解基于极坐标系下的一维轴对称模型，采用与物质点法相同的网格尺寸（0.1m）。有限差分法采用二阶中心差分格式和用于施加边界热流的三点单边差分，以确保精度。在物质点法模拟中，除 0.1m 网格外，还测试了另外两种网格尺寸：0.2 m

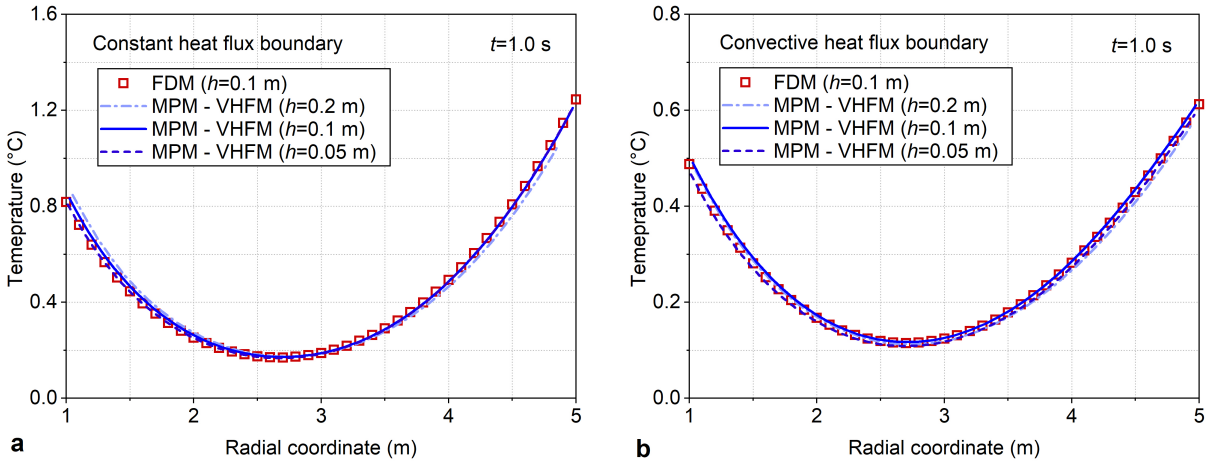


图 9：圆环双向加热：在 (a) 恒定热流边界条件和 (b) 对流热流边界条件下，使用有限差分法以及采用 VHFM 的物质点法获得的不同网格尺寸下 $t = 1.0$ s 时的径向温度分布对比。

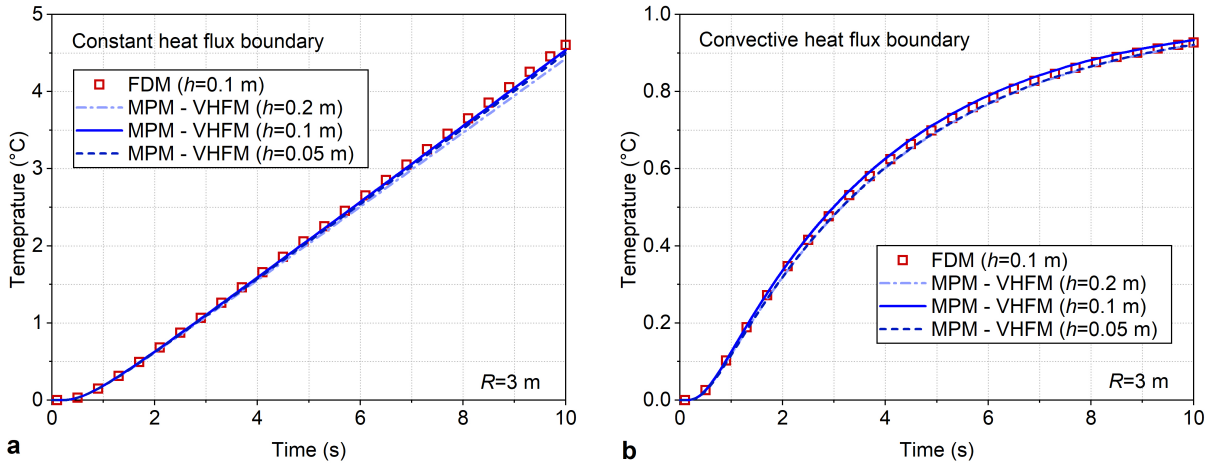


图 10：圆环双向加热：在 (a) 恒定热流边界条件和 (b) 对流热流边界条件下，使用有限差分法以及采用 VHFM 的物质点法获得的不同网格尺寸下，径向距离为 $R = 3$ m 处的温度演化对比。

以及 0.05m。结果表明，物质点法解与有限差分法解高度吻合，且采用 VHFM 的物质点法在不同网格尺寸下的预测结果变化极小。这表明，即使使用相对较粗的网格，基于 VHFM 的模拟仍能获得可靠结果。

此外，图10 比较了径向位置为3m（即沿环的中心轴）处的温度演化。在恒定热流条件下，温度持续升高；而在对流热通量条件下，温度逐渐趋近于 1 ℃的环境温度。在这两种情况下，MPM 预测的温度演化均与 FDM 结果高度吻合，且不同网格尺寸下的模拟结果几乎一致。这进一步验证了所提出的 VHFM 在处理非对齐热学

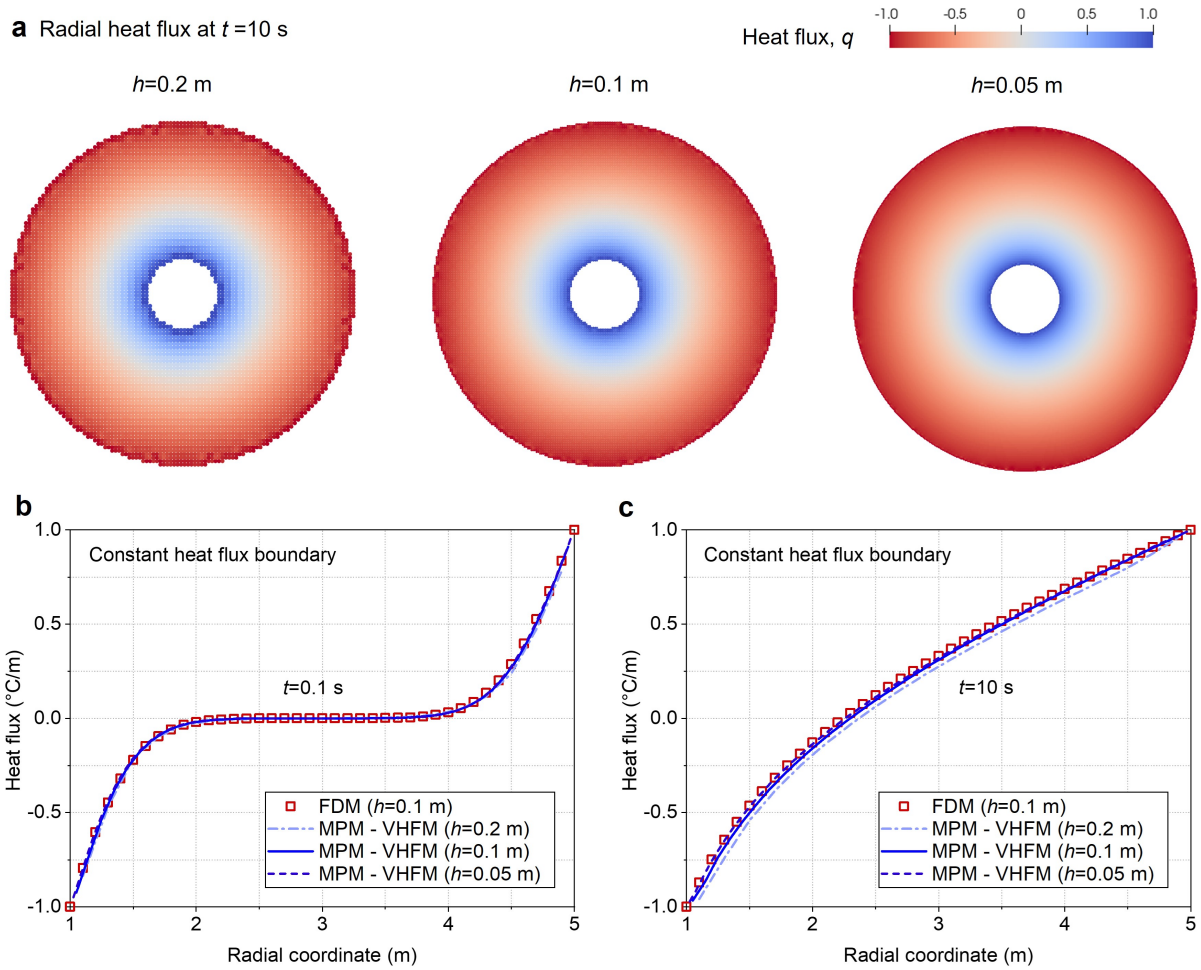


图11：恒定热流边界条件下圆环的双向加热：(a) $t = 10$ s 时不同网格尺寸下的径向热流等值线；(b) $t = 0.1$ s 时沿径向的热流分布；以及 (c) $t = 1.0$ s 时沿径向的热流分布。

边界条件。

图 11a 比较了达到稳态（$t = 10$s）后恒定热流边界条件下不同网格尺寸的径向热流分布。结果表明，内边界和外边界处的热流值分别为 $-1\,°\mathrm{C/m}$（指向中心）和 $1\,°\mathrm{C/m}$（背离中心），与施加的边界条件完全一致。即使采用粗网格（$h = 0.2$m），其热流分布与较细网格相比的差异也可以忽略不计。图11b 和 c 进一步定量比较了 $t = 0.1$s 和$t = 10$s时的径向热流，其中包括有限差分法以及采用三种不同网格尺寸的物质点法模拟结果。结果表明，无论是在加热早期阶段（$t = 0.1$s），还是在最终稳态（$t = 10$s），基于 VHFM 的物质点法模拟结果均与有限差分法解高度吻合。此外，不同网格尺寸下的结果也表现出良好的一致性。这些发现进一步验证了所提出的 VHFM 方法在热边界施加方面的准确性。

4.3. 三维示例：球体冷却

第三个数值示例模拟了三维（3D）球体的瞬态冷却过程。球体半径为 $5\,\mathrm{m}$，初始温度均匀，为 $100\,^{\circ}\mathrm{C}$，并暴露于温度为 $0\,^{\circ}\mathrm{C}$ 的环境中，对流换热系数为 $\gamma = 1\mathrm{W}/(\mathrm{m}^2\cdot{}^{\circ}\mathrm{C})$。采用单位材料属性。模拟使用均匀六面体背景网格，单元尺寸为 $0.2\mathrm{m}$（见图 12b）。研究了两种不同的每单元粒子数（PPC）配置：每个背景单元分别布置 8 个和 27 个粒子。时间步长设为 $\Delta t = 1\times10^{-2}\mathrm{s}$，体积分数阈值 η 始终保持为 0.55。由于该问题不存在可用的闭式解，因此采用有限差分法（FDM）参考解进行验证。该问题可简化为球坐标下的一维传热；具体的有限差分法算法详见 附录 C。

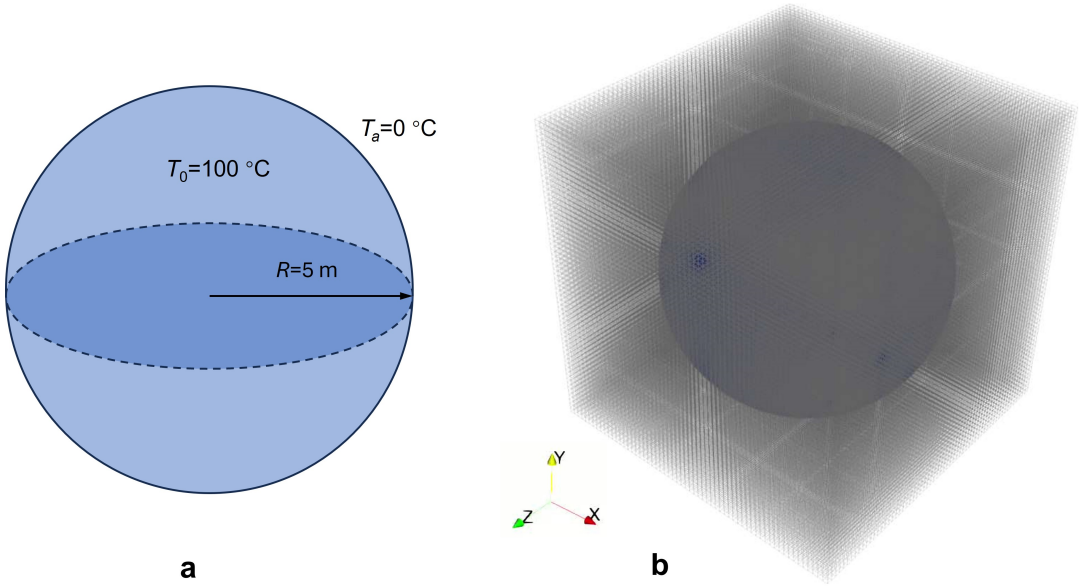


图 12：球体冷却：(a) 几何形状、初始条件和边界条件；(b) 背景网格和材料离散化。

图 13展示了球体在不同时刻的温度分布，体现了冷却过程从表面向中心推进的情况。两种 PPC 配置的结果在视觉上几乎完全相同。图14给出了所选时刻径向温度分布的 MPM 预测结果与 FDM 参考解之间的定量比较。PPC $=8$ 的情况与 FDM 结果吻合良好，而 PPC $=27$的情况则表现出更加接近的吻合度，证实了增加每单元粒子数能够提高数值精度。在此处，FDM 解被视为更精确的基准解，因为它求解的是经过简化的一维问题，并且能够更精确地施加边界条件。然而，FDM 通常仅适用于具有简单、规则几何形状的问题；对于

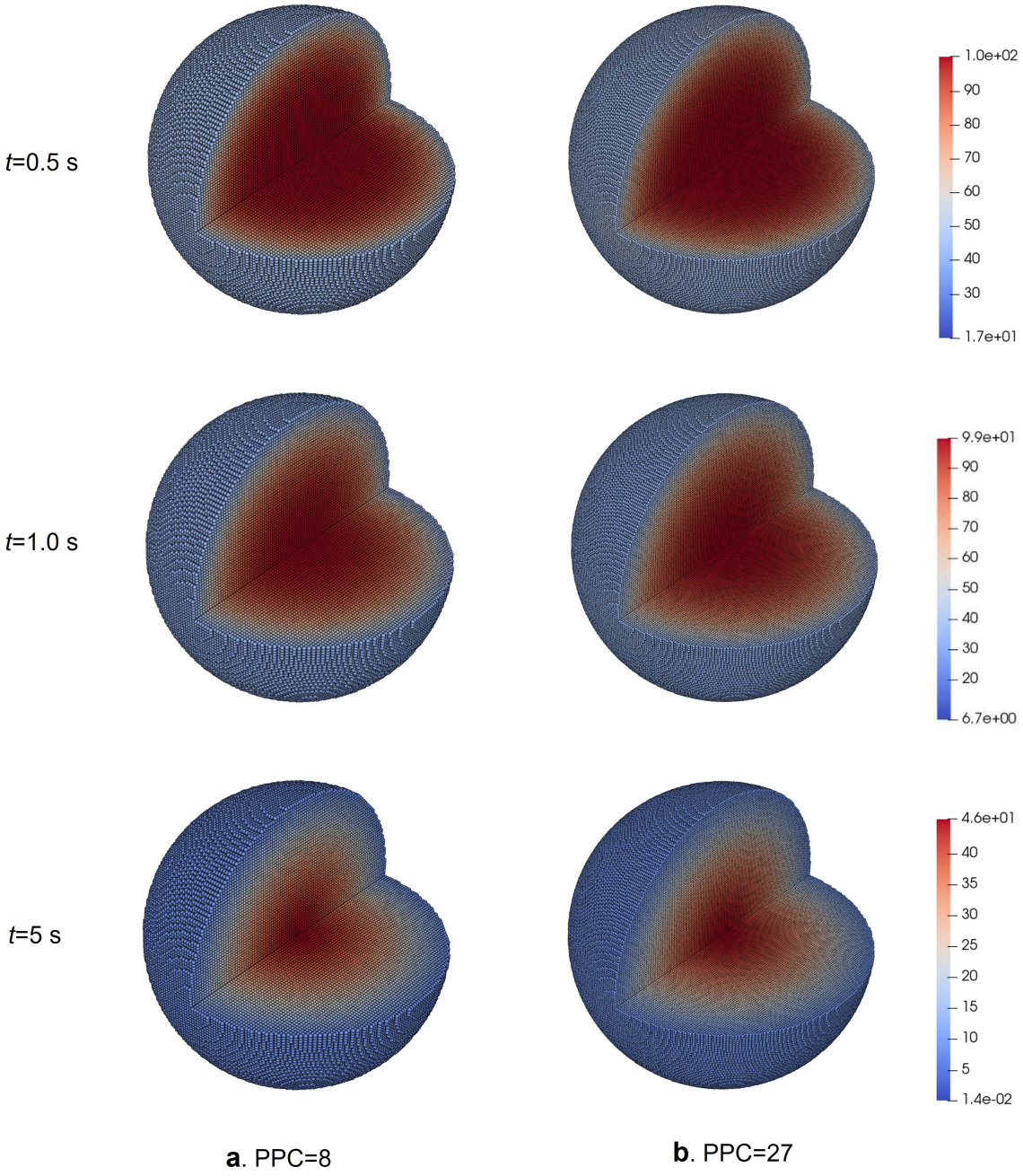


图13：球体冷却：情形（a）PPC=8 和（b）PPC=27在不同时间点的温度分布。

复杂形状的问题，基于粒子的方法具有更高的灵活性。该示例表明，所提出的体积分数法（VHFM）能够对三维瞬态传热问题进行准确且稳健的模拟。

4.4. 移动边界：方块加热

在前一个示例中，尽管边界为圆形，但其几何构型保持不变。为验证所提出的 VHFM 即使在边界构型动态变化时也能准确施加热学

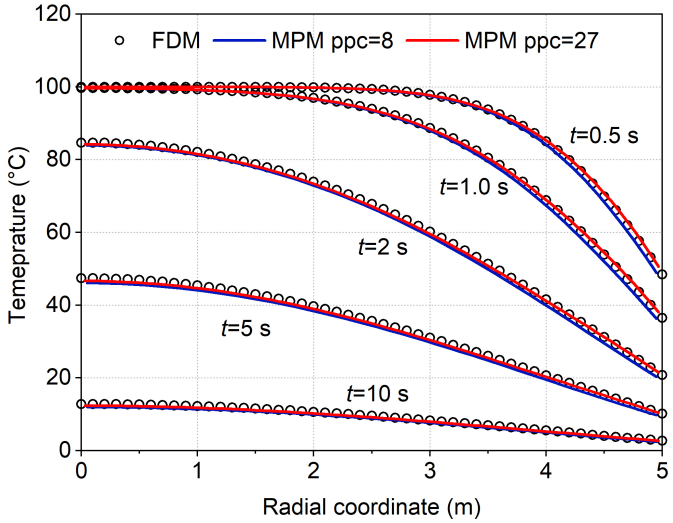


图14：球体冷却：物质点法和有限差分法求得的 $t = 0.5$、1.0、2.0、5.0 和 10.0 s 时沿径向的温度对比

边界条件，第三个示例考虑一个二维方形区域。正方形的初始边界与网格对齐，之后将其旋转一定角度。正方形的四条边同时施加对流热流边界条件，此处仅展示对流热通量情形。模型几何、初始条件和边界条件如图 15a 所示。正方形的边长为 5m；初始温度为 $0\,℃$；环境温度为 $1\,℃$；对流换热系数为 $1\mathrm{W}/(\mathrm{m}^2\cdot℃)$。背景网格尺寸为 0.2 m，每个网格单元内布置四个物质点。与前一个案例类似，材料属性均设为单位值。模拟时间步长设为 1×10^{-2}s。

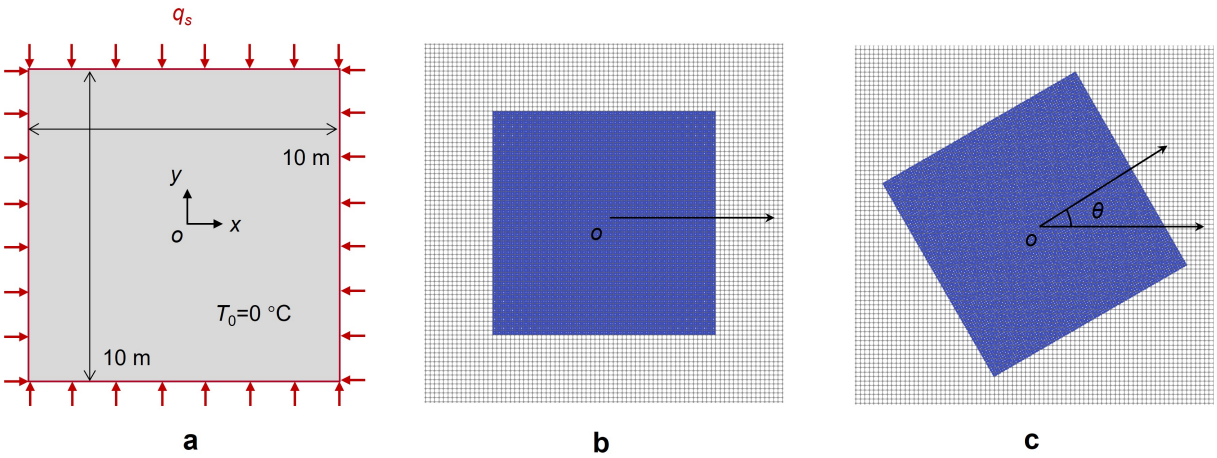


图15：旋转方块加热：(a) 几何形状、初始条件和边界条件，(b) 协调边界条件，以及 (c) 非协调边界条件。

在 th 在物质点法模拟中，我们考虑以下两种情形：(1) 固定旋转角 n

角度 15°、 30°和 45°；以及 (2) 固定转速（记为 ω），分别为 1/16、 1/4、1 和 4 每秒转数（单位：r/s）。采用边界与网格对齐的协调情形作为参考（图 15b）。根据第 4.1节第一个示例的研究结果，使用 VHFM 施加边界条件所得结果与直接在节点处施加边界条件所得结果相当，且二者均比在物质点处施加边界条件更加准确。因此，在参考情形中直接使用 VHFM 进行边界条件施加。由于该二维问题不存在解析解，因此采用有限差分法结果作为对比参考。该问题的有限差分法算法详见附录D。

图 16a-d 展示了不同旋转角度下各案例的模拟结果 θ。对于每个案例，我们首先展示使用 MPM 在$t = 5$ s 时计算得到的温度等值线图。图中叠加了由 MPM 和有限差分法分别计算的温度等值线（0.3、0.5、0.7和0.9 ℃），以便直接比较。此外，还比较了 MPM 和有限差分法在 $t = 1$、5、10、和 50 s 时得到的正方形水平中心轴上的温度剖面随时间的演化。此外，还分析了两种方法之间的相对误差，其定义为 ($T_{\mathrm{MPM}} - T_{\mathrm{FDM}})/T_{\mathrm{FDM}}$，并通过计算所有物质点处相对误差的 L2范数来量化整体精度，

$$\|e\|_{L^2} = \sqrt{\frac{1}{N_p}\sum_{p=1}^{N_p}(T_{\mathrm{MPM}} - T_{\mathrm{FDM}})_p^2}, \tag{44}$$

其中 N_p 表示物质点总数。

如图 16a 所示，结果表明，对于 $\theta = 0°$ （即相容边界配置）这一情况，MPM 与有限差分法吻合极佳，误差范数 $\|e\|_{L^2}$非常小。随着旋转角度增大，MPM 与有限差分法的结果总体上仍然吻合良好。然而，随着 θ增大， $\|e\|_{L^2}$略有但持续增大。值得注意的是，当 $\theta = 45°$时，温度等值线出现了一些空间振荡，相对误差的空间分布则呈现出明显的棋盘格模式。这种模式归因于材料点旋转 45° 后，相对于背景网格的分布不理想。如图 17a 所示，旋转后的材料点相对于计算网格分布不规则。其中大多数点偏离了最优积分点，即高斯点。显然，部分整行或整列的材料点与网格线重合，而这些位置的积分精度最低。这种不理想的离散化是图 17d 误差等值线图中出现棋盘格模式的主要原因。

因此，较大旋转角度下误差增加的主要原因可能是物质点偏离了最佳积分点，而不是 VHFM 边界条件施加本身固有的不准确性。为验证这一点，

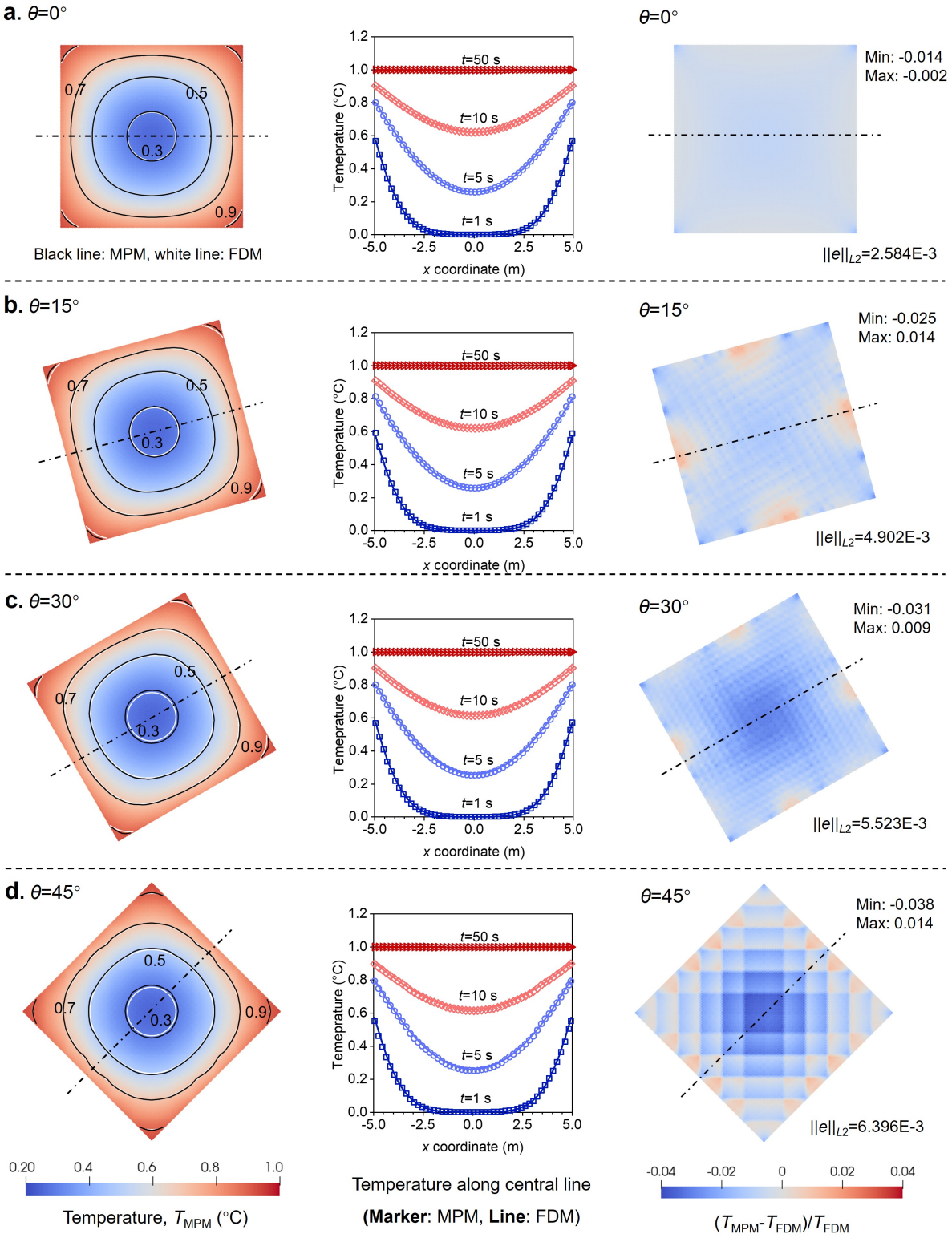


图16：旋转方块加热：不同旋转角度下的模拟结果：（a） $\theta = 0°$、（b） $\theta = 15°$、（c） $\theta = 30°$和（d） $\theta = 45°$。第一列显示了采用 VHFM 的 MPM 在 $t = 5$s 时模拟得到的温度等值线，其中黑色和白色等温线分别表示 MPM 和有限差分法的结果。第二列比较了 MPM 和有限差分法在 $t = 1$ s、5 s、10 s 和 50 s 时沿中心线模拟得到的温度分布。第三列展示了 $t = 5$s 时 MPM 结果相对于有限差分法结果的相对误差。

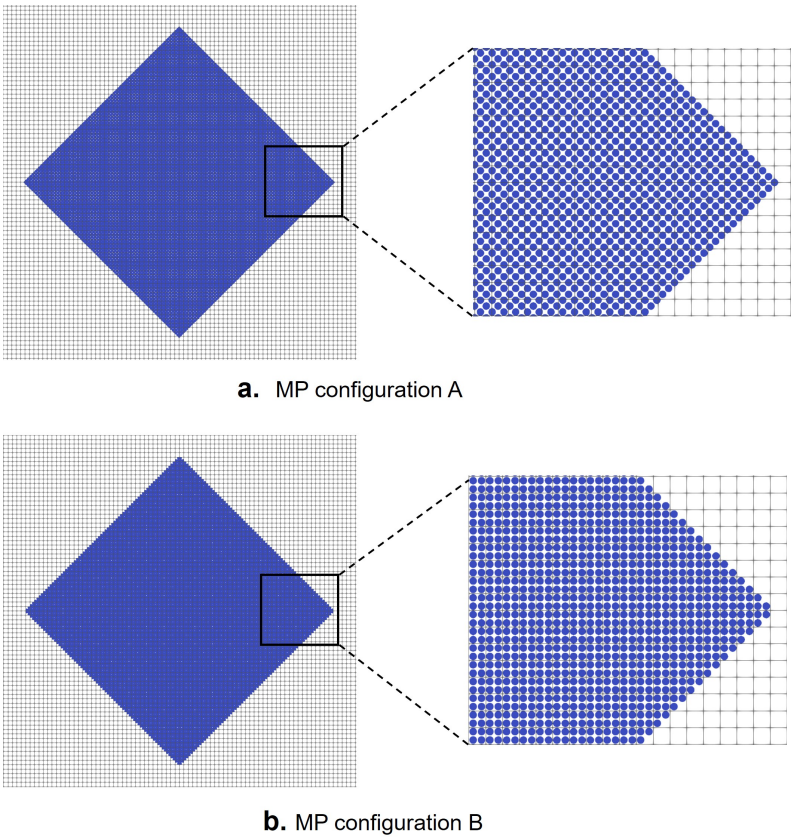


图 17：旋转方块加热：(a) MP 配置 A——次优 MP 分布；(b) MP 配置 B——最优 MP 分布。

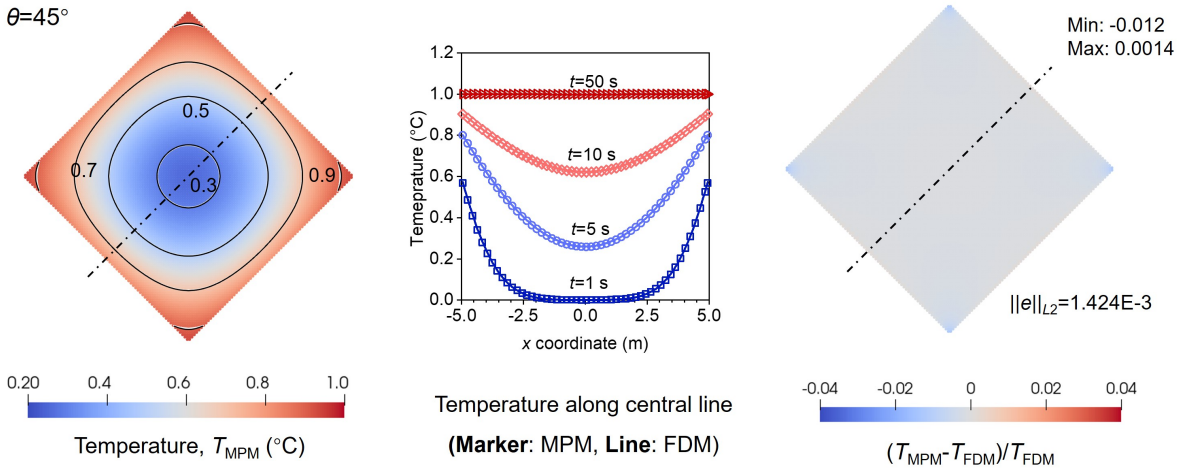


图 18：旋转方块加热：使用 MP 配置 B 得到的模拟结果 $\theta = 45°$ 。

我们模拟了 $\theta = 45°$ 情形，采用了另一种经过优化的物质点配置（称为 MP 配置 B），如图17b 所示。该配置的生成方法是：先在整个背景网格上创建规则的物质点分布（PPC=4），然后移除位于 $|x| + |y| > 5\sqrt{2}$所定义区域内的点。因此，MP 配置 B 对应的物理域与配置 A 相同（图

17a），但材料点分布更为理想。图18所示的配置 B 模拟结果表明，其误差分布和误差幅值与协调情形（$\theta = 0°$）相近，见图16a。这证实，经过优化的内部离散能够使非协调边界达到与协调边界相当的精度。值得注意的是，即使是原始的 MP 配置 A，其误差也与协调边界情形处于同一数量级。

上述分析针对的是场景A，其中边界固定且不协调。现在，我们给出场景B的结果，在该场景中，热传递与正方形的刚体旋转同时发生。图 19比较了四种不同旋转速度下的温度等值线和相对误差分布（在 $t = 5$ s 时）。结果表明，所有情况下的误差都非常小，$\|e\|_{L^2}$ 范数与静态协调边界情形下的相当。这表明，即使在边界条件动态变化的情况下，所提出的方法在模拟对流传热时仍具有很高的精度。

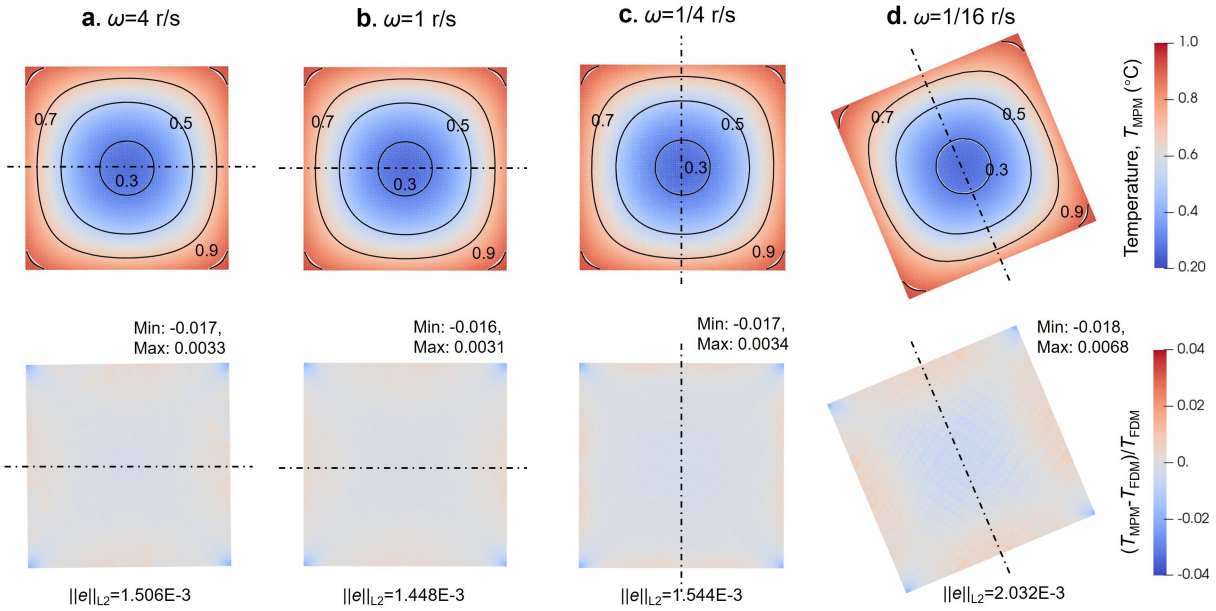
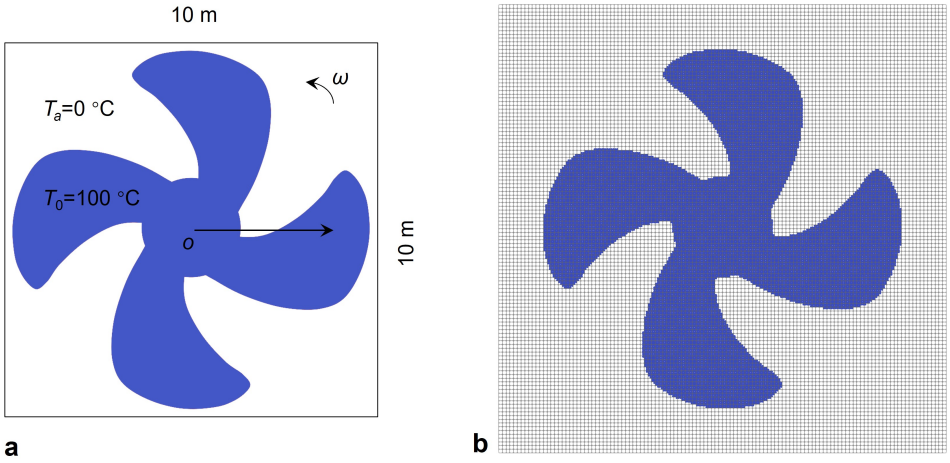


图19：旋转方块加热：不同分辨率变化率下的温度和相对误差等值线：(a) $\omega = 4$ r/s，(b) $\omega = 1$ r/s，(c) $\omega = 1/4$ r/s，以及 (d) $\omega = 1/16$ r/s。

4.5. 移动边界：旋转风扇冷却

在最后一个示例中，我们模拟旋转风扇的冷却问题。风扇的几何形状如图 20a 所示，其与背景网格的拓扑关系见图 20b。风扇的初始温度设为 $T_0 = 100°\text{C}$，环境温度为 $T_a = 0°\text{C}$。对流换热系数设为 $\gamma = 1\ \text{W}/(\text{m}^2 \cdot °\text{C})$。风扇以恒定角速度 $\omega = 1\text{r}/\text{s}$绕其中心旋转。材料点坐标直接根据绝对

输入图像的像素坐标生成。首先采用单元尺寸为 $h = 0.1$ m 的背景网格，PPC=4。时间步长选为 $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ s。



Fi图 20：旋转风扇冷却：（a）风扇的几何形状；（b）材料离散。

图 21 展示了不同时刻的温度等值线以及检测到的表面节点。结果显示，温度分布平滑，且在整个旋转过程中，表面节点检测始终合理、稳定。由于没有可用于验证的解析解，为考察解的一致性和收敛性，进一步采用较粗的网格（$h = 0.2$ 米）和较细的网格（$h = 0.05$ 米）进行了模拟。相应的时间步长分别设为 $\Delta t = 2 \times 10^{-2}$ 秒 和 $\Delta t = 1.25 \times 10^{-3}$ 秒。图 22（a–c）比较了三种网格分辨率下 $t = 0.5$ 秒 时的温度分布。无论整体温度模式还是温度大小，结果均吻合良好。此外，还考察了风扇中心的温度演化，如图 22d 所示。温度从100°℃ 降至 0°℃；随着网格细化，温度历程收敛至几乎重合的一条曲线。

本例表明，所提出的 VHFM 能够准确、稳健地处理复杂几何形状和不断变化的边界构型。

5. 结论

本研究提出了一种新颖的虚拟热通量法（VHFM），可在物质点法中简单、准确且稳健地施加诺伊曼型热边界条件。该方法通过一种概念上简单的虚拟通量场，将边界通量积分改写为体积项，从根本上解决了非协调边界带来的挑战。

所提出的 VHFM 具有若干关键优势：（1）无需显式进行边界追踪、表面重构或使用专门的边界粒子，同时保留了标准物质点法算法固有的高效性。（2）VHFM

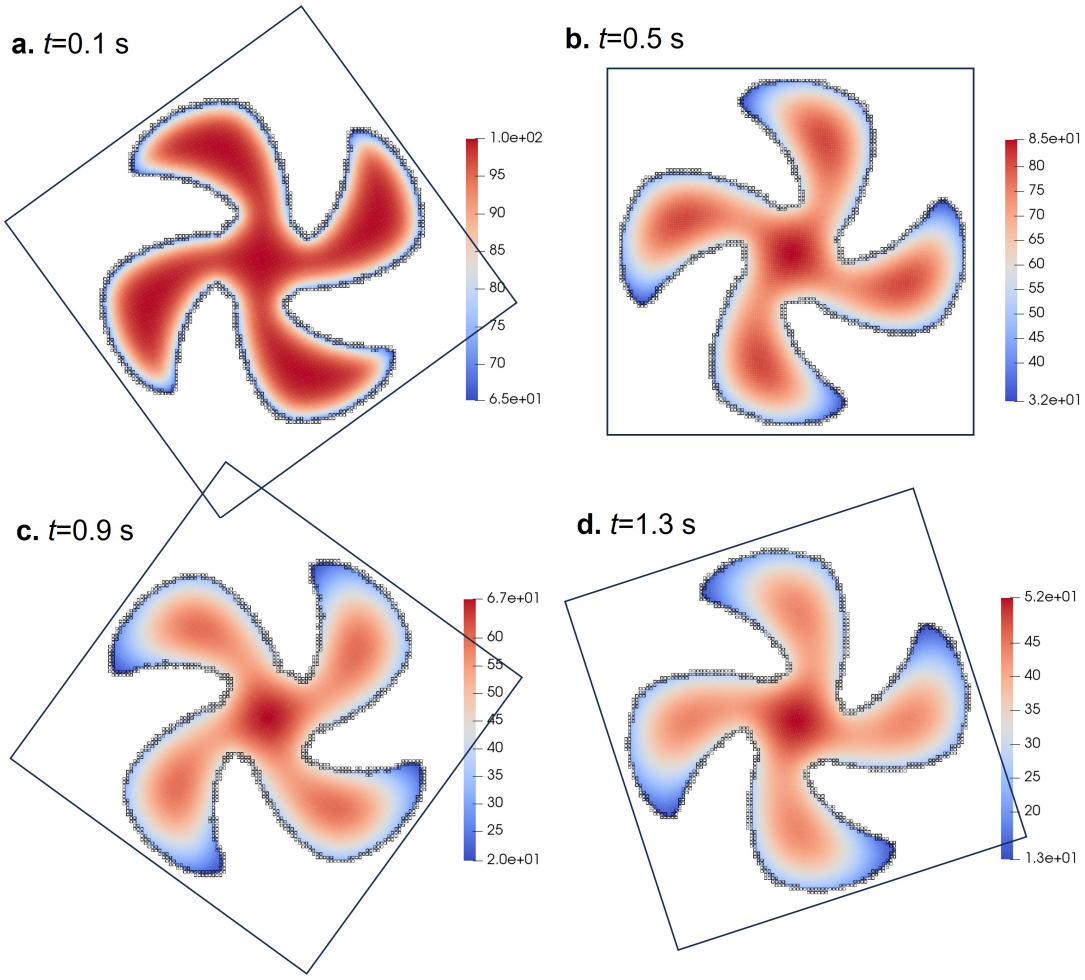


图 21：旋转风扇冷却：不同时刻的模拟结果。

在匹配情形下，其精度可与直接节点施加相当；而对于传统基于粒子的方法难以处理的非匹配、曲线和移动边界，VHFM 能给出更优且一致的结果。（3）通过适当构造虚拟场，该公式提供了一个统一框架，可轻松扩展至其他诺伊曼条件（例如牵引力、流体通量）。（4）从一维到三维、从简单几何到复杂旋转风扇的数值实验表明，该方法在大变形、旋转和复杂边界演化条件下具有良好的稳定性和二阶空间收敛性。

旋转方块示例表明，VHFM 的性能主要取决于内部物质点离散的质量，而非边界非匹配性本身。这凸显了该方法在实际模拟中的实用性，因为边界很少与网格对齐。VHFM 框架为未来研究开辟了颇具前景的方向。近期的扩展方向包括将其集成到完全耦合的热-水-力-化学（THMC）物质点法公式中，在这类公式中，一致通量边界条件至关重要。下一步值得探索的方向包括将 VHFM 应用于涉及相变（例如熔化/凝固）以及伴随热生成的摩擦接触问题。

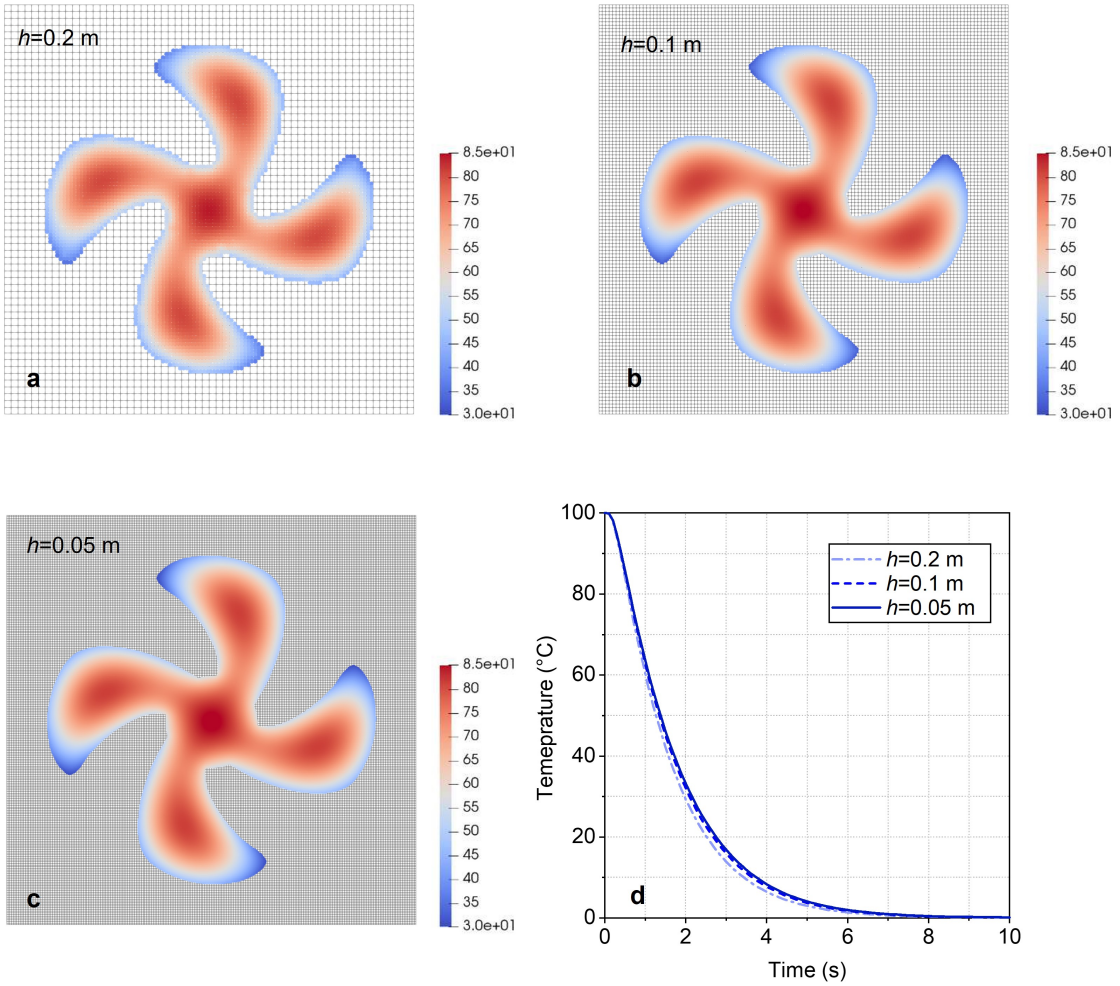


图 22：旋转风扇冷却：网格敏感性分析。(a–c) 网格尺寸分别为 $h = 0.1\,\mathrm{m}$、$h = 0.05\,\mathrm{m}$ 和 $h = 0.025\,\mathrm{m}$ 时 $t = 0.5\mathrm{s}$ 的温度分布；(d) 不同网格尺寸下风扇中心的温度演化。

此外，将 VHFM 与自适应网格细化和高阶空间离散相结合，可提升大规模高保真多物理场模拟的精度和计算效率。

尽管 VHFM 在已测试的场景中表现稳健，但其当前公式仍存在一些局限，值得进一步研究。首先，需要仔细考察该方法在材料属性高度非均质的介质中的表现（例如热导率存在明显突变的情况）。该方法依赖平滑定义的边界法向量，通常由全局标量场计算得出；强烈的内部属性差异可能会扰乱物理域的表示，从而使这一过程变得复杂。其次，当前框架假定边界演化在拓扑上是连续的。对于涉及快速拓扑变化的问题，例如断裂、碎裂或材料体合并，该方法的有效性尚未得到验证。如何构建一个稳定的虚拟域来包围动态变化的拓扑特征，仍是一项有待解决的挑战。

第三，尽管从概念上看，将该方法扩展到耦合问题并不困难，但其在全隐式、强耦合多物理场系统（例如热-水-力系统，其中边界通量取决于不断演化的压力场或变形场）中的实现仍需经过严格测试。在此类耦合状态下，虚拟通量与非线性求解过程之间的相互作用还需要进一步分析，以确保稳定性和一致性。

利益冲突声明

作者声明，他们不存在已知的经济利益冲突或个人关系，可能会对本文所报告的工作产生影响。

数据可用性

如有需要，可提供数据。

致谢

本研究获得国家自然科学基金（# 52439001）、香港研究资助局（GRF 16208224、16217225、CRF C7085-24G、RIF R6008-24、TRS T22-607/24N 和 T22-606/23-R）以及沿海城市气候韧性全国重点实验室（SKLCRCC）（通过项目 ITC- SKLCRCC26EG01）的经费支持。Jidu YU 感谢加利福尼亚大学伯克利分校的 Kenichi Soga 教授、Bodhinanda Chandra 博士和 Joel Given 博士对本研究提出的宝贵讨论意见和建议。

附录A. 一维半无限长杆的解析解

一维瞬态热传导的控制方程为：

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \text{for } x > 0,\, t > 0\,, \tag{A.1}$$

其中，$\alpha = \kappa/(\rho c)$为热扩散率。初始条件为：

$$T(x,0) = T_0, \quad \text{for } x \geq 0\,. \tag{A.2}$$

A.1 恒定热流边界

$x = 0$ 处的边界条件为：

$$-\kappa \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = q_s, \quad \text{for } t > 0\,. \tag{A.3}$$

该问题可以使用拉普拉斯变换法求解。定义变换后的温度为 $\Theta(x,\ s) = \mathcal{L}\{T(x,\ t) - T_0\}$，控制方程变为：

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} - \frac{s}{\alpha}\Theta = 0\,. \tag{A.4}$$

满足半无限条件（$\Theta \to 0$ 当 $x \to \infty$）的解为：

$$\Theta(x,s) = A(s)\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right). \tag{A.5}$$

应用变换后的边界条件，代入式（A.3），$-\kappa \frac{d\Theta}{dx}\big|_{x=0} = \frac{q_s}{s}$，得到

$$A(s) = \frac{q_s}{\kappa s^{3/2}\sqrt{\alpha}}. \tag{A.6}$$

因此，

$$\Theta(x,s) = \frac{q_s}{\kappa\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{\exp\left(-x\sqrt{s/\alpha}\right)}{s^{3/2}}. \tag{A.7}$$

对该表达式进行拉普拉斯逆变换，可得解：

$$T(x,t) = T_0 + \frac{2q_s}{\kappa}\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - \frac{q_s x}{\kappa}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right). \tag{A.8}$$

A.2 对流热流边界

在 $x = 0$ 处的边界条件为：

$$-\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = \gamma(T_a - T(0,t)), \quad \text{for } t > 0\,. \tag{A.9}$$

再次使用拉普拉斯变换，并令 $\Theta(x,s) = \mathcal{L}\{T(x,t) - T_0\}$，变换域中的解为，

$$\Theta(x,s) = A(s)\exp\left(-x\sqrt{\frac{s}{\alpha}}\right). \tag{A.10}$$

应用式（A.9）中的变换后的边界条件，$-\kappa \frac{d\Theta}{dx}\big|_{x=0} = \gamma\left(\frac{T_a - T_0}{s} - \Theta(0,s)\right)$，并求解 $A(s)$ 可得，

$$A(s) = \frac{\gamma(T_a - T_0)/s}{\kappa\sqrt{s/\alpha} + \gamma}. \tag{A.11}$$

因此，拉普拉斯域中的解为，

$$\Theta(x,s) = \frac{\gamma(T_a - T_0)}{\kappa\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{\exp\left(-x\sqrt{s/\alpha}\right)}{\sqrt{s}\left(\sqrt{s} + \gamma/(\kappa\sqrt{\alpha})\right)}. \tag{A.12}$$

对该表达式进行拉普拉斯逆变换，通常可通过查阅拉普拉斯变换表或应用卷积定理来求得解，

$$T(x,t) = T_0 + (T_a - T_0)\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) - \exp\left(\frac{\gamma x}{\kappa} + \frac{\gamma^2\alpha t}{\kappa^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{\gamma\sqrt{\alpha t}}{\kappa}\right)\right]. \tag{A.13}$$

附录 B. 二维圆环的有限差分法算法

对于半径为 R 的二维圆盘，热方程在极坐标 $(r,\ \theta)$ 下表示为，其中 r 是径向距离，θ 是角坐标。假设角度方向上具有对称性（即 T 仅取决于 r 和 t），热方程可简化为，

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right),\quad \text{for } R_1\le r\le R_2\,,\ t>0\,. \tag{B.1}$$

初始条件为:

$$T(r,0)=T_0,\quad \text{for } R_1\le r\le R_2\,. \tag{B.2}$$

内边界（$r=R_1$）和外边界（$r=R_2$）处的对流热通量边界条件为:

$$-\kappa\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R_1}=\gamma\left[T(R_1,t)-T_a\right]\,, \tag{B.3}$$

$$-\kappa\frac{\partial T}{\partial r}\bigg|_{r=R_2}=\gamma\left[T(R_2,t)-T_a\right]\,. \tag{B.4}$$

方程的空间离散和时间离散分别采用二阶中心差分和前向欧拉时间积分格式:

$$T_i^{k+1}=T_i^k+\alpha\Delta t\left(\frac{T_{i+1}^k-2T_i^k+T_{i-1}^k}{\Delta r^2}+\frac{1}{r_i}\frac{T_{i+1}^k-T_{i-1}^k}{2\Delta r}\right)\,, \tag{B.5}$$

其中，T_i^k表示径向位置 r_i处（$i=0$，1，.....，N）和时间步 k的温度，Δr为径向步长，Δt为时间步长。该格式在空间上为二阶精度，在时间上为一阶精度。

在内边界和外边界处，采用二阶三点单边差分格式:

$$\text{At } r=R_1:\ \frac{3T_2^k-4T_1^k+T_0^k}{2\Delta r}=\gamma(T_0^k-T_a)\,, \tag{B.6}$$

$$\text{At } r=R_2:\ \frac{3T_N^k-4T_{N-1}^k+T_{N-2}^k}{2\Delta r}=\gamma(T_N^k-T_a)\,, \tag{B.7}$$

根据方程 (B.6) 和 (B.7)，可得到给定的边界温度 T_0^k和 T_N^k。

对于恒定热流边界，只需将方程 (B.6) 和 (B.7) 右侧的边界项替换为固定值 q_s

附录 C. 三维球体的有限差分法算法

对于半径为 R 、发生对流冷却的球体，球坐标系下的一维径向热方程为，

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right),\quad 0\le r<R,\ t>0\,. \tag{C.1}$$

边界条件为

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0}=0,\quad -\kappa\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R}=\gamma\left[T(R,t)-T_a\right], \tag{C.2}$$

且初始条件为,

$$T(r,0)=T_0\,. \tag{C.3}$$

类似地，对该方程进行空间和时间离散时，分别采用二阶中心差分和前向欧拉时间积分格式,

$$T_i^{k+1}=T_i^k+\alpha\Delta t\left[\frac{T_{i+1}^k-2T_i^k+T_{i-1}^k}{\Delta r^2}+\frac{2}{r_i}\frac{T_{i+1}^k-T_{i-1}^k}{2\Delta r}\right]. \tag{C.4}$$

在内边界处，利用对称性 $T_0^k=T_2^k$,

$$T_1^{k+1}=T_1^k+3\alpha\Delta t\frac{T_2^k-T_1^k}{\Delta r^2}. \tag{C.5}$$

在外边界处，采用二阶三点单边差分格式,

$$-\kappa\frac{3T_N^k-4T_{N-1}^k+T_{N-2}^k}{2\Delta r}=\gamma\left(T_N^k-T_a\right). \tag{C.6}$$

根据方程（C.4）至（C.6），可以得到给定的边界温度 T_N^k。

附录D. 二维正方形的有限差分法算法

对于正方形区域 $[0,L]\times[0,L]$ 内的二维热传导，所有边界均采用对流热流边界,其控制方程为:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \tag{D.1}$$

边界条件为:

$$\begin{aligned}
-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0}&=\gamma\left[T(0,y,t)-T_a\right], \quad -k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L}=\gamma\left[T(L,y,t)-T_a\right],\\
-k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}&=\gamma\left[T(x,0,t)-T_a\right], \quad -k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{x=L}=\gamma\left[T(x,L,t)-T_a\right].
\end{aligned} \tag{D.2}$$

初始条件为:

$$T(x,y,0)=T_0. \tag{D.3}$$

二维热方程的二阶有限差分近似为:

$$T_{i,j}^{k+1}=T_{i,j}^k+\alpha\Delta t\left(\frac{T_{i+1,j}^k-2T_{i,j}^k+T_{i-1,j}^k}{\Delta x^2}+\frac{T_{i,j+1}^k-2T_{i,j}^k+T_{i,j-1}^k}{\Delta y^2}\right) \tag{D.4}$$

对于热通量边界条件，我们采用一阶有限差分近似：

$$\begin{aligned}
\text{At } x=0: &\quad \kappa\frac{3T^k_{2,j}-4T^k_{1,j}+T^k_{0,j}}{\Delta x}=\gamma(T^k_{0,j}-T_a),\\
\text{At } x=L: &\quad \kappa\frac{3T^k_{N,j}-4T^k_{N-1,j}+T^k_{N-2,j}}{\Delta x}=\gamma(T^k_{N,j}-T_a)\\
\text{At } y=0: &\quad \kappa\frac{3T^k_{i,2}-4T^k_{i,1}+T^k_{i,0}}{\Delta y}=\gamma(T^k_{0,i}-T_a),\\
\text{At } y=L: &\quad \kappa\frac{3T^k_{i,N}-4T^k_{i,N-1}+T^k_{i,N-2}}{\Delta y}=\gamma(T^k_{N,i}-T_a).
\end{aligned} \tag{D.5}$$

参考文献

Al-Kafaji, I.K., 2013。针对岩土力学问题的动态物质点法（MPM）公式。博士学位论文。斯图加特大学图书馆。

Alonso, E.E., 2021。滑坡的触发与运动。Géotechnique 71，3–59。doi:10.1680/jgeot.20.RL.001。

Bardenhagen, S.G., Kober, E.M. 等，2004。广义插值物质点法。Computer Modeling in Engineering and Sciences 5，477–496。

Bayer, P., de Paly, M., Beck, M., 2014。季节性地热供暖与制冷用钻孔换热器场的战略优化。Applied Energy 136，445–453。

Chandra, B., Hashimoto, R., Matsumi, S., Kamrin, K., Soga, K., 2024。用于不可压缩流体流动分析的稳定化混合物质点法。Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 419，116644。

Chen, Z.P., Zhang, X., Sze, K.Y., Kan, L., Qiu, X.M., 2018. 弱可压缩问题的V-p物质点法. Computers & Fluids 176, 170–181. doi:10.1016/j.compfluid.2018.09.005.

Cheng, Z., Zhao, S., Chen, H., Zhao, J., 2026. 采用双重高阶B样条体积平均的流动与流固耦合模拟稳定显式物质点法. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 448, 118428.

Coombs, W.M., 2023. 用于大变形问题稳定准静态和动态分析的物质点法虚拟稳定化. 《国际工程数值方法杂志》124, 4841–4875. doi:10.1002/nme.7332.

Curless, B., Levoy, M., 1996年。利用距离图像构建复杂模型的体积方法，载于：第23届计算机图形学与交互技术年会论文集，第303–312页。

Gaume, J., Gast, T., Teran, J., van Herwijnen, A., Jiang, C., 2018。雪中的动态反裂纹扩展。《自然·通讯》9，3047。

Gaume, J., van Herwijnen, A., Chambon, G., Wever, N., Schweizer, J., 2017. 雪体断裂与板状雪崩释放的关系：裂纹扩展起始的临界状态。《冰冻圈》11, 217–228。

Gaume, J., van Herwijnen, A., Gast, T., Teran, J., Jiang, C., 2019. 基于物质点法的统一模型研究坡尺度雪崩的释放与流动。《寒区科学与技术》168, 102847。

Given, J., Liang, Y., Zeng, Z., Zhang, X., Soga, K., 2024. 在物质点法中施加非协调诺伊曼边界条件的虚拟应力边界法。《计算颗粒力学》, 1–25。

Guilkey, J.E., Hoying, J.B., Weiss, J.A., 2006. 使用物质点法对多细胞构造体进行计算建模。《生物力学杂志》39, 2074–2086。

Hjort, J., Streletskiy, D., Doré, G., Wu, Q., Bjella, K., Luoto, M., 2022. 多年冻土退化对基础设施的影响。《自然综述：地球与环境》3, 24–38. doi:10.1038/s43017-021-00247-8. Kularathna, S., Liang, W., Zhao, T., Chandra, B., Zhao, J., Soga, K., 2021. 基于分步法的饱和土半隐式物质点法。《国际岩土力学数值与分析方法杂志》45, 1405–1436. doi:10.1002/nag.3207. Lei, X., He, S., Abed, A., Chen, X., Yang, Z., Wu, Y., 2021. 一种用于模拟热-水-力耦合问题的广义插值物质点法。Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 386, 114080. doi:10.1016/j.cma.2021.114080. Lei, X., He, S., Chen, X., Yang, Z., Dong, Y., Wang, L., 2024. 物质点法模拟摩擦生热诱发的滑坡超高流动性。Landslides 21, 2273–2287. Lei, X., He, S., Qin, C., Zhao, J., Zhou, G.G., Ming, L., 2025年. 用于模拟岩冰崩的热-水-力耦合物质点法框架。《计算机与岩土工程》188, 107603. Li, M., Lei, Y., Gao, D., Hu, Y., Zhang, X., 2021a. 一种新型物质点法（MPM）针-组织相互作用模型。《生物力学与生物医学工程中的计算方法》24, 1393–1407. Li, X., Sovilla, B., Jiang, C., Gaume, J., 2021b. 密实雪崩流动状态的三维真实尺度建模。Landslides 18, 3393–3406。

Liang, W., Fang, H., Yin, Z.Y., Zhao, J., 2024. 物质点法中的砂浆分段间摩擦接触方法。Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 431, 117294. Liang, W., Zhao, J., 2019. 岩土力学大变形的多尺度建模。《国际岩土力学数值与分析方法杂志》43, 1080–1114. doi:10.1002/nag.2921. Liang, W., Zhao, J., Wu, H., Soga, K., 2021a. 砂土中锚杆拔出的多尺度建模。《岩土工程与地质环境工程杂志》147, 04021091. doi:10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0002599. Liang, W., Zhao, S., Wu, H., Zhao, J., 2021b. 各向异性土上基础的承载力与破坏：多尺度视角。《计算机与岩土工程》137, 104279. doi:10.1016/j.compgeo.2021.104279. Liang, Y., Chandra, B., Soga, K., 2022. 采用具有局部化检测和摩擦自接触功能的扩展物质点法（xmpm）进行剪切带演化与破坏后模拟。Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 390, 114530. Liang, Y., Given, J., Soga, K., 2023. 在不进行边界表示的情况下，在物质点法中施加非协调诺伊曼边界条件。Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 404, 115785. doi:10.1016/j.cma.2022.115785. Liang, Y., Zhang, X., Liu, Y., 2021c. 用于三维裂纹问题的扩展物质点法。《国际工程数值方法杂志》122, 3044–3069. Luo, J., Niu, F., Lin, Z., Liu, M., Yin, G., 2019. 青藏高原多年冻土区融冻滑塌近期加速：以北麓河地区为例。《地貌学》341, 79–85. doi:10.1016/j.geomorph.2019.05.020. Nairn, J.A., Guilkey, J.E., 2015. 广义插值物质点法的轴对称形式。《国际工程数值方法杂志》101, 127–147. doi:10.1002/nme.4792. Pinyol, N.M., Alvarado, M., Alonso, E.E., Zabala, F., 2018. 滑坡运动性的热效应。Géotechnique 68, 528–545. doi:10.1680/jgeot.17.P.054. Rad, F.M., Fung, A.S., 2016. 配备钻孔蓄热的太阳能社区供热制冷系统——系统综述。《可再生与可持续能源评论》60, 1550–1561。

Soga, K., Alonso, E., Yerro, A., Kumar, K., Bandara, S., 2016. 滑坡体运动大变形分析的趋势，特别侧重于物质点法。Géotechnique 66, 248–273. doi:10.1680/jgeot.15.LM.005.

Stomakhin, A., Schroeder, C., Chai, L., Teran, J., Selle, A., 2013. 一种用于雪模拟的物质点法。ACM 图形学汇刊 32, 1. doi:10.1145/2461912.2461948. Stomakhin, A., Schroeder, C., Jiang, C., Chai, L., Teran, J., Selle, A., 2014. 用于相变和多种材料的增强物质点法。ACM 图形学汇刊 33, 138:1– 138:11. doi:10.1145/2601097.2601176. Su, H., Xue, T., Han, C., Jiang, C., Aanjaneya, M., 2021. 一种统一的二阶时间精度物质点法公式，用于模拟发生相变的黏弹性液体。ACM 图形学汇刊 40, 119:1–119:18. doi:10.1145/3450626.3459820. Sulsky, D., Chen, Z., Schreyer, H.L., 1994. 一种用于历史相关材料的粒子法。Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 118, 179–196. doi:10.1016/0045-7825(94)90112-0. Sulsky, D., Zhou, S.J., Schreyer, H.L., 1995. 粒子网格法在固体力学中的应用。计算物理通讯 87, 236–252. doi:10.1016/0010-4655(94)00170-7. Tao, J., Zhang, H., Zheng, Y., Chen, Z., 2018a. 用于模拟全耦合热力学失效演化的广义插值物质点法开发。Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 332, 325–342. doi:10.1016/j.cma.2017.12.014. Tao, J., Zhang, H., Zheng, Y., Chen, Z., 2018b. 用于模拟全耦合热力学失效演化的广义插值物质点法开发。Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 332, 325–342. doi:10.1016/j.cma.2017.12.014. Tounsi, H., Rouabhi, A., Tijani, M., Guérin, F., 2019. 人工地层冻结的热-水-力建模：采矿工程中的应用。岩石力学与岩石工程 52, 3889–3907. doi:10.1007/s00603-019-01786-9. Wang, L., Coombs, W.M., Augarde, C.E., Brown, M., Knappett, J., Brennan, A., Richards, D., Blake, A., 2017. 使用物质点法模拟螺旋桩安装。Procedia Engineering 175, 124–132. Yamaguchi, Y., Moriguchi, S., Terada, K., 2021. 基于扩展 B 样条的隐式物质点法。《国际工程数值方法杂志》122, 1746–1769. doi:10.1002/nme.6598。

Yu, J., Liang, W., Zhao, J., 2025年. 采用改进分步公式的热-水-力物质点法，增强可压缩流体多孔介质的动态建模。Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 444, 118100。

Yu, J., Zhao, J., Liang, W., Zhao, S., 2024a. 冻融循环作用下冰胶结颗粒介质中热-水-力耦合行为的多尺度建模。《计算机与岩土工程》171, 106349. doi:10.1016/j.compgeo.2024.106349.

Yu, J., Zhao, J., Liang, W., Zhao, S., 2024b. 用于大变形饱和多孔介质热-水-力耦合模拟的半隐式物质点法。《Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering》418, 116462. doi:10.1016/j.cma.2023.116462.

Yu, J., Zhao, J., Soga, K., Zhao, S., Liang, W., 2026. 用于含甲烷水合物沉积物中相变与大变形建模的全耦合 THMC-MPM 框架。《固体力学与物理学杂志》，106368。

Yu, J., Zhao, J., Zhao, S., Liang, W., 2024c. 用于模拟多孔介质冻结与融化的热-水-力耦合物质点法。《国际岩土力学数值与分析方法杂志》48, 3308–3349. doi:10.1002/nag.3794.

Zhao, S., Chen, H., Zhao, J., 2022. 颗粒介质冻结-融化行为的多尺度建模。《力学学报》39, 722195. doi:10.1007/s10409-022-22195-x.

Zhao, S., Zhao, J., Lai, Y., 2020年. 颗粒材料热-力响应的多尺度建模：一种分层连续体-离散耦合方法。Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 367, 113100. doi:10.1016/j.cma.2020.113100.

Zheng, X., Pisanò, F., Vardon, P.J., Hicks, M.A., 2022. 两相弹塑性地质材料大变形问题的全隐式、稳定化物质点法模拟。Com- puters and Geotechnics 147, 104771. doi:10.1016/j.compgeo.2022.104771.