此处将在排版后的文章中显示与文章类型相对应的横幅

arXiv:2601.04590v1 [physics.flu-dyn] 8 Jan 2026

同心环形管道湍流中的低波数壁面压力波动

赵耀民[1,2], 王太阳[1,2] 和吕本帅[1]†

[1]北京大学湍流与复杂系统国家重点实验室，工学院，中国北京 100871。

[2]北京大学工学院高温气体动力学国家重点实验室、应用物理与技术研究中心，中国北京 100871。

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

对高度为 2δ 的同心环形管道内湍流槽道流进行可压缩直接数值模拟，以研究圆柱壁面上的低波数壁面压力脉动（WPF），其中整体马赫数为 $M_b = 0.4$，整体雷诺数为 $Re_b = 3000$。内圆柱半径 R 在以下数值间变化：0.2δ、 δ、 2δ 和 ∞。随着 R 减小，WPF 的单点功率谱密度在中频段降低，但在高频段升高。当 R 减小时，WPF 的一维（流向）波数-频率谱在高波数处降低。然而，在低波数处，当 R 减小至 0.2δ 时，一维波数-频率谱会出现多个谱峰，其强度随频率升高而增强。对二维波数-频率谱的考察表明，这些谱峰代表声学管道模态，且与理论预测高度吻合。径向阶数越高的声学模态，在内壁上的振幅越大于外壁上的振幅。第 0 阶（周向）二维波数-频率谱的低波数分量在实际应用中十分重要，其幅值随 R 减小而增大；且频率越高，这种增幅越明显。解析建模和数值验证表明，这种增幅似乎源于与格林函数相关的“几何”效应，且主要由径向和周向扰动产生。研究表明，随着 R 减小，靠近壁面的扰动对壁面压力脉动生成越来越重要，这凸显了通过对细圆柱进行壁面处理来控制 WPF 的潜力。

† 通讯邮箱：b.lyu@pku.edu.cn

摘要不得延伸至第 2 页

2 关键词:

---

1. 引言

湍流会在固体壁面上产生非定常的壁面压力载荷。壁面压力脉动（WPF）对于火箭传感器整流罩中的声载荷、拖曳声呐阵列内部的流动噪声，以及管道的流致振动都起着至关重要的作用。在航空和海洋工程领域，清晰地表征并理解其统计特性、频谱及控制至关重要（Blake 1970）。

人们已对湍流边界层下方的壁面压力脉动开展了广泛研究，早期研究主要集中于平板上的不可压缩流。Willmarth（1956）似乎是首位测量壁面压力脉动基本统计特性（如均方根（rms）值和频率谱）的研究者。Harrison（1958）和 Willmarth（1958）随后开展了更多实验，研究了壁面压力脉动的空间—时间相关性，并表明其对流速度约为自由来流速度的 80%。另一方面，Bull（1967）报告称，对流速度取决于频率。在解析模型方面，Kraichnan（1956）是最早建立镜像流模型的研究者之一，并表明壁面压力脉动的均方根值约为平均壁面剪切应力的六倍；这一结果与 Willmarth（1956）及其他许多研究者测得的数值（Bull 1996）吻合良好。基于流向与横向相关性相似性，Corcos（1963）提出了壁面压力脉动互谱密度模型，该模型适用于接近ω/U_c的波数范围，其中 ω 和 U_c 分别表示壁面压力脉动的角频率和对流速度。关于这些早期研究的全面综述，可参见 Willmarth（1975）和 Bull（1996）。

然而，实际应用通常涉及具有曲率的壁面，例如拖曳式声呐阵列的软管。随后，研究人员对曲面上的不可压缩壁面压力脉动进行了研究。这包括 Willmarth& Yang（1970）和 Willmarth等人 （1976）开展的早期实验。他们得出结论：壁面曲率对频率谱和对流速度的影响微乎其微，但会显著减小展向相关长度。 Howe （1987）和 Dowling （1998）进行了解析建模，后者利用 Lighthill 声类比对不可压缩波数-频率谱进行了建模。研究人员还利用直接数值模拟（DNS）考察了壁面曲率对壁面压力脉动的影响，其中 Neves& Moin （1994*b*）表明，增大曲率会减小所有尺度下壁面压力脉动的空间谱和时间谱，减小周向相关长度，增大流向相关长度，并降低对流速度。需要注意的是，他们研究中考察的曲率

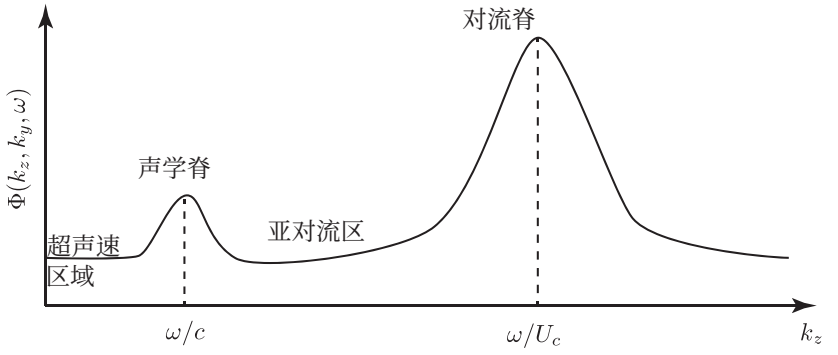


图 1： 给定频率下壁面压力脉动的典型波数-频率谱 ω 和展向波数 $k_y = 0$。k_z 表示流向波数。

显著大于Willmarth & Yang (1970) 和 Willmarth 等人(1976)。

给定频率下的典型波数-频率谱 ω 如图 1所示。一个称为对流脊的高波数峰值位于 $k_z = \omega/U_c$，这是由湍流对流引起的，其中 k_z 表示流向波数。相比之下，低波数声学脊出现在 $k_z = \omega/c_0$处，其中 c_0 为声速。不过需要注意的是，实际应用中特别关注的是壁面压力脉动的低波数分量，即图 1所示的亚对流区和超声速区。这是因为它们更可能与固体壁面的弹性运动发生耦合，或导致直接声辐射。在这类状态下，可压缩性至关重要，即使是在马赫数非常低的流动中也是如此；因此，在研究壁面压力脉动时，纳入可压缩性的影响十分必要。例如，利用 Lighthill 声类比，Ffowcs-Williams（1965）表明，考虑可压缩性会导致 Kraichnan-Phillips 定理失效，并使零波数处出现与平均流马赫数平方成正比的非零谱幅值。

从图1中可以看出，声学脊附近的波数-频率谱幅值通常远低于对流脊附近的幅值。这给通过实验或数值模拟解析低波数分量带来了重大挑战。因此，研究对流下方区域和超声速区的可压缩模拟仍然十分少见。Gloerfelt& Berland(2013)和 Cohen& Gloerfelt (2018)率先使用大涡模拟（LES）研究了马赫数为0.5的湍流边界层下方壁面压力脉动的声学分量。他们成功捕捉到了声学脊，但未能完全消除人工边界引起的误差。最近，Liu等人(2024)的研究表明，通过选择合适的低耗散、低色散格式，可以准确解析这些低能量分量

Case	Re_b	Re_τ （内侧，外侧）	ϵ	L_θ, L_r, L_z	N_θ, N_r, N_z	Δ_θ^+	Δ_r^+	Δ_z^+
1	3000	188	∞	$\frac{4}{3}\pi\delta, 2\delta, 16\pi\delta$	$256, 193, 1024$	3.08	$0.20 - 2.40$	9.23
2	3000	$193, 183$	2	$4\pi\delta, 2\delta, 16\pi\delta$	$800, 193, 1024$	$3.11 - 6.23$	$0.43 - 5.8$	9.73
3	3000	$198, 183$	1	$2\pi\delta, 2\delta, 16\pi\delta$	$400, 193, 1024$	$3.20 - 9.59$	$0.25 - 6.71$	9.99
4	3000	$230, 182$	0.2	$\frac{2}{5}\pi\delta, 2\delta, 16\pi\delta$	$300, 193, 1024$	$0.99 - 10.87$	$0.56 - 6.71$	11.58

表1： 各次模拟所采用的模拟矩阵和参数。 N_i 和 Δ_i^+ 表示 i 方向上的网格单元数量和无量纲i= θ、 r 和 z。

使用可压缩直接数值模拟。该直接数值模拟在具有周期性边界条件的矩形通道中进行，以抑制边界条件引入的伪影。

然而，如上所述，实际应用中的表面很少是平板，更多的是具有曲率的表面。据作者所知，目前尚无针对曲面上壁面压力脉动低波数区域的可压缩流动模拟研究。尤其是，圆柱壁面上的壁面压力脉动低波数分量的特性，以及随着曲率变化，其能量相较于对流分量有多强，目前仍鲜为人知。本文旨在弥补这一研究空白，研究不同曲率圆柱面上的壁面压力。为直接解析这些低频分量，我们采用低耗散低色散有限差分格式进行直接数值模拟。与 Liu 等人(2024)类似，为避免人工边界条件引入不可避免的噪声，我们对同心环形管道内的通道流进行模拟，并在流向采用周期性边界条件。这样做无法捕捉自由边界层的所有特征，但保留了曲率的重要影响，同时避免了模拟自由边界层所带来的复杂性（Neves &Moin 1994*b*）。

本文结构如下。第 2 节介绍本研究采用的计算设置和离散格式。第 3 节对模拟进行验证，并讨论曲率对流动统计量的影响。第 4 节展示不同直径圆柱表面壁面压力脉动（WPF）的功率谱密度（PSD）及波数-频率谱。第 5 节利用 Lighthill 声类比对圆柱边界层产生的壁面压力脉动进行建模，并据此讨论低波数壁面压力脉动增强的机制。最后一节总结全文并列出未来工作。

《流体聚焦》文章不得超过此页数

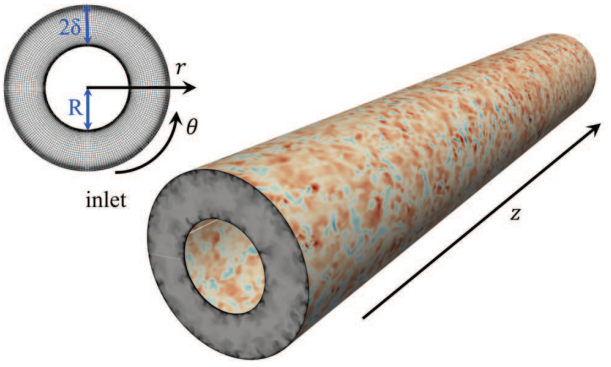


图 2：直接数值模拟配置，其中 θ、 r和 z 分别表示周向、径向和轴向。入口、内壁和外壁上分别显示瞬时速度大小和压力的等值线。

2. 数值设置

模拟的示意设置如图所示2。环形管道内的通道流在广义曲线坐标系中离散化， θ、 r 和 z 分别表示周向、径向和轴向。 L_r 和 L_z表示通道高度和长度，而 R 和 L_θ 分别表示内圆柱壁的半径和周长。在 θ 和 z 方向上，网格点均匀分布，边界处施加周期性条件。壁面采用无滑移等温条件，并依据双曲正切函数加密壁面附近的网格。四组直接数值模拟的参数列于表1中，其中 ϵ 定义为 R/δ ，用于表示内圆柱的无量纲半径。情形 1 为用于对比的平面通道，此时 L_θ 退化为展向域尺寸。请注意，通道长度 L_z 特意选为 $16\pi\delta$ ，以解析壁面压力脉动的低波数分量。

采用 HiPSTAR 代码（Sandberg 等， 2015），该代码已在声学模拟方面经过广泛验证（Deuse &Sandberg 2020），用于求解无量纲三维（3D）可压缩纳维–斯托克斯方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} = 0, \tag{2.1a}$$

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j + p\delta_{ij})}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \tag{2.1b}$$

$$\frac{\partial (\rho e_0)}{\partial t} + \frac{\partial [u_j(\rho e_0 + p)]}{\partial x_j} = \frac{\partial (\tau_{ij} u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}. \tag{2.1c}$$

这里， ρ、 u_i、 p 和 T 分别表示无量纲化后的流体密度、速度分量、压力和温度。

无量纲化后得到的无量纲参数为 $Re_b = (\rho_b U_b \delta)/\mu_\infty = 3000$和 $M_b = U_b/c_\infty = 0.4$，其中 δ、U_b 和 ρ_b 分别表示通道半高、平均体积速度和密度。此外，μ_∞ 和 c_∞ 分别表示参考状态下的黏度和声速，它们仅取决于参考壁面温度 T_w。总能量 e_0 为

$$e_0 = \frac{\rho u_i u_i}{2} + \frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_b^2}T, \tag{2.1}$$

其中 $\gamma = 1.4$ 为比热比。此外，应力张量写作

$$\tau_{ij} = \frac{\mu}{Re_b}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right), \tag{2.2}$$

分子黏度 μ 采用萨瑟兰定律计算（（White 1991）。同样，热流 q_j 写作

$$q_j = -\frac{\mu}{(\gamma-1)PrRe_bM_b^2}\frac{\partial T}{\partial x_j}, \tag{2.3}$$

其中 Pr 为普朗特数，取值为 0.72。

空间离散采用四阶有限差分格式，时间积分采用超低存储频率优化显式龙格–库塔方法（Kennedy等 2000）。此外，采用斜对称分裂方法（Kennedy & Gruber2008）处理非线性项，以减少混叠，并采用标准滤波格式（Bogey& Bailly 2004）提高数值稳定性。模拟在图形处理器上进行，约持续 48 个流动通过时间单位，之后保存内圆柱表面的壁面压力以及通道内的速度数据以供分析。详细的采样频率和采样时长见第 4节。

3. 验证与流动统计量

在考察壁面压力脉动（WPF）之前，我们首先将本研究的直接数值模拟（DNS）所得流动统计量与文献中的结果进行比较，以验证模拟的可靠性。随后展示曲率对流动统计量的影响。为便于考察沿壁法向方向的湍流统计量分布，采用从内圆柱壁面起算的径向距离，定义为 $y = r - R$。该距离通常以壁面单位表示，定义为 $y^+ = yu_\tau/\nu$，其中 ν 和 u_τ 分别表示流动的运动黏度和壁面摩擦速度。

3.1. 直接数值模拟的验证

为验证当前模拟，首先将平均速度和脉动速度与此前发表的结果进行比较。需要注意的是，脉动速度

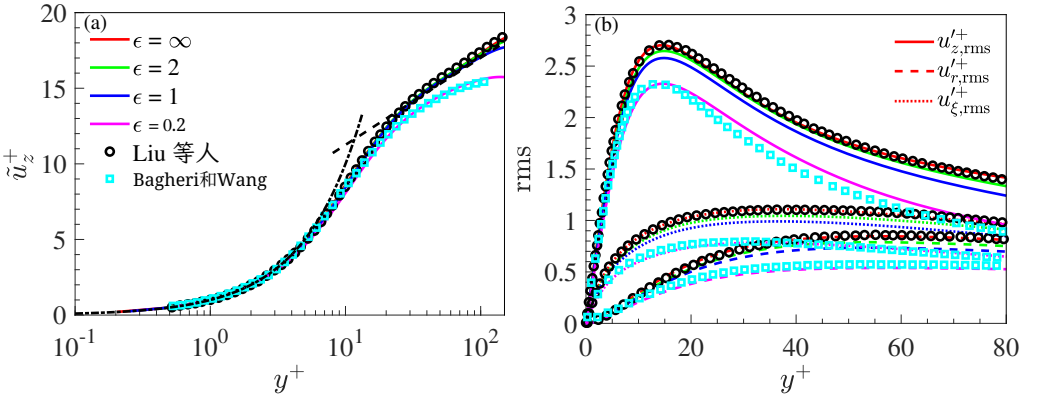


图3：当前情形与先前模拟中（a）平均速度剖面和（b）速度脉动均方根的比较。圆形：Liu Liu *et al.* (2024)中的平面通道案例；方形：Bagheri和Wang $\epsilon = 0.22$ 于Bagheri & Wang(2020)。

定义为去除通过Favre平均定义的平均值（˜），即

$$\tilde{u}_i = \langle \rho u_i \rangle / \langle \rho \rangle, \tag{3.0a}$$

$$u_i' = u_i - \tilde{u}_i, \tag{3.0b}$$

其中，$\langle \cdot \rangle$ 表示系综平均。实际中则采用时间平均以及空间平均（流向和周向平均）。值得注意的是，尽管整体马赫数 M_b 为0.4，流动的密度变化非常有限。因此，直接平均与Favre平均之间的差异可以忽略不计。随后，将平均速度和脉动速度分别除以摩擦速度 u_τ，得到$\tilde{u}_i^+$ 和 $u_i'^+$ 。

两种速度的比较如图3所示，其中图3(a)展示了轴向平均速度沿壁法向方向的分布。在矩形案例中，捕捉到了黏性底层和壁面律，且与Liu等人(2024)的结果吻合良好。当内圆柱半径减小至 $\epsilon = 2$ 或1时，速度分布几乎没有变化，这与 $\epsilon = 0.2$处的显著变化形成对比。具体而言，外层的轴向平均速度有所降低。所得速度剖面与Bagheri和Wang(2020)的结果吻合良好，尽管在内圆柱半径方面存在轻微差异。

图 3(b) 分别展示了轴向、径向和周向速度脉动的均方根值。在矩形案例中，我们发现速度脉动与 Liu 等 (2024的结果非常吻合。随着内半径减小，速度脉动持续减弱，尤其是在流动的外层。 请注意，Bagheri和Wang (2020的研究针对的是 $\epsilon = 0.22$，因此与本文的 $\epsilon = 0.2$情形不同。这在一定程度上解释了两种情形的均方根值为何存在细微差异。此外，

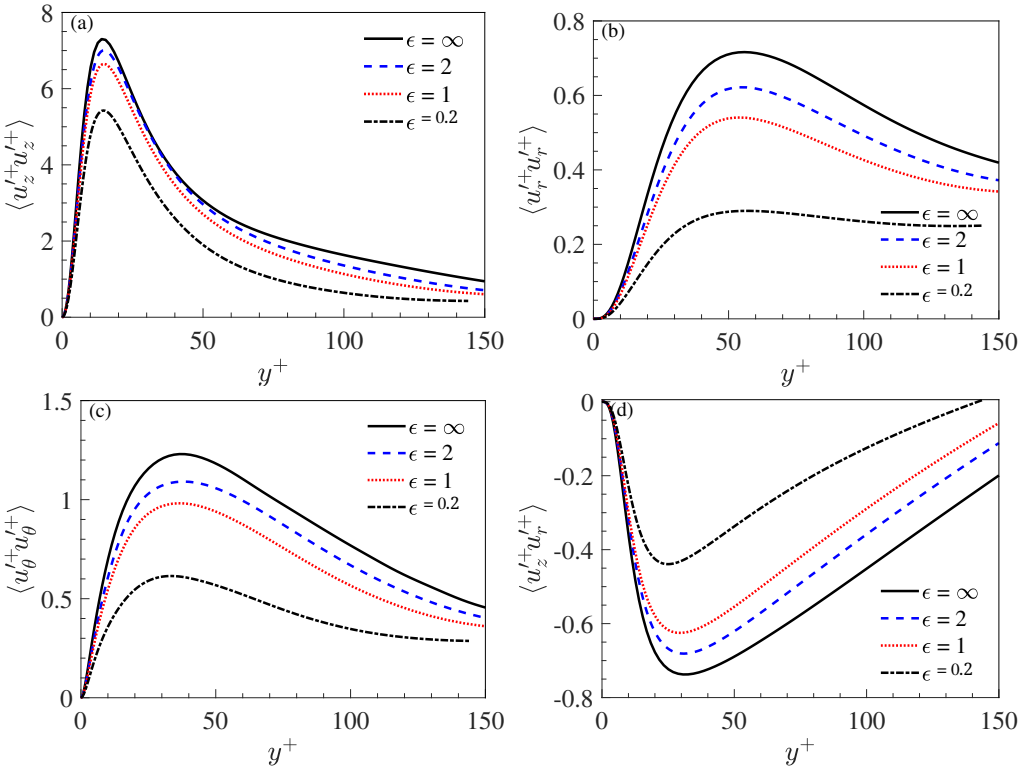


图4：内圆柱壁面上 (a) $\langle u_z'^+ u_z'^+ \rangle$、(b)$\langle u_r'^+ u_r'^+ \rangle$、(c) $\langle u_\theta'^+ u_\theta'^+ \rangle$ 和 (d) $\langle u_z'^+ u_r'^+ \rangle$ 的雷诺应力壁面法向分布。

马赫数的差异也可能产生影响，因为 Bagheri和Wang (2020) 进行了不可压缩模拟。尽管如此，图 3(b) 仍显示两种情形吻合较好。 鉴于图 3所示的良好吻合，可以预期当前模拟捕捉到了同心环形 管道内湍流槽道流的基本物理特征。

3.2 曲率对流场的影响

为仔细考察曲率对流动的影响，我们展示了不同圆柱直径下，雷诺应力沿壁面法向的分布，如图4所示。图4(a) 展示了$\langle u_z'^+ u_z'^+ \rangle$的壁法向分布。可以看到，该雷诺应力分量在约 $y^+ = 15$处达到峰值，而曲率增大似乎会使峰值位置略微靠近壁面。这一发现与Neves & Moin（1994*a*）的不可压缩模拟结果一致。曲率从 $\epsilon = \infty$ 增至 $\epsilon = 1$时，该分量的幅值略有下降。当曲率增至 $\epsilon = 0.2$ 时，幅值显著降低。这表明，较薄圆柱上的边界层内，轴向速度脉动往往受到抑制。

图 4(b) 显示了$\langle u_r'^+ u_r'^+ \rangle$的壁法向分布。一个显著差异

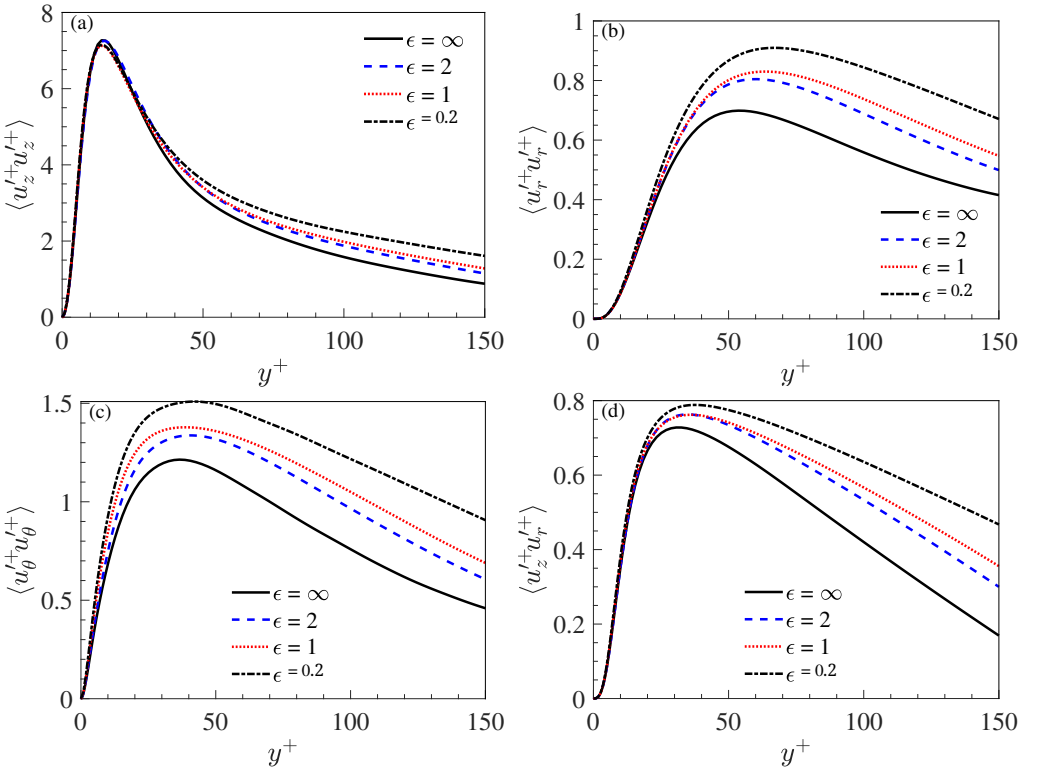


图5：外圆柱壁上雷诺应力的壁面法向分布：(a) $\langle u_z'^+ u_z'^+ \rangle$，(b) $\langle u_r'^+ u_r'^+ \rangle$，(c) $\langle u_\theta'^+ u_\theta'^+ \rangle$ 和(d) $\langle u_z'^+ u_r'^+ \rangle$ 。

是其幅值比$\langle u_z'^+ u_z'^+ \rangle$低一个数量级。这是众所周知的现象，表明湍流能量主要由流向速度脉动主导。此外，该分量的峰值出现在离壁面更远的 $y^+ = 50$处。曲率增大似乎会使峰值位置略微向壁面移动，但会显著降低其幅值。即使在 $\epsilon = 2$ 和 $\epsilon = 1$ 时，也能明显观察到这种下降。特别是，当 $\epsilon = 0.2$时，剖面在 $y^+ = 50$之外呈现相当平坦的变化。图4(c) 显示了$\langle u_\theta'^+ u_\theta'^+ \rangle$的壁法向分布。该分量的分布与$\langle u_r'^+ u_r'^+ \rangle$非常相似，不同之处在于$\langle u_\theta'^+ u_\theta'^+ \rangle$ 的取值略大。这表明周向脉动强于径向脉动，而且这一现象似乎不随曲率变化。

图 4（d）显示了$\langle u_z'^+ u_r'^+ \rangle$。在该图所示的 y^+ 范围内，$\langle u_z'^+ u_r'^+ \rangle$ 为负值，表明这是湍流产生项（Pope 2000）。该分量在 $y^+ = 25$附近达到峰值。随着曲率增大，其幅值显著减小。由于流场沿 z 和 θ 方向具有统计均匀性，雷诺应力$\langle u_z'^+ u_\theta'^+ \rangle$ 和

$\langle u_r'^+ u_\theta'^+ \rangle$ 正如预期，约等于 0。正文中省略对它们的展示，仅在附录 A 中列出以供参考。

尽管我们关注的是内圆柱壁上的壁面压力脉动，但考察曲率如何改变外圆柱壁上的流动也很有意义。在这种情况下，曲率可视为负曲率。雷诺应力如图所示 5。可以看出，对于所有雷诺应力分量，负曲率对流动的影响与正曲率相反，即它们随曲率增大而增大。此外，对于所有应力分量，其峰值位置都略微远离壁面，这与内圆柱情况下峰值位置向壁面靠近的趋势相反。请注意，在图 5(d) 中，$\langle u_r'^+ u_z'^+ \rangle$ 取得正值。这是因为 $u_r'^+$代表外壁处为负的壁面法向速度分量。因此，它仍然代表湍流产生项。 $\langle u_z'^+ u_\theta'^+ \rangle$和 $\langle u_r'^+ u_\theta'^+ \rangle$ 则仍接近 0，相关细节也见附录 A。

4. 结果

在验证了当前的直接数值模拟（DNS），并讨论了曲率对速度统计量的影响之后，我们现在可以考察曲率如何改变壁面压力脉动（WPF）的特性。请注意，壁面压力脉动 $p'(z,\ \theta,\ t)$ 的采样时间步长为 $\Delta t U_b/\delta \approx 0.048$，总共约有 8000 个快照。快照序列被划分为若干分段，分段之间有 50% 的重叠。 由此得到 20 个分段，每个分段包含 768 个快照，并沿z、 θ和 t进行傅里叶变换/展开，以得到其频谱 $\tilde{p}(k_z,\ m,\ \omega)$，即

$$\tilde{p}(k_z, m, \omega) = \int_0^T \int_0^{2\pi} \int_0^{L_z} p'(z,\theta,t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}t. \tag{4.1}$$

这使得无量纲频率的分辨范围达到 $\bar{\omega} \equiv \omega\delta/U_b \approx 65$，分辨率约为 0.165；无量纲波数的分辨范围达到 $k_z\delta$ ≈64，分辨率约为 0.125。

二维（2D）波数-频率谱由下式得到

$$\Phi(k_z, m, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2 L_z T} \langle \tilde{p}(k_z, m, \omega) \tilde{p}^*(k_z, m, \omega) \rangle, \tag{4.2}$$

其中 T 表示每个片段的持续时间。请注意，在针对 进行 t 傅里叶变换之前，每个片段都会乘以一个汉宁窗。通过抑制谱泄漏，这一过程对于揭示低波数分量以及能量强得多的对流脊至关重要。

一维（1D）波数-频率谱通过对所有方位模态求和计算得出，

Rapids 文章不得超过此页长度

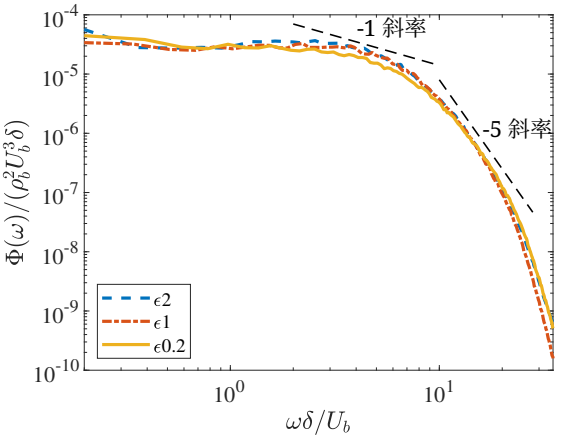


图6：无量纲功率谱密度 $\Phi(\omega)/(\rho_b^2 U_b^3 \delta)$ 为不同直径圆柱上的壁面压力脉动。

将所有方位模态求和，得到

$$\Phi(k_z,\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi(k_z,m,\omega). \tag{4.3}$$

类似地，壁面压力脉动的功率谱密度可由下式得到

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_z,\omega)\,\mathrm{d}k_z. \tag{4.4}$$

本节其余部分将依次考察不同 ϵ 值下的功率谱密度、一维和二维波数-频率频谱。注意，$\epsilon = 2$ 下的频谱与 $\epsilon = \infty$下的频谱差异很小；因此，为简洁起见，以下比较中省略 $\epsilon = \infty$ 情形，并确保方位模态的定义一致（$\epsilon = \infty$ 情形需要采用不同的方位模态定义）。

4.1. 功率谱密度

图 6 展示了不同直径圆柱表面壁面压力脉动（WPF）的单点时间谱对比。所有频谱在中频区间均呈现 ω^{-1} 标度关系，而在高频区间则呈现 ω^{-5} 标度关系。这与平面通道流相似（Liu等，2024；Bull 1996）。显然，$\epsilon = 2$ 和 $\epsilon = 1$ 的频谱差异极小。这在不可压缩流研究中广为人知——当内圆柱较大时，曲率对壁面压力脉动的影响可以忽略（Neves& Moin1994*b*）。然而，当 ϵ 降至 0.2 时，壁面压力谱在中频区间的幅值明显降低。不过，在高频区间，谱幅值略高于 $\epsilon = 1$时的值。曲率对低频功率谱密度分量的影响似乎相当有限。但请注意，这并不与Neves & Moin (1994*b*的研究结果矛盾；该研究中，当采用摩擦速度 u_τ 进行无量纲化

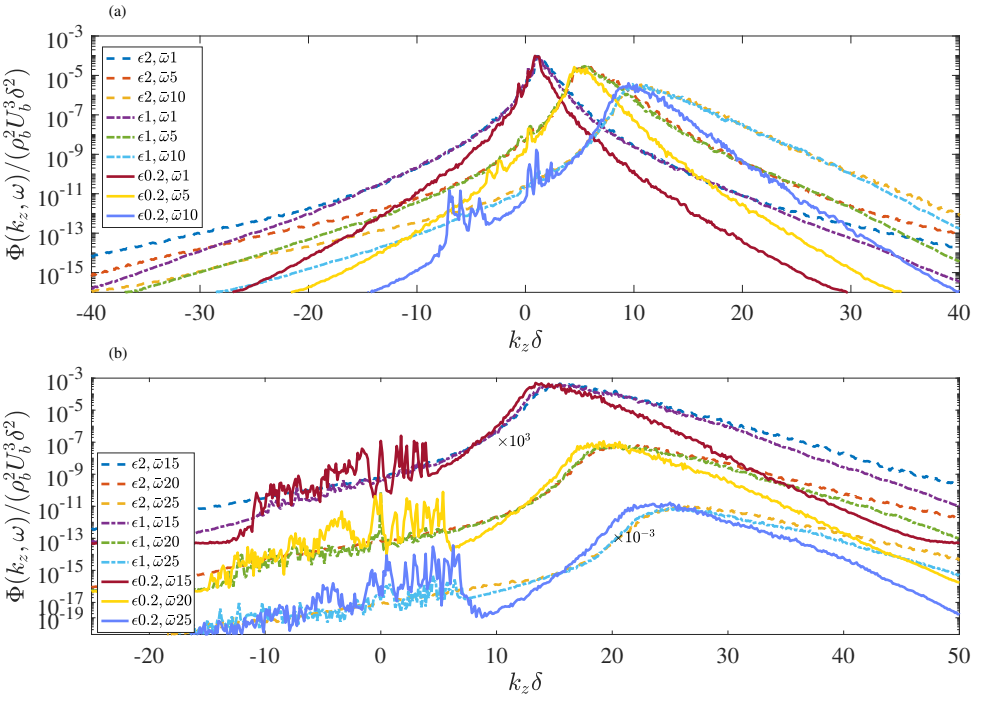


图7： 一维波数-频率 $\Phi(k_z,\ \omega)/(\rho_b^2U_b^3\delta^2)$ 不同圆柱直径下的壁面压力脉动频谱：(a) $\bar{\omega}=1$，5 和 10；(b) $\bar{\omega}=15$，20 和 25。为便于区分， $\bar{\omega}=15$ 和 $\bar{\omega}=25$ 处的谱幅值分别乘以 10^3 和 10^{-3}。

。不过，要考察壁面压力脉动的结构，更值得关注的是以下各节展示的波数-频率谱。

4.2. 一维波数-频率谱

图 7(b-c) 比较了 $\Phi(k_z,\ \omega)$ 随 ϵ 变化时的一维波数-频率谱。在低频 $\bar{\omega}=1$下，可以看到在对流波数 ω/U_c处存在明显的主峰。将半径从 $\epsilon=2$ 减小到 1，会降低高波数（包括负波数）处的谱幅值。进一步将圆柱半径减小至 $\epsilon=0.2$，则会使频谱显著减弱。然而，对流波数处的幅值似乎几乎没有变化。这表明壁面压力脉动的流向长度尺度变大，这一结果与早期的不可压缩流研究一致（Neves& Moin 1994*b*）。此外，当 ϵ 降至 0。2 时，开始出现显著的频谱特征变化，即超声速波数区域开始出现声学峰（见第 4.3节）。

随着频率增加至 $\bar{\omega}=5$ 和10，对流峰向更高波数移动，但幅值减小，这与图 7（a）中所示幅值随频率衰减的趋势一致。减小 ϵ 的影响与 $\bar{\omega}=1$时类似，但在 $\epsilon=0.2$ 处，声学峰随着

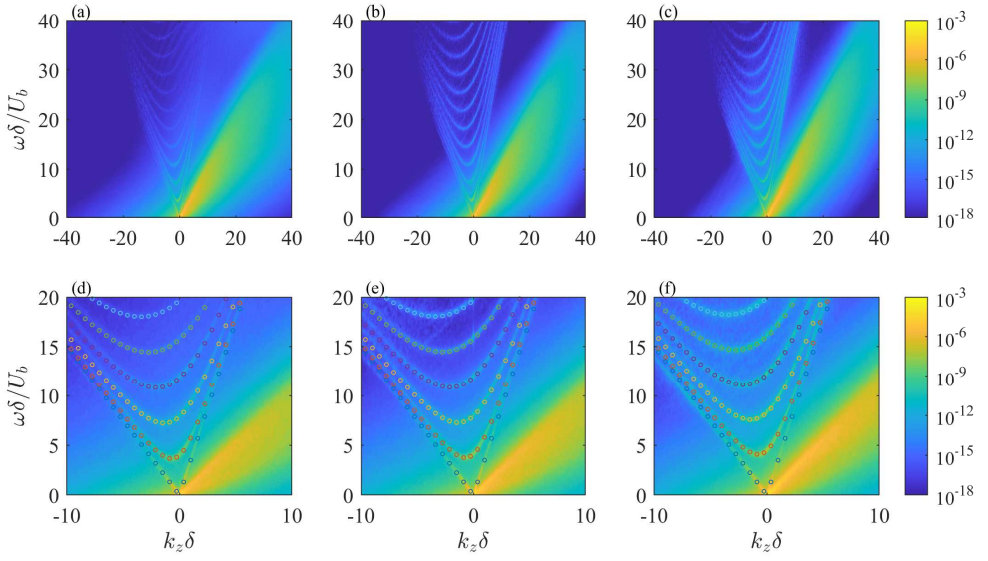


图8：在 $\epsilon = 2$ 下，1（b、c）和0。2（e、f）的二维波数-频率谱。虚线表示由（4.5）求解得到的声学管道模态。

频率增加而增强。此外，随着 R 减小，频谱似乎向较低波数移动。

在较高频率下，声学峰和谱偏移更加显著。图7（c）分别显示了 $\bar{\omega} = 15$、20和25时的频谱。在 $\bar{\omega} = 15$下， $\epsilon = 2$ 时所有波数处的频谱都很平滑，但在 $\epsilon = 1$ 时开始出现一些声学峰。在 $\epsilon = 0.2$时，开始出现密集得多的声学峰簇。随着频率增加到 $\bar{\omega} = 20$ 和25，这些声学峰变得更强、更密集。注意，矩形通道的情形下不会出现声学峰（Liu 等人，2024），这些峰是由壁面曲率引起的。与声学峰的出现类似，随着频率增加，谱偏移的趋势也日益明显。

4.3. 二维波数-频率谱

图 7（c）中观察到的谱峰是由声学效应诱发的，这一点可从二维波数-频率谱中清楚地看出 Φ（k_z、 m、 ω）。鉴于轴对称模态（$m = 0$）更有可能与弹性结构发生耦合，图 8 首先展示了 Φ（k_z、0、 ω）在不同直径圆柱上的等值线。需要注意的是，由于谱幅值的跨度很大，颜色采用对数刻度绘制。

图 8(a) 显示了 $\Phi(k_z,0,\omega)$ 对于 $\epsilon = 2$。由于可压缩性，我们看到 Kraichnan-Phillips 定理明显遭到违反；该定理要求 $\Phi(k_z, k_y, \omega) \to 0$ 当 $k_z^2 + k_y^2 \to 0$ (Ffowcs-Williams（1965）时成立，其中 k_y 表示展向波数。与不可压缩情形相似（Neves & Moin 1994*b*），壁面压力脉动的能量

由对流脊主导。然而，随着频率升高，这些脊变得越来越宽，表明对流速度的定义不再那么明确。可压缩频谱与不可压缩对应项的区别在于一系列清晰可见、尽管强度弱得多的离散曲线。 这些是环形管道中的声学模态，与平面槽道流中的声学模态相似（Liu 等2024）。

为仔细考察这些声学模态，图 8(d-f) 展示了图 8(a-c) 中低波数区域的局部放大图。此外，还给出了均匀平均流条件下环形管道中声学模态的解析色散关系（Crighton等，1992），即

$$(\beta^2 k_z + k M_b)^2 = k^2 - \mu_{mn}^2 \beta^2, \tag{4.5}$$

其中 $\beta^2 = 1 - M_b^2$、 $k = \omega / c_0$，而 μ_{mn} 是.....的第 n 个根

$$J_m'(\mu_{mn} R) Y_m'(\mu_{mn}(R + 2\delta)) - J_m'(\mu_{mn}(R + 2\delta)) Y_m'(\mu_{mn} R) = 0. \tag{4.6}$$

在（4.6）中， J_m 和 Y_m 分别表示 m阶第一类和第二类贝塞尔函数，上标撇号表示它们的一阶导数，而 n表示一个整数，代表声学模态的径向阶数。可以看到，这些预测得到的管道模态与图 8(d-f) 中的离散曲线几乎完全重合。请注意，这些声学模态与对流脊的谱幅值存在显著差异。然而，随着 ϵ 减小，这些声学模态似乎逐渐增强，如图 8(b-f) 中越来越明亮的线条所示。

为了详细考察声学模态，我们绘制了不同直径环形管道中的压力分布。这些声学模态可以通过解析方法计算，其形式为

$$p = C_{mn} \left(Y_m'(\mu_{mn} R) J_m(\mu_{mn} r) - J_m'(\mu_{mn} R) Y_m(\mu_{mn}\ r) \right) \exp(im\theta) \exp\left(-ik_z z\right), \tag{4.7}$$

其中， C_{mn} 表示取决于方位阶数 m 和径向阶数 n的归一化常数。本文重点研究轴对称模态$m = 0$，并使用（4.7）绘制沿 $+z$ 方向传播的声学模态。沿 $-z$ 方向传播的模态与之类似，因此省略。

三种圆柱直径下管道模态的横截面如图9 和10 所示，对应的约化频率分别为 $k\delta = 2$ 和 5。图9（a-c）展示了径向阶数为 $n = 1$ 、 $k\delta = 2$处声学模态（4.7）的实部。这些代表沿 $+z$ 方向传播的平面波模态（图8中的离散直线）。图8显示，随着 ϵ 减小，这些平面波模态在内圆柱壁上的表现更强。由于它们在内、外圆柱壁上的振幅相同（如图9（a-c）所示），因此预计它们在外壁上的表现也类似。

图 9（d-f）则显示了径向阶数为

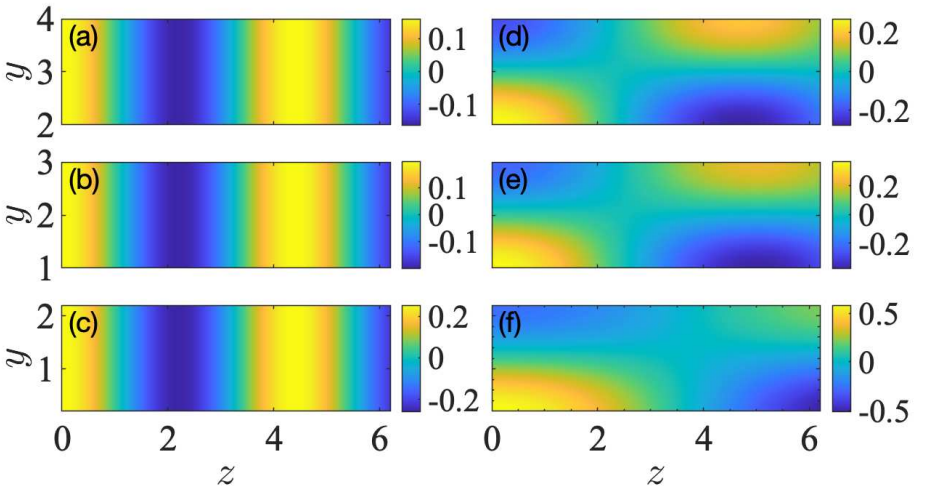


图9：轴对称（$m=0$）声学模态，频率为 $k=2$：（a-c）径向阶数为 $n=1$（平面波）的模态；（d-f）径向阶数为 $n=2$；（a,d）：$\epsilon=2$；（b,e）$\epsilon=1$；（c, f） $\epsilon=0.2$。

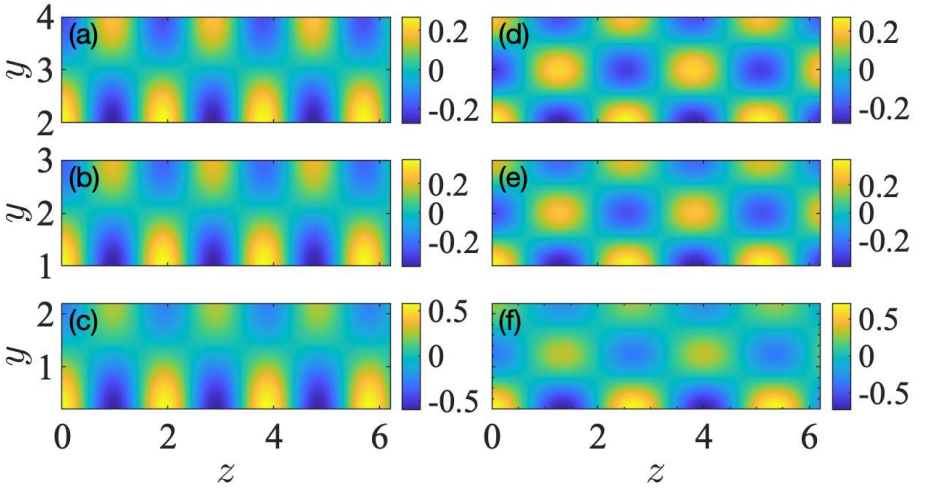


图10：轴对称（$m=0$）声学模态，频率为 $k=5$：（a-c）径向阶数为 $n=2$；（d-f）径向阶数为 $n=3$；（a,d）：$\epsilon=2$；（b,e） $\epsilon=1$；（c, f） $\epsilon=0.2$。

$n=2$。值得注意的是，在该约化频率 $k\delta=2$下，只有两个径向阶数（1 和 2）处于截止开启状态，而高阶模态实际上处于截止状态。通过在 8（d-f）处绘制一条水平线至 $\omega\delta/U_b=5$，可以清楚地看出这一点。从图 9（d-f）可以看出，随着曲率增大，内圆柱壁上的声压越来越大于外壁上的声压。为了直观地体现这种差异，内壁处的声压为

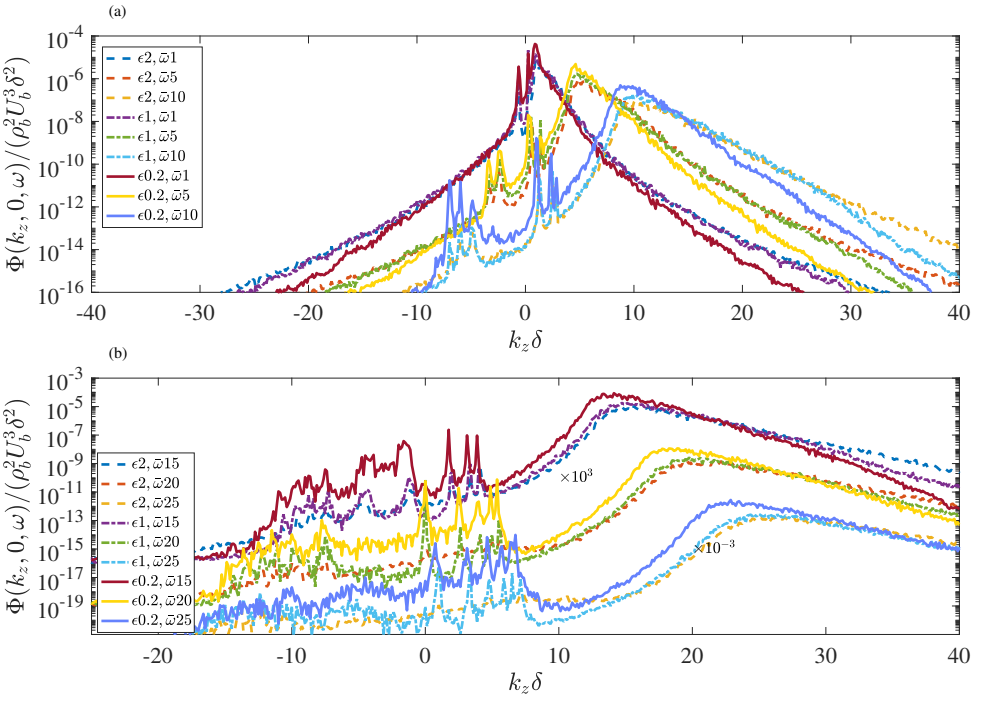


图11：不同直径圆柱上的无量纲二维波数-频率谱$\Phi(k_z,0,\omega)/(\rho_b^2U_b^3\delta^2)$；为便于区分，$\bar{\omega}=15$ 和 $\bar{\omega}=25$ 处的谱幅值分别乘以 10^3 和 10^{-3} 。

比外壁上的高约10 dB。因此，预计外壁上径向阶数为 $n=2$ 的声学峰能量较低。

随着频率升高，图8(d-f)显示，更多高径向阶数的声学模态开始截止开启。为更细致地展示这些模态，我们选择更高的频率 $k\delta=10$，并在图10中绘出径向阶数为2和3的声学管道模态。同样，高阶模态处于截止状态。随着径向阶数增加，声压沿径向出现更多零点，而流向波数则减小。根据（4.6），后者是预期的。此外，随着 n 增加，内壁和外壁上的压力幅值差异似乎也更大。这表明，WPF谱中的高阶声学峰在内壁上比在外壁上越来越显著。不过请注意，尽管我们可以考察外壁上的WPF，但在实际应用中，以及因此本文的主要关注点，是内圆柱壁上的WPF。

为定量比较内壁上的二维波数-频率谱，图 11(a) 展示了 $\Phi_{pp}(k_z,0,\omega)$ 随 $k_z\delta$ 在 $\bar{\omega}=1$、5 和 10 时的变化。可以看出，直径减小会使低波数处的谱幅值增大，而高波数处的谱幅值减小。与图 7(b) 不同的是，由声学

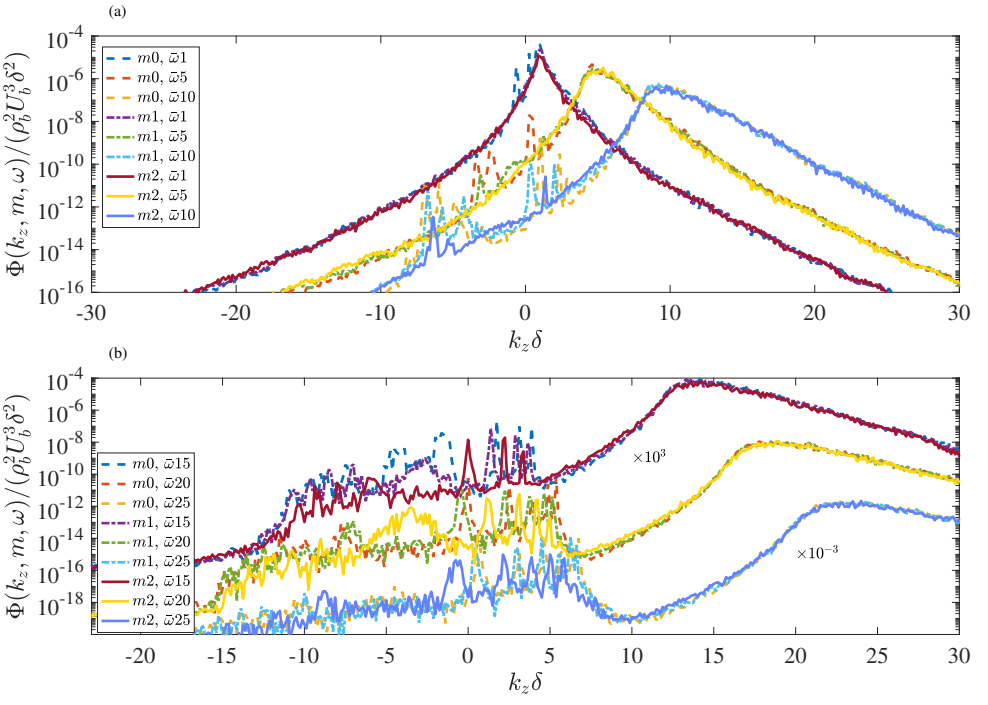


图12：方位模态为 $m=0$、1 和 2 时的无量纲二维波数-频率谱$\Phi(k_z,m,\omega)/(\rho_b^2U_b^3\delta^2)$，对应 $\epsilon=0.2$；为便于区分，$\bar{\omega}=15$ 和 $\bar{\omega}=25$ 处的谱幅值分别乘以 10^3 和 10^{-3}。

管道模态在所有圆柱直径下均可见。如图 8所示，这些峰值波数可由（4.5）很好地预测。随着频率增加，低波数谱增强更加明显，如图 11(b) 所示。注意，当 $\bar{\omega}\geqslant 20$时，$\epsilon=2$ 处的低波数谱幅值普遍升高，但没有明显的谱峰，这与 Liu 等人(2024）的结果一致。但是，当 $\epsilon=1$ 且为 0.2 时，仍会出现声学峰。此外，随着更多管道模态截止开启，声学峰变得更加密集，这一点从图 8中可以清楚地看出。显然，将所有方位模态求和以得到 $\Phi(k_z,\ \omega)$ 时，会出现更多谱峰，如图 7所示。

为了展示波数-频率谱随方位模态的变化，图12 展示了不同 m 在 $\epsilon=0.2$处的频谱。当频率较低（$\bar{\omega}=1$）时，可以看到只有 $m=0$ 处的频谱出现声学峰，因为根据（4.5），高阶模态实际上处于截止状态。声学峰之外的谱幅值大致相同。随着频率升至 5 和 10，$m=1$ 和 $m=2$ 处的声学模态分别开始截止开启。频率进一步升高时，更多声学模态开始截止开启，并出现在图12（b）所示的频谱中。请注意，超声速区内谱幅值的升高似乎存在于所有 m情况下。除此之外，其他区域的频谱看起来相似。

这表明，在某些飞行噪声应用中，可能有必要纳入更高方位阶数的壁面压力脉动。

5. 讨论

谱幅值中的低波数增强现象，随着 ϵ 减小而出现，这在拖曳声呐阵列等实际应用中备受关注（Bull 1996）。为了解这种增强现象为何发生，我们从建模均匀湍流边界层流经无限长圆柱时产生的壁面压力脉动（WPF）入手。需要指出的是，该模型并不完全适用于本文的设置，因为本文模拟的是同心环形管道内的通道流，而非自由边界层。尽管如此，我们认为这两种情形中曲率对壁面压力脉动的影响相似，尤其是在低波数区域。因此，我们尝试通过对边界层情形建模来讨论低波数壁面压力脉动增强现象。

5.1. 基于 Lighthill 声类比的壁面压力脉动建模

利用 Lighthill 声类比和声学格林函数，可以解析求得无限长圆柱上方均匀湍流边界层下方的壁面压力脉动频谱，形式为（Dhanak 1988）

$$\tilde{p}(k_z,m,\omega)=\int T_{ij}(\boldsymbol{y},\tau)\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}\left(-\frac{1}{\alpha R}\frac{H_m^{(1)}(\alpha r)}{H_m^{(1)\prime}(\alpha R)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\right)\mathrm{d}^3\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\tau,\quad(5.1)$$

其中 $T_{ij}\,(i,j=1,2,3)$ 是笛卡尔坐标系中的 Lighthill 应力张量，$\alpha=\sqrt{\omega^2/c_0^2-k_z^2}$，$H_m^{(1)}(z)$ 是 m阶第一类汉克尔函数。在（5.1）中，空间积分是在圆柱边界层的整个范围内进行的。第 0 阶模态尤为重要，在图 2 所示的柱坐标系中，它可化简为

$$\int_R^{R+\delta}\left[\frac{-\alpha H_0^{(1)\prime\prime}(\alpha r)}{H_0^{(1)\prime}(\alpha R)}\tilde{T}_{rr}-\frac{H_0^{(1)\prime}(\alpha r)}{H_0^{(1)\prime}(\alpha R)}\left(\frac{\tilde{T}_{\theta\theta}}{r}+2\mathrm{i}k_z\tilde{T}_{rz}\right)+\frac{k_z^2H_0^{(1)}(\alpha r)}{\alpha H_0^{(1)\prime}(\alpha R)}\tilde{T}_{zz}\right]\frac{r}{R}\,\mathrm{d}r,\quad(5.2)$$

径向上的积分范围从圆柱半径 R 到边界层˜边缘 $R+\delta$，而 T_{ij} 是 Lighthill 应力张量的傅里叶变换，其表达式为

$$\tilde{T}_{ij}(r,k_z,0,\omega)=\iint T_{ij}(r,z,\theta,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\tau,\quad(5.3)$$

其中下标 i 和 j 分别取值为 r、θ 和 z，对应柱坐标系中的坐标。方程（5.2）表明，第 0 阶壁面压力脉动仅由边界层内的应力项

˜ ˜ ˜ ˜ ˜ ˜T_{rr}、$T_{\theta\theta}$、T_{rz} 和 T_{zz} 产生，且与 $T_{\theta r}$ 和 $T_{z\theta}$无关。预计后两个分量也很小（更多详情请参见附录 A）。

在声学峰值附近 $k_z=\omega/c_0$，（5.2）中的最后一项是奇异的，但

可积。实际上，边界层的有限尺寸和平均流折射效应会使这些声学峰值的高度得到正则化（Bull 1996），本文不讨论相关细节（请注意，在通道流情形下，由于存在多个截止开启的管道模态，除声学峰值外还会出现更多谱峰）。在通常特别关注低波数分量的大多数应用中，往往有 $k_z r \ll 1$（r 取值介于 R 和 $R+\delta$之间）。在这种情况下，除声学奇点附近外，可以忽略右侧（5.2）中最后两项。

当圆柱半径和边界层厚度较小（$kR \ll 1$且 $k\delta \ll 1$，例如拖曳声呐阵列中的低频情况）时，可利用汉克尔函数的小参数展开式（Crighton等，1992）将（5.2）近似为

$$\tilde{p}(k_z, 0, \omega) \approx \int_0^1 \frac{\tilde{T}_{rr} - \tilde{T}_{\theta\theta}}{\epsilon + h}\, \mathrm{d}h, \tag{5.4}$$

其中，$h \equiv y/\delta$ 表示从内圆柱壁测量的无量纲径向距离，因此其取值范围为 0 到 1。另一方面，当圆柱半径足够大（例如频率足够高）时，即 $kR \gg 1$，可利用汉克尔函数的渐近形式进行展开，并将低波数下的（5.2）近似为

$$\tilde{p}(k_z, 0, \omega) \approx \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{h}{\epsilon}}\, \alpha\delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\delta h} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \tilde{T}_{rr} - \frac{1}{\sqrt{\epsilon(\epsilon + h)}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\delta h} \tilde{T}_{\theta\theta}\, \mathrm{d}h. \tag{5.5}$$

~ ~假设下壁面（$h = 0$）和上壁面（$h = 2$）之间 Lighthill 应力张量 T_{rr} 和 $T_{\theta\theta}$ 的分布不会随 R 的变化而显著改变，则（5.4）和（5.5）表明，当 k_z 较小时，内圆柱半径减小会使零阶谱增大。这与图11中低频和高频下均观察到的 $\Phi(k_z,\ 0,\ \omega)$ 的低波数增幅一致。请注意，方程（5.4）和（5.5）中的 ϵ 项源自汉克尔函数的渐近近似，而非 Lighthill 应力。这表明，低波数增幅是一种与格林函数相关的“几何”效应。

特别地，$1/\sqrt{\epsilon}\,(\epsilon + h)$ 出现在（5.5）中，而非 $1/(\epsilon + h)$ 出现在（5.4）中，这表明高频处的放大可能比低频处更为显著。图11 中确实存在随频率增加而呈现的这种趋势。需注意，只有径向和方位速度扰动显得重要。此外，（5.4）和（5.5）均表明，随着曲率增大，靠近壁面的扰动在产生 WPF 谱的低波数分量方面愈发重要。这与固定 $\omega\delta/u_\tau$ 处的对流速度随 R 减小而降低的事实相符。这表明，通过对细圆柱采用近壁处理来实现低波数 WPF 控制具有潜力。

5.2. 与直接数值模拟的比较

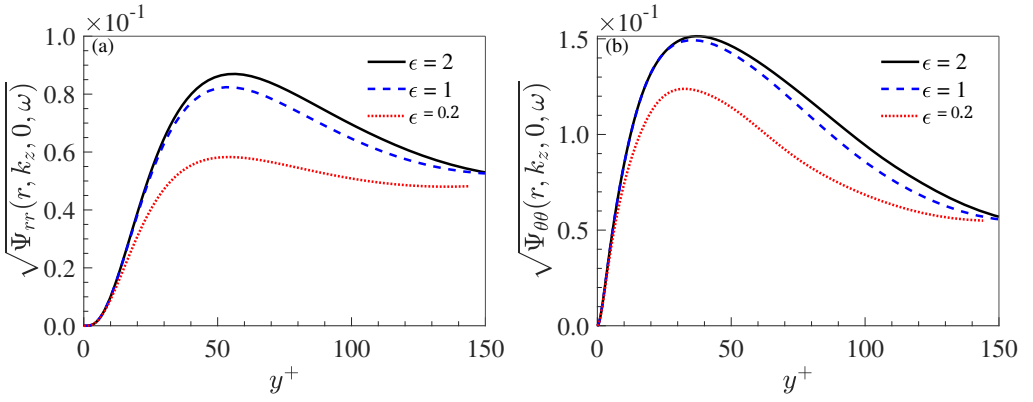
在推导得到（5.4）和（5.5）的过程中，一个重要假设是：Lighthill 应力张量 T_{rr} 和 $T_{\theta\theta}$ 在圆柱壁面（$h=0$）与边界层外缘（$h=1$）之间随 R 变化时不会发生显著改变。为检验该假设在多大程度上仍然成立，我们首先给出这两个应力分量的波数-频率谱，即 Ψ_{rr}（r，k_z，0，ω）和 $\Psi_{\theta\theta}$（r，k_z，0，ω），沿壁法向方向、在固定频率 ω 和波数 k_z处。需注意，波数-频率谱 $\Psi_{rr} \propto |\tilde{T}_{rr}|^2$ 而 $\Psi_{\theta\theta} \propto |\tilde{T}_{\theta\theta}|^2$，因此，$\sqrt{\Psi_{rr}}$和$\sqrt{\Psi_{\theta\theta}}$ 示于图13至图16。

如上所述，我们关注低波数区域，其中 $k_z r \ll 1$(r 取值范围为 R 至 $R+\delta$）。然而，本次模拟的流向波数分辨率仅约为 $k_z\delta \approx 0.125$。这意味着可解析的最小非零波数对应的取值最大为$k_z r$ 0。6。因此，本文仅展示 $\sqrt{\Psi_{rr}}$ 和 $\sqrt{\Psi_{\theta\theta}}$ 在 $k_z\delta = 0$ 处的结果。尽管如此，这并不会大幅降低结果的普适性，因为波数-频率频谱在Bull 1996所述的$k_z\delta = 0$附近具有众所周知的波数白噪声行为，即 $\Phi(k_z,\ m,\ \omega)$ 在以 $k_z\delta = 0$为中心的低波数范围内几乎保持恒定。

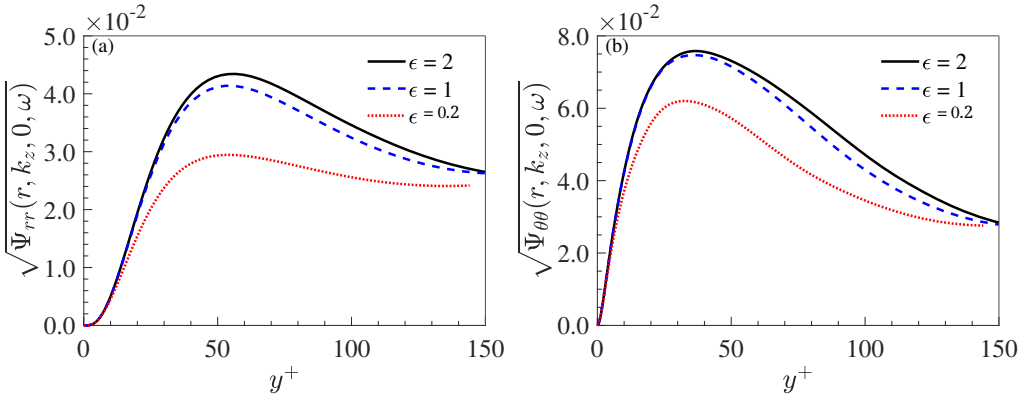
请注意，式（5.4）的渐近形式要求圆柱处于声学紧致状态，即 $kR \ll 1$ 且 $k\delta \ll 1$。这对应于低频范围，我们可以凭借 $\omega\delta/U_b \approx 0.165$ ($k\delta \approx 0.01$) 的频率分辨率对其进行适当解析。然而，式（5.5）的渐近形式要求声学非紧致，即 $kR \gg 1$。这意味着频率范围相当高。举例来说，对于 $\epsilon = 0.2$，中等大小的 $kR = 2$ 对应的频率为 $\omega\delta/U_b = 157$。解析这样的频率需要对流场快照采用非常高的采样率，而在实际中存储如此海量的数据成本高得令人难以承受。更重要的是，在实际应用中，我们主要关注的是低频。因此，接下来我们将重点考察圆柱处于声学紧致状态时低频下 $\sqrt{\Psi_{rr}}$ 和 $\sqrt{\Psi_{\theta\theta}}$ 的分布。

图 13 展示了以下项的振幅谱：$T_{rr}(r,\ 0,\ 0,\ 0)$ 和 $T_{\theta\theta}(r,\ 0,\ 0,\ 0)$。它们是 Lighthill应力张量的稳态均匀分量，在声学类比框架中，与其将其视为声源，不如更恰当地将其解释为传播效应。尽管如此，我们仍可看到，随着曲率增大，这两个稳态应力分量的振幅总体上有所减小。不过，它们的量级并未相差数个数量级。以分贝计，其振幅差异不超过 3 dB。

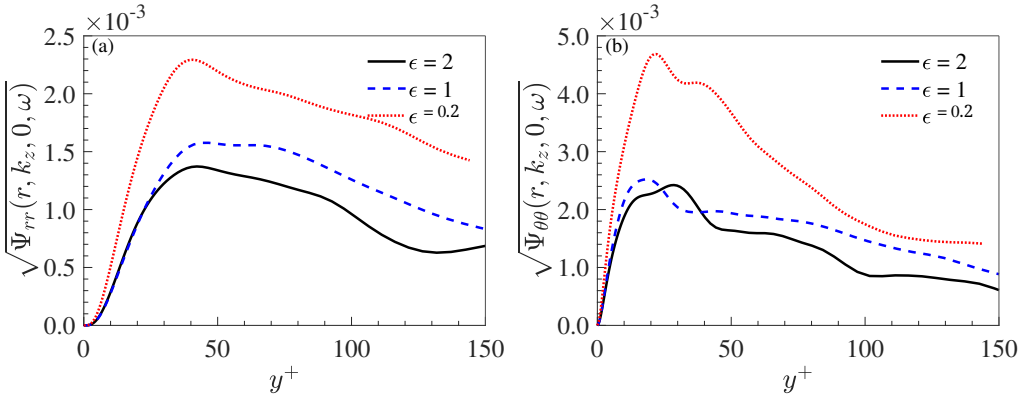
在 $k_z\delta = 0$ 和 $\omega\delta/U_b \approx 0.165$处的分布，如图 14所示，呈现出相似的趋势。不过，值得注意的是，其振幅远小于 $\omega\delta/U_b = 0$处的振幅。随着频率增加，这一趋势进一步延续，如图 15 和 16所示，其中无量纲频率



˜图13：在 $k_z\delta = 0$ 和 $\omega\delta/U_b = 0$条件下，内圆柱表面Lighthill 应力分量的壁面法向分布，其中（a） T_{rr}，（b） $\tilde{T}_{\theta\theta}$。



˜图14：在 $k_z\delta = 0$ 和 $\omega\delta/U_b \approx 0.165$条件下，内圆柱表面Lighthill 应力分量的壁面法向分布，其中（a） T_{rr}，（b） $\tilde{T}_{\theta\theta}$。



˜图15：在 $k_z\delta = 0$ 和 $\omega\delta/U_b \approx 0.33$ 处，内圆柱表面上 Lighthill 应力分量的壁面法向分布：(a) T_{rr} 和 (b) $\tilde{T}_{\theta\theta}$。

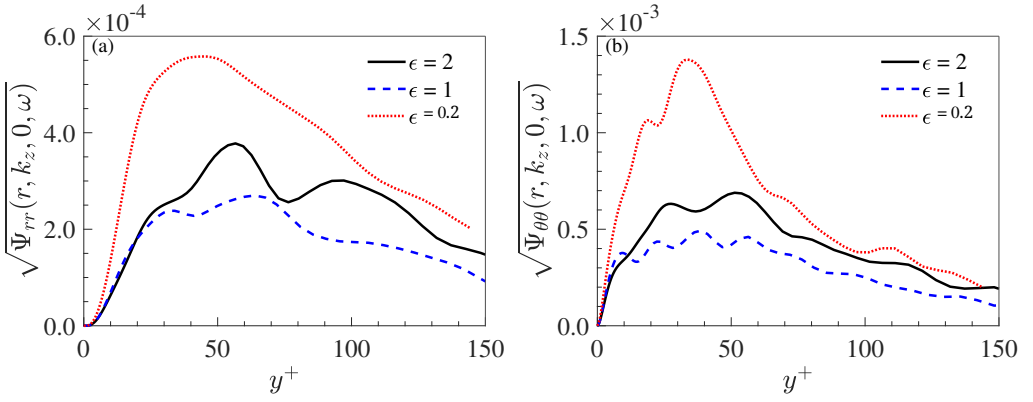


图16：在 $k_z\delta = 0$ 和 $\omega\delta/U_b \approx 1.16$ 处，内圆柱表面上 Lighthill 应力分量 (a) T_{rr} 和 (b) $\tilde{T}_{\theta\theta}$ 的壁面法向分布。

$\omega\delta/U_b \approx 0.33$ 和 1。16，分别如此。这与低波数壁面压力脉动随频率升高而迅速减小这一事实一致。与图13 和 14不同，图15 和 16 显示，$T_{\theta\theta}$ 和 T_{rr} 的幅值随曲率增大而大幅增加。不过，差异并不显著。这两个应力分量在更高频率下的分布见附录B。值得注意的是，随着频率升高，Lighthill 应力分量的收敛效果似乎越来越不理想。

现在可以计算 T_{rr} 和 $T_{\theta\theta}$，并利用（5.4）预测壁面压力脉动的波数-频率谱。请注意，本节建立的模型针对均匀湍流边界层下方的壁面压力脉动，因此并不严格适用于本文的通道流。尽管如此，我们仍可将模型预测与模拟结果进行比较，希望捕捉其重要趋势，而非追求精确吻合。

结果如图17所示，其中将低频下轴对称（$m = 0$）模态的预测WPF波数-频率谱 $\Phi(k_z, m, \omega)$ 与直接数值模拟结果进行了比较。同样，由于我们主要关注低波数范围，在该范围内，WPF在 $k_z\delta = 0$附近呈现“波数白噪声”特性，因此我们展示了频谱 $\Phi(0, 0, \omega)$随 ω变化的情况。预测频谱由图13至16中考察的 T_{rr} 和 $T_{\theta\theta}$ 代入（5.4）式得到。从图17可以看出，随着 ϵ 减小，渐近方程能够很好地预测谱增强。当 ϵ 从2减小到0.2时，直接数值模拟所得WPF谱的幅值增加了近两个数量级。这一趋势也由预测得很好。考虑到 T_{rr} 和 $T_{\theta\theta}$ 在 ϵ 变化时没有显著改变，这种增强确实主要由（5.4）式中的 $\epsilon + h$ 项所贡献。

此外，在声学峰之外，预测频谱与直接数值模拟结果非常吻合。对于 $\epsilon = 2$ 和 $\epsilon = 1$，吻合度略高一些，而 $\epsilon = 0.2$ 的频谱则略有高估。请注意，减小上限

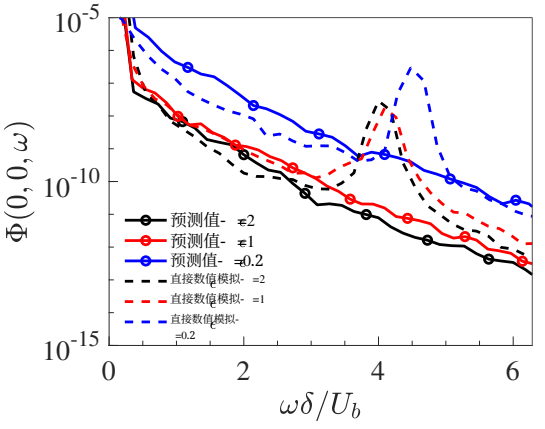


图17：渐近预测与直接数值模拟结果的壁面压力脉动波数-频率谱 $\Phi(0,0,\omega)$ 对比。

积分上限（5.4）会使预测的 Φ 幅值略有显著降低， $\epsilon = 2$ 而对于 1，变化可以忽略不计；对于 $\epsilon = 0.2$则同样如此。这直接证明了，随着内圆柱变薄，距离壁面越近的扰动在产生壁面压力脉动方面越发重要。鉴于该模型确实不同于通道流设置，这样的吻合足以证明（5.4）的有效性。

6. 结论与未来工作

本文对同心环形管道内的流动进行了可压缩直接数值模拟，以研究曲率对圆柱壁面上壁面压力脉动特性的影响。内圆柱半径 R 范围为 0.2δ， δ， 2δ 至 ∞。模拟结果与文献中的已有结果进行了验证，并讨论了曲率对流动统计量的影响。研究发现，随着曲率增大，内圆柱壁上的三个法向雷诺应力分量以及 $\langle u_r'^+ u_z'^+ \rangle$均有所减小，且峰值位置略微向壁面靠近。然而，外圆柱壁上的流动则呈现相反的变化。

关于壁面压力脉动，结果表明，随着 R 减小，壁面压力脉动单点功率谱密度的幅值在中频范围内减小，而在高频范围内增大。一维流向波数-频率谱的幅值在高波数处减小。此外，随着 R 降至 0.2δ，频谱开始在低波数处呈现声学峰，且这些峰的强度随频率升高而不断增强。这些声学峰代表同心环形通道内的声学管道模态。对这些模态的考察表明，平面波模态（第一阶径向模态）在压力幅值方面不区分内壁和外壁；然而，径向阶数越高的模态，在内壁上越具有更高的能量。

零阶二维波数-频率谱在实际应用中至关重要。直接数值模拟表明，减小 R 会使高波数分量减小、低波数分量增大。特别是，低波数增幅在高频处更为显著。基于 Lighthill 声类比的解析建模表明，这主要源于与格林函数相关的“几何”效应。该模型的渐近预测与低频处的直接数值模拟结果吻合良好。 零阶低波数壁面压力脉动主要由周向和径向扰动产生。此外，随着曲率增大，靠近壁面的扰动在壁面压力脉动的产生过程中发挥着越来越重要的作用。这一点很重要，因为它表明可以通过壁面处理实现低波数壁面压力脉动控制。在 $R = 0.2\delta$，较高方位阶数的二维波数-频率谱与零阶谱几乎完全相同，声学脊线附近除外。

本研究主要关注曲率对壁面压力脉动特性的影响。Liu Liu 等 (2024) 考察了马赫数对矩形通道的影响。然而，研究这些影响在环形通道中如何变化也很有意义。通道流与自由边界层中的壁面压力脉动差异也值得研究。这些内容将纳入我们未来的工作。

致谢。作者感谢 Richard D. Sandberg 教授授权使用 HiPSTAR 代码，并感谢 Meng Wang 教授就可压缩直接数值模拟提供了富有启发性的讨论。

基金。本研究得到国家自然科学基金资助，项目编号为 12472263、U25700222、92152202、12432010、12588201 和 12572247。

利益冲突声明。作者声明不存在利益冲突。

附录 A. 其他雷诺应力分量的分布

另外两个雷诺应力分量的壁法向分布，即$\langle u_z'^{+} u_\theta'^{+} \rangle$ 和$\langle u_r'^{+} u_\theta'^{+} \rangle$ 在内、外圆柱壁面上的分布如图18所示。其中，图18（a）和（b）展示了内壁上的这两个分量。首先，正如预期的那样，$\langle u_r'^{+} u_\theta'^{+} \rangle$ 和$\langle u_z'^{+} u_\theta'^{+} \rangle$ 均比其他雷诺应力分量小两个数量级，但前者的值大于后者。此外，平面通道流的值似乎最大。图18（c）和（d）所示的外圆柱壁面上的壁法向分布总体相似。还值得一提的是，如第5节所示，这两个分量均未对零阶壁面压力脉动波数-频率谱作出贡献。

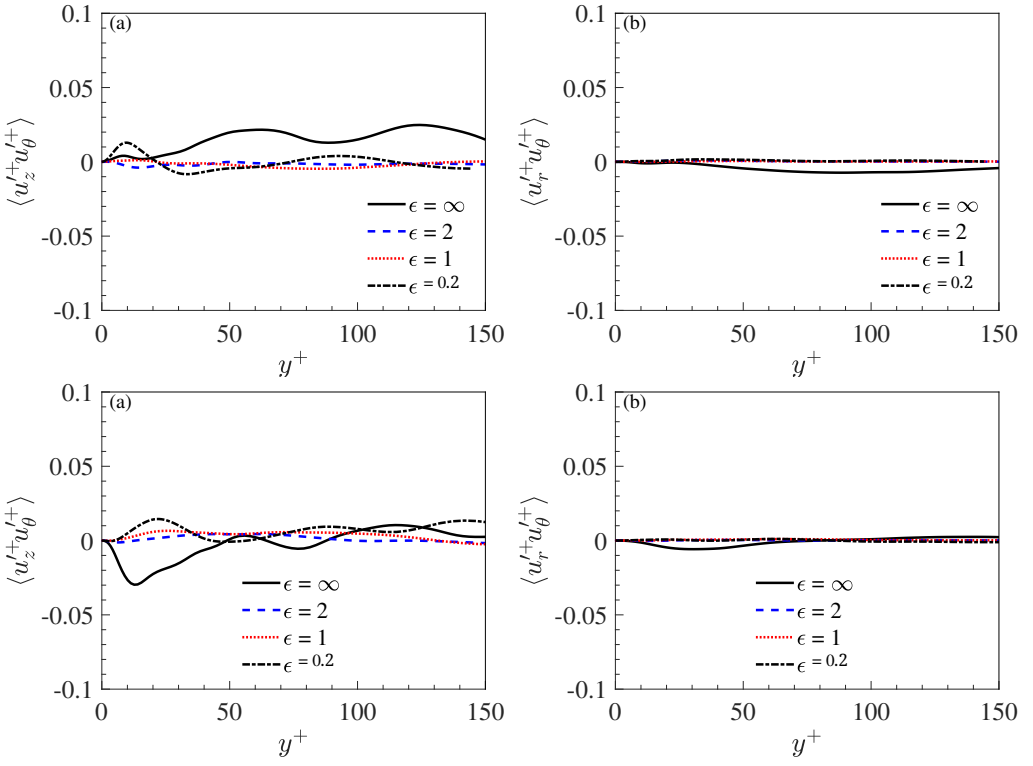
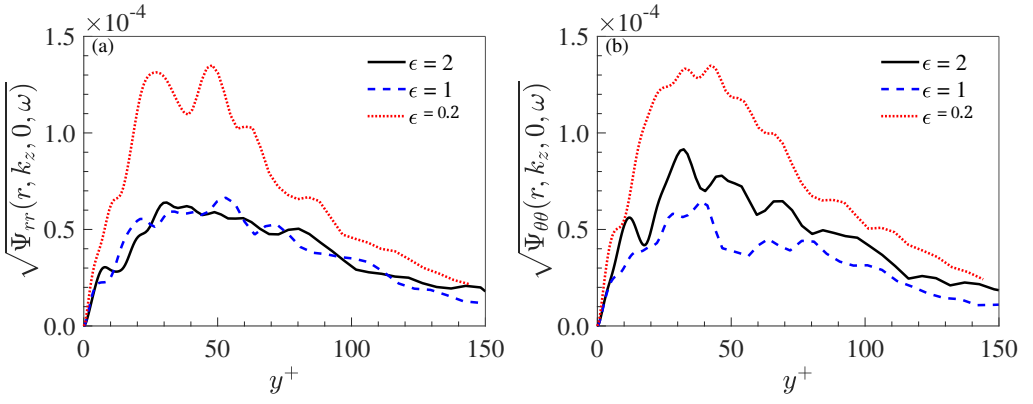


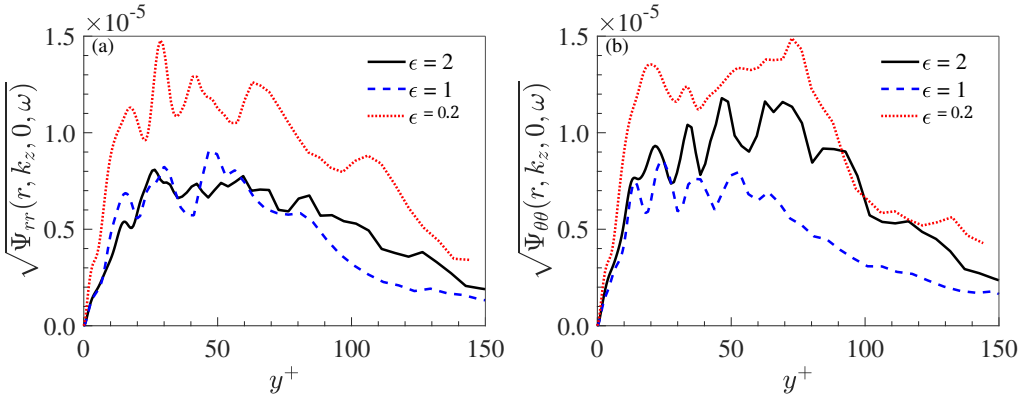
图18：（a）$\langle u_z'^+ u_\theta'^+ \rangle$ 和（b）$\langle u_r'^+ u_\theta'^+ \rangle$ 在内圆柱壁上的雷诺应力壁面法向分布，以及（c）$\langle u_z'^+ u_\theta'^+ \rangle$ 和（d）$\langle u_r'^+ u_\theta'^+ \rangle$ 在外圆柱壁上的分布。



~图19：$k_z\delta = 0$ 和 $\omega\delta/U_b = \pi$处内圆柱表面上 Lighthill 应力分量的壁面法向分布，其中（a）T_{rr}和（b）$\tilde{T}_{\theta\theta}$。

附录B。其他 Lighthill 应力分量的分布

~~~为进一步检验 $T_{\theta\theta}$ 和 T_{rr} 随曲率变化时不会显著改变这一假设，我们还展示了它们在 $\omega\delta/U_b = \pi$ 和 2π处的分布，分别见图19和20。这分别对应于 $k\delta$ 取值为 0。2 和 0。4，
~~~



˜图 20：在 $k_z\delta = 0$ 和 $\omega\delta/U_b = 2\pi$ 处，内圆柱表面上 Lighthill 应力分量的壁面法向分布：(a) T_{rr} 和 (b) $\tilde{T}_{\theta\theta}$ 。

分别。情形 $\omega\delta/U_b = \pi$ 如图 19 所示，与图 16中的情况相似，˜ ˜其中 T_{rr} 和 $T_{\theta\theta}$ 的幅值会随着 $\epsilon = 0.2$增大。然而，差异并不显著。考察图 $\omega\delta/U_b = 2\pi$ 20 中的这些分布，首先可以看到两个分量的幅值都已显著衰减至10^{-5}。此外，可以看出，随着曲率增大，$\tilde{T}_{\theta\theta}$ 和 $\tilde{T}_{rr}$ 都仅略有增加。两者之间的差异很小。从图 13 到 20可以清楚地看出，这些 Lighthill 应力分量在低频下确实没有显著差异。

REFERENCES

Bagheri, E. & Wang, B.-C. 2020 半径比对湍流同心环形管流及其结构的影响。 *International Journal of Heat and Fluid Flow* **86**, 108725。Blake, W. K. 1970 光滑壁面和粗糙壁面上的湍流边界层壁面压力脉动。 *Journal of Fluid Mechanics* **44** (4), 637–660。Bogey, Christophe & Bailly, Christophe 2004 一种用于流动与噪声计算的低色散低耗散显式格式族。 *Journal of Computationalphysics* **194** (1), 194–214。Bull, M. K. 1967 与亚声速湍流边界层流动相关的壁面压力波动。 *Journal of Fluid Mechanics* **28**, 719–7544。Bull, M. K 1996 湍流边界层下方的壁面压力脉动：对四十年研究的一些思考。 *Journal of Sound and Vibration* **190**, 299–315。Cohen, E. & Gloerfelt, X. 2018 压力梯度对湍流边界层下方壁面压力的影响。 *Journal of Fluid Mechanics* **838**, 715–758。Corcos, G. M. 1963 湍流中的压力分辨。 *Journal of Acoustical Society ofAmerica* **35**, 192–199。Crighton, David George, Dowling, Ann P, Ffowcs-Williams, J. E., Heckl, Manfred, Leppington, FG & Bartram, James F 1992 分析声学现代方法讲义 出版方：美国声学学会。Deuse, Mathieu & Sandberg, Richard D. 2020 受控扩散翼型的不同噪声产生机制

及其对马赫数的依赖。 *Journal of Soundand Vibration* **476**, 115317。Dhanak, M. R. 1988 圆柱体上的湍流边界层：低马赫数流动引起的低波数表面压力谱。 *Journal of Fluid Mechanics*191, 443–464。Dowling, A.P. 1998 水下流动噪声。 *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*10 (1), 135–153。Ffowcs-Williams, J. E. 1965 有限马赫数下边界层流动诱发的表面压力脉动。 *Journal of Fluid Mechanics* **22** (3), 507–519, 出版方：剑桥大学出版社。Gloerfelt, X. & Berland, J. 2013 湍流边界层噪声：马赫数为0.5时的直接辐射。 *Journal of Fluid Mechanics* **723**, 318–351。Harrison, M. 1958 湍流边界层相邻壁面上的压力脉动。第1260号报告。美国海军戴维·泰勒模型水池。Howe, M. S. 1987 关于声学波数附近湍流边界层壁面压力谱结构的研究。 *Proceedings of the Royal Society, London A*412, 389–401。Kennedy, C. A., Carpenter, M. H. & Lewis, R. M. 2000 可压缩纳维–斯托克斯方程的低存储显式龙格–库塔格式。 *Appl. Numer. Math.* **35** (3), 177–219。Kennedy, Christopher A. & Gruber, Andrea 2008 可压缩流体纳维–斯托克斯方程中对流项的降混叠表达式。 *Journal of Computational Physics* **227** (3), 1676–1700。Kraichnan, Robert H 1956 平板上方湍流流动中的压力脉动。 *TheJournal of the Acoustical Society of America* **28** (3), 378–390, 出版方：美国声学学会。Liu, Y., Wang, K. & Wang, M. 2024 低马赫数湍流通道流中的亚对流壁面压力脉动。 *Journal of Fluid Mechanics* **984** (R2), 1–13。Neves, J. C. & Moin, P. 1994*a* 凸横向曲率对壁面湍流的影响。第一部分：速度与涡量。 *Journal of Fluid Mechanics* **272**, 349–381。Neves, J. C. & Moin, P. 1994*b* 凸横向曲率对壁面湍流的影响。第二部分：压力脉动。 *Journal of Fluid Mechanics* **272**, 383–406。Pope, S. B. 2000 *Turbulent Flows*。剑桥大学出版社。Sandberg, R. D., Michelassi, V., Pichler, R., Chen, L. & Johnstone, R. 2015低压涡轮的可压缩直接数值模拟——第一部分：方法。*J. Turbomach.* **137** (5), 051011。White, F. M. 1991 *Viscous fluid flow*。麦格劳-希尔，纽约。Willmarth, W. W. 1956 湍流边界层中的壁面压力波动。 *Journal of Acoustical Society of America* **28**, 1048–1053。Willmarth, W. W. 1958 湍流边界层中脉动壁面压力的时空相关。 *Journal of Aerospace Science* **25**, 335–336。Willmarth, W. W. 1975 湍流边界层下方的压力脉动。 *AnnualReview of Fluid Mechanics* **7**, 13–36。Willmarth, W. W., Winkel, R. E., Sharma, L. K. & Bogar, T. J. 1976 圆柱上的轴对称湍流边界层：平均速度剖面和壁面压力波动。 *Journal of Fluid Mechanics* **76**, 35–64。

Willmarth, W. W. & Yang, C. S. 1970 平板和圆柱湍流边界层下方的壁面压力波动。 *Journal of Fluid Mechanics* **41**, 47–80.