基于托普利兹结构矩阵-向量张量分解的MIMO波束地图重构

Hao Sun、Junting Chen，*IEEE*会员，以及Xianghao Yu，*IEEE*高级会员

arXiv:2601.04599v1 [eess.SP] 8 Jan 2026

摘要——**随着无线网络迈向第六代（6G），了解定向波束覆盖的空间分布对于波束管理和链路优化变得日益重要。多输入多输出（MIMO）波束图能够提供这种空间感知能力，但由于空间覆盖不完整且角度变化剧烈，基于稀疏测量值进行精确构建仍然面临挑战。本文提出一种张量分解方法，用于根据有限的测量值重构MIMO波束图。通过将测量值从笛卡尔坐标系转换到极坐标系，我们揭示了与不同传播条件相关的矩阵-向量外积结构。具体而言，我们从数学上证明，表示波束空间增益的矩阵因子因阵列响应具有平移不变性而呈现固有的托普利兹结构，而向量因子则捕获距离相关衰减。利用这些结构先验，我们构建了一个正则化张量分解问题，以联合重构视距（LOS）、反射和遮挡传播条件。仿真结果证实，即使在稀疏采样场景下，与最先进基线方法相比，所提方法也显著提高了数据效率，归一化均方误差（NMSE）降低了20%以上。**

索引词—**矩阵-向量、多输入多输出波束图、极坐标系、稀疏测量值、张量分解、托普利兹。**

I. 引言

大规模多输入多输出（MIMO）已成为第五代（5G）网络的关键技术，并有望在未来的第六代（6G）网络中继续发挥核心作用，这得益于其能够提供高空间复用增益、强大的波束成形增益以及灵活的干扰抑制能力[1]–[3]。然而，要充分发挥这些优势，需要高维信道状态信息（CSI），这会带来巨大的信道训练和反馈开销。为减轻这一负担，MIMO波束图应运而生，成为一种结构化表示，用于描述空间分布覆盖区域内的定向波束、信号强度和链路质量 [4], [5]。MIMO波束图无需进行大量信道训练，即可实现干扰管理、自适应波束成形和节能功率分配 [6], [7],，为规划和优化高密度城市区域及复杂室内部署提供了强有力的工具 [8]–[10]。

然而，如何利用有限的测量值高效构建准确的多输入多输出波束图，仍鲜有研究。首要挑战在于稀疏测量导致空间覆盖不完整。当观测数据有限时，难以全面捕捉波束传播模式或信号交互，从而造成地图中存在缺失区域和表征不足的区域。其次，多输入多输出波束图通常呈现更强的空间变化，因为接收信号强度（RSS）不仅受传播环境影响，也受波束成形模式影响。因此，传统的插值方法或基于张量的方法通常需要更多测量值才能达到令人满意的精度。

多输入多输出波束图可视为一种特殊类型的无线电地图 [11]。经典插值方法（如克里金法 [12], [13], 、局部多项式回归 [14], 和基于核的方案 [15], ）通过利用空间平滑性或邻域信息来估计未观测位置。克里金法通常会显式地对空间相关函数建模，这在大规模场景中可能产生显著的计算开销，并且可能需要预先了解底层空间结构。局部多项式回归和基于核的方法依赖局部性和平滑性假设，在处理高维特征空间或测量值分布不规则的情况时，效果可能会有所下降。基于矩阵的方法利用了这样一种观察：无线电地图在以矩阵形式排列时，通常具有低秩特性。这一特性使得贝叶斯学习 [16], [17],、字典学习 [18]和矩阵补全 [19] 等技术能够推断缺失的测量值，或对未观测区域中与波束相关的信息进行外推。基于张量的方法 [7], [20], [21]则进一步利用无线电地图中固有的多维结构，通过低秩张量分解对多个域（例如空间、频率或波束索引）之间的相关性进行建模。然而，这些方法可能无法充分利用多输入多输出波束图中的潜在结构，而该结构源自不同角度对应的不同波束图样。

基于深度学习的方法，包括变分自编码器（VAE） [22], 生成对抗网络（GAN）

Hao Sun 曾就职于香港中文大学（深圳）科学与工程学院（SSE）、深圳未来智能网络研究院（FNii-Shenzhen）以及广东省未来智能网络重点实验室，地址为中国广东省深圳市518172。现就职于香港城市大学电气工程系，地址为中国香港（电子邮箱：hao.sun@cityu.edu.hk）。

Junting Chen 任职于中国香港深圳的香港中文大学科学与工程学院（SSE）、深圳未来智能网络研究院（FNii-Shenzhen）以及广东省未来智能网络重点实验室，地址为中国广东省深圳市 518172（电子邮箱：juntingc@cuhk.edu.cn）。

Xianghao Yu 任职于香港城市大学电气工程系，香港（电子邮箱：alex.yu@cityu.edu.hk）。

[23]–[25],以及基于扩散的方法 [26], [27], 将无线电地图视为一层或多层二维图像，并利用神经网络根据大量训练数据识别常见模式。这些方法需要大量训练数据，而这些数据可能并非总是可用。

为利用不同波束索引下波束图样中蕴含的结构，本文首先将稀疏的笛卡尔测量转换到极坐标系中，该坐标系由基站（BS）的波束角、用户设备（UE）的空间角以及传播距离参数化。随后，将这些测量值聚合为一个三维（3D）张量，其中每个元素对应于由角度和距离参数定义的特定极坐标区间内的接收信号强度值。在不同传播条件下（例如视距（LOS）、反射和遮挡），所得张量呈现矩阵-向量外积结构。其中，矩阵因子称为波束空间增益，用于描述波束成形图样与用户设备空间角度之间的相互作用；向量因子则对距离相关功率衰减进行建模。此外，研究表明，波束空间增益矩阵具有固有的托普利兹结构，体现了由角度采样和波束索引排序所引起的平移不变角相关性。

基于这一结构性洞见，我们提出一种托普利兹结构的矩阵-向量张量分解框架，用于在多种传播条件下重建MIMO波束图。在视距、反射和遮挡分量并存的一般情况下，波束空间张量被建模为若干矩阵-向量项之和，每一项对应一种传播条件。所得优化问题通过交替最小化过程求解。具体而言，在托普利兹正则化下，采用近端梯度迭代更新矩阵因子；而向量因子则通过一个带约束的二次规划求得。

本文的贡献总结如下：

- 我们提出一种基于极坐标变换的张量表示，用于构建MIMO波束图。该张量模型采用矩阵-向量外积的形式，其中矩阵分量呈现托普利兹结构，从而能够利用稀疏样本高效构建。

- 我们提出一种广义托普利兹结构张量分解模型，以处理存在强反射和遮挡的复杂场景。具体而言，我们对波束空间矩阵引入软托普利兹正则化，并对距离域衰减向量施加单调性约束，以确保物理一致性。

- 我们针对所提出的矩阵-向量张量分解模型设计了一种结构感知交替最小化算法。对于一般传播场景，该算法通过类托普利兹正则化交替更新波束空间增益矩阵和距离域衰减向量。对于仅存在纯视距区域的特殊情形，我们进一步利用对称托普利兹结构，并将其作为硬约束，从而使每个波束空间增益矩阵都可由单个托普利兹行参数化，并通过闭式最小二乘更新进行估计，从而减少自由度和计算复杂度。

- 在不同采样率和传播环境下进行的大量仿真表明，与KNN、TPS 和传统的基于 BTD 的基线方法相比，所提出的托普利兹结构张量分解方法在重构归一化均方误差方面提升了 20% 以上。

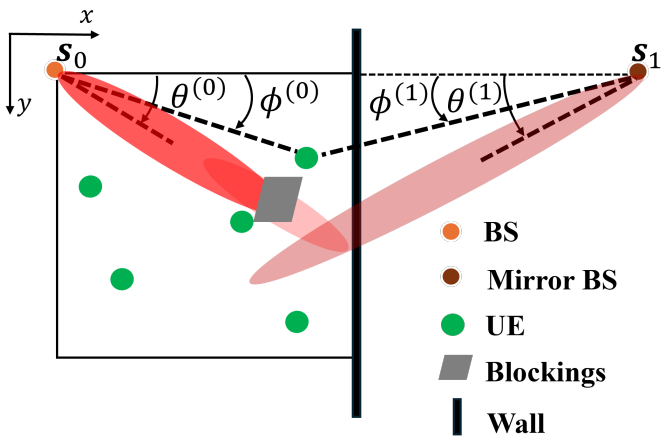


图 1. 复杂场景，展示来自基站的直达路径、经由镜像基站的反射路径，以及受物理遮挡影响的阻塞路径。

本文其余部分安排如下。第二节介绍传播、波束和测量模型。第三节通过将笛卡尔测量转换到极坐标域，并揭示其底层的托普利兹矩阵-向量结构，构建多输入多输出波束图的结构化张量表示。第四节建立托普利兹正则化矩阵-向量张量分解问题，并提出求解该问题的交替最小化算法。第五节推导纯 LOS 区域的简化分解模型。第六节给出数值结果，第七节总结全文。

记号：向量用粗斜体字母 $\boldsymbol{x}$表示，矩阵用粗斜体大写字母 $\boldsymbol{X}$表示，张量用粗花体字母 X 表示。对于矩阵 $\boldsymbol{X}$，$[\boldsymbol{X}]_{ij}$ 表示 $\boldsymbol{X}$中第 i 行、第 j 列的元素。对于张量 X，$[\mathcal{X}]_{i,j,k}$表示索引为 (i, j, k) 处的元素。符号‘$\circ$’表示外积，‘$*$’表示逐元素乘积，$\|\cdot\|_2$ 表示 l_2 范数，$\|\cdot\|_F$ 表示弗罗贝尼乌斯范数。算子 vec(·) 将矩阵的列（或张量切片的元素）堆叠成列向量，diag($\boldsymbol{x}$)表示以 $\boldsymbol{x}$的元素为主对角线元素的对角矩阵。转置记作 $(\cdot)^{\mathrm{T}}$。$\mathbb{E}\{\cdot\}$表示统计期望。$\mathcal{O}(x)$表示 $|\mathcal{O}(x)|/x \leq C$，对所有满足 C 的 $x > x_0$，且 x_0 为正实数。

II. 系统模型

A. 传播与波束模型

考虑室内环境中从基站到用户设备（用户设备）的下行链路信道。基站位于

原点 $\boldsymbol{s}_0 = (0, 0)$处，配备有一个由 N_t 个阵元组成的均匀线性天线阵列（均匀线性阵列）。阵元沿 y轴排列，其指向方向朝向 x轴正方向。感兴趣的室内区域 $\mathcal{D}$ 位于坐标系的第一象限，如图1所示。

考虑从 $\boldsymbol{s}_0$ 到 $\mathcal{D}$中任意位置的无线电传播。由于高阶反射会因多次传播损耗而严重衰减，与直达路径和单次反射路径相比贡献可忽略不计，因此只考虑图1中来自右墙的一次反射 [28]。因此，正对基站的右墙是主要反射体。根据镜面反射定律，我们引入镜像位置 $\boldsymbol{s}_1$，其定义为：右墙是 $\boldsymbol{s}_0$ 与 $\boldsymbol{s}_1$连线的垂直平分线。这样，经由右墙的反射路径在几何上等价于从位于 $\boldsymbol{s}_1$的镜像基站发出的镜像直达路径。

基站配置了一组 I 波束用于环境感知，每个波束都只有一个主瓣，指向特定方向 θ_i、 $i = 1、2、\ldots\ldots I$，且旁瓣的能量显著低于主瓣。均匀线性阵列下构造此类波束的典型方法是使用离散时间傅里叶变换（DFT）向量集进行波束成形 [2], [29]。由于基站位于 $\mathcal{D}$的拐角处，出于感知目的，只需考虑波束方向 $\theta_i \in (0、\ \pi/2)$。

将基站处均匀线性阵列的阵列响应向量 $\boldsymbol{e}(\theta) \in \mathbb{C}^{N_t}$ 记为

$$\boldsymbol{e}(\theta) = [1,\ \exp(-\jmath\pi\sin\theta), \cdots, \exp(-\jmath\pi(N_t-1)\sin\theta)]^{\mathrm{T}}$$

其中 $\jmath = \sqrt{-1}$。位置 $\boldsymbol{z} \in \mathcal{D}$处的信道向量 $\boldsymbol{h}$ 建模为

$$\boldsymbol{h} = \alpha_0 \boldsymbol{e}(\phi_0(\boldsymbol{z}))e^{-\jmath 2\pi f_c \tau_0} + \alpha_1 \boldsymbol{e}(\phi_1(\boldsymbol{z}))e^{-\jmath 2\pi f_c \tau_1} + \boldsymbol{h}^{\epsilon} \quad (1)$$

其中， α_0 和 τ_0 分别表示直达路径的复增益和时延；直达路径可能因阻塞而显著衰减。函数 $\phi_0(\boldsymbol{z})$表示从位置为 $\boldsymbol{s}_0$ 的基站到位置 $\boldsymbol{z}$的角度。同样， α_1 和τ_1 分别表示来自右墙的可能反射路径的复增益和时延。注意，这条路径也可能被阻塞或不存在，从而导致 $\alpha_1 \approx 0$。函数$\phi_1(\boldsymbol{z})$表示从镜像基站到位置$\boldsymbol{z}$的角度，即反射路径离开时的角度。最后，项 $\boldsymbol{h}^{\epsilon}$ 表示所有残余路径。

反射环境可能更加复杂，并且还可能存在其他几个镜像基站。由其他镜像基站产生的反射的构造方式与式（1）中的第二项类似。

B. 测量模型

通过利用接收信号 [28], [30]的固有特性，可以分离直达路径和反射路径。基于此，我们建立测量模型。对于第i个波束，位置$\boldsymbol{z}_m$ 处与直达路径相关的 RSS 建模为

$$\gamma_i^{(0)}(\boldsymbol{z}_m) = \mathbb{E}\left\{\left|\alpha_0 \boldsymbol{w}_i^{\mathrm{H}} \boldsymbol{e}(\phi_0(\boldsymbol{z}_m))e^{-\jmath 2\pi f_c \tau_0}\right|^2\right\} + n^{(0)} \quad (2)$$

其中， $\mathbb{E}\{\cdot\}$ 表示对 α_0中小尺度衰落引起的随机性求期望， $\boldsymbol{w}_i \triangleq \boldsymbol{e}(\theta_i)$为波束成形向量， $n^{(0)}$ 表示由散射路径贡献的残余能量；这些路径的时延与直达路径的时延接近，因此无法完全分辨。我们假设 $n^{(0)}$ 服从高斯分布，即 $n^{(0)} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$。

类似地，反射路径对应的接收信号强度建模为

$$\gamma_i^{(1)}(\boldsymbol{z}_m) = \mathbb{E}\left\{\left|\alpha_1 \boldsymbol{w}_i^{\mathrm{H}} \boldsymbol{e}(\phi_1(\boldsymbol{z}_m))e^{-\jmath 2\pi f_c \tau_1}\right|^2\right\} + n^{(1)} \quad (3)$$

其中 $n^{(1)}$ 表示与反射路径具有相近时延、因而无法区分的散射路径的能量 α_1 。我们还假设 $n^{(1)} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$。

在上述表述中，假设直达路径α_0 和反射路径 α_1 能够从信道向量 $\boldsymbol{h}$ 中提取出来，但存在一定的不确定性，分别用 $n^{(0)}$ 和 $n^{(1)}$表示。提取精度取决于功率-角度-时延分布的分辨能力，而该能力又由系统带宽和天线阵列结构决定。

在此测量模型下，第 i个波束在位置 $\boldsymbol{z}_m$处产生两类观测，即 $\gamma_i^{(0)}(\boldsymbol{z}_m)$和$\gamma_i^{(1)}(\boldsymbol{z}_m)$，分别对应直达路径和反射路径。收集所有此类观测可形成两个稀疏测量集

$$\left\{(\theta_i, \boldsymbol{z}_m, \gamma_i^{(0)}(\boldsymbol{z}_m))\right\} \quad \text{and} \quad \left\{(\theta_i, \boldsymbol{z}_m, \gamma_i^{(1)}(\boldsymbol{z}_m))\right\}.$$

我们的目标是根据这些稀疏测量重建完整的多输入多输出波束图。

III. 通过坐标变换构建托普利兹结构张量模型

本节将原先在笛卡尔坐标系（x， y）中定义的测量集 $\{\theta_i, \boldsymbol{z}_m, \gamma_i^{(l)}(\boldsymbol{z}_m)\}$ 变换到极坐标系（ ϕ， d），并说明由此得到的张量呈现矩阵-向量结构；在满足一定条件时，矩阵部分将成为托普利兹矩阵。

A. 坐标变换

为便于说明，我们聚焦于视距场景；借助镜像基站 s_1，反射路径情形也可以类似地处理。为简化符号，本小节省略上标“(l)”。

1）从笛卡尔坐标变换到极坐标：回顾一下，基站位于 $\boldsymbol{s}_0 = (x_0, y_0)$。对于每个测得的用户设备位置 $\boldsymbol{z}_m = (x_m, y_m)$，其相对于 $\boldsymbol{s}_0$ 的极坐标定义为

$$d_m = \left\|\boldsymbol{z}_m - \boldsymbol{s}_0\right\|_2, \quad \phi_m = \arctan\frac{y_m - y_0}{x_m - x_0} \quad (4)$$

其中，arctan 返回点（x_m， y_m）相对于正 x轴的极角。

为了构建测量张量，我们将角度域和径向域离散化为均匀网格

$$\{\phi_1, \ldots, \phi_J\}, \quad \phi_j = (j-1)\Delta_\phi$$

$$\{d_1, \ldots, d_K\}, \quad d_k = (k-1)\Delta_d$$

其中，Δ_ϕ 和 Δ_d 分别表示角度域和径向域中的离散化步长。每个测量值（ϕ_m，d_m）通过以下方式分配到最近的角度区间和径向区间（ϕ_j，d_k）

$$j = 1 + \left\lfloor \frac{\phi_m}{\Delta_\phi} \right\rceil, \; k = 1 + \left\lfloor \frac{d_m}{\Delta_d} \right\rceil, \tag{5}$$

其中，$\lfloor \cdot \rceil$ 表示舍入到最接近的整数。

将测量值 $\gamma_i(\boldsymbol{z}_m)$记为$\gamma_{m,\,i}$。随后，我们构造一个结构化张量 $\boldsymbol{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{I\times J\times K}$，其中条目 $[\boldsymbol{\mathcal{X}}]_{i,\,j,\,k}$汇总了波束 θ_i 在极坐标区间（ϕ_j，d_k）内获取的所有测量值：

$$[\boldsymbol{\mathcal{X}}]_{i,j,k} = \begin{cases} \dfrac{1}{|\mathcal{S}_{j,k}|} \displaystyle\sum_{m\in\mathcal{S}_{j,k}} \gamma_{m,i}, & \text{if } \mathcal{S}_{j,k} \neq \varnothing \\ \text{unobserved}, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6}$$

其中，$\mathcal{S}_{j,\,k}$ 表示角坐标和径向坐标位于区间（ϕ_j，d_k）内的测量值的索引集。

2）托普利兹结构：为了解张量 $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ 的内在结构，我们分析式（2）中建立的直达路径测量模型。式（2）中的第一项表示我们旨在建模的主要信号分量。对于极坐标为（ϕ_j，d_k）的位置 $\boldsymbol{z}_m$，式（2）中的接收信号强度满足

$$\mathbb{E}\{\gamma_{m,i}\} = \mathbb{E}\{|\alpha_0|^2\} \cdot \left|\boldsymbol{e}^{\mathrm{H}}(\theta_i)\boldsymbol{e}(\phi_j)\right|^2. \tag{7}$$

于是，式（2）可写为距离相关功率衰减项 $P(d_k)$ 与波束成形增益项$\boldsymbol{e}^{\mathrm{H}}(\theta_i)\boldsymbol{e}(\phi_j)$的乘积

$$\gamma_{m,i} = P(d_k) \cdot \left|\boldsymbol{e}^{\mathrm{H}}(\theta_i)\boldsymbol{e}(\phi_j)\right|^2 + \epsilon \tag{8}$$

其中，$P(d_k)$近似表示随距离 d_k 衰减的 $\mathbb{E}\{|\alpha_0|^2\}$，而 $\epsilon \sim \mathcal{N}(0,\ \delta^2)$则捕获第一项未涵盖的随机噪声。

根据式 (8) 的结构，我们定义距离域衰减向量 $\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^K$，其各元素由$\rho_k = P(d_k)$给出。我们还定义波束空间增益矩阵$\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{I\times J}$，该矩阵仅捕获波束成形角度 θ_i 与空间角度 ϕ_j之间的相互作用。其第（i，j）个元素为

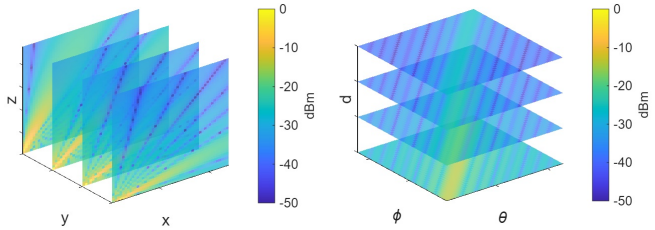
$$\begin{aligned}[\boldsymbol{G}]_{i,j} &= \left|\boldsymbol{e}^{\mathrm{H}}(\theta_i)\boldsymbol{e}(\phi_j)\right|^2 \\ &= \left|\sum_{n=0}^{N_t-1} \exp\left(\jmath\pi n(\sin(\theta_i) - \sin(\phi_j))\right)\right|^2. \end{aligned} \tag{9}$$

因此，根据式 (8)–(9)，测量值 $\gamma_{m,\,i}$ 构成张量 $\boldsymbol{\mathcal{X}}$，可表示为秩一矩阵-向量外积模型

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} = \boldsymbol{G} \circ \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\mathcal{E}}, \tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{\mathcal{E}}$ 表示残余能量，并将其建模为噪声。

波束空间增益矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的一个关键性质是，在特定条件下，它会呈现高度结构化的形式，即具有托普利兹结构和对称结构。



(a) (b)

图 2. (a) 笛卡尔坐标系下的 MIMO波束图。(b) 转换至极坐标系后的MIMO波束图，显示出可用于结构化重构的托普利兹和对称结构。

引理1（托普利兹结构和对称结构）。若选择角度θ_i 和 ϕ_j，使其正弦值构成均匀网格，即 $\sin(\theta_i) = i/I$ 和 $\sin(\phi_j) = j/J$，且 $I = J$，则矩阵 $\boldsymbol{G}$呈现托普利兹结构和对称结构。

证明。见附录 A。 □

这一结构特性尤为重要，因为它意味着整个波束空间增益矩阵 $\boldsymbol{G}$ 只有少量自由度，从而便于根据稀疏测量值进行高效的张量重构。

图 2(a) 展示了笛卡尔坐标系中的 MIMO波束图 $\boldsymbol{\mathcal{X}}$，可直观呈现不同方向上的波束图样。然而，这种表示形式并未明确体现可利用的结构特性。相比之下，图 2(b) 展示了极坐标系中 $\boldsymbol{\mathcal{X}}$的直射波束分量，其中显现出明显的托普利兹结构和对称结构。这些结构特性对于根据稀疏测量值可靠地重构 MIMO波束图至关重要，而在笛卡尔坐标系表示中则难以直接观察到。

B. 存在反射和遮挡时的张量模型

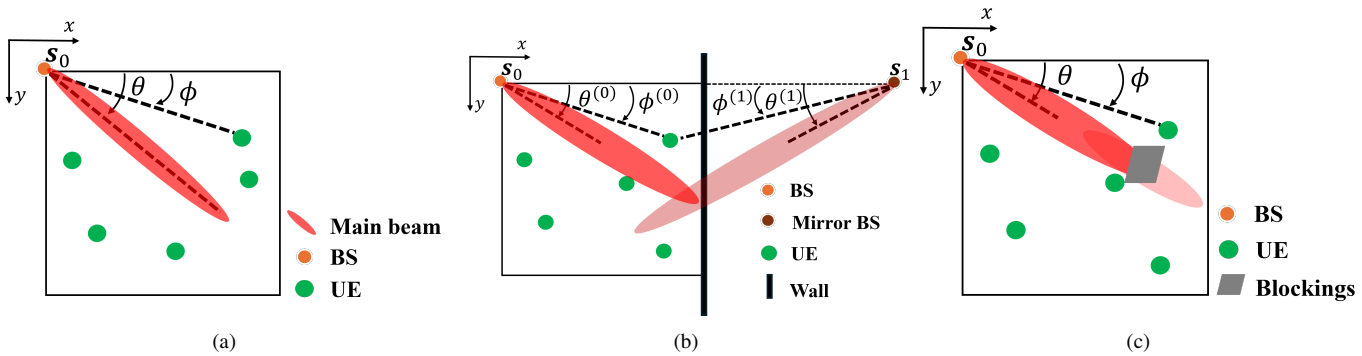
存在反射和遮挡时，我们提出一个秩为 R 的叠加张量模型，以捕捉传播的主要影响，表示如下：

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} = \sum_{r=1}^{R} \boldsymbol{G}_r \circ \boldsymbol{\rho}_r + \boldsymbol{\mathcal{E}} \tag{11}$$

其中，每个矩阵 $\boldsymbol{G}_r \in \mathbb{R}^{I\times J}$ 表示与第 r 种传播条件相关联的波束空间增益模式，而 $\boldsymbol{\rho}_r \in \mathbb{R}^K$ 则对相应的距离相关衰减进行建模。秩 R 反映了环境中的传播条件数量，通常体现为视距、反射和遮挡共存。

一般模型 (11) 可进行调整，以描述各种传播场景，具体内容将在以下小节中说明。

1）纯视距区域：在没有强反射的纯视距区域中，如图3(a)所示，张量 $\boldsymbol{\mathcal{X}}$可表示为式（10）中的简单矩阵-向量张量分解，其中式（11）中的秩降至 $R = 1$。



(a) (b) (c)

图3. 三种常见的波束传播场景：(a) 纯视距区域。(b) 视距与反射共存。(c) 视距与遮挡共存。

2）视距与反射共存：对于视距与反射共存的区域，如图3(b)所示，与式（7）–（8）类似，对应于每种传播条件的测量值可写为

$$\gamma_{m,i}^{(l)} = P(d_k^{(l)}) \cdot \left| \boldsymbol{e}^{\mathrm{H}}(\theta_i) \boldsymbol{e}(\phi_j^{(l)}) \right|^2 + \epsilon$$

其中，$l = 0$ 表示视距条件，$l = 1$ 表示反射条件。对于每种传播条件，测量张量$\boldsymbol{\mathcal{X}}$都可以表示为一种简单的矩阵-向量张量分解

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(l)} = \boldsymbol{G}^{(l)} \circ \boldsymbol{\rho}^{(l)} + \mathcal{E}, \quad l = 0, 1.$$

由于反射来自镜像基站 $\boldsymbol{s}_1$，且其波束图样与基站 $\boldsymbol{s}_0$相同，在 $\phi_j^{(0)}$ 和 $\phi_j^{(1)}$ 的相同范围内，我们有 $\boldsymbol{G}^{(0)} = \boldsymbol{G}^{(1)} \triangleq \boldsymbol{G}$。沿距离维度拼接分离后的测量值，可以构造一个增广张量，表示为

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} = \mathrm{cat}(\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(0)}, \boldsymbol{\mathcal{X}}^{(1)}) + \mathcal{E} = \boldsymbol{G} \circ \boldsymbol{\rho} + \mathcal{E} \tag{12}$$

其中，$\boldsymbol{\rho} = [\boldsymbol{\rho}^{(0)}; \ \boldsymbol{\rho}^{(1)}] \in \mathbb{R}^{2K}$。这种构造保留了张量的秩-1结构。

3) 视距与遮挡共存：如图3(c)所示，当直达路径受到部分遮挡时，存在两种不同的条件：遮挡前的视距区域和遮挡后的非视距区域。

因此，将式（8）修改为

$$\gamma_{m,i} = P_0(d_k, \phi_j) \cdot \left| \boldsymbol{e}^{\mathrm{H}}(\theta_i) \boldsymbol{e}(\phi_j) \right|^2 + \epsilon \tag{13}$$

其中，功率衰减项 P_0 现在同时取决于 d_k 和 ϕ_j。对于固定的 d_k，不同的 ϕ_j 可能对应视距区域或非视距区域；存在阻塞时，接收功率$\gamma_{m,\ i}$会更低。

为明确体现角度依赖性，我们进一步将式（13）表示为

$$\gamma_{m,i} = P(d_k) \cdot \alpha(\phi) \left| \boldsymbol{e}^{\mathrm{H}}(\theta_i) \boldsymbol{e}(\phi_j) \right|^2 + \epsilon \tag{14}$$

其中 $\alpha(\phi)$是一个随 ϕ变化的方向性衰减因子。因此，对于同时存在视距区域和非视距区域的距离 d_k ，我们使用 $\boldsymbol{G}_2 \circ \boldsymbol{\rho}_2$近似相应的测量值$\gamma_{m,\ i}$，而纯视距区域则由 $\boldsymbol{G}_1 \circ \boldsymbol{\rho}_1$表示。这形成了一个秩-$R = 2$ 模型，

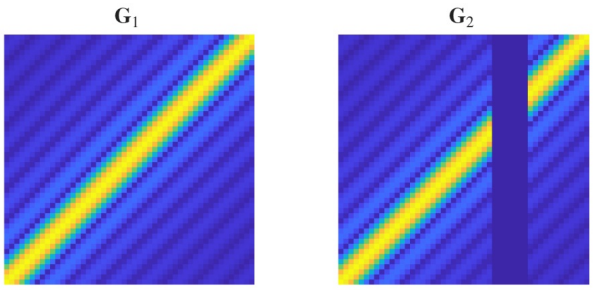


图4. $\boldsymbol{G}_1$ 和 $\boldsymbol{G}_2$的可视化图。 $\boldsymbol{G}_1$ 呈现出与视距区域相对应的托普利兹结构，而 $\boldsymbol{G}_2$ 呈现出准托普利兹模式，其中暗色区域表示信号遮挡。

其中整体张量表示为两个秩一分量之和

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} = \boldsymbol{G}_1 \circ \boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{G}_2 \circ \boldsymbol{\rho}_2 + \mathcal{E}. \tag{15}$$

图4展示了 $\boldsymbol{G}_1$ 和 $\boldsymbol{G}_2$ 的可视化描述。矩阵 $\boldsymbol{G}_1$ 呈现出明显的托普利兹结构，而 $\boldsymbol{G}_2$由于存在遮挡而呈现出准托普利兹模式，其中较暗区域对应被遮挡区域。

4）视距、反射与遮挡并存：图1所示场景中，视距、反射和遮挡同时存在。在这种情况下，观测到的波束图样可解释为真实基站 $\boldsymbol{s}_0$ （无墙面反射）与其镜像基站 $\boldsymbol{s}_1$ （用于模拟墙面反射）的贡献叠加而成。

仅考虑从基站$\boldsymbol{s}_0$发出的传播时，设定与第三节B.3相同。区域 $\boldsymbol{G}_1$对应无遮挡视距区域，而区域$\boldsymbol{G}_2$ 则表示直达路径被建筑物阻挡的遮挡区域。

对于图 5 所示来自镜像基站 $\boldsymbol{s}_1$的传播，视距、反射和遮挡效应同时存在。区域 $\boldsymbol{G}_1$ 和 $\boldsymbol{G}_2$ 再次出现，分别对应与 $\boldsymbol{s}_1$ 的距离小于 d_1的镜像视距区域，以及与 $\boldsymbol{s}_1$ 的距离介于 d_1 和 d_2之间的镜像遮挡区域。此外，还出现了一个独特的区域 $\boldsymbol{G}_3$ ，在该区域中，反射路径

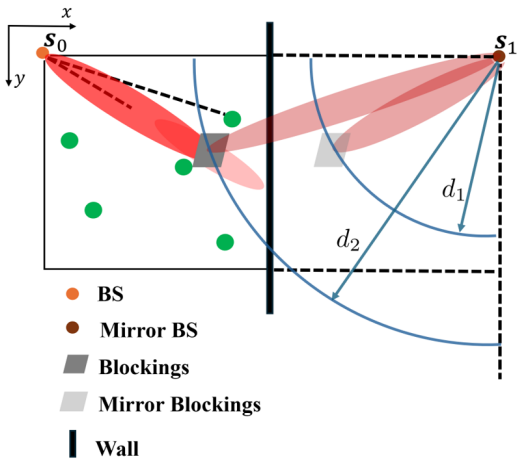


图5. 来自镜像基站 s_1 的传播产生三个距离区域：(i) $d \le d_1$ 的视距区域；(ii) 单重遮挡区域 $d_1 < d \le d_2$；以及 (iii) 双重遮挡区域 $d > d_2$。

同时被真实建筑及其镜像遮挡。

遵循与第三节B.2相同的建模原则，该场景可用式 (11) 表示，其中 $R = 3$。

由于视距区域和遮挡区域与其镜像对应区域具有相同的空间分区 G_1 和 G_2，因此可将相应的衰减分量合并为

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_1^{(0)} + \boldsymbol{\rho}_1^{(1)}, \qquad \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}_2^{(0)} + \boldsymbol{\rho}_2^{(1)}. \tag{16}$$

相比之下，区域 G_3 仅受镜像引起的双重遮挡影响，因此仅包含相应的衰减分量 $\boldsymbol{\rho}_3$。

IV. 托普利兹结构矩阵-向量张量分解

本节提出一种基于矩阵-向量张量分解的优化建模，用于重建视距、反射和遮挡共存的一般场景，如图1所示。第三节B.1–第三节B.3中讨论的相对简单的传播场景，也可以类似地作为所提建模的特殊情况处理。

A. 矩阵-向量张量分解建模

基于坐标变换，极坐标域中的接收信号强度测量值可表示为式（11）所示的多项矩阵-向量张量分解形式。该表示方式使重建任务可建模为一个约束优化问题：在保持底层物理特性的同时，根据观测测量值估计波束空间矩阵 $\{\boldsymbol{G}_r\}$ 和距离域衰减向量 $\{\boldsymbol{\rho}_r\}$。

为获得符合物理规律且经过结构正则化的表示，我们利用波束空间增益矩阵 $\boldsymbol{G}_r$ 的近托普利兹结构。我们不施加严格的托普利兹约束，而是引入一个软正则化项，

因为如第三节B.3所述，在同时存在反射和遮挡的环境中，波束模式仅呈现近似的平移不变性。此外，由于信号功率会随传播距离增加而衰减，因此假设每个衰减剖面 $\boldsymbol{\rho}_r$ 的非零部分单调递减。这些物理考量直接促成了重建公式中采用的正则化项和约束条件。

定义 $\boldsymbol{\mathcal{W}} \in \mathbb{R}^{I\times J\times K}$ 为一个指示张量，使得

$$[\boldsymbol{\mathcal{W}}]_{i,j,k} = \begin{cases} 1, & \text{if } (i,j,k) \in \Omega \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中，Ω表示极坐标系中用户设备测量值的索引集。于是，MIMO波束图$\boldsymbol{\mathcal{X}}$ 的重建可表述为 $\mathscr{P}$

$$\mathscr{P}: \quad \underset{\{\boldsymbol{G}_r\},\{\boldsymbol{\rho}_r\}}{\text{minimize}} \ \|\boldsymbol{\mathcal{W}} * (\boldsymbol{\mathcal{X}} - (\sum_{r=1}^{R} \boldsymbol{G}_r \circ \boldsymbol{\rho}_r))\|_F^2 \tag{17}$$

$$+ \sum_{r=1}^{R} \lambda_r \sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1} |[\boldsymbol{G}_r]_{i,j} - [\boldsymbol{G}_r]_{i+1,j+1}|^2 \tag{18}$$

$$+ \lambda \|[\boldsymbol{G}_1, \cdots, \boldsymbol{G}_R]\|_F^2 \tag{19}$$

$$\text{subject to } \rho_{r,k} \ge 0 \ \forall k, r \tag{20}$$

$$\sum_{r,k} \rho_{r,k} = 1 \tag{21}$$

$$\sum_{r} \rho_{r,k} \ge \sum_{r} \rho_{r,k+1} \ \forall k = 1, \cdots, K-1 \tag{22}$$

$$\rho_{1,k} \ge \rho_{1,k+1} \ \forall k = 1, \cdots, K-1 \tag{23}$$

$$[\boldsymbol{G}_r]_{i,j} > 0 \ \forall i, j, r, \tag{24}$$

其中，“$*$”表示逐元素乘积。项$[\boldsymbol{G}_r]_{i,j} - [\boldsymbol{G}_r]_{i+1,j+1}$用作托普利兹正则化，弗罗贝尼乌斯范数 $\|[\boldsymbol{G}_1, \cdots, \boldsymbol{G}_R]\|_F^2$通过惩罚较大的幅值来防止过拟合。根据式（20），每个功率项 $\boldsymbol{\rho}_r$ 均被约束为非负，并经过归一化，使总功率 $\boldsymbol{\rho}_r$ 满足式（21），以确保收敛稳定。由于索引 k 对应距离，总功率应如式（22）所示随 k 递减。此外，式（23）保证第一个分量的功率曲线 $\boldsymbol{\rho}_1$ 沿距离维度平滑递减。对于其他分量 $\boldsymbol{\rho}_r$，则不施加相同的单调性约束，因为由于存在反射和遮挡，其曲线在较小索引 k 处可能为零。

为便于计算，令矩阵 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{(I\times J)\times K}$ 和 $\boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^{(I\times J)\times K}$ 分别表示张量 $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ 的模态-3展开。模态-3展开定义为

$$\underline{\boldsymbol{X}} = [\text{vec}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{:,:,1}), \ \text{vec}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{:,:,2}), \cdots, \text{vec}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{:,:,K})]$$

其中，$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{:,:,k}$是张量$\boldsymbol{\mathcal{X}}$的第 k个切片。此外，定义矩阵$\boldsymbol{G} = [$向量化$(\boldsymbol{G}_1)$ $\cdots$、向量化$(\boldsymbol{G}_R)] \in \mathbb{R}^{(I\times J)\times R}$

以及 $\boldsymbol{\varrho} = [\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}_R] \in \mathbb{R}^{K\times R}$。于是，问题 $\mathscr{P}$可以改写为

$$\begin{aligned}\mathscr{P}': \quad \underset{\underline{\boldsymbol{G}},\boldsymbol{\varrho}}{\text{minimize}} \ & \|\underline{\boldsymbol{W}} * \underline{\boldsymbol{X}} - \underline{\boldsymbol{W}} * (\underline{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{\varrho}^{\mathrm{T}})\|_F^2 \\ & + \sum_{r=1}^{R}\lambda_r \sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1} |[\boldsymbol{G}_r]_{i,j} - [\boldsymbol{G}_r]_{i+1,j+1}|^2 \\ & + \lambda\|\underline{\boldsymbol{G}}\|_F^2 \\ \text{subject to} \quad & \rho_{k,r} \geq 0, \ \forall k = 1,\cdots,K, r = 1,\cdots,R \\ & \sum_{k,r}\rho_{k,r} = 1 \\ & \sum_{r}\rho_{k,r} \geq \sum_{r}\rho_{k+1,r} \ \forall k = 1,\cdots,K-1 \\ & \rho_{k,1} \geq \rho_{k+1,1} \ \forall k = 1,\cdots,K-1.\end{aligned} \tag{25}$$

B. 结构正则化下的交替更新

问题 $\mathscr{P}'$ 分别关于 $\boldsymbol{G}$和 $\boldsymbol{\varrho}$是凸的，前提是另一个变量固定。因此，我们采用交替最小化方案，迭代更新 $\boldsymbol{G}$ 和$\boldsymbol{\varrho}$，直至收敛。

的更新： 给定 $\boldsymbol{\varrho}$，关于 $\boldsymbol{G}$的子问题可表述为

$$\begin{aligned}\underset{\underline{\boldsymbol{G}}}{\text{minimize}} \ & \|\underline{\boldsymbol{W}} * \underline{\boldsymbol{X}} - \underline{\boldsymbol{W}} * (\underline{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{\varrho}^{\mathrm{T}})\|_F^2 \\ & + \sum_{r=1}^{R}\lambda_r \sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1} |[\boldsymbol{G}_r]_{i,j} - [\boldsymbol{G}_r]_{i+1,j+1}|^2 \\ & + \lambda\|\underline{\boldsymbol{G}}\|_F^2.\end{aligned} \tag{26}$$

由于所有项都是凸的，因此该子问题是凸的。因此，可使用近端梯度下降 [31]高效求解。

的更新：给定 $\boldsymbol{G}$, 关于 $\boldsymbol{\varrho}$的子问题为

$$\begin{aligned}\underset{\boldsymbol{\varrho}}{\text{minimize}} \ & \|\underline{\boldsymbol{W}} * \underline{\boldsymbol{X}} - \underline{\boldsymbol{W}} * (\underline{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{\varrho}^{\mathrm{T}})\|_F^2 \\ \text{满足} \ & \rho_{k,r} \geq 0, \ \forall k = 1,\cdots,K, r = 1,\cdots,R \\ & \sum_{k,r}\rho_{k,r} = 1 \\ & \sum_{r}\rho_{k,r} \geq \sum_{r}\rho_{k+1,r} \ \forall k = 1,\cdots,K-1 \\ & \rho_{k,1} \geq \rho_{k+1,1} \ \forall k = 1,\cdots,K-1.\end{aligned} \tag{27}$$

该子问题关于 $\boldsymbol{\varrho}$是凸的。由于目标函数是二次函数，且所有约束条件均为线性的，因此它构成一个标准二次规划，可以使用内点法 [32]高效求解。

最后，重构张量表示为 $\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \sum_{r=1}^{R}\lambda_r \boldsymbol{G}_r$。

V. 纯 LOS 区域的简化模型

本节将说明，在纯 LOS 区域中，将对称托普利兹结构作为硬约束施加，可简化问题 $\mathscr{P}$ 的形式，并且与正则化形式相比，计算复杂度大幅降低。

A. 简化模型

对于图3(a)所示的纯 LOS 区域，矩阵-向量张量分解问题 $\mathscr{P}'$ 可简化并表述为

$$\begin{aligned}\mathscr{P}'': \quad \underset{\boldsymbol{G},\boldsymbol{\rho}}{\text{minimize}} \ & \|\underline{\boldsymbol{W}} * \underline{\boldsymbol{X}} - \underline{\boldsymbol{W}} * (\text{vec}(\boldsymbol{G})\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}})\|_F^2 \\ & + \lambda_1 \sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1} |[\boldsymbol{G}]_{i,j} - [\boldsymbol{G}]_{i+1,j+1}|^2 \\ & + \lambda_2 \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} |[\boldsymbol{G}]_{i,j} - [\boldsymbol{G}]_{j,i}|^2 \\ \text{subject to} \ & \rho_k > \rho_{k+1} > 0, \ \forall k = 1,\cdots,K-1 \\ & \sum_{k}\rho_k = 1.\end{aligned}$$

该公式可以采用与一般问题$\mathscr{P}'$相似的交替优化框架求解。

由于仅存在视距区域，托普利兹和对称性可作为硬约束施加，而非通过正则化实现。在这些结构约束下，矩阵 $\boldsymbol{G}$ 可由单个行向量完全表征，从而将重建任务转化为约束最小二乘问题。即使测量稀疏性严重，这种表示仍然有效。

通过施加托普利兹和对称性约束，视距区域的矩阵-向量张量分解可表示为

$$\begin{aligned}\mathscr{P}''': \ \underset{\boldsymbol{G},\boldsymbol{\rho}}{\text{minimize}} \ & \|\underline{\boldsymbol{W}} * \underline{\boldsymbol{X}} - \underline{\boldsymbol{W}} * (\text{vec}(\boldsymbol{G})\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}})\|_F^2 \\ \text{subject to} \ & [\boldsymbol{G}]_{i,j} = [\boldsymbol{G}]_{j,i}, \ [\boldsymbol{G}]_{i,j} = [\boldsymbol{G}]_{i+1,j+1} \\ & i+1 \leq I, j+1 \leq J \\ & \rho_k > \rho_{k+1} > 0, \ \forall k = 1,\cdots,K-1 \\ & \sum_{k}\rho_k = 1.\end{aligned} \tag{28}$$

我们采用交替最小化方案，迭代求解 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{\rho}$，具体如下。

更新 $\boldsymbol{\rho}$：给定 $\boldsymbol{G}$，我们回顾一下，$\underline{\boldsymbol{X}} \in \mathbb{R}^{(I\times J)\times K}$ 和 $\underline{\boldsymbol{W}} \in \mathbb{R}^{(I\times J)\times K}$ 分别是$\boldsymbol{\mathcal{X}}$ 和$\boldsymbol{\mathcal{W}}$的模态-3展开。

于是，问题（28）变为

$$\begin{aligned}\underset{\boldsymbol{\rho}}{\text{minimize}} \ & \|\underline{\boldsymbol{W}} * \underline{\boldsymbol{X}} - \underline{\boldsymbol{W}} * (\text{vec}(\boldsymbol{G})\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}})\|_F^2 \\ \text{subject to} \ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho} > 0, \ \boldsymbol{\rho} > 0, \ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho} = 1,\end{aligned} \tag{29}$$

其中，$\mathbf{1} \in \mathbb{R}^K$ 为全 1 向量，$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(K-1)\times K}$ 为定义如下的约束矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

利用恒等式 $\boldsymbol{W} * (\mathrm{vec}(\boldsymbol{G})\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{diag}(\mathrm{vec}(\boldsymbol{G}))\boldsymbol{W}\mathrm{diag}(\boldsymbol{\rho})$，可将中的目标函数展开为 (29)

$$\begin{aligned}&\|\underline{\boldsymbol{W}} * \underline{\boldsymbol{X}} - \mathrm{diag}(\mathrm{vec}(\boldsymbol{G}))\underline{\boldsymbol{W}}\mathrm{diag}(\boldsymbol{\rho})\|_F^2 \\ =&\sum_{i=1}^{I\times J}\sum_{k=1}^{K}([\underline{\boldsymbol{W}}]_{i,k}[\underline{\boldsymbol{X}}]_{i,k} - \mathrm{vec}(\boldsymbol{G})_i[\underline{\boldsymbol{W}}]_{i,k}\rho_k)^2.\end{aligned}$$

这个问题可以进一步改写为标准二次规划形式

$$\begin{aligned}\underset{\boldsymbol{\rho}}{\text{minimize}}\ & \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho} \\ \text{subject to}\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho} > 0,\ \boldsymbol{\rho} > 0,\ \mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho} = 1,\end{aligned} \tag{30}$$

其中，$\boldsymbol{H}$是对角矩阵，其元素为$[\boldsymbol{H}]_{k,k} = 2\sum_{i=1}^{I\times J}\boldsymbol{G}_{i,k}[\boldsymbol{W}]_{i,k}^2$，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^K$的$k$-th (vec(·)，且由$c_k = -2\sum_{i=1}^{I\times J}[\boldsymbol{W}]_{i,k}[\underline{\boldsymbol{X}}]_{i,k}\mathrm{vec}(\boldsymbol{G})_i$给出。

这个具有二次目标函数和线性不等式约束的二次规划问题可以通过内点法求解 [32]。

更新 $\boldsymbol{G}$：给定 $\boldsymbol{\rho}$，问题 (28) 变为 es

$$\begin{aligned}\underset{\boldsymbol{G}}{\text{minimize}}\ & \|\boldsymbol{\mathcal{W}} * (\boldsymbol{\mathcal{X}} - (\boldsymbol{G}\circ\boldsymbol{\rho}))\|_F^2 \\ \text{subject to}\ & [\boldsymbol{G}]_{i,j} = [\boldsymbol{G}]_{j,i},\ [\boldsymbol{G}]_{i,j} = [\boldsymbol{G}]_{i+1,j+1} \\ & i+1 \le I, j+1 \le J.\end{aligned} \tag{31}$$

在这些硬约束下，矩阵 $\boldsymbol{G}$ 是对称托普利兹矩阵。回顾一下，我们考虑的是一个满足$I = J \triangleq N$的正方形网格。矩阵 $\boldsymbol{G}$ 完全由其第一行 $\boldsymbol{g} = [g_0, g_1, \cdots, g_{N-1}]^{\mathrm{T}}$ 和$[\boldsymbol{G}]_{i,j} = g_{|i-j|}$确定。令$\boldsymbol{T} \in \mathbb{R}^{N^2\times N}$表示固定变换矩阵，使得 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^{N^2}$。将此关系代入展开后的目标函数 (31)，得到

$$\underset{\boldsymbol{g}}{\text{minimize}}\ \|\underline{\boldsymbol{W}} * \underline{\boldsymbol{X}} - \mathrm{diag}(\boldsymbol{T}\boldsymbol{g})\underline{\boldsymbol{W}}\mathrm{diag}(\boldsymbol{\rho})\|_F^2. \tag{32}$$

定义 $\boldsymbol{y} = \underline{\boldsymbol{W}} * \underline{\boldsymbol{X}} \in \mathbb{R}^{(N^2\times K\times N}$，$\boldsymbol{D}$ ∈vec(·)，并构造矩阵)，使得$[\boldsymbol{D}]_{(i-1)\times K+k,\,j} = T_{ij}[\boldsymbol{W}]_{i,k}\rho_k$。于是，式（32）化为标准的最小二乘问题

$$\underset{\boldsymbol{g}}{\text{minimize}}\ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{g}\|_2^2. \tag{33}$$

这是一个无约束的严格凸问题。令一阶导数为零，可得闭式解

$$\hat{\boldsymbol{g}} = (\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}. \tag{34}$$

Th矩阵 $\boldsymbol{G}$ 随后重构为$[\boldsymbol{G}]_{i,j} = \hat{g}_{|i-j|}$.

最后，重构得到的多输入多输出波束图为 $\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \boldsymbol{G}\circ\hat{\boldsymbol{\rho}}$。

正则化形式与硬约束形式之间的实验对比见图6，并在第VI-A1节中进行了详细讨论。

B. 复杂度分析

在本小节中，我们比较纯视距情形下 $\mathscr{P}''$ 中的正则化形式与 $\mathscr{P}'''$ 中的硬约束形式的计算复杂度。

$\mathscr{P}''$ 和 $\mathscr{P}'''$ 均通过向量 $\boldsymbol{\rho}$ 与矩阵 $\boldsymbol{G}$之间的交替最小化求解。令 T_{alt} 表示外层交替迭代的次数。此外，令 T_{ip} 表示内点求解器求解式 (30) 时使用的牛顿步数，令 T_{pg} 表示正则化方法中用于更新 $\boldsymbol{G}$的近端梯度迭代次数。

1） 的更新（和 共用）：给定 $\boldsymbol{G}$，更新 $\boldsymbol{\rho}$ 会得到一个含有 K 个变量、带线性约束条件的二次规划。通过仅对观测条目进行累加，即可构造式（29）中的系数 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{c}$，其计算开销为 $\mathcal{O}(|\Omega|)$。使用内点法求解该二次规划，通常需要 $\mathcal{O}(T_{\mathrm{ip}}K^3)$ [32]。因此， $\boldsymbol{\rho}$ 更新（30）每次外层迭代的计算开销为 $\mathcal{O}\big(|\Omega| + T_{\mathrm{ip}}K^3\big)$.

2） 的更新：在 $\mathscr{P}''$ 中， $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 含有 N^2 个自由变量，通过最小化数据拟合项与非光滑结构正则项之和来估计。如第四-B节所述，该子问题可以通过近端梯度下降求解。在每次近端梯度迭代中，二次数据拟合项的梯度可在观测集合上计算，开销为 $\mathcal{O}(|\Omega|)$；而计算与结构正则项相关的近端映射，则需要对全部 N^2 个条目进行运算（每次迭代的开销为 $\mathcal{O}(N^2)$）。因此，在 $\mathscr{P}''$ 中，$\boldsymbol{G}$ 更新每次外层迭代的复杂度为 $\mathcal{O}\big(T_{\mathrm{pg}}(|\Omega| + N^2)\big)$.

在 $\mathscr{P}'''$ 中，对称性和托普利兹结构作为硬约束施加，因此 $\boldsymbol{G}$ 完全由其首行 $\boldsymbol{g} = [g_0, g_1, \ldots, g_{N-1}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^N$ 确定，且满足 $[\boldsymbol{G}]_{ij} = g_{|i-j|}$，使自由度从 N^2 降至 N。给定 $\boldsymbol{\rho}$，$\boldsymbol{g}$ 更新可化为最小二乘问题 (34)。由于任意位置 $(i,\ j)$ 的取值仅取决于索引差 $|i-j|$，每个观测值仅用于估计一个唯一系数 $g_{|i-j|}$，与其他系数互不耦合。这种结构正交性使格拉姆矩阵 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$ 成为对角矩阵，因此可通过对 Ω 进行简单的分组累加，高效地计算 $\boldsymbol{g}$。因此，复杂度为 $\mathcal{O}(|\Omega| + N)$。

3）总体复杂度：综合以上结果，总体复杂度总结如下

$$\mathscr{P}'':\ \ \mathcal{O}\Big(T_{\mathrm{alt}}\Big(|\Omega| + T_{\mathrm{ip}}K^3 + T_{\mathrm{pg}}(|\Omega| + N^2)\Big)\Big), \tag{35}$$

$$\mathscr{P}''':\ \ \mathcal{O}\Big(T_{\mathrm{alt}}\Big(|\Omega| + T_{\mathrm{ip}}K^3 + (|\Omega| + N)\Big)\Big). \tag{36}$$

在稀疏采样区间，主要差异来自空间更新： $\mathscr{P}''$ 对 N^2 个未知量进行优化，并需要执行迭代近端更新，每次迭代的成本按 $|\Omega| + N^2$ 缩放；而 $\mathscr{P}'''$ 将空间自由度降至 N，并可采用最小二乘更新，其复杂度主要随观测数量 $|\Omega|$ 缩放。

VI. 数值结果

在本节中，我们使用式（2）和（3）中的模型，模拟面积为 $L\times L$ 、边长为 $L = 48$ 米区域内的MIMO波束图。基站位于 $\boldsymbol{s}_0 = (0,\ 0)$，天线数量设为 $N_t = 16$。大尺度衰落系数选为 $\alpha_0 = d^{\eta}$ 和 $\alpha_1 = d^{\eta}/2$，其中 $d = ||\boldsymbol{z} - \boldsymbol{s}_0||_2$。无阻挡传播时，路径损耗指数设为 $\eta = -2$；路径受阻时，设为 $\eta = -6$ 。噪声项 $n^{(0)}$ 和 $n^{(1)}$ 的标准差分别建模为 $\sigma_0 =$ 3dB和 $\sigma_1 =$ 1dB。我们将$\boldsymbol{\mathcal{X}}$ 的维度设为 $I =J = 46$ 和 $K = 40$。波束角 $\{\theta_i\}_{i=1}^{I}$ 的生成方式为

使sin θ_i 在 [sin θ_1, sin θ_I]上均匀间隔分布，其中$\theta_1 = 0.0208$ 和 $\theta_I = 1.55$。空间角 ϕ_j 选为与 θ_i 相同，以满足引理1。

如图1所示，假设区域右侧有一面墙，连接顶点 (48, 0) 和 (48, 48)。因此，反射路径对应的镜像基站位于 $\boldsymbol{s}_1 = (96, 0)$。在 $L \times L$ 区域内均匀随机生成用户设备的位置，以获取接收信号强度 $\gamma_m^{(0)}$, $_i$ 和 $\gamma_{m\,i}^{(1)}$, 。

首先，根据式 (6) 将测量值 $\{(\theta_i, \boldsymbol{z}_m, \gamma_{m,i})\}$转换到极坐标系 (ϕ, d)。随后，采用所提出的托普利兹结构矩阵-向量张量分解方法，在极坐标系下重构 MIMO波束图 X。分解后，需要将 X 映射回笛卡尔坐标系，以获得用于传达直射波束信息的 MIMO波束图 Y $\in \mathbb{R}^{L\times L\times I}$ 。每个条目 [X]$_{i,j,k}$ 由 (θ_i, ϕ_j, d_k) 索引，并转换为对应的笛卡尔位置 $\boldsymbol{z}_{m_0}$, 其中$m_0 = 1, \cdots, M_0$和 $M_0 = K \times J$。这是因为在固定波束 θ_i下，$\mathcal{X}_{i,:,:}$ 中的值的数量为$K \times J$。将 γ_{m_0} 表示为在 $\boldsymbol{z}_{m_0}$处到 $\mathcal{X}_{i,j,k}$ 的一一映射。于是，测量值集合变为 $\{(\theta_i, \boldsymbol{z}_{m_0}, \gamma_{m_0})\}$。需要指出的是，在固定的 θ_i下，存在一个波束空间矩阵$\mathcal{Y}_{i,:,:} \in \mathbb{R}^{L\times L}$。我们提出基于测量值 $\{(\theta_i, \boldsymbol{z}_{m_0}, \gamma_{m_0})\}$ ，使用薄板样条（TPS）为每个 θ_i 插值该矩阵 $\mathcal{Y}_{i,:,:}$ 。采用归一化均方误差（NMSE）评估重构性能，其定义为 $\|\mathrm{Y} - \hat{}\mathrm{Y}\|_F^2 / \|\mathrm{Y}\|_F^2$。

我们将所提出的托普利兹结构矩阵-向量张量分解方法与以下基线方法进行比较：

- 基线方法 1： k近邻（KNN）方法，$k = 3$。
- 基线方法 2：对每个波束 θ_i 分别应用 TPS [33], , 根据测量值 $\{(\theta_i, \boldsymbol{z}_m, \gamma_{m,i})\}$构建相应的二维波束图。
- 基线方法 3：传统的块项张量分解（BTD） [20] 方法，不施加托普利兹结构约束。

请注意，在观测高度稀疏时，低秩张量补全 [34] 的性能会显著下降，因此不纳入比较。基线方法 1 和 2 都是纯粹的二维插值方法，针对每个波束角 θ_i 独立重建 MIMO 波束图，不利用任何结构相关性。

A. 纯视距场景仿真

在本小节中，我们展示图3(a)所示视距场景下的仿真结果。

1) 托普利兹约束与托普利兹正则化的比较：我们比较了采用问题 $\mathscr{P}'''$ 中的托普利兹约束形式和问题 $\mathscr{P}''$ 中的托普利兹正则化形式重构$\boldsymbol{\mathcal{X}}$ 时的归一化均方误差性能。图6展示了不同采样率下的归一化均方误差，其中，托普利兹约束方法在所有采样率下的归一化均方误差始终低于基于正则化的方法。性能提升

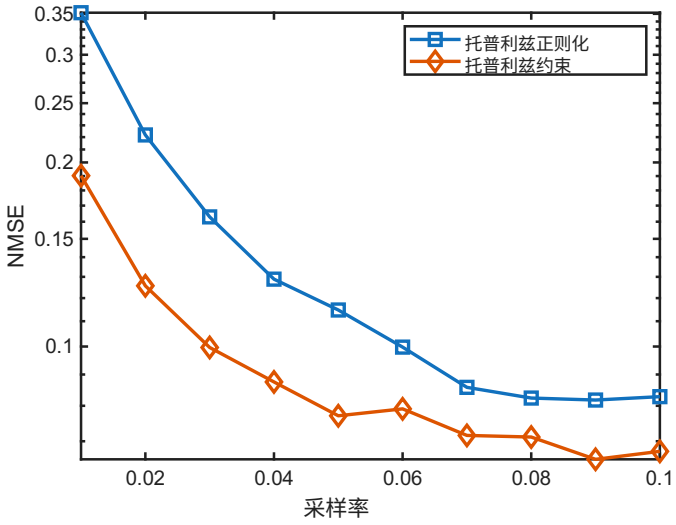


图 6. 不同采样率下托普利兹约束方法与托普利兹正则化方法的归一化均方误差比较。约束方法优于将托普利兹用作正则化的方法。

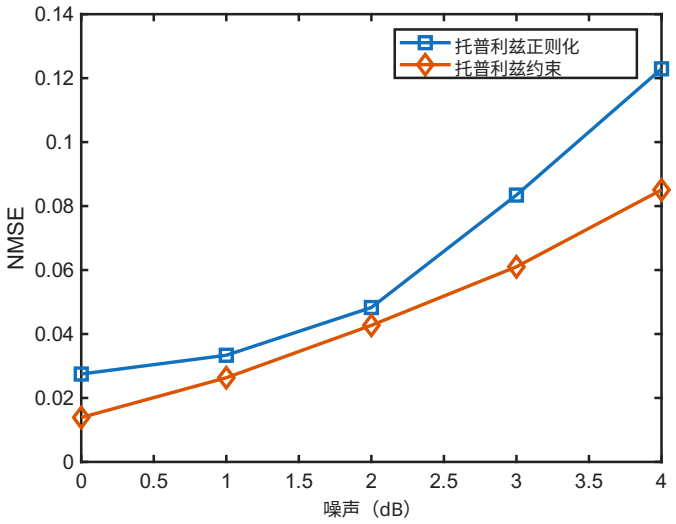


图 7. 不同噪声条件下托普利兹约束方法与托普利兹正则化方法的归一化均方误差比较。约束方法优于将托普利兹用作正则化的方法。

在低采样率情况下更为显著，这表明当测量值稀疏时，直接施加托普利兹结构尤其有益。

为进一步评估鲁棒性，图 7 展示了噪声水平从 0 到 4 dB 时的归一化均方误差。随着噪声增加，两种方法的归一化均方误差均有所恶化，但在测试的信噪比范围内，托普利兹约束方法始终保持明显的性能优势。总体而言，这些结果表明，在纯视距情形下，托普利兹先验能够准确匹配底层信号结构时，硬结构约束比软正则化能产生更可靠的重建结果，并且在采样率变化和噪声扰动下始终表现更优。

2) 不同采样率下的性能：我们评估了所提方法在采样率为 $r_s = 0.04 - 0.1$ 时重建$\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ 的性能。

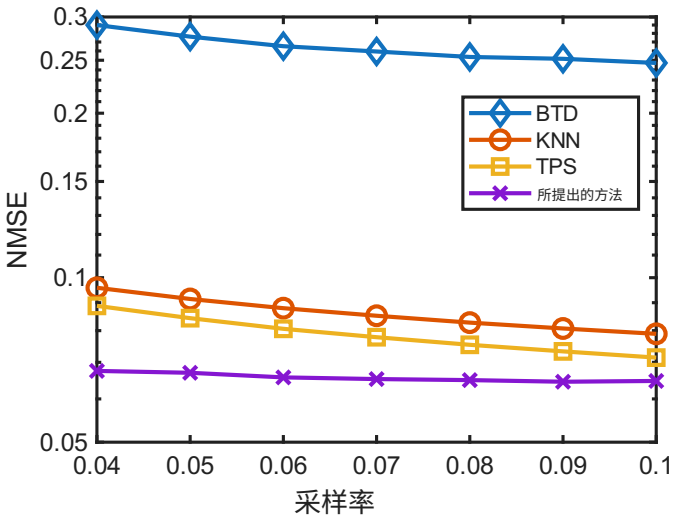


图8. 不同采样率下视距场景中$\mathcal{Y}$ 的重构归一化均方误差

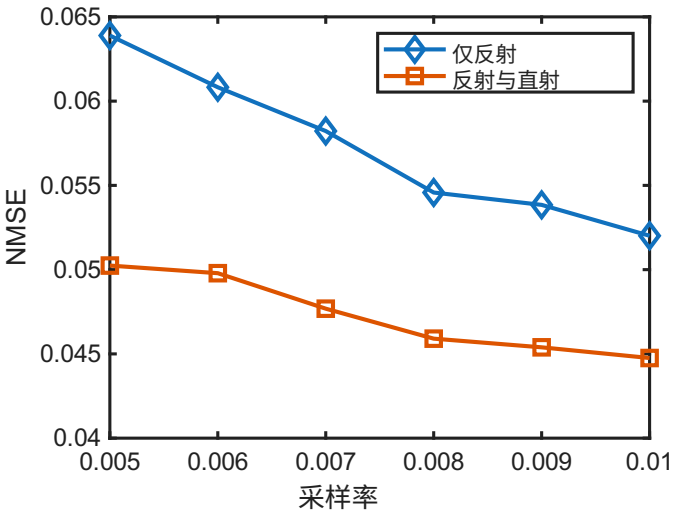


图10. 重构归一化均方误差对比，展示了在使用矩阵向量张量形式重建反射波束时纳入直达路径测量值的优势。

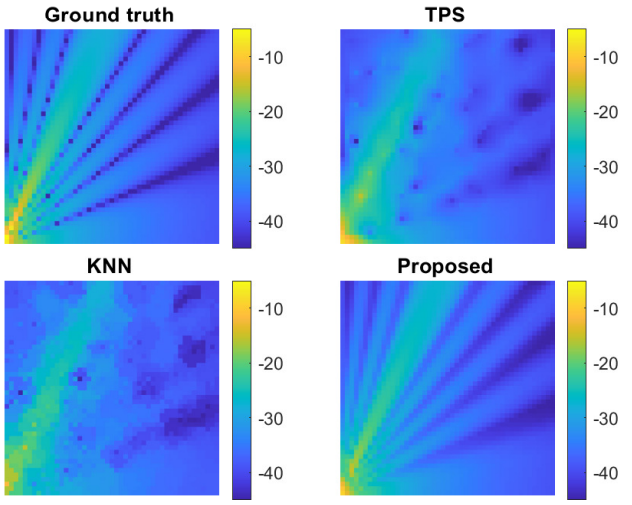


图9. 采样率为 $r_s = 0.1$时重建的直射波束图视觉对比。所提方法成功捕捉了波束图样，而 TPS 和 KNN 得到的重建结果模糊且不准确。

归一化均方误差结果见图 8。所提方法始终优于所有基线方法，在低采样率下性能提升超过 20%。传统的 BTD 方法无法恢复多输入多输出波束图，因为它没有利用托普利兹结构。TPS 和 KNN 插值方法的表现也较差，因为它们无法捕捉底层的波束图样。

为进一步展示重建质量，我们将采样率设为 $r_s = 0.1$，并在图9中展示视觉结果。所提方法利用托普利兹结构，准确重建了多输入多输出波束图；而 TPS 和 KNN 只能提供粗略近似，无法恢复精细波束特征。

B. 视距与反射共存的仿真

在本小节中，我们考察视距与反射共存时的重建性能。

1) 矩阵-向量张量分解对反射波束重建的优势：我们证明，通过式（12）中提出的矩阵向量张量形式，直达路径波束的测量值可以改善反射路径波束的重建。图10中，“仅反射”方法仅使用反射测量值来重建与镜像基站 $\boldsymbol{s}_1$ 相关的 MIMO波束图。相比之下，“反射与直射”方法利用式（12）中引入的张量建模，联合使用视距和反射测量值。

如图10所示，联合建模使归一化均方误差降低了 10 % 以上。这一提升源于视距波束与反射波束具有相同的固有能量分布 $\boldsymbol{G}$。因此，视距测量值提供了额外信息，有助于更准确地估计 $\boldsymbol{G}$ ，进而改善反射波束的重建效果。

2) 不同采样率下的性能：在此，与视距场景类似，我们评估所提方法在采样率为 $r_s = 0.04 - 0.1$ 时重构 $\mathcal{Y}$ 的性能。由于直接波束的结果与第VI-A节中的视距场景相似，我们重点关注整体MIMO波束图（直接波束与反射波束的合成）的重构归一化均方误差，如图11所示。如图11所示，与所有基线方法相比，所提方法的归一化均方误差降低了20%以上。

我们还将采样率设为 $r_s = 0.1$ ，并分别在图12和图13中展示反射波束和整体MIMO波束图的重构结果。所提方法能够准确重构这两个部分，而TPS和KNN只能生成粗略近似，无法捕捉其底层波束模式。

C. 视距与遮挡共存的仿真

在本小节中，我们考察直达路径被感兴趣区域内的一栋建筑物阻挡时的重建性能，如图3(c)所示。该建筑物的多边形坐标为

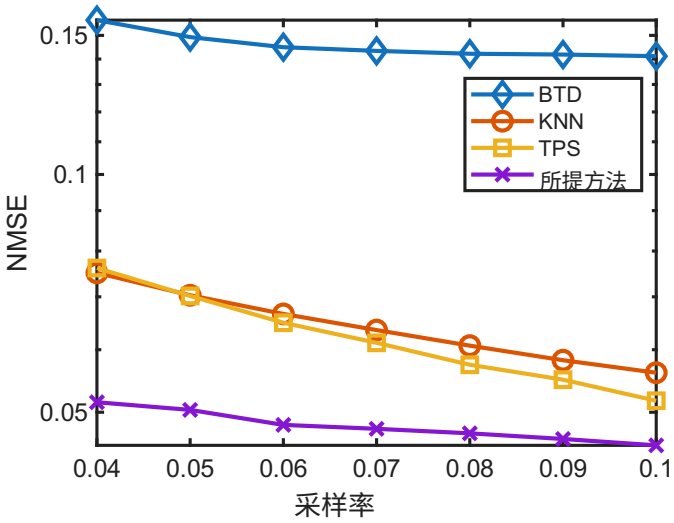


图11. 不同采样率下视距与反射场景共存时$\mathcal{Y}$ 的重构归一化均方误差。

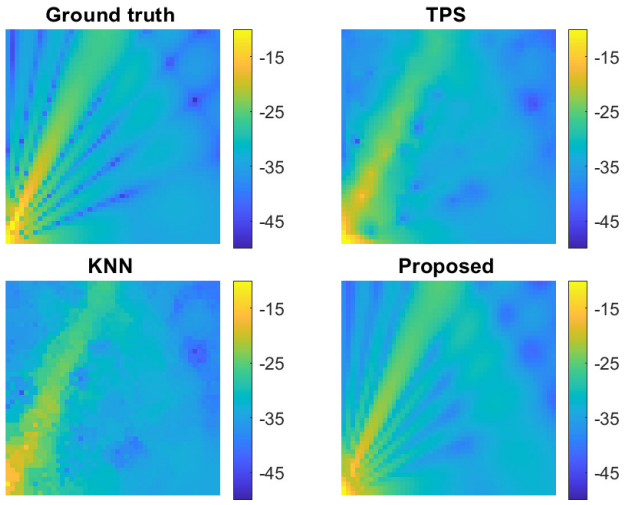


图13. 采样率为 $r_s = 0.1$时重建的整体MIMO波束图（视距+ 反射）的视觉对比。所提方法忠实地重建了波束结构，性能优于TPS和KNN。

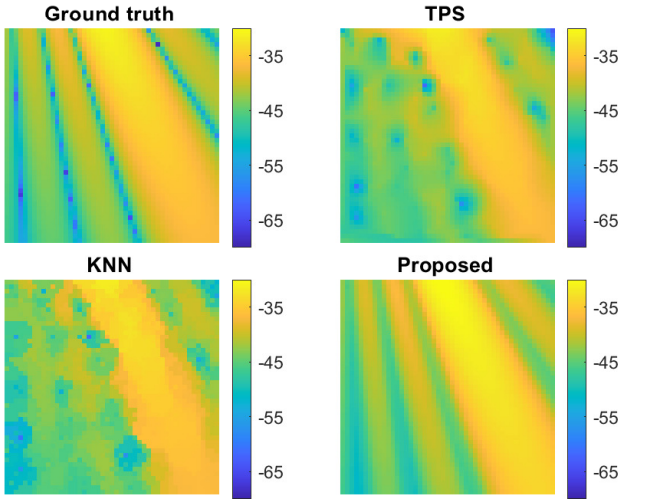
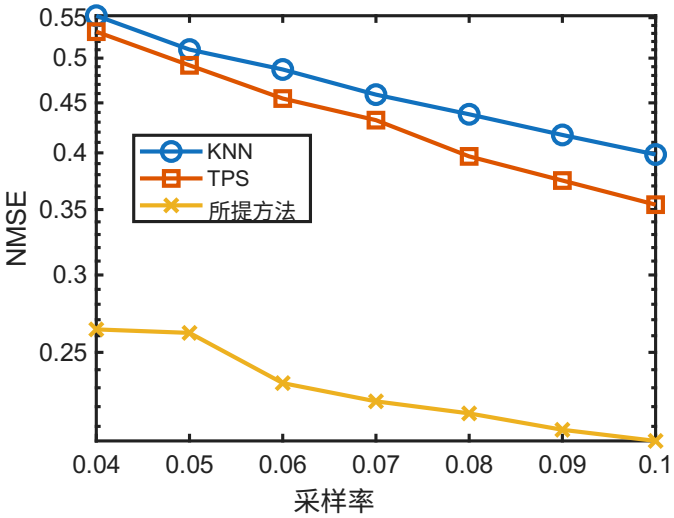


图12采样率为 $r_s = 0.1$时重建的反射波束图的视觉对比。所提方法成功捕捉到反射波束模式，而TPS和KNN生成的重建结果模糊且不准确。



视距与遮挡共存情况下$\mathcal{Y}$ 的重构归一化均方误差。与KNN和TPS基线方法相比，所提方法在所有采样率下始终实现更低的归一化均方误差，展现出处理混合传播场景的明显优势。

{(32，26)，(26，32)，(30，38)，(38，32)}。我们评估了所提方法在不同采样率 $r_s = 0.04$ –0。1 下重建$\mathcal{Y}$的效果。归一化均方误差结果如图14所示。可以看出，所提方法始终优于 KNN 和 TPS 等基线方法，在所有采样率下的重建精度均提升超过40%。所提方法的优势主要源于其结构化张量建模：它通过 $\{\boldsymbol{G}_r\}$ 和 $\{\boldsymbol{\rho}_r\}$强制满足近似托普利兹角度模式和随距离单调衰减的特性，使模型能够用少量样本重建视距区域和阴影区域，同时保留阻塞处功率的急剧下降。TPS 的全局平滑先验会过度平滑这一功率降幅，而 KNN 在采样稀疏的阻塞区域附近则容易受到不可靠局部平均的影响。

为进一步展示重建质量，我们将采样率设为 $r_s = 0.1$ ，并在图15中展示视觉对比结果。所提方法能更好地保留空间模式，并部分恢复受遮挡区域，而 TPS 和 KNN 得到的结果则存在失真。由于缺少测量值，角落区域仍难以恢复。

D. 视距、反射与遮挡共存的仿真

在本小节中，我们研究如图4所示的存在遮挡时直达路径与反射路径同时存在情况下的重建性能。为模拟反射路径，我们以墙壁为对称轴，将真实建筑镜像后生成一座镜像建筑，其坐标为{(32, 70),(26, 64), (30,58), (38, 64)}。

我们评估所提方法在不同采样率下 $r_s = 0.1 - 0.2$ 重建$\mathcal{Y}$的效果。归一化均方误差

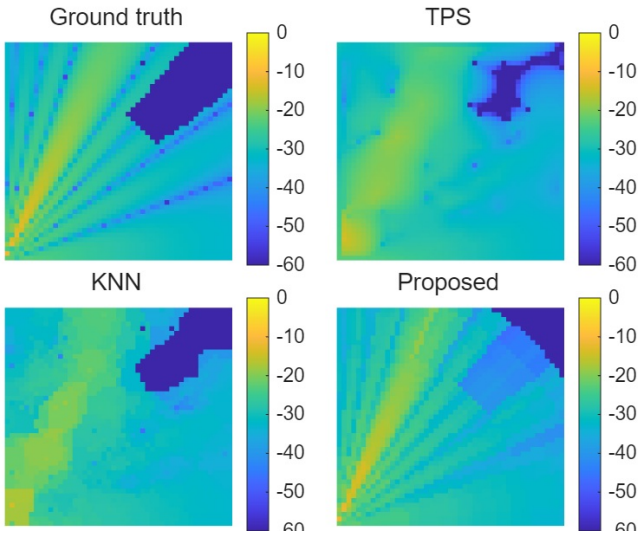


图15. 采样率为 $r_s = 0.1$时重建的MIMO波束图（视距 + 遮挡）视觉对比。与TPS和KNN相比，所提方法更好地保留了整体空间模式，并部分恢复了受遮挡区域；TPS和KNN则产生失真或过度平滑的重建结果。

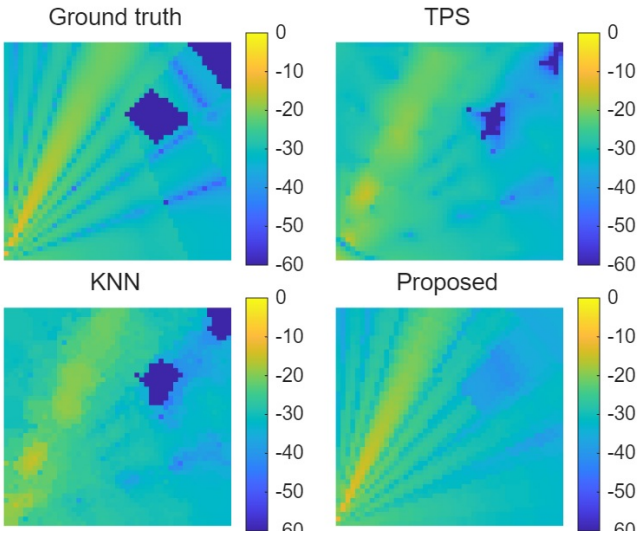


图17. 采样率为 $\rho = 0.1$ 时重建的 MIMO波束图 的视觉比较（视距 + 反射 + 遮挡）。所提方法更好地保留了整体空间模式，并部分恢复了被遮挡区域，而 TPS 和 KNN 产生的重建结果则出现失真或过度平滑。

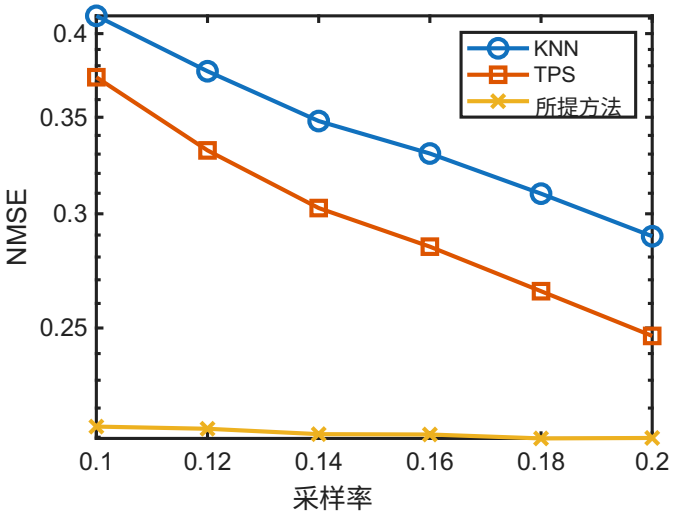


图16. 视距、反射和遮挡并存时$\mathcal{Y}$的重构归一化均方误差。对于所有采样率，所提方法的归一化均方误差始终低于KNN和TPS基线，表明其在处理混合传播场景方面具有明显优势。

结果如图16所示。可以观察到，所提方法始终优于基线方法 KNN 和 TPS，在低采样率下，重建精度提升超过20%。

为进一步说明重建质量，我们将采样率设为 $r_s = 0.1$，并在图17中展示视觉对比。与TPS和KNN相比，所提方法更好地保留了空间模式，并部分恢复了受遮挡区域；TPS和KNN则产生失真的结果。

VII. 结论

本文提出了一种结构感知方法，用于从稀疏测量中重构MIMO波束图。通过将笛卡尔观测转换到极坐标系，我们揭示了与不同传播条件相关的矩阵与向量外积结构。表示波束空间增益的矩阵具有内在的托普利兹模式，而向量则刻画了距离相关的衰减。利用这些特性，我们开发了托普利兹结构化矩阵向量张量分解框架及交替最小化算法，以实现高效重构。仿真结果证实，在广泛的采样率范围内，所提方法的重构归一化均方误差改善超过20%，优于插值方法和传统的BTD模型。这些结果凸显了利用MIMO波束图中蕴含的潜在角向与径向结构的有效性。

附录A 引理1的证明

由于 $\sin(\theta_i) = i/I$、$\sin(\phi_j) = j/J$，且 $I = J$，正弦项之差仅取决于索引差。具体而言，对于任意整数移位 δ，只要索引 $i+\delta$ 和 $j+\delta$ 均有效，就有

$$\begin{aligned}&\sin(\theta_{i+\delta}) - \sin(\phi_{j+\delta})\\ =&\frac{i+\delta}{I} - \frac{j+\delta}{I}\\ =&\frac{i-j}{I} = \sin(\theta_i) - \sin(\phi_j).\end{aligned} \tag{37}$$

然后，在条件 (37) 下，我们考察对角移位后的元素之间的差异

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{G}]_{i,j} - [\boldsymbol{G}]_{i+\delta,j+\delta}\\ =&\left(\left|\sum_{n=0}^{N_t-1}\exp^{j\pi n(\sin(\theta_i)-\sin(\phi_j))}\right|^2\right.\end{aligned}$$

$$- \left| \sum_{n=0}^{N_t-1} \exp^{j\pi n(\sin(\theta_{i+\delta}) - \sin(\phi_{j+\delta}))} \right|^2 \Bigg) = 0.$$

这意味着矩阵 $\boldsymbol{G}$具有托普利兹结构。

对于对称性，我们比较 $[\boldsymbol{G}]_{i,j}$ 和 $[\boldsymbol{G}]_{j,i}$。注意

$$\sin(\theta_j) - \sin(\phi_i) = \frac{j-i}{I} = -(\sin(\theta_i) - \sin(\phi_j)). \quad (38)$$

因此，元素 $[\boldsymbol{G}]_{j,i}$ 可以写成

$$[\boldsymbol{G}]_{j,i} = \left| \sum_{n=0}^{N_t-1} \exp\left(j\pi n(\sin(\theta_j) - \sin(\phi_i))\right) \right|^2 = \left| \sum_{n=0}^{N_t-1} \exp\left(-j\pi n(\sin(\theta_i) - \sin(\phi_j))\right) \right|^2. \quad (39)$$

令 $z = \sum_{n=0}^{N_t-1} \exp\left(j\pi n(\sin(\theta_i) - \sin(\phi_j))\right)$。$[\boldsymbol{G}]_{j,i}$ 的表达式对应于 $|\bar{z}|^2$ （其中 $\bar{z}$ 是 z的复共轭）。利用对于任意复数都有 $|z| = |\bar{z}|$ 这一性质，我们有

$$[\boldsymbol{G}]_{i,j} - [\boldsymbol{G}]_{j,i} = |z|^2 - |\bar{z}|^2 = 0. \quad (40)$$

这说明 $\boldsymbol{G}$是对称的。

参考文献

[1] Q. Xue、C. Ji、S. Ma、J. Guo、Y. Xu、Q. Chen 和 W. Zhang，《面向 6G 的毫米波与太赫兹通信波束管理综述》，*IEEE* 通信调查与教程，第 26 卷，第 3 期，1520–1559 页，2024 年 2 月。[2] J. Brady、N. Behdad 和 A. M. Sayeed，《面向毫米波通信的波束空间 MIMO：系统架构、建模、分析与测量》，*IEEE* 天线与传播汇刊，第 61 卷，第 7 期，3814–3827 页，2013 年 7 月。[3] X. Yu、J. Zhang、M. Haenggi 和 K. B. Letaief，《毫米波网络的覆盖分析：定向天线阵列的影响》，*IEEE* 通信领域精选期刊，第 35 卷，第 7 期，1498–1512 页，2017 年 4 月。[4] W. Chen、J. Chen 和 S. Cui，《用于 MIMO 波束图与环境重构的物理信息神经网络》，2025 年。 [在线]。可查阅：https://arxiv.org/abs/2510 21238 。H. Wang、X. Shi、H. Zhang、Y. Cao、S. Yang、J. Wang 和 K. Huang，《BeamCKM：面向多天线系统的信道知识图构建框架》，2025 年。 [在线]。可查阅：https://arxiv.org/abs/2511 18376 。T. N. Ha、D. Romero 和 R. Lopez-Valcarce，《具有位置不确定性的毫米波通信波束对准无线电地图》，载于*2024* 年 *IEEE* 第 *99* 届车辆技术会议（*VTC2024-Spring*），新加坡，2024 年，第 1–7 页。[7] T.-H. Chou、N. Michelusi、D. J. Love 和 J. V. Krogmeier，《通过含噪张量补全实现快速位置辅助 MIMO 波束训练》，*IEEE* 信号处理专题精选期刊，第 15 卷，第 3 期，774–788 页，2021 年 3 月。[8] L. Ma、Y. Fan、Y. Xu 和 Y. Cui，《用于 WiFi 室内定位系统无线电地图众包构建的行人航位推算轨迹匹配方法》，载于*IEEE* 国际通信会议论文集，IEEE，法国巴黎，2017 年，第 1–6 页。[9] W. B. Chikha、M. Masson、Z. Altman 和 S. B. Jemaa，《基于无线电环境地图的巨量 MIMO 系统小区间干扰协调》，*IEEE* 移动计算汇刊，第 23 卷，第 1 期，785–796 页，2024 年 1 月。[10] W. Feng、Y. Lin、Y. Wang、J. Wang、Y. Chen、N. Ge、S. Jin 和 H. Zhu，《面向 6G 按需覆盖的基于无线电地图的认知卫星无人机网络》，*IEEE* 认知通信与网络汇刊，第 10 卷，第 3 期，1075–1089 页，2024 年 6 月。[11] Y. Zeng、J. Chen、J. Xu、D. Wu、X. Xu、S. Jin、X. Gao、D. Gesbert、S. Cui 和 R. Zhang，《通过信道知识图实现环境感知通信的 6G 教程》，*IEEE* 通信调查与教程，第 26 卷，第 3 期，1478–1519 页，2024 年 2 月。[12] K. Sato、K. Suto、K. Inage、K. Adachi 和 T. Fujii，《空频插值无线电地图》，IEEE 车辆技术汇刊，第 70 卷，第 1 期，714–725 页，2021 年 1 月。[13] A. Verdin、C. Funk、B. Rajagopalan 和 W. Kleiber，《利用克里金法与局部多项式方法融合卫星推导和雨量计降水估计，以支持水文预警系统》，IEEE 地球科学与遥感汇刊，第 54 卷，第 5 期，2552–2562 页，2016 年 1 月。[14] J. Fan，《局部多项式建模及其应用：统计学与应用概率专著》第 66 卷。Routledge，1996年。[15] M. Hamid 和 B. Beferull-Lozano，《使用自适应径向基函数的非参数频谱制图》，载于 IEEE 国际声学、语音与信号处理会议论文集，2017 年，第 3599–3603 页。[16] J. Wang、Q. Zhu、Z. Lin、J. Chen、G. Ding、Q. Wu、G. Gu 和 Q. Gao，《结合信道阴影的基于稀疏贝叶斯学习的三维无线电环境地图分层构建》，IEEE 无线通信汇刊，第 23 卷，第 10 期，14 560–14 574 页，2024 年 10 月。[17] J. Wang、Q. Zhu、Z. Lin、Q. Wu、Y. Huang、X. Cai、W. Zhong 和 Y. Zhao，《基于稀疏贝叶斯学习的三维无线电环境地图构建——采样优化、场景依赖字典构建与稀疏恢复》，IEEE 认知通信与网络汇刊，第 10 卷，第 1 期，80–93 页，2024 年 10 月。[18] S.-J. Kim 和 G. B. Giannakis，《利用字典学习进行认知无线电频谱预测》，载于 IEEE 全球电信会议论文集，美国佐治亚州亚特兰大，2013 年 6 月，第 3206–3211 页。[19] H. Sun 和 J. Chen，《通过插值辅助矩阵补全进行传播地图重建》，IEEE 信号处理汇刊，第 70 卷，第 6154–6169 页，2022 年 12 月。[20] G. Zhang、X. Fu、J. Wang、X.-L. Zhao 和 M. Hong，《通过耦合块项张量分解进行频谱制图》，IEEE 信号处理汇刊，第 68 卷，第 3660–3675 页，2020 年 5 月。[21] X. Chen、J. Wang 和 Q. Huang，《动态频谱制图：通过张量补全重建空频时无线电频率地图》，IEEE 信号处理汇刊，第 73 卷，第 1184–1199 页，2025 年 1 月。[22] Y. Teganya 和 D. Romero，《用于无线电地图估计的深度补全自编码器》，IEEE 无线通信汇刊，第 21 卷，第 3 期，1710–1724 页，2021 年 3 月。[23] T. Hu、Y. Huang、J. Chen、Q. Wu 和 Z. Gong，《受限飞机轨迹下基于生成对抗网络的三维无线电地图重建》，IEEE 车辆技术汇刊，第 72 卷，第 6 期，8250–8255 页，2023 年 1 月。[24] S. Timilsina、S. Shrestha 和 X. Fu，《使用张量与深度生成模型进行量化无线电地图估计》，IEEE 信号处理汇刊，第 72 卷，第 173–189 页，2024 年 11 月。[25] S. Shrestha、X. Fu 和 M. Hong，《深度频谱制图：利用学习得到的神经模型补全无线电地图张量》，IEEE 信号处理汇刊，第 70 卷，第 1170–1184 页，2022 年 1 月。[26] X. Wang、K. Tao、N. Cheng、Z. Yin、Z. Li、Y. Zhang 和 X. Shen，《RadioDiff：用于无采样动态无线电地图构建的有效生成式扩散模型》，IEEE 认知通信与网络汇刊，第 11 卷，第 2 期，738–750 页，2025 年 4 月。[27] X. Luo、Z. Li、Z. Peng、M. Chen 和 Y. Liu，《用于生成式无线网络无线电地图估计的去噪扩散概率模型》，IEEE 认知通信与网络汇刊，第 11 卷，第 2 期，751–763 页，2025 年 1 月。[28] Y. Gong、H. Zhao、K. Hu、Q. Lu 和 Y. Shen，《通过张量分解实现的 MIMO-OFDM 系统多径辅助定位方法》，IEEE 无线通信快报，第 11 卷，第 6 期，1225–1228 页，2022 年 6 月。[29] A. Sayeed，《解构多天线衰落信道》，IEEE 信号处理汇刊，第 50 卷，第 10 期，2563–2579 页，2002 年 10 月。[30] J. Du、J. Cao、L. Jin、S. Li、J. Liu 和 F. Gao，《通过重排稀疏贝叶斯学习实现 MIMO-OFDM WiFi 系统的室内车辆定位》，IEEE 无线通信汇刊，第 23 卷，第 7 期，7849–7864 页，2024 年 7 月。[31] D. P. Bertsekas，《非线性规划》，《运筹学会杂志》，第 48 卷，第 3 期，334–334 页，1997年。[32] F. A. Potra 和 S. J. Wright，《内点法》，《计算与应用数学杂志》，第 124 卷，第 1–2 期，281–302 页，2000 年 12 月。[33] J. A. Bazerque、G. Mateos 和 G. B. Giannakis，《用于频谱制图的样条组 Lasso》，IEEE 信号处理汇刊，第 59 卷，第 10 期，4648–4663 页，2011 年 10 月。[34] J. Liu、P. Musialski、P. Wonka 和 J. Ye，《用于估计视觉数据中缺失值的张量补全》，IEEE 模式分析与机器智能汇刊，第 35 卷，第 1 期，208–220 页，2013 年 1 月。