一种基于 HHT-α 的有限元框架，用于本构非线性弹性材料中的波传播

S. M. Mallikarjunaiah[1]

[1]德克萨斯农工大学科珀斯克里斯蒂分校数学与统计系，
TX-78412，美国电子邮箱： M.Muddamallappa@tamucc.edu

arXiv:2601.04628v1 [math.NA] 8 Jan 2026

摘要

本文提出了一个计算框架，用于模拟由代数非线性本构关系表征的几何线性弹性材料中的波传播。我们推导出一种特定形式的非线性波动方程，其中非线性显式出现在控制力学场演化的时间导数项中。数值求解采用全离散形式，通过将标准有限元法用于空间离散，并结合隐式 *Hilber-Hughes-Taylor* (HHT)-α 格式进行时间积分。为处理离散系统的非线性，我们采用牛顿法，在每个时间步迭代求解线性化方程。通过收敛性分析严格验证了所提框架的精度和稳健性，结果表明其在空间和时间上均具有最优收敛率。此外，我们还进行了详细的参数研究，以阐明模型本构参数的影响。结果表明，应力相关波速变化的幅值参数会导致波前陡化并形成激波间断。相反，指数参数起到非线性滤波器的作用：在小应变范围内，较高的取值会抑制非线性效应，而较低的取值则会带来显著的色散行为。本研究提供了一种经过验证的工具，可用于分析先进非线性材料中的激波形成。

关键词— 有限元方法；非线性材料；HHT-α 时间离散；非线性双曲型偏微分方程；波速

1 引言

在固体介质中对波传播进行精确的计算建模广泛应用于各个工程学科，是安全评估和技术创新不可或缺的基础工具。在航空航天和汽车行业，该建模为现代无损检测技术提供了支撑；这些技术对于在复合材料发生灾难性失效之前检测其中的微观缺陷至关重要 [15, 46]。同样，在土木工程和地球物理学领域，

高保真波动模拟对于量化地震风险，以及设计能够承受动态冲击载荷的基础设施至关重要 [4,10]。除结构力学之外，这些模型在生物医学工程中的重要性也日益凸显，尤其有助于改进用于早期癌症检测的超声弹性成像方法 [38]。随着各行业转向采用具有复杂非线性行为的先进材料，可靠预测色散现象和激波形成的能力，对于确保这些高风险现实应用中的运行可靠性变得至关重要 [27]。

弹性固体中波传播的传统建模主要依赖线性弹性动力学理论，该理论假定应力与应变之间存在线性且恒定的关系。尽管这种线性化在计算上较为方便，但在描述许多现实材料的动力响应时往往并不符合物理实际，因为它本质上强制波速在任何变形状态下都保持全局恒定 $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ [2]。相比之下，聚合物、生物软组织和颗粒土等多种介质都表现出显著的本构非线性，其瞬时刚度以及相应的波速会随局部应力幅值而变化 [12]。线性理论忽略了这种应力-速度耦合，因而无法捕捉波前陡化乃至最终形成激波间断等关键非线性现象；这些正是物理非线性材料高能动力学中的主导机制 [27]。

隐式本构理论的提出大幅拓展了复杂材料行为的数学建模范畴。这一理论框架由 Rajagopal 及其同事进行了深入发展。传统上，柯西弹性理论假定存在一种显式函数关系，其中应力张量 $\mathbf{T}$仅由变形梯度或线性化应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 决定，即 $\mathbf{T} = \mathcal{G}(\boldsymbol{\varepsilon})$。然而，Rajagopal [40, 41] 指出，这种显式定义限制过多，无法描述应力与应变之间不存在一一对应关系的材料响应。通过将本构结构推广为如下形式的隐式关系 $\boldsymbol{f}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$，Rajagopal 建立了统一的理论基础，将经典弹性、黏弹性和塑性纳为特例。这一隐式框架符合热力学一致性 [43] ，其优势尤为突出，因为它允许将运动学变量表示为应力的函数，而非反过来表示。这种反演对于描述生物组织、聚合物以及其他“物理非线性”材料至关重要；在这些材料中，柔度会随施加载荷发生显著变化，而标准显式模型难以准确呈现这一行为。

这类隐式材料中一个重要的子类，也是本文的研究重点，是在小应变范围内由代数非线性关系描述的材料。经典线性化弹性理论假设四阶刚度张量为常数，而 Rajagopal 的隐式理论则允许材料模量取决于应力状态本身，即使几何变形仍为无穷小 [42]。由此便有了“极限应变”或“极限应力”模型的概念：即使载荷不断增大，材料响应仍保持有界。这类模型对于解决线性理论中的物理悖论至关重要，例如该理论会预测应力集中点处出现无限应变。正如 Bustamante 和 Rajagopal 所展示的那样， [7], 这些代数非线性关系描述了一种波速并非常数 c_0 、而是局部应力场函数的材料。这种对 stress 的依赖性正是驱动本文数值模拟中所观察到的色散现象和激波形成的机制，证实物理非线性可以独立于几何非线性而存在。

隐式本构关系的意义在断裂力学领域尤为深远，因为它们能够对线性弹性断裂力学（ LEFM）固有的奇异性进行正则化。在标准 LEFM 中，应力场和应变场在裂纹尖端（$r^{-1/2}$ 奇异性）会变得奇异，这在物理上是不可能的。然而，利用 Rajagopal的非线性隐式模型，特别是具有应变限制特性的模型，可以限制裂纹尖端的应变能密度和变形，

从而更真实地描述近尖端场。近期的计算研究已成功将这些模型纳入稳健的数值框架。值得注意的是，作者此前曾利用这一方法开发了用于静态裂纹的有限元框架，证明隐式关系可以通过有效离散来捕捉复杂的断裂拓扑 [17,18,30–33]。此外，这一类本构模型已扩展至断裂相场建模，并利用应变能密度的非线性来理解裂纹扩展 [13,14,34,35]。

自 Rajagopal 的奠基性工作以来，人们对由隐式本构关系支配的材料中的波传播问题的研究日益深入。Rajagopal [40, 41], 将标准柯西弹性推广到热力学一致的框架中，使其能够涵盖应力相关模量。与波速不变的经典线性理论不同，这些隐式模型自然预言波速会随局部应力状态发生非线性变化；许多研究对这一现象进行了深入分析 [6, 7, 9, 22, 25, 36]。这些研究表明，即使不存在几何非线性，这类“物理非线性”物体固有的本构非线性也会导致平滑初始条件形成激波间断。在此分析的基础上，Magan 等人 [28] 研究了圆柱几何中的幂律隐式材料，证实波前陡化及随后的激波形成受本构关系中特定指数的控制。Bustamante 等人 [8] 近期的研究将这些概念拓展至伸长受限弹性弦，揭示出独特的纵向激波行为，显著偏离传统的超弹性预测。总体而言，这些研究确立了隐式本构理论的重要地位，表明其为描述现代先进材料复杂的色散动力学提供了丰富且不可或缺的理论基础。

本研究的主要贡献是开发了一套稳健的计算框架，用于模拟几何线性、物理非线性弹性固体中的瞬态波传播。本文提出的一项关键理论进展，是推导出一个控制应力场的二阶非线性波动方程，并将其构造为非线性显式地包含在随时间变化的项中。尽管纯应力形式在线性弹性动力学中已十分成熟 [23, 37], ，针对非线性本构行为的拓展通常依赖于速度-应力混合格式 [1]。据作者所知，在计算力学文献中，直接求解本文推导的纯非线性应力波方程尚未得到广泛研究。为求解该系统，我们提出了一种全离散数值格式，将用于空间离散的标准连续伽辽金有限元法（FEM）与用于时间积分的隐式 HHT-α 方法相结合。选择 HHT-α 算法，特别是因为它具有二阶精度，并能提供可控数值耗散，从而有效抑制高频伪振荡。每个时间步上，均使用牛顿-拉夫森迭代法对所得非线性离散方程进行迭代求解。最后，我们开展了系统的参数研究，以阐明本构参数的作用，并刻画从无色散线性波传播到高度色散、激波主导动力学的转变。

本文其余部分安排如下。第 2 节建立理论框架，详细介绍所考虑的隐式本构关系类别，并推导应力场的控制非线性波动方程。第 3 节给出完全离散的数值形式，将用于空间离散的连续伽辽金有限元法与 HHT-α 时间积分格式及牛顿-拉夫森线性化过程相结合。第 4 节讨论数值结果，通过与线性理论进行全面验证，并对本构参数 b 和 a对物理非线性固体中波传播的影响开展详细参数研究。最后，第 5 节总结主要发现并给出结论性意见。

2 Rajagopal 弹性隐式理论的数学表述

2.1 运动学

设 $\mathcal{B}$ 为一个连续体，其参考构形为 $\Omega_R \subset \mathbb{R}^d (d = 1, 2, 3)$。运动由光滑映射 $\boldsymbol{\chi}: \Omega_R \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ 定义，使得当前位置为 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$。局部变形由变形梯度 $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \boldsymbol{\chi}$ 刻画，它可作极分解 $\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR}$，其中 $\mathbf{R} \in \mathrm{SO}(d)$ 表示旋转，而 $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathrm{Sym}^+(d)$ 分别为右伸长张量和左伸长张量。相应的柯西-格林张量定义为 $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$。

我们将分析范围限制在小位移梯度的情形。假设 $\max_{\mathbf{x}, t} |\nabla \mathbf{u}| = \mathcal{O}(\delta)$，其中 $\delta \ll 1$，则格林-拉格朗日应变可简化为标准的线性化应变张量 $\boldsymbol{\epsilon}$：

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]. \tag{1}$$

2.2 隐式本构理论

经典柯西弹性理论假定存在显式关系 $\mathbf{T} = \mathbf{G}(\mathbf{B})$，其中 $\mathbf{T}$ 表示柯西应力。尽管这一框架适用于许多材料，但其显式形式仍有所局限；它无法描述小应变范围内的极限应变等行为 [39, 44]。为克服这一局限，Rajagopal 提出了一种基于如下形式的隐式本构关系的推广 $\mathcal{G}(\mathbf{T}, \mathbf{B}) = 0$。

对于各向同性材料，张量函数的表示定理 [16, 48] 允许将隐式关系一般地展开为：

$$\chi_0 \mathbf{I} + \chi_1 \mathbf{T} + \chi_2 \mathbf{B} + \cdots + \chi_8 (\mathbf{T}^2\mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2\mathbf{T}^2) = \mathbf{0}, \tag{2}$$

其中，系数 χ_i 取决于 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{B}$ 的不变量。

在线性化过程中，与经典理论存在一个关键差异。对经典显式模型进行线性化会得到胡克定律（$\mathbf{T} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}$），而在假设 $\mathbf{B} \approx \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\epsilon}$ 的条件下，对隐式关系（2）进行线性化则得到应变与应力之间的**非线性关系**：

$$\boldsymbol{\epsilon} = \hat{\chi}_0 \mathbf{I} + \hat{\chi}_1 \mathbf{T} + \hat{\chi}_2 \mathbf{T}^2 + \mathcal{O}(\delta^2). \tag{3}$$

该框架能够对这样一类材料进行建模：即使应力变得任意大，其应变仍保持无穷小，这种现象称为应变限制行为。

2.3 一个特定的应变限制类

我们采用这类材料的一个特定子类，其特征在于具有如下基于柔度的响应函数 $\boldsymbol{F}: \mathrm{Sym}(d) \to \mathrm{Sym}(d)$ [5, 24]：

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}) := \frac{\mathbb{K}[\boldsymbol{T}]}{\left(1 + b^a \|\mathbb{K}^{1/2}[\boldsymbol{T}]\|^a\right)^{1/a}}. \tag{4}$$

其中，$\mathbb{K} = \mathbb{E}^{-1}$ 是四阶柔度张量，而 a，$b \geq 0$ 是材料参数。参数 β 决定了极限应变阈值；具体而言，该模型施加以下一致界：

$$\sup_{\boldsymbol{T} \in \mathrm{Sym}} \|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})\| \leq \frac{1}{\beta}. \tag{5}$$

这种形式通过排除线弹性在裂纹尖端处预测的奇异无限应变，确保了物理合理性 [49]。

数学性质。式（4）中定义的响应函数 $\boldsymbol{F}$ 具有若干关键性质，可确保边值问题的适定性：

(i) **有界性：** $\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})\| \leq 1/\beta$ 对于所有 $\boldsymbol{T}$，从而确保有限应变在全局范围内成立。

(ii) **严格单调性：** $(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}_1) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}_2)) : (\boldsymbol{T}_1 - \boldsymbol{T}_2) > 0$ 对于不同的 $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$，从而保证唯一性。

(iii) **利普希茨连续性：** $\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}_1) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}_2)\| \leq L\|\boldsymbol{T}_1 - \boldsymbol{T}_2\|$，从而确保稳定性。

(iv) **强制性：** 该算子满足变分框架中保证解存在所需的强制性条件。

2.4 生物力学应用：参数识别

为验证所提出模型的描述能力，我们利用生物组织的实验数据 [47] 对本构参数进行校准。(4) 的一维约化得到以下标量关系：

$$\epsilon = \frac{\sigma}{(1 + (b|\sigma|)^a)^{1/a}}. \tag{6}$$

通过非线性最小二乘优化确定参数 a和 b，使模型与胸主动脉及颈动脉组织实验数据之间的误差平方和（SSE）最小。表 1 汇总的结果显示拟合优度较高（R^2 >0.94），证实该模型能够捕捉软组织力学中固有的非线性饱和特性。

表 1：优化后的材料参数和拟合优度统计量。

数据集	b	a	R^2
胸主动脉（纵向）	3.8106×10^{-1}	0.1765	0.9780
颈动脉	1.1389×10^{-6}	0.0505	0.9635
胸主动脉（横向）	2.7353×10^{-8}	0.0433	0.9476

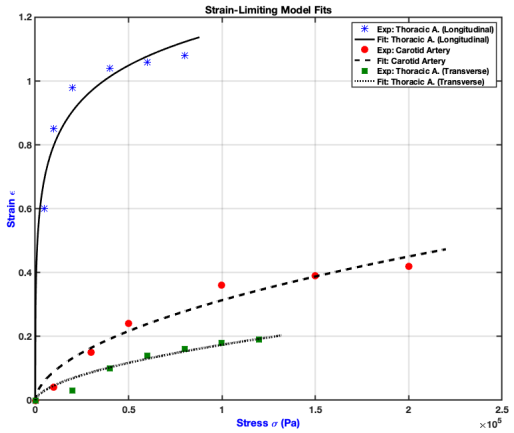


图 1：实验应力-应变数据（标记）与隐式应变限制模型拟合结果（曲线）的对比。该模型准确捕捉了组织的饱和行为。

2.5 一维“应力”运动方程的推导

推导由隐式本构关系定义的一维弹性体的运动方程

$$\epsilon = \mathfrak{f}(\sigma) := \frac{\sigma}{(1 + (b|\sigma|)^a)^{1/a}}. \tag{7}$$

此处， ϵ 和 σ 分别表示一维情况下的线性化应变和柯西应力。我们从一维情况下标准的线动量平衡开始。假设质量密度 ρ为常数，且体力为 b，则应力 σ 与位移 u 之间的关系由线动量平衡给出：

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho b = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{8}$$

为了将其完全表示为应力的形式，我们对整个方程关于空间坐标 x进行微分。这样即可将加速度项直接与应变 ϵ联系起来：

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial b}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \tag{9}$$

在一维情况下，线性化应变定义为空间坐标的位移梯度，

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{10}$$

将其代入前一个方程的右侧，可得：

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial b}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} \tag{11}$$

对于这类特定的弹性体，应变由式（7）所示的应力非线性函数给出。将该本构关系代入方程后，我们得到一个控制应力演化的单一偏微分方程：

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial b}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\mathfrak{f}(\sigma)] \tag{12}$$

若假设体力可以忽略（$b = 0$），则可简化为时间非线性、空间部分线性的波动方程：

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\mathfrak{f}(\sigma)] \tag{13}$$

注 1 （基于应力的公式与标准弹性动力学）。 式 （13）中推导出的偏微分方程与非线性弹性动力学经典的基于位移的公式有着根本区别。在标准超弹性中，运动方程通常表示为 $\rho \ddot{u} = \nabla \cdot \sigma$（$\nabla u$），从而得到一个拟线性偏微分方程，其中非线性位于空间算子（应力的散度）中。相反，本文的公式直接针对应力变量 σ 推导。此处，空间算子 $\partial_{xx}\sigma$ 保持线性，而非线性则完全包含在时间惯性项 $\partial_{tt}[\mathfrak{f}$（$\sigma$）]中。这种结构意味着，有效波速由材料的切线柔度决定；切线柔度随应力状态动态变化，而非由切线刚度决定。

式（13）中推导出的控制偏微分方程呈现出一种独特结构，其中非线性完全局限于惯性项中。为理解其物理含义，我们对本构函数 $\mathfrak{f}(\sigma)$的时间导数应用链式法则。令$(\cdot)'$ 表示对应力的微分，令$\dot{(\cdot)}$表示对时间的微分，则二阶时间导数展开为：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [\mathfrak{f}(\sigma)] = \mathfrak{f}'(\sigma) \ddot{\sigma} + \mathfrak{f}''(\sigma) (\dot{\sigma})^2. \tag{14}$$

代入 将这一展开式代回应力波方程，可得拟线性形式 :

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} = \rho \mathfrak{f}'(\sigma)\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} + \rho \mathfrak{f}''(\sigma)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)^2. \tag{15}$$

这一展开 形式揭示了所提出形式的两个关键物理特性:

- **状态相关波速:** 系数 $\rho \mathfrak{f}'(\sigma)$充当有效的动态密度。应力波的传播速度记为 $c(\sigma)$，由材料的切线柔度决定:

$$c(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{\rho \mathfrak{f}'(\sigma)}}. \tag{16}$$

  因此，波速并非常数，而是随局部应力状态变化。材料中发生硬化（柔度 $\mathfrak{f}'$降低）的区域会使波传播得更快，而软化区域则会减缓波传播。

- **速度二次非线性:** 项 $\rho \mathfrak{f}''(\sigma)(\dot{\sigma})^2$ 是由应力率平方驱动的非线性源项。这意味着，即使材料的静态非线性程度适中，高频加载（较大的 $\dot{\sigma}$）也会产生显著的非线性反馈。该项类似于流体中的对流力，但作用于时间域，充当惯性驱动项，将能量注入解的高次谐波中。

备注 2 （适定性和稳定性条件）。 控制方程的双曲特性在很大程度上取决于本构关系的单调性。将式(15)的展开形式重新整理后，该方程可视为一个波动方程，其中变系数 $\rho \mathfrak{f}'(\sigma)$ 对加速度项 $\ddot{\sigma}$ 进行缩放。为了保证问题适定（即严格双曲型且具有实值波速），该系数必须始终严格为正:

$$\rho \mathfrak{f}'(\sigma) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{f}'(\sigma) > 0. \tag{17}$$

从物理角度看，该条件要求材料的切线柔度始终为正——这意味着材料的应力–应变响应不得表现出回跳失稳或负刚度。若 $\mathfrak{f}'(\sigma) \to 0$，波速将趋于无穷大；若 $\mathfrak{f}'(\sigma) < 0$，方程将由双曲型变为椭圆型，导致不适定，此时初值问题不稳定（*Hadamard*失稳）。因此，特定本构模型 (7) 中的材料参数 a 和 b 必须选取适当，使 $\mathfrak{f}(\sigma)$ 在整个允许的应力值范围内保持单调性。

2.6 问题表述

2.6.1 强形式

我们考虑一个一维非线性波动方程，其中柯西应力 $\sigma(x,\ t)$ 作为主要未知变量。区域定义为 $\Omega = (0,\ L)$，时间区间为 $(0,\ T]$。强形式下的控制方程由线动量平衡推导得出:

$$\rho\frac{\partial^2\epsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} = f(x,t) \quad \text{in } \Omega \times (0,T], \tag{18}$$

其中， ρ 为常质量密度， $f(x,\ t)$为体力， ϵ 为线性化应变。材料行为由参数化的隐式本构关系控制，其材料常数为 a和 b:

$$\epsilon(\sigma) = \frac{\sigma}{(1+(b|\sigma|)^a)^{1/a}}. \tag{19}$$

为了将动量平衡完全表示为应力的形式，我们对加速度项应用链式法则，将应变的二阶时间导数展开为:

$$\ddot{\epsilon} = \epsilon'(\sigma)\ddot{\sigma} + \epsilon''(\sigma)(\dot{\sigma})^2. \tag{20}$$

将其代入 式（18）中，得到应力波方程最终的强形式 :

$$\rho\left[\epsilon'(\sigma)\ddot{\sigma} + \epsilon''(\sigma)(\dot{\sigma})^2\right] - \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} = f(x,t). \tag{21}$$

2.6.2 初始和边界条件

为确保问题适定，偏微分方程需满足以下条件:

初始条件：系统以已知的应力分布和应力率初始化:

$$\sigma(x,0) = \sigma_0(x), \quad \dot{\sigma}(x,0) = v_0(x). \tag{22}$$

边界条件：我们对压力变量施加狄利克雷型边界条件，对应于特定的物理载荷约束:

$$\sigma(0,t) = 0, \qquad \text{(Left: Free boundary / Stress-free)} \tag{23}$$

$$\sigma(L,t) = A\sin(\omega t), \qquad \text{(Right: Applied oscillatory traction).} \tag{24}$$

备注3。 请注意，应力上的狄利克雷条件（$\sigma = 0$）在物理上对应自由端。反之，固定位移边界条件（固支， $u = 0$）在此形式中则表现为应力梯度上的诺伊曼条件（$\frac{\partial\sigma}{\partial x} = 0$）。

式（21）定义的初边值问题给数值求解带来了特定挑战。虽然空间算子（$\partial_{xx}\sigma$）是线性的，但时间项包含高阶非线性项（$\epsilon'\ddot{\sigma}$ 和 $\epsilon''\dot{\sigma}^2$），可能成为数值不稳定性的来源。标准显式时间积分格式可能难以保持稳定，因为质量系数 $\rho\epsilon'$（σ）是变化的。

为解决这一问题，我们采用半离散方法。首先将空间离散与时间离散有效地解耦:

1. **空间离散：** 我们采用伽辽金有限元法（有限元法）处理空间域。这使我们能够将线性拉普拉斯算子转换为恒定刚度矩阵，从而简化系统结构。

2. **时间离散：**我们采用 Hilbert-Hughes-Taylor (HHT-α)隐式时间积分格式 [19, 20]。选择 HHT-α 方法，主要是因为它能够在保持所关注低频范围内二阶精度的同时，对高频模态引入可控的算法阻尼；这些模态通常会受到非线性速度项 $(\dot{\sigma})^2$的激发 [11]。

下一节将详细介绍弱式的推导，以及由此得到的非线性代数系统的线性化。

3 有限元离散与时间积分

为对式 (13) 中导出的非线性双曲方程进行数值求解，我们采用半离散方法。首先使用有限元法（FEM）离散空间域，随后使用 Hilbert-Hughes-Taylor (HHT-α) 隐式积分格式离散时间域。

3.1 弱形式

设 $\Omega = (0, L)$ 为空间域。我们用 $H^1(\Omega)$ 表示标准索об列夫空间，其中包含导数平方可积的函数。检验函数空间 $\mathcal{V}$ 由满足狄利克雷边界条件齐次形式的函数组成。由于我们在 $x = 0$ 和 $x = L$ 处均指定了应力值，检验函数必须在这些边界上取零：

$$\mathcal{V} = \{w \in H^1(\Omega) \mid w(0) = 0 \text{ and } w(L) = 0\}. \tag{25}$$

由于动态边界载荷，试探函数空间 $\mathcal{S}_t$ 随时间变化。该空间由满足问题表述中给定的特定瞬时边界条件的函数构成：

$$\mathcal{S}_t = \{\sigma(\cdot, t) \in H^1(\Omega) \mid \sigma(0, t) = 0 \text{ and } \sigma(L, t) = A\sin(\omega t)\}. \tag{26}$$

注意，$\sigma \in \mathcal{S}_t$ 意味着 $\sigma = v + \bar{\sigma}$，其中 $v \in \mathcal{V}$ 和 $\bar{\sigma}$ 是满足边界数据的提升函数。将式 (13) 乘以任意测试函数 $w \in \mathcal{V}$，并在区域上积分，得到：

$$\int_\Omega w\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}[\mathfrak{f}(\sigma)]\, dx = \int_\Omega w \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}\, dx. \tag{27}$$

对右端的空间项应用分部积分（为简洁起见，假设满足齐次 Neumann 或 Dirichlet 条件，并忽略边界项），得到弱形式：求 $\sigma \in \mathcal{S}$，使得对所有 $w \in \mathcal{V}$：

$$\int_\Omega w\rho \left(\mathfrak{f}'(\sigma)\ddot{\sigma} + \mathfrak{f}''(\sigma)\dot{\sigma}^2\right)\, dx + \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \sigma}{\partial x}\, dx = 0. \tag{28}$$

注意，我们使用了式 (15) 中推导出的非线性惯性项展开式。这表明，弱形式包含一个状态依赖质量项和一个类对流速度项。

3.2 弱解的存在性与正则性

与标准半线性波动方程相比，分析变分问题 (28) 解的存在性面临显著的分析挑战。通过辨识有效质量密度和非线性源项，可以将弱形式改写为：

$$\langle \rho\mathfrak{f}'(\sigma)\ddot{\sigma}, w\rangle + \langle \nabla\sigma, \nabla w\rangle = -\langle \rho\mathfrak{f}''(\sigma)\dot{\sigma}^2, w\rangle \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \tag{29}$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 L^2 内积。

3.2.1 通过不动点论证证明局部存在性

在时间上的局部存在性（对于 $t \in [0, T^*)$）通常可通过压缩映射论证或伽辽金方法来建立，前提是初始数据足够光滑。核心要求是满足严格双曲性条件：

$$\mathfrak{f}'(\sigma) \geq c_0 > 0, \tag{30}$$

对某个常数 c_0。在此条件下，左端的算子仍保持线性波算子受到状态依赖系数 [21] 扰动的结构。拟线性双曲系统的标准理论表明，存在一个唯一的经典解，其存在时间区间较短，并取决于初始数据的 H^s 范数（σ_0, v_0）[26, 29]。

3.2.2 整体存在与爆破解现象

无法保证整体存在（对所有 $t > 0$ 均成立）；事实上，由于非线性的固有结构，对于任意初始数据而言，整体存在是不太可能的。

- **激波形成：** 即使初始条件光滑，这类拟线性双曲方程也已知会在有限时间内产生奇异性（激波）。这是因为波特征线以取决于解的振幅的速度 $c(\sigma)$ 传播。若特征线汇聚，梯度 $\nabla\sigma$ 和 $\dot{\sigma}$ 将变得无界，从而不再满足强解所要求的正则性。

- **二次源项：** 右端的项 $f''(\sigma)\dot{\sigma}^2$ 起非线性驱动作用。若 f'' 相对于应力演化具有特定符号，该项可能导致时间导数 $\dot{\sigma}$在有限时间内爆破，其行为类似于 Riccati常微分方程中观察到的现象。

因此，我们寻求满足熵条件的分布意义下的弱解，以便在激波形成后选出物理上相关的解。对于本文所述的数值近似，重点关注激波前状态，或通过 HHT-α 时间积分格式固有的数值耗散得到的正则化解。

3.3 半离散有限元系统

我们近似 应力场 $\sigma(x,\ t)$，采用标准有限元形函数 $N_I(x$):

$$\sigma(x,t) \approx \sigma^h(x,t) = \sum_{I=1}^{n_{dof}} N_I(x)\Sigma_I(t), \tag{31}$$

. ¨其中， $\Sigma_I(t)$ 为随时间变化的节点应力值。令 $\mathbf{\Sigma}$、 $\dot{\mathbf{\Sigma}}$和 $\ddot{\mathbf{\Sigma}}$ 分别表示节点应力、应力率和应力加速度的全局向量。将离散化代入式（28），得到以下非线性半离散常微分方程系统：

$$\mathbf{M}(\mathbf{\Sigma})\ddot{\mathbf{\Sigma}} + \mathbf{F}_{nl}^{vel}(\mathbf{\Sigma}, \dot{\mathbf{\Sigma}}) + \mathbf{K}\mathbf{\Sigma} = \mathbf{0}. \tag{32}$$

此处，全局矩阵和全局向量定义如下：

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_\Omega \frac{\partial N_I}{\partial x}\frac{\partial N_J}{\partial x}\, dx \quad \text{(Constant stiffness matrix)}, \tag{33}$$

$$\mathbf{M}_{IJ}(\mathbf{\Sigma}) = \int_\Omega \rho f'(\sigma^h) N_I N_J\, dx \quad \text{(State-dependent mass matrix)}, \tag{34}$$

$$\mathbf{F}_{nl,I}^{vel} = \int_\Omega \rho f''(\sigma^h)(\dot{\sigma}^h)^2 N_I\, dx \quad \text{(Quadratic velocity force)}. \tag{35}$$

与标准弹性动力学不同，标准弹性动力学中的非线性体现在$\mathbf{K}$中；而此处的刚度矩阵$\mathbf{K}$ 为常数（线性），惯性力（质量项和速度项）则具有高度非线性。

3.4 HHT-α 时间离散

我们采用 HHT-α 方法，在保持二阶精度的同时引入可控数值耗散，以抑制高频噪声。该方法将系统从时间步 t_n 积分至 t_{n+1}。

采用 Newmark运动学更新来关联位移、速度和加速度:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\Sigma}_n + \Delta t\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_n + \frac{\Delta t^2}{2}\left[(1-2\beta)\ddot{\boldsymbol{\Sigma}}_n + 2\beta\ddot{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1}\right], \tag{36}$$

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1} = \dot{\boldsymbol{\Sigma}}_n + \Delta t\left[(1-\gamma)\ddot{\boldsymbol{\Sigma}}_n + \gamma\ddot{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1}\right]. \tag{37}$$

采用 HHT-α 修正来满足离散动量平衡。Newmark 积分参数选取如下:

$$\beta = \frac{(1-\alpha)^2}{4}, \quad \gamma = \frac{1}{2} - \alpha \quad \text{with} \quad \alpha \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right]. \tag{38}$$

由于非线性主要存在于惯性项中，我们对线性刚度项应用 α-移位以确保稳定性，同时在t_{n+1}处对非线性惯性力进行完全隐式处理，以满足本构一致性:

$$\mathbf{R}_{n+1} := \mathbf{F}^{inrt}(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}, \dot{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1}, \ddot{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1}) + (1-\alpha)\mathbf{K}\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} + \alpha\mathbf{K}\boldsymbol{\Sigma}_n = \mathbf{0}, \tag{39}$$

其中，总惯性力向量为 $\mathbf{F}^{inrt} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1})\ddot{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1} + \mathbf{F}_{nl}^{vel}(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}, \dot{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1})$.

3.4.1 线性化与求解策略

由于$\ddot{\mathbf{R}}_{n+1}$ 是主要未知量 $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}$ （或等价地，取决于具体实现的 $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}$ ）的非线性函数，因此我们采用 Newton-Raphson迭代格式。第 k 次迭代的线性化方程为:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^k) + \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \dot{\boldsymbol{\Sigma}}}\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \ddot{\boldsymbol{\Sigma}}}\frac{\partial \ddot{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}\right]\delta\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{0}. \tag{40}$$

由于质量矩阵取决于 $\boldsymbol{\Sigma}$，一致切线矩阵 $\mathbf{S}_{tan}$ 比标准公式中的一致切线矩阵复杂得多:

$$\mathbf{S}_{tan} = c_1\frac{\partial \mathbf{F}^{inrt}}{\partial \ddot{\boldsymbol{\Sigma}}} + c_2\frac{\partial \mathbf{F}^{inrt}}{\partial \dot{\boldsymbol{\Sigma}}} + c_3\left(\frac{\partial \mathbf{F}^{inrt}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} + (1-\alpha)\mathbf{K}\right), \tag{41}$$

其中， c_1， c_2， c_3 是由 Δt， β， γ确定的 Newmark系数。项 $\frac{\partial \mathbf{F}^{inrt}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}$ 涉及质量矩阵本身的导数，因此需要计算三阶导数 $\psi'''(\sigma)$，这凸显了该基于应力的公式具有高度非线性。

3.4.2 最终代数系统与更新过程

为将解从时间步 t_n 推进至 t_{n+1}，我们在每次牛顿-拉夫森迭代 k中求解线性化方程组。最终离散代数系统为:

$$\mathbf{S}_{tan}(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^k)\,\delta\boldsymbol{\Sigma}^k = -\mathbf{R}(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^k), \tag{42}$$

其中， $\delta\boldsymbol{\Sigma}^k$ 是节点应力向量的增量。更新后的解通过$\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^{k+1} = \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}^k + \delta\boldsymbol{\Sigma}^k$获得。

一致切线刚度矩阵$\mathbf{S}_{tan}$ 通过展开残差的导数推导得出。利用 Newmark 参数 β 和 γ，加速度和速度相对于主变量 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的灵敏度为:

$$\frac{\partial \ddot{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{I}, \quad \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\Sigma}}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{I}. \tag{43}$$

将这些代入线性化过程，可得到有效刚度矩阵的完全展开形式：

$$\mathbf{S}_{tan} = \underbrace{\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M}(\boldsymbol{\Sigma})}_{\text{Inertial Stiffness}} + \underbrace{\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C}_{nl}(\boldsymbol{\Sigma},\dot{\boldsymbol{\Sigma}})}_{\text{Velocity Stiffness}} + \underbrace{(1-\alpha)\mathbf{K}}_{\text{Linear Stiffness}} + \underbrace{\mathbf{K}_{geo}(\boldsymbol{\Sigma},\ddot{\boldsymbol{\Sigma}})}_{\text{Nonlinear Geometric Stiffness}}, \tag{44}$$

其中，非线性贡献项定义为：

$$\mathbf{C}_{nl} = \frac{\partial \mathbf{F}^{inrt}}{\partial \dot{\boldsymbol{\Sigma}}} = \int_\Omega 2\rho \mathfrak{f}''(\sigma)\dot{\sigma} N_I N_J \, dx, \tag{45}$$

$$\mathbf{K}_{geo} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}\ddot{\boldsymbol{\Sigma}} = \int_\Omega \rho \mathfrak{f}'''(\sigma)\ddot{\sigma} N_I N_J \, dx. \tag{46}$$

方程（44）凸显了该形式的复杂性：不同于标准线性弹性动力学中$\mathbf{S}_{tan}$为常数（或仅通过材料刚度依赖于状态），此处“质量”贡献项随每次迭代而变化，而加速度项会引入更高阶的“几何”刚度$\mathbf{K}^{geo}$，其取决于本构函数的三阶导数。

迭代过程持续进行，直到残差 $\|\mathbf{R}_{n+1}\|$ 的范数低于用户定义的容差。收敛后，运动学变量 $\boldsymbol{\Sigma}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$ 将根据Newmark关系进行一致更新。

4 数值实现与结果

前几节推导的非线性应力波方程采用开源有限元库deal.II [3]实现。选择该库是因为其对 hp自适应有限元法（FEM）具有稳健的支持，并且采用与维度无关的编程方式。

4.1 计算框架与自适应性

求解基于应力的波动方程 (13) 的一项主要挑战是，由于材料非线性，即使初始数据平滑，应力变量中也可能形成激波状梯度。为解决这一问题，我们的实现采用了空间自适应网格策略。如图2所示，我们采用 hp 加密方法，其中有限元基函数的多项式次数（p）随区域而变化。高阶三次单元（Q_3）局部布置在预期会出现较大梯度的区域（例如区域中心的激波区），而远场则采用低阶线性单元（Q_1）以降低计算成本。

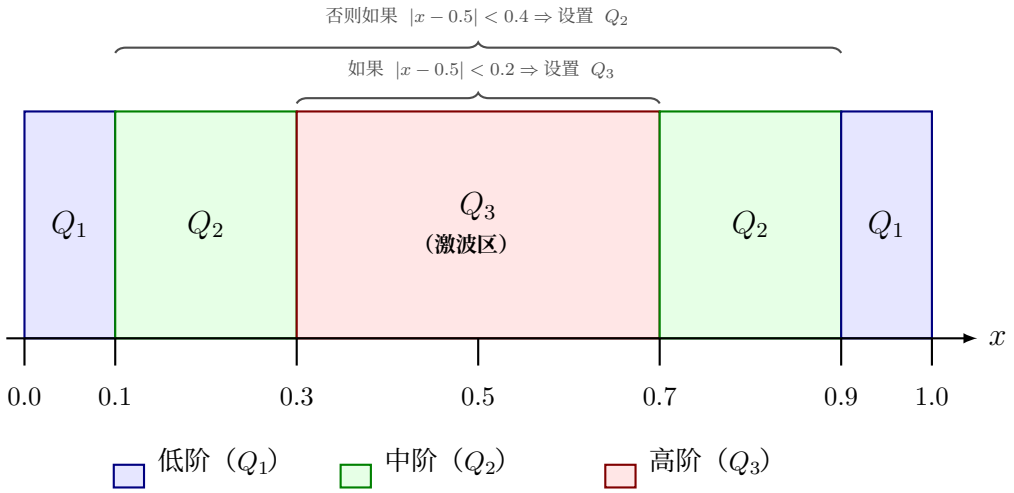


图2：自适应多项式次数分布（h-p细化策略）。区域根据距中心的距离（$L/2$）进行划分。高阶 Q_3 单元集中在中心区域，以解析激波形成，并向边界过渡为 Q_1 。

4.2 非线性求解与运动学重构

在每个 HHT-α时间步内，采用牛顿-拉夫森方法求解全局非线性系统。这种纯应力形式的一个独特特点是，主系统解中不含位移自由度。因此，位移 u 和质点速度 v 等物理运动学量必须在后处理阶段通过对本构关系进行空间积分来重建。

算法 1 详细说明了完整的求解过程。请特别注意第 23–31 行，其中对应变 $\varepsilon(\sigma)$ 和应变率 $\dot{\varepsilon}(\sigma,\ \dot{\sigma})$ 进行积分，以恢复物体的运动。此重构可作为对该形式的一致性检验。

算法 1 带后处理的非线性有限元求解器

需要： 网格 $\mathcal{T}$、参数 β，α，Δt，T_{final}，容差

初始化 $\sigma_0 = 0, \dot{\sigma}_0 = 0, \ddot{\sigma}_0 = 0$
$t \leftarrow 0$
当 $t < T_{final}$ **时** ▷ 时间步进循环
  $t \leftarrow t + \Delta t$
  $\ddot{\sigma}_{n+1}^{(0)} \leftarrow \ddot{\sigma}_n$ ▷加速度初始猜测
  $k \leftarrow 0$
  重复 ▷ 牛顿-拉夫森迭代
    1. 纽马克预测器：
    $\sigma_{n+1}^{(k)} \leftarrow \sigma_n + \Delta t \dot{\sigma}_n + \Delta t^2(0.5 - \beta_{nm})\ddot{\sigma}_n + \Delta t^2 \beta_{nm} \ddot{\sigma}_{n+1}^{(k)}$
    $\dot{\sigma}_{n+1}^{(k)} \leftarrow \dot{\sigma}_n + \Delta t(1 - \gamma_{nm})\ddot{\sigma}_n + \Delta t \gamma_{nm} \ddot{\sigma}_{n+1}^{(k)}$
    2. 组装（弱形式）：
    计算切线刚度 K 和残差 R：
    $C_t(\sigma) \leftarrow \frac{d\varepsilon}{d\sigma} = (1 + (\beta|\sigma|)^\alpha)^{-(1+1/\alpha)}$
    $R \leftarrow \int_\Omega [\rho \ddot{\varepsilon}(\sigma)\phi + \nabla\sigma \cdot \nabla\phi] \, d\Omega$
    3. 线性求解：
    求解 $K\Delta\ddot{\sigma} = -R$
    更新：$\ddot{\sigma}_{n+1}^{(k+1)} \leftarrow \ddot{\sigma}_{n+1}^{(k)} + \Delta\ddot{\sigma}$
    $k \leftarrow k + 1$
  直到 $||R|| <$ 容差或 $k > k_{max}$
  更新历史：$\sigma_n \leftarrow \sigma_{n+1}$，$\dot{\sigma}_n \leftarrow \dot{\sigma}_{n+1}$，$\ddot{\sigma}_n \leftarrow \ddot{\sigma}_{n+1}$
  如果 输出步 **则** ▷ 后处理程序
    为 $i = 0 \ldots M$定义采样点 x_i
    从有限元解中计算 $\sigma(x_i)$ 和 $\dot{\sigma}(x_i)$
    初始化 $u(0) = 0$，$v(0) = 0$
    对于 $i = 1$ 到 M，**执行** ▷ 空间积分
      计算应变：
      $\varepsilon_i \leftarrow \frac{\sigma_i}{(1 + (\beta|\sigma_i|)^\alpha)^{1/\alpha}}$
      积分位移（$u = \int \varepsilon dx$）**：**
      $u_i \leftarrow u_{i-1} + \frac{1}{2}(\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1})\Delta x$
      积分质点速度（$v = \int \dot{\varepsilon} dx$）**：**
      $\dot{\varepsilon}_i \leftarrow C_t(\sigma_i) \cdot \dot{\sigma}_i$
      $v_i \leftarrow v_{i-1} + \frac{1}{2}(\dot{\varepsilon}_i + \dot{\varepsilon}_{i-1})\Delta x$
      计算局部波速：
      $c_i \leftarrow \sqrt{\frac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon_i}}$
    结束循环
    将 $\{x_i, \sigma_i, u_i, v_i, \varepsilon_i, c_i\}$ 写入文件
  结束条件判断
结束循环

4.3 验证与收敛性分析

采用制造解方法（MMS） [45] 对数值框架进行验证。该技术能够严格评估代码针对已知光滑解恢复理论收敛率的能力。

为验证精度阶，我们构造应力场的精确解 :

$$\sigma_{\text{exact}}(x,t) = \sin(\pi x)\sin(t), \quad x \in [0,1] \tag{47}$$

该解满足齐次狄里克雷边界条件 $\sigma(0,\ t) = \sigma(1,\ t) = 0$。用于验证测试的模型参数如下:

- 密度: $\rho = 1.0$
- 材料参数: $b = 1.0$, $a = 2.0$ (光滑本构定律)
- HHT 阻尼: $\alpha = -0.05$

4.3.1 空间收敛（精度阶：2）

通过固定一个足够小的时间步 $\Delta t = 10^{-5}$以消除时间积分误差，从而分离出空间离散误差。我们使用线性拉格朗日单元 (Q_1)，改变网格细化级别 (h)。理论有限元分析预测， L_2 范数的渐近收敛率为 $O(h^{p+1})$，对应于 $p = 1$ 的收敛率 2.0。

表 2 中的结果证实了这一理论预测。当网格从 16 个单元细化至 128 个单元时，计算得到的收敛率稳定在恰好 2.00，表明空间弱形式和切线矩阵组装均已正确实现。

表 2: 使用 Q_1 单元 ($\Delta t = 10^{-5}$) 得到的空间收敛率。

细化级别 自由度		L_2 误差	Rate
4（16 个单元）	17	1.246×10^{-4}	–
5（32 个单元）	33	3.117×10^{-5}	2.00
6（64 个单元）	65	7.793×10^{-6}	2.00
7（128 个单元）	129	1.948×10^{-6}	2.00

4.3.2 时间收敛（精度阶数：2）

通过固定较高的空间细化程度，并使用高阶三次单元（Q_3），使空间误差相较于时间积分误差可忽略不计，从而评估时间精度。HHT-α 方法旨在达到二阶精度， O（Δt^2），即使对于非线性问题也是如此。

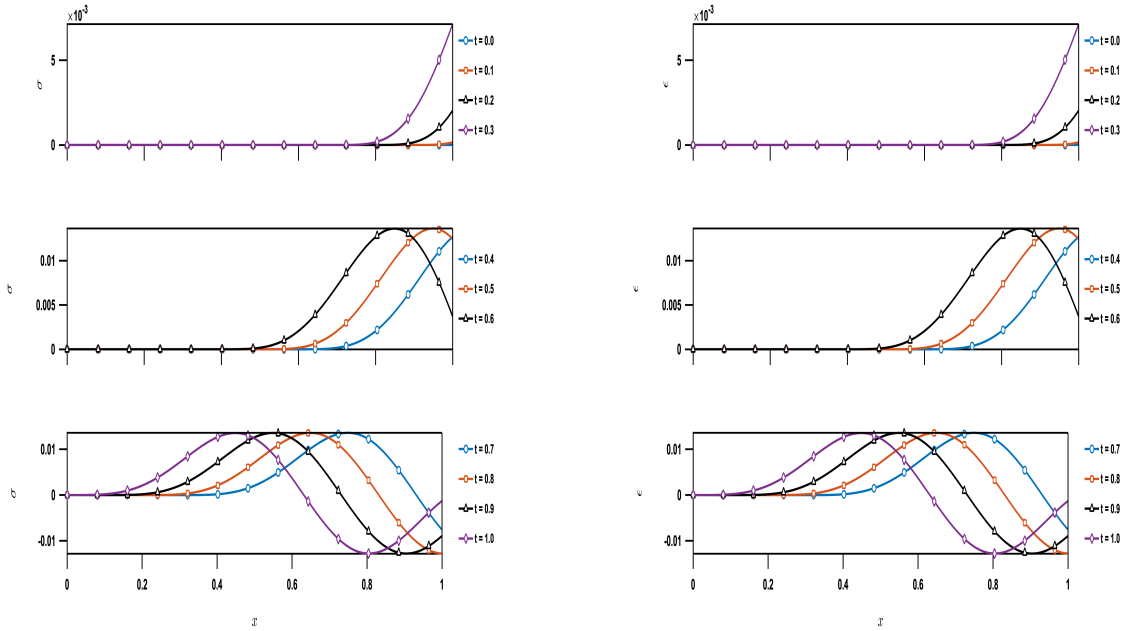
表3展示了时间步 Δt 减半时的 L_2 误差范数。我们观察到其渐近收敛至理论收敛率2.0。收敛率的变化趋势（1.40 $\rightarrow$ 1.84 $\rightarrow$ 1.92）是采用HHT-α求解非线性惯性问题的典型特征。在较大的时间步下，高度非线性的质量项$\mathbf{M}(\boldsymbol{\Sigma})$的线性化误差占主导，使观测到的收敛率略有降低。然而，随着 Δt 减小，时间积分器的二阶截断误差开始占主导，收敛率也趋近于最优值 2.0。

表 3: 使用 HHT-α （$\alpha_{\text{HHT}} = -0.05$）得到的时间收敛率。

时间步（Δt）	L_2 误差	Rate
8.000×10^{-3}	2.394×10^{-6}	–
4.000×10^{-3}	1.475×10^{-6}	1.40
2.000×10^{-3}	7.795×10^{-7}	1.84
1.000×10^{-3}	4.003×10^{-7}	1.92

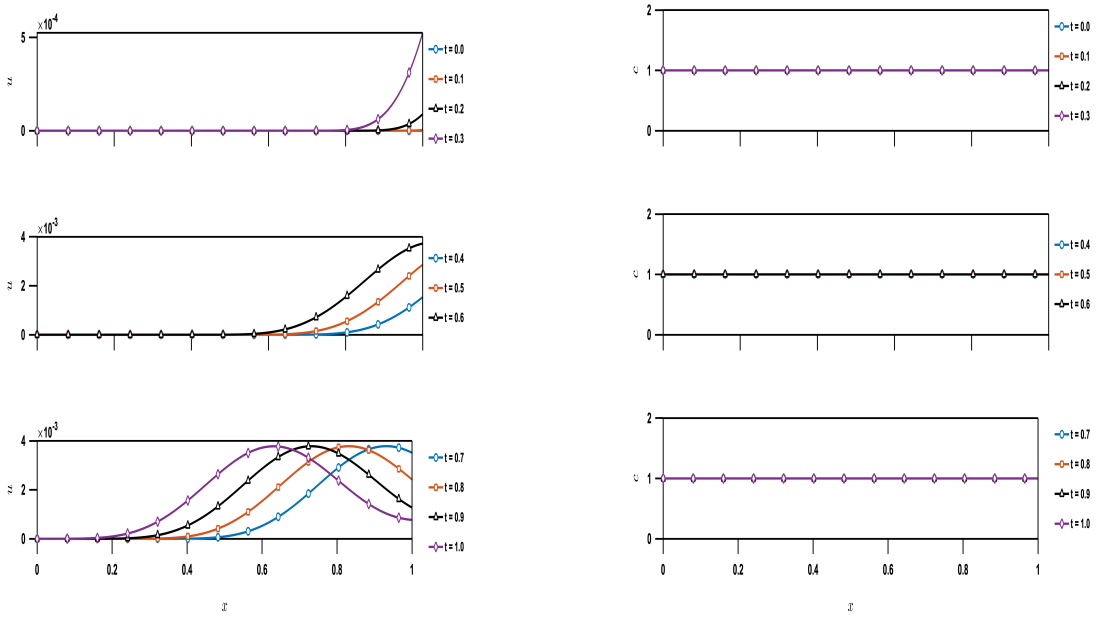
4.4 $b = 0$ 的线性情形

本小节考察由参数 $b = 0.0$ 和 $a = 1.5$定义的线弹性极限。如图4b所示，在整个时空区域内，波速 c 始终保持为1（$c = 1$），这证实材料刚度与变形状态无关。因此，位移 u、应力 σ和应变 ϵ 均以稳定的无频散波形式传播。脉冲从边界 $x = 1$处发出，向左传播进入区域，同时保持其平滑的形态。与后文讨论的非线性情形不同，应力和应变分布曲线（图3）的形状保持一致——仅相差一个弹性模量——且不会出现梯度陡化或激波形成。



(a) σ (b) ϵ

图3：线性情形下的应力 σ 和应变 ϵ，其中 $b = 0.0$ 和 $a = 1.5$。请注意线弹性特有的相同波形。

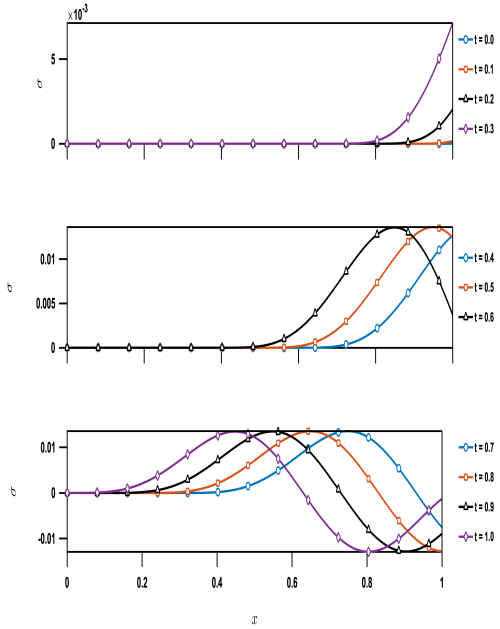


(a) u (b) c

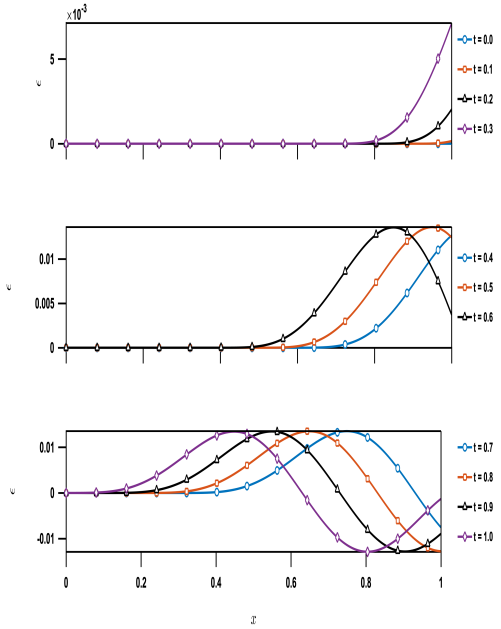
图4：线性情形下的位移 u 和波速 c ，其中 $b = 0.0$ 和$a = 1.5$。恒定的波速 $c = 1$ 证实了介质的线性特性。

4.5 $b = 1.0$ 和 $a = 1.5$下的非线性情形

在由 $b = 1.0$ 和 $a = 1.5$定义的弱非线性状态下，波传播动力学偏离线性基线。。与线性状态（$b = 0$）不同，波速 c不再恒定。如图6b所示， c 呈现出微小的时间和空间变化，在略高于单位值的范围内轻微波动。这种变化表明，材料刚度现在取决于局部变形状态。因此，力学场——应力 σ、应变 ϵ和位移 u——开始与纯线性解产生细微偏差。尽管在 $b = 1.0$时非线性较弱，但波速对应变的依赖表明色散效应开始显现。

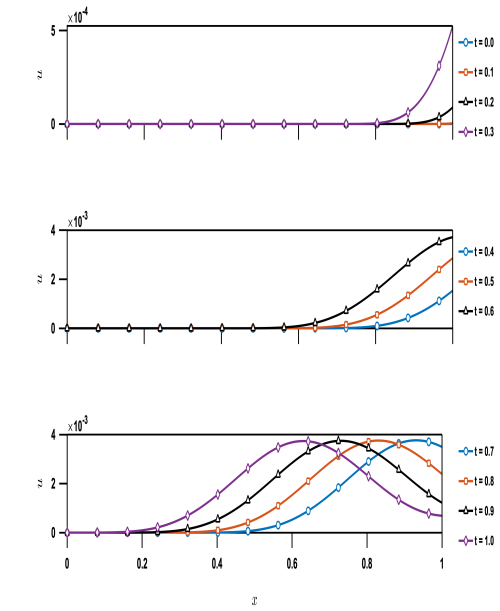


(a) σ

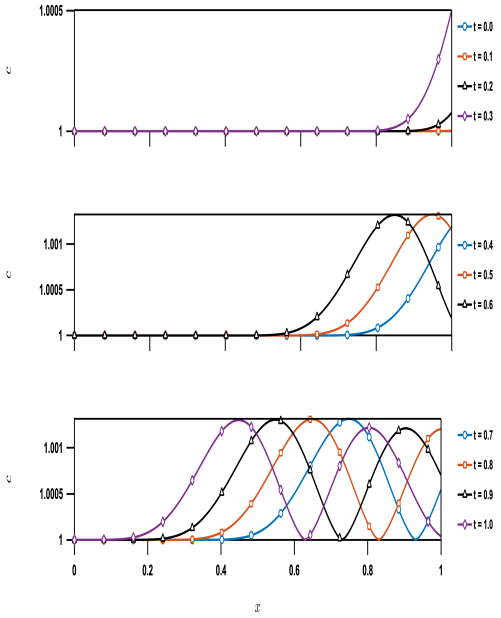


(b) ϵ

图5: 弱非线性情形下的应力 σ 和应变 ϵ，其中 $b = 1.0$ 和 $a = 1.5$.



(a) u

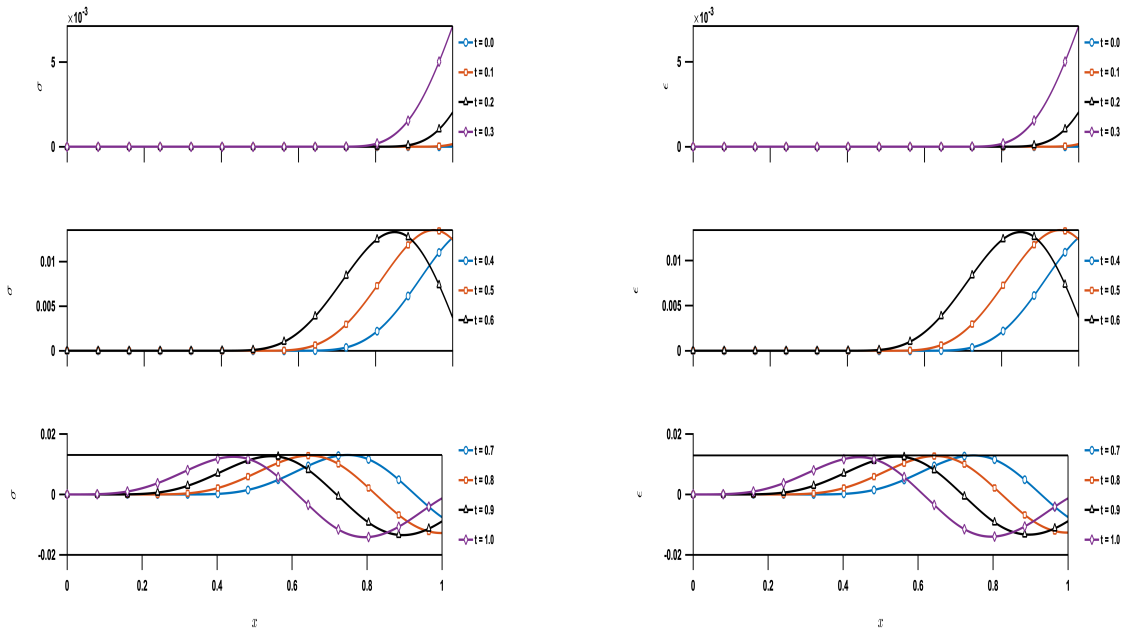


(b) c

图 6: 非线性情形下的位移 u 和波速 c，其中 $b = 1.0$ 和$a = 1.5$。请注意，波速 c 与线性情形中的恒定值相比略有变化。

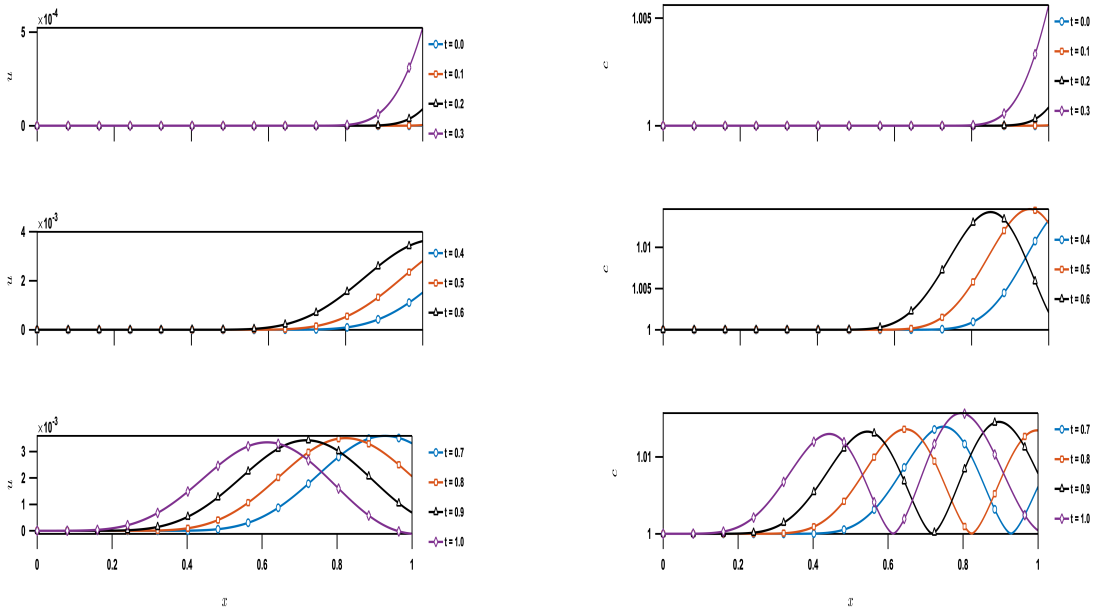
4.6 $b = 5.0$非线性情形

现在我们考虑由 $b = 5.0$ 和 $\alpha = 1.5$所表征的中等非线性区域。在这种情况下，与弱非线性情形相比，本构非线性的影响显著增强。如图 8b 所示，波速 c在空间和时间上呈现显著波动，峰值约为$c \approx 1.015$。这种变化幅度约比$b = 1.0$ 情形大一个数量级，表明局部变形状态与材料刚度之间存在强耦合。由于这种应力相关波速，应力 σ 和应变 ϵ的传播脉冲在穿过该区域时发生了明显畸变。与脉冲形状保持不变的线性情形不同，现在波的高振幅区域比低振幅尾部传播得更快。这种速度差异导致波前逐渐陡化，成为激波形成的前兆，也是非线性双曲守恒律的典型行为。



(a) σ (b) ϵ

图 7: 中度非线性情形下的应力 σ 和应变 ϵ，其中 $\beta = 5.0$ 和$\alpha = 1.5$。

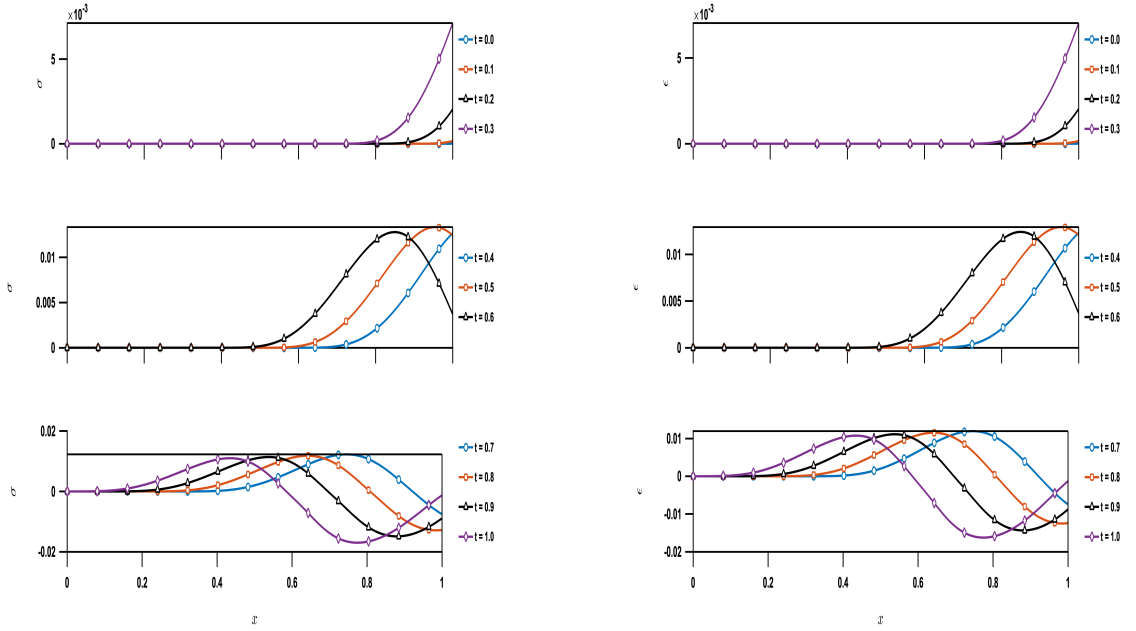


(a) u (b) c

图 8：非线性情形下的位移 u 和波速 c ，其中 $\beta = 5.0$和 $\alpha = 1.5$。请注意，与较低的 β值相比，波速变化显著增大。

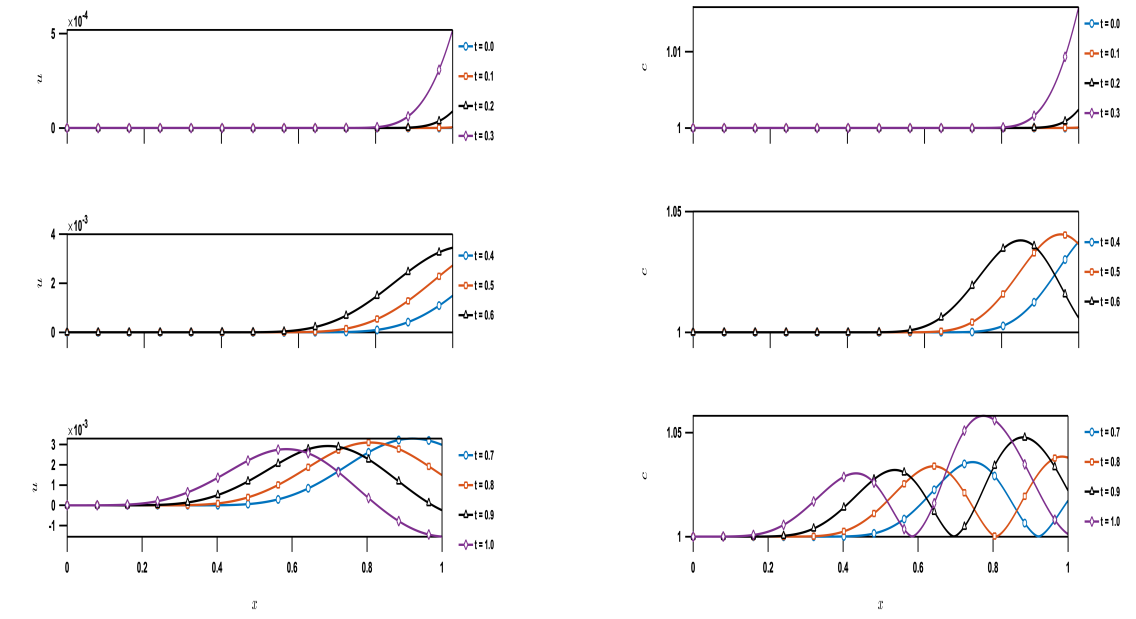
4.7 $b = 10.0$的非线性情形

最后，我们考察由 $b = 10.0$和 $a = 1.5$定义的强非线性区域。在这种情况下，本构非线性对波传播物理起主导作用。如图 10b 所示，波速 c显著偏离 1，峰值约为 $c \approx 1.04$。这种显著的应力依赖性导致极强的色散行为。随着脉冲向左传播，应力 σ 和应变 ϵ的分布曲线呈现严重的波前陡化。由于波的高振幅部分比低振幅尾部传播得快得多，脉冲后缘急剧变陡，到 $t = 1.0$ 时几乎形成激波不连续性。该情形清楚地展示了由参数 b的大小驱动的动力学变化：从平滑波平移转变为激波主导动力学。



(a) σ (b) ϵ

图 9：高度非线性情形下的应力 σ 和应变 ϵ，其中 $b = 10.0$ 和$a = 1.5$。



(a) u (b) c

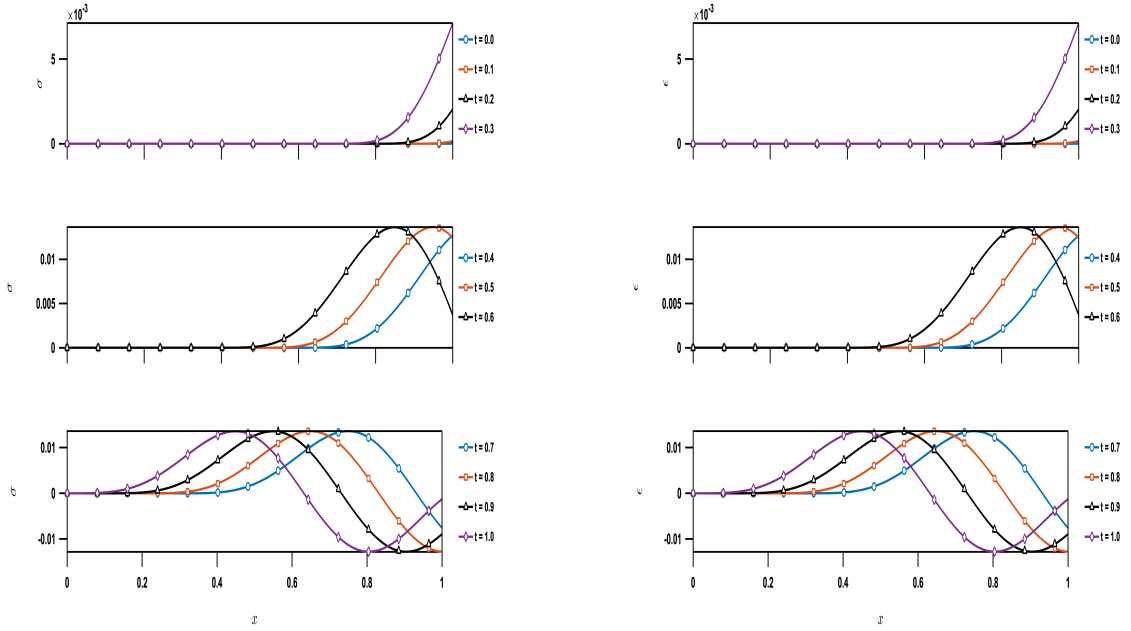
图 10：非线性情形下的位移 u 和波速 c，其中 $b = 10.0$和 $a = 1.5$。请注意，波速变化显著增大，导致波前陡化。

4.8 固定 $b = 1.0$时参数 a 的影响

本小节研究在系数 $b = 1.0$保持不变时，指数参数a对波传播的灵敏度。我们考察三种不同情况：$a = 3.0$、$a = 5.0$和 $a = 10.0$。

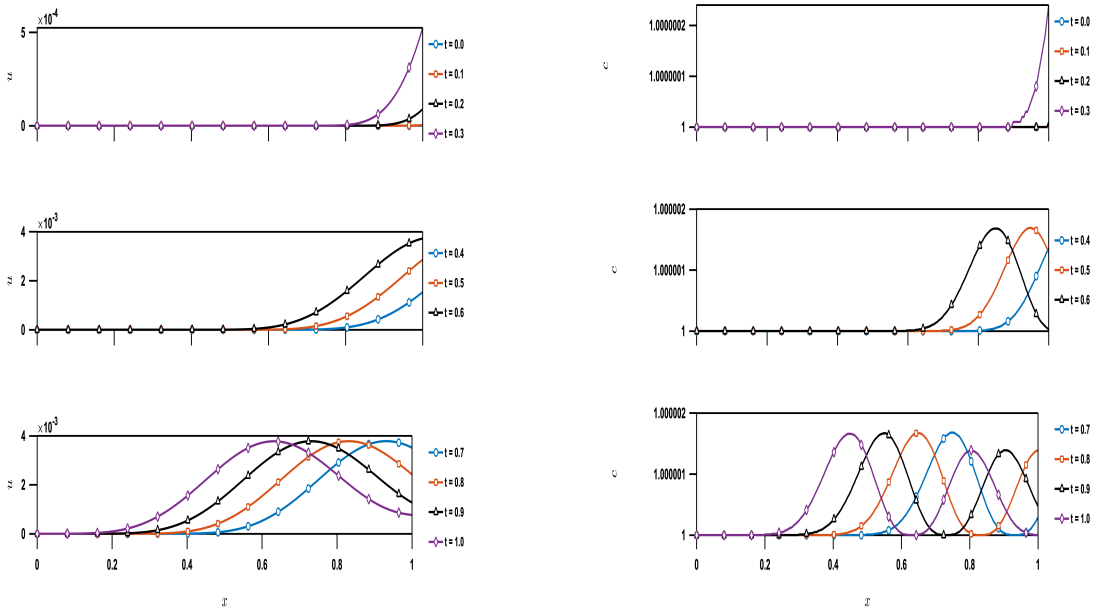
结果表明，在小应变范围（$\epsilon < 0.02$）内， a 的大小与非线性现象的可观测性之间存在明显的反比关系。从数学上看，由于非线性贡献与应变的 a 次方成正比（即 $\sim \epsilon^a$），且已知 $\epsilon \ll 1$，增大 a 会显著减小非线性项的幅值。

对于 $a = 3.0$的情况，波速 c （图 12b）仅表现出极微小的偏差，约为 10^{-6}，因此系统实际上呈线性。随着 a 进一步增大至 5.0 和 10.0，这种线性化效应会更加显著。非线性刚度项迅速消失，导致应力、应变和位移的波形保持形状不变，不会像较低-a 的情况那样变陡。因此，参数 a 实际上起到阈值控制器的作用；较高的取值会将非线性效应限制在变形显著较大的范围内，而较低的取值则使非线性能够在较小应变幅值下显现。



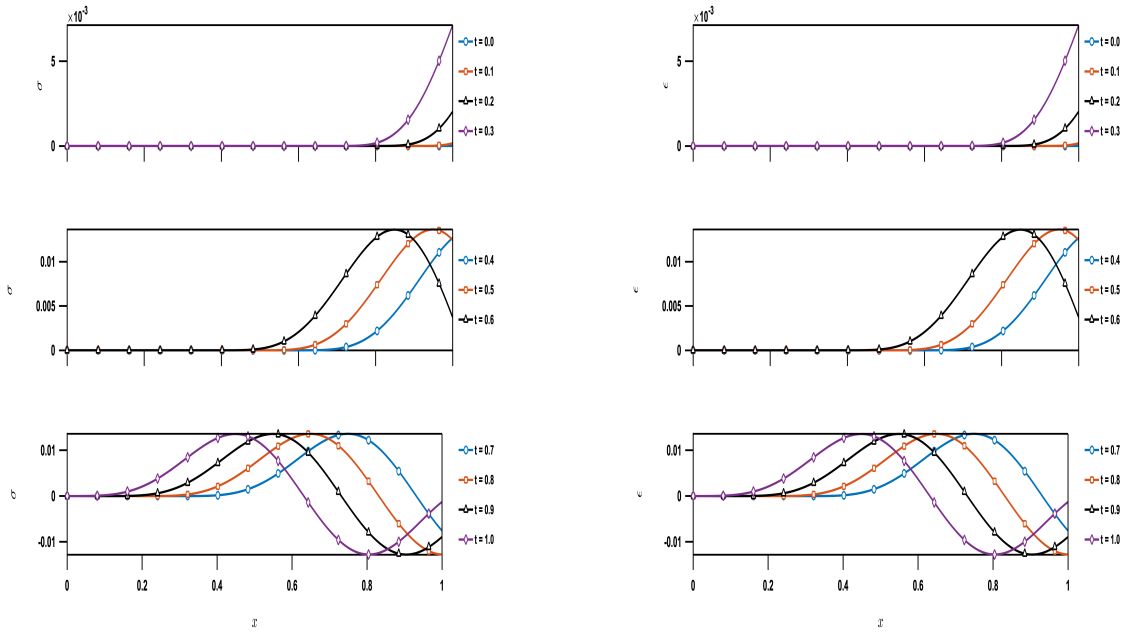
(a) σ (b) ϵ

图 11： $b = 1.0$ 和 $a = 3.0$的应力 σ 和应变 ϵ 。



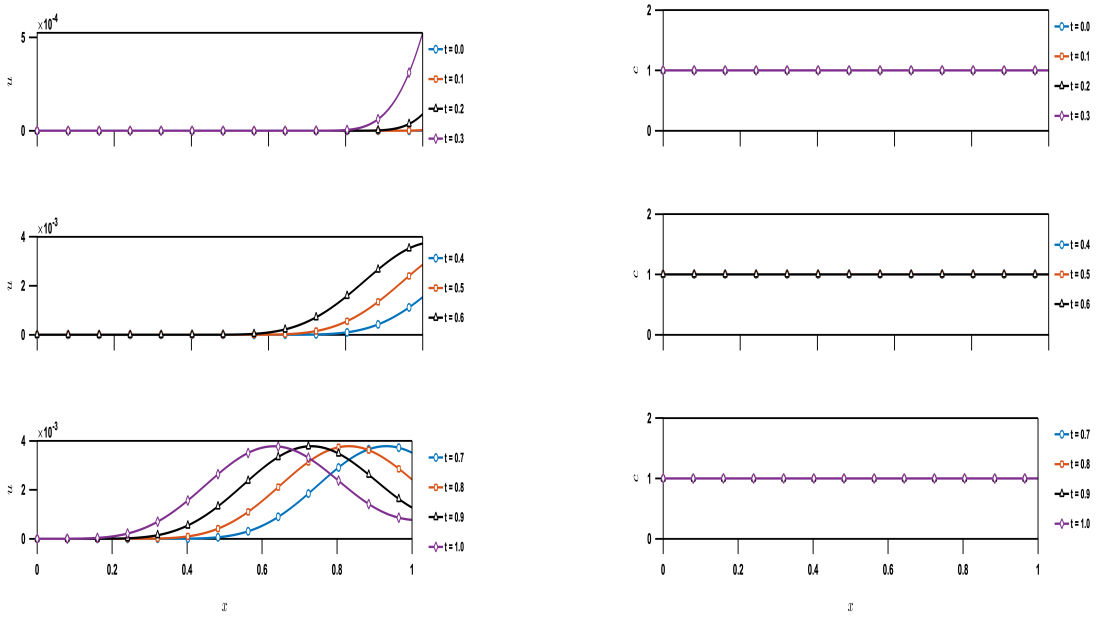
(a) u (b) c

图12： $b = 1.0$和 $a = 3.0$的位移 u与波速 c。请注意，波速的偏差可以忽略不计。



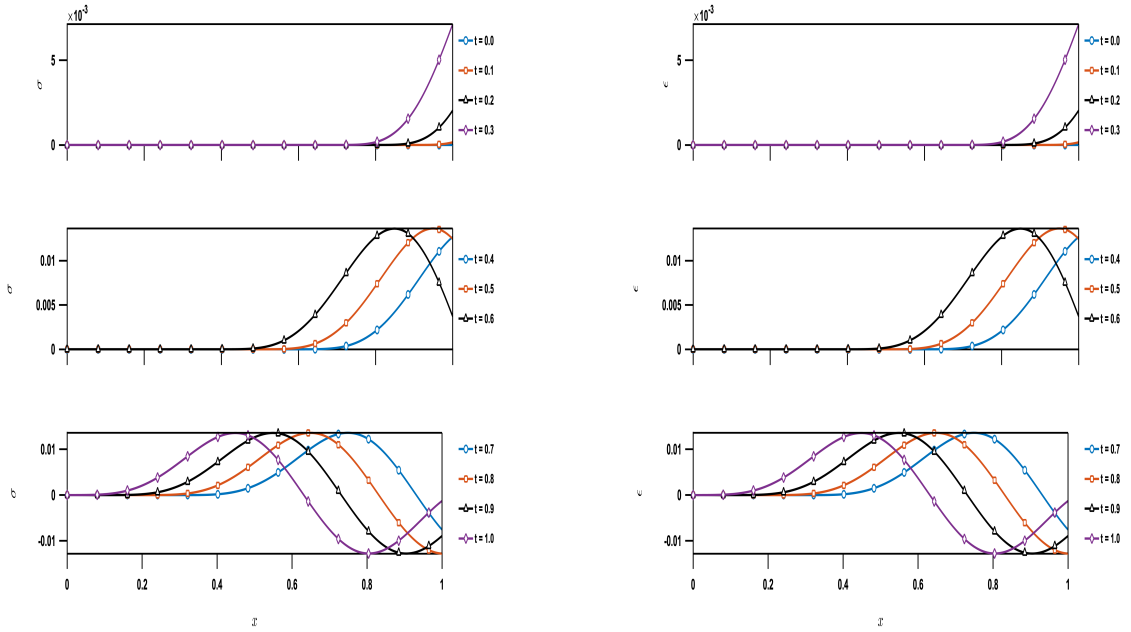
(a) σ (b) ϵ

$b = 1.0$ 和 $a = 5.0$的应力 σ 与应变 ϵ 。



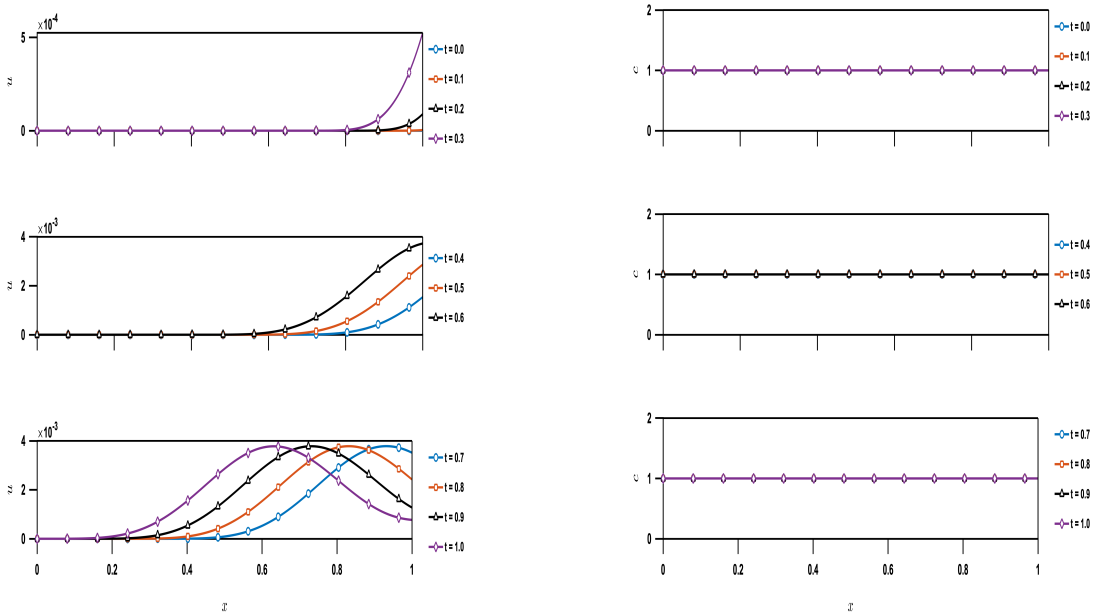
(a) u (b) c

图 14: $b = 1.0$ 和 $a = 5.0$ 对应的位移 u 和波速 c。



(a) σ (b) ϵ

图 15: $b = 1.0$ 和 $a = 10.0$ 对应的应力 σ 和应变 ϵ。



(a) u (b) c

图16：位移 u 和波速 c 对应于 $b = 1.0$ 和 $a = 10.0$。由于指数较高，响应实际上呈线性。

5 结论

在本研究中，我们对由代数非线性本构关系控制的几何线性弹性材料中的波传播进行了全面的计算研究。通过系统地改变材料参数 b（非线性幅度）和 a （非线性指数），我们建立了本构描述与由此产生的波动力学之间的明确映射。首先，我们将数值框架与线弹性极限（$b = 0$）进行了对比验证，得到了预期的保持形状的波平移以及恒定的单位波速。

参数研究揭示了两个本构参数各自的不同作用：

- **参数的影响 b：** 系数 b 是影响非线性效应强度的主要因素。随着 b 从 1.0 增至 10.0，波速的空间和时间波动愈发显著。这种应力相关波速引入了色散机制，导致波前陡化。在强非线性区域（$b = 10.0$），高振幅区域与低振幅区域之间的差分波速导致形成陡峭梯度，表明波传播从平滑状态转变为激波主导动力学。

- **参数的影响 a：** 指数参数 a 控制非线性的激活阈值。对于所研究的小应变区域（$\epsilon < 0.02$），增大指数 a 可有效抑制非线性响应。较低的取值（例如 a =1.5）能够清晰地呈现非线性特征，而较高的取值（例如 $a \geq 5.0$）则使非线性项变得微不足道，从而恢复近似线性响应。这证实，对于幂律型材料，指数决定了观察到非线性波物理所需的应变阈值。

总之，结果表明，所提出的数值框架具有稳健性，能够捕捉本构非线性与波色散之间复杂的相互作用。该框架能够准确模拟从平滑脉冲演变为激波间断的过程，为表征先进材料提供了有价值的工具；对于这类材料，恒定刚度这一标准假设并不适用。未来的工作将把这一形式扩展到多维区域，并探究在强激波存在时，隐式时间积分格式对能量守恒的影响。

致谢

SMM 的工作得到美国国家科学基金会项目（编号 2316905）的资助。

参考文献

[1] O. V. Abramov 等。具有频率相关衰减的流体中的非线性声波。《波现象物理学》，19(1):1–10，2011年。[2] Jan D. Achenbach。《弹性固体中的波传播》。North-Holland，1973年。[3] D. Arndt、W. Bangerth、D. Davydov、T. Heister、L. Heltai、M. Kronbichler、M. Maier、J. P. Pelteret、B. Turcksin 和 D. Wells。deal. ii 有限元库：设计、特性与见解。《计算机与应用数学》，81:407–422，2021年。[4] Yousef Bozorgnia 和 Vitelmo V. Bertero。《地震工程：从工程地震学到基于性能的工程》。CRC出版社，2004年。[5] M. Bul´ıˇcek、J. M´alek 和 E. S¨uli。应变受限非线性弹性模型的分析与近似。《固体数学与力学》，20(1):92–118，2015年。[6] R Bustamante、P Arrue、O Orellana 和 R Meneses。研究非格林弹性一维杆中非线性波传播的迭代法。《*IMA*应用数学杂志》，89(2):426–440，2024年。[7] R. Bustamante 和 K.R. Rajagopal。新型弹性体中某些边值问题的解。《力学学报》，216:17–36，2011年。[8] R. Bustamante、K.R. Rajagopal 和 C. Rodriguez。伸长受限弹性弦的分段线性本构关系。《*IMA*应用数学杂志》，2025年。arXiv:2408.05309。[9] R Bustamante 和 D Sfyris。从应力运动方程直接确定新型弹性体中的应力及波传播。《固体数学与力学》，20(1):80–91，2015年。[10] Anil K. Chopra。《结构动力学：地震工程理论与应用》。培生，第5版，2020年。[11] Jintai Chung 和 Gregory M. Hulbert。用于结构动力学的改进数值耗散时间积分算法：广义-α 方法。《应用力学杂志》，60(2):371–375，1993年。[12] Michel Destrade 和 Giuseppe Saccomandi。《软纤维材料的非线性力学》。施普林格，2011年。

[13] M. P. Fernando 和 S. M. Mallikarjunaiah。用于准静态反平面剪切断裂的 AT1相场框架：统一基于 ξ的自适应性与非线性应变能密度函数。*arXiv*预印本 *arXiv:2506.23249*，2025年。[14] M. P. Fernando 和 S. M. Mallikarjunaiah。基于 ξ的自适应相场模型，用于准静态反平面断裂。*arXiv*预印本 *arXiv:2506.12360*，2025年。[15] Victor Giurgiutiu。《压电晶片主动传感器结构健康监测》。学术出版社，第2版，2014年。[16] K. Gou、S. M. Mallikarjunaiah、K. R. Rajagopal 和 J. R. Walton。在应变限制弹性理论背景下的断裂建模：单个平面应变裂纹。《国际工程科学杂志》，88:73–82，2015年。[17] Kun Gou 和 SM Mallikarjunaiah。应变限制弹性固体中拉伸载荷下圆形裂纹尖端场的计算建模。《非线性科学与数值模拟通讯》，121:107217，2023年。[18] Kun Gou 和 SM Mallikarjunaiah。三维非线性应变限制弹性体中V形裂纹尖端场的有限元研究。《固体数学与力学》，28(10):2155–2176，2023年。[19] Hans M Hilbert、Thomas JR Hughes 和 Robert L Taylor。结构动力学时间积分算法的改进数值耗散。《地震工程与结构动力学》，5(3):283–292，1977年。[20] Thomas J. R. Hughes。《有限元法：线性静力与动力有限元分析》。多佛出版社，2012年。[21] Thomas J. R. Hughes、Tosio Kato 和 Jerrold E. Marsden。具有良定性的拟线性二阶双曲系统及其在非线性弹性动力学和广义相对论中的应用。《理性力学与分析档案》，63(3):273–294，1977年。[22] R Ibarra 和 R Bustamante。无穷小应变问题中非线性弹性固体小振幅波传播的分析。《波动》，113:102985，2022年。[23] J. Ignaczak。非均匀各向同性弹性半空间中的瑞利波。《力学档案》，15(3):341–346，1963年。纯应力弹性动力学的早期推导。[24] H. Itou、V. A. Kovtunenko 和 K. R. Rajagopal。应变限制黏弹性体中裂纹邻域的应力与应变状态。《固体数学与力学》，23(3):433–444，2018年。[25] K Kannan、KR Rajagopal 和 Giuseppe Saccomandi。新型弹性固体的非定常运动。《波动》，51(5):833–843，2014年。[26] Tosio Kato。拟线性对称双曲系统的柯西问题。《理性力学与分析档案》，58(3):181–205，1975年。[27] Randall J. LeVeque。《双曲问题的有限体积法》。剑桥大学出版社，2002年。[28] A. Magan、M. Shearer 和 M. Zigo。隐式本构方程子类中圆柱体和圆柱环内的弹性波。《固体数学与力学》，25(12)，2019年。

[29] Andrew Majda. 多空间变量下的可压缩流体流动与守恒律系统，《应用数学科学》第 53 卷。Springer-Verlag New York，1984年。[30] S. M. Mallikarjunaiah. 一种用于静态裂纹的 hp 自适应有限元框架：逐点密度变化对 I 型、II 型和混合模式断裂的影响。*arXiv* 预印本 *arXiv:2512.21443*，2025年。[31] S. M. Mallikarjunaiah 和 J. R. Walton. 关于一类应变受限各向异性弹性体中平面应变断裂的直接数值模拟。《国际断裂力学杂志》，192(2):217–232，2015年。[32] SM Mallikarjunaiah 和 Kun Gou. 含星形裂纹的非线性本构、几何线性弹性多孔固体中的裂纹尖端场表征：有限元研究。*arXiv* 预印本 *arXiv:2507.09263*，2025年。[33] SM Mallikarjunaiah 和 Pavithra Venkatachalapthy. 非线性应变限制弹性固体中静态反平面剪切裂纹的 hp 自适应有限元模拟。*arXiv* 预印本 *arXiv:2507.23195*，2025年。[34] Ram Manohar 和 SM Mallikarjunaiah. 应变受限固体准静态断裂 AT1 相场模型的自适应有限元收敛性分析。*arXiv* 预印本 *arXiv:2507.00376*，2025年。[35] Ram Manohar 和 SM Mallikarjunaiah. 应变受限弹性固体准静态脆性断裂正则化变分模型的自适应有限元算法收敛性分析。*arXiv* 预印本 *arXiv:2505.19801*，2025年。[36] R Meneses、O Orellana 和 R Bustamante. 关于一类非格林弹性非线性弹性体本构关系的波动方程的简论。《固体数学与力学》，23(2):148–158，2018年。[37] Andrew N. Norris. 弹性波运动的应力表述。《*JASA* 快报》，1(6):064001，2021年。[38] Kevin J. Parker、M. M. Doyley 和 D. J. Rubens. 组织弹性性质成像：20 年回顾。《医学与生物学中的物理学》，56(1):R1，2011年。[39] K. R. Rajagopal. 弹性理论的弹性。《*Zeitschrift f¨ur Angewandte Mathematik undPhysik (ZAMP)*，58(2):309–317，2007年。[40] K.R. Rajagopal. 隐式本构理论。《数学应用》，48(4):279–319，2003年。[41] K.R. Rajagopal. 论隐式本构理论。《国际工程科学杂志》，44(1):1–7，2006年。[42] K.R. Rajagopal. 小应变范围内物体的非线性弹性响应。《力学学报》，223:1–8，2011年。[43] K.R. Rajagopal 和 A.R. Srinivasa. 论非耗散固体的响应。《皇家学会会刊 *A* 辑》，463:357–367，2007年。[44] Kumbakonam R Rajagopal. 论隐式本构理论。《数学应用》，48(4):279–319，2003年。

[45] Patrick J Roache. 通过制造解法进行代码验证。Hermosa出版社，阿尔伯克基，新墨西哥州，2002年。[46] Joseph L. Rose. 固体介质中的超声导波。剑桥大学出版社，第 1 版，2014年。[47] Yasemin Sengul. 具有极限应变的黏弹性。离散与连续动力系统系列*S*，14(1):57–70，2021年。[48] Clifford A Truesdell. 理性连续介质力学入门 *V1*。学术出版社，1992年。[49] H. C. Yoon、K. K. Vasudeva 和 S. M. Mallikarjunaiah. 非线性应变限制热弹性体中热-力耦合系统的有限元模型。《非线性科学与数值模拟通讯》，108:106262，2022年。