arXiv:2601.04648v1 [cs.GT] 8 Jan 2026

具有非单调网络效应的联邦学习机制设计

Xiang Li，*IEEE*学生会员，Bing Luo，*IEEE*高级会员，Jianwei Huang*，*IEEE*会士，以及 Yuan Luo，*IEEE*高级会员

摘要——机制设计对于联邦学习（FL）至关重要，它通过协调具有自利性的客户端来最大化社会福利。然而，现有机制通常忽视客户端参与的网络效应，以及不同应用对模型性能（即泛化误差）的多样化要求，从而导致激励和社会福利次优，甚至无法在实际部署中应用。为弥补这一不足，我们研究了具有网络效应和特定应用要求的模型性能的联邦学习激励机制设计。我们建立了一个理论模型，用于量化网络效应对异质客户端参与的影响，揭示了此类效应的非单调性。基于这些洞见，我们提出了模型交易与共享（MoTS）框架，使客户端能够通过参与或购买来获取联邦学习模型。为进一步应对客户端的策略行为，我们设计了面向应用和网络效应的社会福利最大化（SWAN）机制，利用模型客户支付来提供激励。硬件原型上的实验结果表明，我们的 SWAN机制优于现有联邦学习机制，使社会福利最高提升352.42%，并将额外激励成本降低93.07%。

索引词—**联邦学习、机制设计、网络效应。**

一、引言

联EDERATED 学习（联邦学习） [2]–[5] 是一种新兴的机器学习范式，利用分布在各设备上的海量数据 [6] 和资源 [7] 。通过协作模型训练，联邦学习旨在实现社会福利最大化（定义为所有参与方的总收益 [8]），同时满足针对模型性能（即泛化能力 [9]）的各种特定应用要求。例如，在医疗保健等领域 [10], ，除了最大化社会福利外，训练得到的联邦学习模型还必须满足严格的泛化误差阈值 [11] ，以确保可靠性。而对于推荐系统等领域 [12], ，这一约束更加宽松。然而，实现这种应用感知的社会福利最大化，需要异构客户端的积极参与，而这通常会受到培训成本 [13]–[15],（例如计算成本）的阻碍。对于现有联邦学习框架（例如[16]–[18]），尽管客户端可以通过参与获得训练后的模型，但模型带来的效用可能无法抵消其成本，从而导致参与度下降。因此，为了充分发挥客户端协作的作用，设计一种在满足应用不同性能要求的同时实现社会福利最大化的机制，对于联邦学习取得成功至关重要。

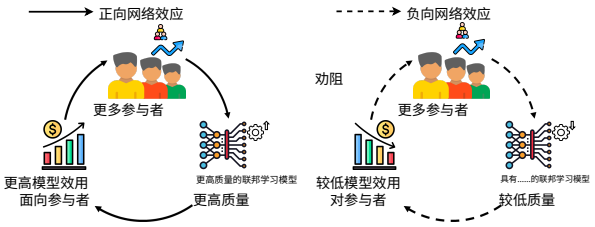


图1. 联邦学习中客户端参与的网络效应。

近期研究（例如， [19]–[31], ）通过联邦学习中的机制设计，在优化社会福利方面取得了令人瞩目的进展。然而，这些研究通常忽视了**网络效应** [32]——这种效应源于客户端参与，以及不同应用对模型性能的异质性要求。具体而言，网络效应[1] 是指客户端参与与训练模型效用之间的相互依赖关系，而这种关系会随网络规模（即参与者数量）而变化。这些效应会影响客户端参与决策之间的相关性。例如，随着更多客户端参与联邦学习，训练出效用更高的模型将变得更加可行，从而吸引更多参与者，形成正向反馈循环。相反，由于数据异质性， [33]，更多参与者也可能导致模型效用降低，进而抑制参与，如图1所示。忽视此类网络效应，可能导致在不同阶段设计出不恰当的激励机制，使客户端因参与而获得的报酬过低或过高。不同的模型性能要求进一步加剧了激励错配，使激励机制无法适应客户端参与决策的动态变化。受此启发，本文探讨以下关键问题：

关键问题。 如何设计一种具有网络效应的联邦学习应用感知社会福利最大化机制？

[1]在经济学中，网络效应是指产品效用随客户端数量变化的现象，通常呈现单调性：正向（效用随客户端数量增加而提高，例如社交网络）或负向（例如网络拥塞）。

Xiang Li 任职于深圳环形区域研究院、深圳社会人工智能与机器人研究院及理学院
理工学院，香港中文大学（深圳）（电子邮箱：xiangli2@link.cuhk.edu.cn）。Bing Luo任职于江苏杜克大学昆山校区数据科学研究中心（电子邮箱：bl291@duke.edu）。Jianwei Huang任职于香港中文大学（深圳）理工学院、深圳市人工智能与机器人研究院、深圳市群体智能赋能低碳能源网络重点实验室以及CSIJRI智能储能联合研究中心，地址：中国广东省深圳市，邮编518172。他同时隶属于深圳环形区域研究院，地址：中国广东省深圳市，邮编518038（通讯作者，电子邮箱：jianweihuang@cuhk.edu.cn）。Yuan Luo任职于香港中文大学（深圳）理工学院、深圳市人工智能与机器人研究院以及深圳市群体智能赋能低碳能源网络重点实验室（电子邮箱：luoyuan@cuhk.edu.cn）。

部分分析发表于 ACM MobiHoc 2024会议 [1]

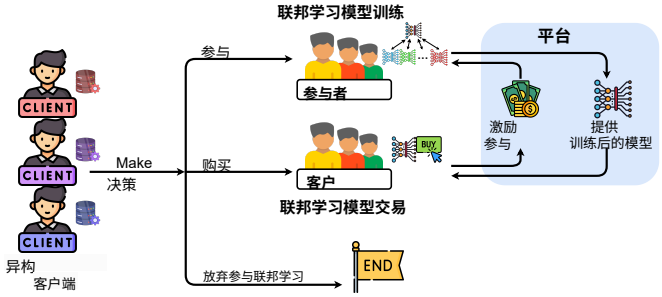


图 2. 模型交易与共享（MoTS）框架。

为了解决上述关键问题，我们借鉴新兴的机器学习模型市场（例如，_ [34]–[36]），提出了模型交易与共享（MoTS）框架，以发挥联邦学习网络效应并提升社会福利。如图2所示，MoTS框架允许客户端通过两种方式获取联邦学习模型：作为参与者参与培训，或作为模型客户购买训练后的模型。有了这一额外的购买选项，客户端可以更便捷地获取联邦学习模型（例如，参与成本较高或数据量有限的客户端），而模型客户支付的费用可以触发网络效应，促进参与，从而提高社会福利。

然而，自利型客户端优先考虑个体收益，这可能偏离社会福利最大化目标，或无法达到特定应用所需的性能阈值。因此，我们需要为 MoTS 框架设计一种机制，以便在不同模型性能要求下实现社会福利最大化；但由于联邦学习具有网络效应等独特特征，这一任务极具挑战性。具体而言，客户端统计异质性（即数据量和分布异质性 [37]）以及联邦学习的分布式特性，使训练模型性能难以量化。这种内在的复杂性要求采用精密的理论模型 [38] 来评估网络效应，以及客户端参与所带来的预期模型效用和收益。此外，联邦学习的隐私保护特性限制了客户端访问彼此的私有信息，从而形成不完全信息博弈；额外的购买选项则进一步扩大了客户端的决策空间。

基于上述背景，我们首先研究线性联邦学习模型；正如 [39]–[43]所示，线性模型有助于理解非线性场景。通过线性模型设定并量化网络效应对联邦学习模型性能的影响，我们探讨了不完全信息下多个客户端之间的纳什均衡 [44] 。在此基础上，我们设计了应用感知与网络效应社会福利最大化（SWAN）机制。SWAN 机制通过模型客户的支付激励异构客户端，并利用客户端参与的网络效应，从而最大限度地减少额外激励成本。在各种联邦学习场景中，该机制能够在满足模型性能特定应用要求的同时，实现社会福利最大化。

本文的主要结果和贡献如下：

- 新问题表述： 本文提出了首个应用感知的社会福利最大化框架，该框架面向联邦学习，并明确纳入客户端参与所产生的非单调网络效应，填补了现有联邦学习机制设计中的一个关键空白。

- 基础理论见解： 通过严格分析异质数据量和分布下的泛化误差，本文揭示了联邦学习网络效应反直觉的非单调结构，表明客户端参与对模型性能的影响可能随数据异质性而在正向和负向之间转变。

- 核心技术方案：本文提出模型交易与共享（MoTS）框架，并设计了 SWAN 机制，将网络效应和不完全信息战略行为纳入考量，以共同优化定价和激励，在实现针对特定应用的性能保证的同时，最大限度地降低（有时甚至消除）激励成本。

- 实践验证与影响：在真实的联邦学习硬件原型上进行的大量实验验证了理论分析，并表明该方案相较于现有联邦学习机制取得了显著提升：社会福利最高提升 352.42%，激励成本最高降低 93.07%，同时支持多样化的应用需求。

本文其余部分安排如下。第二节回顾联邦学习中有关机制设计和网络效应的相关研究。第三节介绍系统模型和问题表述。第四节阐述我们提出的 MoTS 框架，并基于对网络效应的分析，构建相应的 SWAN 机制。第五节介绍在联邦学习硬件原型上进行的实验评估。第六节总结全文。由于篇幅限制，本文将结果的详细证明及其他实证实验留在在线附录中 [45]。

II. 相关工作

本节回顾联邦学习中旨在最大化社会福利的机制设计及网络效应，并指出促使我们开展本研究的关键空白。

联邦学习社会福利的机制设计。联邦学习社会福利优化的机制设计已取得长足进展（例如， [19]–[31]），近期综述 [3]–[8]对此进行了总结。具体而言，Lee等人在 [13] 中将联邦学习参与者之间的互动建模为斯塔克尔伯格博弈，旨在最大化社会福利。Zhan等人在 [21]中提出了一种基于学习的算法，用于评估模糊不清的客户端贡献，从而提高所有参与者的总收益。Jiao等人在 [22] 中提出了一种基于拍卖的市场模型，以激励客户端参与联邦学习，从而有效地最大化社会福利。Saputra等人在 [23] 中开发了一种基于合约的策略，以提高联邦学习框架的社会福利。

然而，这些研究通常不对训练模型性能施加任何约束，并忽视了网络效应。因此，它们可能无法满足特定应用的性能要求，并产生低效激励：对于客户端的参与，要么支付不足，要么支付过高。相比之下，本文从理论上分析了客户端参与所产生的网络效应

这一问题由于联邦学习的独特属性而相对缺乏研究且更加复杂。我们在MoTS框架内设计了SWAN机制，利用网络效应最大化社会福利。我们的机制能够满足针对联邦学习模型性能（即泛化能力）的各种特定应用要求，同时将额外激励成本降至最低。

联邦学习中的网络效应。唯一研究联邦学习网络效应的工作是 [46] Hu 等人的研究，该研究将客户端行为建模为网络效应博弈，以分析参与均衡。然而，他们的分析假设客户端期望一致，且性能会随着参与度提高而单调改善，没有充分考虑客户端异质性及其对社会福利的影响。在实践中，客户端往往不了解其他客户端的决策，而且数据统计异质性可能导致参与情况与模型性能之间存在复杂的依赖关系。这种不完全信息和异质性可能导致其机制无法激励不同的客户端趋向预期均衡。相比之下，本文设计了一种机制，在不完全信息条件下激励异构客户端参与，旨在针对联邦学习应用中不断变化的模型性能要求，实现社会福利最大化。

III. 系统模型与问题表述

本节建立用于联邦学习的模型交易与共享（MoTS）框架，该框架同时支持参与和购买选项，并表述应用感知的社会福利最大化机制设计问题。我们首先介绍联邦学习基础知识，通过泛化误差分析刻画客户端异质性和网络效应，随后介绍MoTS框架和优化问题。

A. 异质客户端联邦学习

1) 联邦学习训练过程：我们考虑一组对联邦学习模型感兴趣的 N 客户端，记为 $\mathcal{N}=\{1,2,\cdots,N\}$。令$\mathcal{K}\subseteq\mathcal{N}$ 为实际参与训练过程的客户端集合。每位参与者 $k\in\mathcal{K}$ 都拥有一个大小为 D_k 的私有数据集 $\mathcal{D}_k$，并在其上训练本地模型。参与者 k 的本地训练目标是找到能使所有数据样本 $d\in\mathcal{D}_k$上的经验损失函数 $F_k(\boldsymbol{w})$最小化的最优模型参数：

$$F_k(\boldsymbol{w})=\frac{1}{D_k}\sum_{d\in\mathcal{D}_k}f(\boldsymbol{w};d),\tag{1}$$

其中， $f(\cdot)$是逐样本损失函数。

借助本地训练的模型，联邦学习在所有参与者的数据上求解全局损失优化问题，即通过最小化参与者本地损失的加权平均值，学习最优的全局模型参数 $\boldsymbol{w}^*$：

$$\boldsymbol{w}^*=\arg\min_{\boldsymbol{w}}F(\boldsymbol{w})=\arg\min_{\boldsymbol{w}}\sum_{k\in\mathcal{K}}\frac{D_k}{\sum_{k\in\mathcal{K}}D_k}F_k(\boldsymbol{w}).\tag{2}$$

2) 客户端异质性：我们对客户端集合 $\mathcal{N}$ 中的两种统计异质性进行建模：

- 数据分布异质性：根据 [39]–[41]，本地特征服从具有对角协方差 $\sigma^2\in\mathbb{R}^d$的独立高斯分布，其中 d 为特征维度，较大的 σ^2 表示客户端间的数据差异更大（即客户端方差更高）。对于自然产生的数据方差，我们将其建模为训练目标上的高斯噪声 $\delta\sim\mathcal{N}(0,\ \gamma^2)$。
- 数据量异质性：我们根据客户端的数据量 D_i，将客户端划分为 I种 $\mathcal{I}=\{1,2,\ldots,I\}$类型。令 $\mathcal{N}_i$表示 N_i 类-i 客户端的集合，其中 $\bigcup_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{N}_i=\mathcal{N}$且 $\sum_{i\in\mathcal{I}}N_i=N$。不失一般性，我们假设 $D_i\le D_j$；若 $i\le j$，则对任意 $i,\ j\in\mathcal{I}$。

3) 参与成本与模型效用：i 类客户端在联邦学习模型训练期间会产生参与成本 C_i，其中$C_i\le C_j$ 适用于 $i\le j$，反映了与数据量相关的资源消耗，例如数据标注、计算和通信成本 [13]–[15]。客户端从模型中获得的效用取决于其泛化性能 [9]，该性能由泛化误差 ε量化，用于衡量训练后的联邦学习模型在未见数据上的表现。我们将$U(\varepsilon)\ge 0$ 记为客户端的模型效用函数 [47]–[49]，，其中$U'(\varepsilon)\le 0$ 表示泛化误差越低，效用越高。根据实际观察 [50]–[52]，我们假设 $(\varepsilon-\sigma^2)U''(\varepsilon)+2U'(\varepsilon)\ge 0$对 $\varepsilon\neq\sigma^2$成立，这刻画了当 ε趋近客户端方差阈值 σ^2时，边际效用 [53] 递增的特性。

4) 泛化误差与网络效应：将 [40] 中的分析框架扩展至异质环境，我们推导出训练后的联邦学习模型的泛化误差[3] ε如下：

$$\varepsilon=\frac{d\gamma^2}{K^2}\sum_{i\in\mathcal{I}}\frac{K_i}{D_i}+\frac{K-1}{K}\sigma^2,\tag{3}$$

其中， K_i 表示类型为i的参与者数量，且 $K=\sum_{i\in\mathcal{I}}K_i$。这揭示了参与带来的两种相互竞争的效应：数据方差 γ^2 会使误差与参与者数量及其数据量的调和平均数成反比，而客户端方差 σ^2 会使误差随着参与者数量的增加而增大，从而产生第 IV-A 节分析的非单调网络效应。

B. 模型交易与共享（*MoTS*）框架

为了利用网络效应并解决参与抑制因素，我们提出了 MoTS 框架，使客户端能够选择参与训练或购买训练后的模型。*1)* 客户端策略：在 MoTS 框架中，每个客户端 $n\in\mathcal{N}_i$选择策略[4] $s_n\in\{A,J,B\}$：

$$s_n=\begin{cases}A, & \text{abstain from obtaining the FL model,} \quad (4a)\\ J, & \text{join FL training to obtain the model,} \quad (4b)\\ B, & \text{buy the FL model.} \quad (4c)\end{cases}$$

[2]这种正相关关系仅是为了与现实情况保持一致，不会影响我们后续的理论分析和机制设计。

[3]由于篇幅限制，我们将式（3）的推导放在在线附录中 [45]。[4]为清晰地阐述见解，我们聚焦于客户端的完全参与行为，而非部分参与行为（即随机加入联邦学习训练的若干轮）；后者也会得出类似的分析结果，相关研究见 [54]–[56]。

给定客户端策略，我们将 $K_i = \sum_{n\in\mathcal{N}_i} \mathbb{1}_{\{s_n=J\}}$ 和 $B_i = \sum_{n\in\mathcal{N}_i} \mathbb{1}_{\{s_n=B\}}$ 分别定义为类型-i 参与者和模型购买者的数量。指示函数$\mathbb{1}_{\{s_n=J\}}$ 表示客户端 n 选择参与联邦学习模型训练，而 $\mathbb{1}_{\{s_n=B\}}$ 表示该客户端选择购买训练后的模型。

2) 平台机制：如图2所示，MoTS平台通过模型价格 p 和类型-i参与奖励 r_i，协调联邦学习模型训练与交易流程。为实现社会福利最大化，我们考虑一个非营利[5] 平台，将所有买方支付用于激励客户端参与和模型改进，使得：

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} B_i \cdot p \le \sum_{i\in\mathcal{I}} K_i \cdot r_i. \tag{5}$$

差值 $\sum_{i\in\mathcal{I}} (B_i \cdot p - K_i \cdot r_i) \le 0$ 表示平台的额外激励成本，其中 r_i 可以为负值，以惩罚低贡献参与者。

3) 客户端收益：对于类型-i 客户端 $n \in \mathcal{N}_i$，其收益 π_n取决于所有客户端的策略 $\boldsymbol{s}$:

$$\pi_n(\boldsymbol{s}) = \begin{cases} 0, & \text{if } s_n = A, \quad (6a)\\ U(\varepsilon) - C_i + r_i, & \text{if } s_n = J, \quad (6b)\\ U(\varepsilon) - p, & \text{if } s_n = B. \quad (6c)\end{cases}$$

根据（6a），如果客户端 n放弃获取训练后的全局联邦学习模型，其收益 π_n 为零。通过参与训练过程，类型-i客户端 $n \in \mathcal{N}_i$ 获得模型效用U（ε）和参与奖励 r_i，同时承担参与成本 C_i，如（6b）所示。如果客户端 n 直接购买联邦学习模型，其收益 π_n 是模型效用U（ε）与模型价格 p之差，如（6c）所示。

C. 应用感知的社会福利最大化

借助所提出的 MoTS框架，平台旨在设计一种机制，在满足特定应用的联邦学习性能要求的同时，实现社会福利最大化。

1) 社会福利定义：在 MoTS框架中，社会福利是每个客户端的收益 π_n （见式 (6)）与平台的收益$\sum_{i\in\mathcal{I}} (B_i \cdot p - K_i \cdot r_i)$ 之和。

定义 1（联邦学习社会状态 [32]）。社会状态 $\{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{B}\} = \{K_i, B_i\}_{i\in\mathcal{I}}$规定了对于所有 $i \in \mathcal{I}$，选择策略 J 和 B 的类型-i 客户端数量。

给定定义 1 中的社会状态 $\{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{B}\} = \{K_i, B_i\}_{i\in\mathcal{I}}$，社会福利 W_{MoTS}（$\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{B}$）表示如下:

$$W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{B}) = \sum_{i\in\mathcal{I}} [K_i \cdot (U(\varepsilon) - C_i) + B_i \cdot U(\varepsilon)]. \tag{7}$$

2) 优化问题：我们将平台为实现应用感知的社会福利最大化而进行的机制设计问题表述为问题1。

在问题1中，约束 (9) 确保满足应用性能要求，其中 $\varepsilon_{\min}$ 是可实现的最低泛化误差。约束 (10) 将额外激励成本降至最低，而约束 (11) 则体现客户端最优性，保证其存在

[5]对于承担运营成本的平台，分析方法相同，但会将这些成本纳入社会福利的整体评估。

问题1（应用感知的社会福利最大化）。

$$\max_{\{p,r_i\}_{i\in\mathcal{I}}} \sum_{i\in\mathcal{I}} \left[K_i^* \cdot (U(\varepsilon) - C_i) + B_i^* \cdot U(\varepsilon)\right], \tag{8}$$

$$s.t.\ \varepsilon(\boldsymbol{K^*}) \le \varepsilon_{\text{req}},\ \varepsilon_{\text{req}} \in [\varepsilon_{\min}, +\infty), \tag{9}$$

$$\{p, r_i\}_{i\in\mathcal{I}} = \underset{\{\hat{p},\hat{r}_i\}_{i\in\mathcal{I}}}{\operatorname{argmin}} \left[\sum_{i\in\mathcal{I}} K_i^* \hat{r}_i - B_i^* \hat{p}\right]^+, \tag{10}$$

$$s_n^* = \underset{s_n\in\{A,J,B\}}{\text{最大化}} \pi_n\left(s_n, \boldsymbol{s}_{-n}^*\right),\ \forall n \in \mathcal{N}, \tag{11}$$

$$K_i^* = \sum_{n\in\mathcal{N}_i} \mathbb{1}_{\{s_n^*=J\}},\ \forall i \in \mathcal{I}, \tag{12}$$

$$B_i^* = \sum_{n\in\mathcal{N}_i} \mathbb{1}_{\{s_n^*=B\}},\ \forall i \in \mathcal{I}, \tag{13}$$

其中 $[x]^+ \triangleq$ 最大值$\{0, x\}$ 且 ε 遵循 (3)。

以及客户端纳什均衡的唯一性。下一节将设计一种应用感知与网络效应社会福利最大化（SWAN）机制，以解决这一具有挑战性的优化问题。

IV. 网络效应机制设计

本节构建一个全面的框架，以理解并利用联邦学习中的网络效应。我们首先奠定联邦学习网络效应的理论基础，揭示其非单调性及其对客户端异质性的依赖。在此分析基础上，我们推导出在特定应用性能约束下使社会福利最大化的最优社会状态。最后，我们提出社会福利最大化机制（SWAN），该机制兼顾应用需求与网络效应，使客户端的个体激励与社会最优性相一致，同时最大限度地降低平台成本。

A. 客户端参与的网络效应

联邦学习使客户端能够协作训练并共享全局模型，以便为特定任务生成准确的输出。根据式（3）中的泛化误差 ε，我们首先分析客户端协作对联邦学习的影响，然后探讨客户端参与的网络效应。

降低误差的协作条件。我们首先确定客户端协作提升模型性能的条件，为理解联邦学习网络效应奠定基础，具体形式化结果见推论1。

推论1。考虑两个不相交的参与者联盟$\mathcal{K}_a \neq \emptyset$ 和 $\mathcal{K}_b \neq \emptyset$，其中 H_a 和 H_b 分别表示 $\mathcal{K}_a$ 和 $\mathcal{K}_b$中参与者数据量的调和平均数，且 $H_a \le H_b$。联邦学习模型的泛化误差 ε_{a+b}

由 $\mathcal{K}_a \cup \mathcal{K}_b$ 训练的模型低于由任一联盟训练的模型，即 $\varepsilon_{a+b} <$ 最大值$\{\varepsilon_a, \varepsilon_b\}$，当且仅当

$$\frac{\sigma^2}{\gamma^2} < \frac{H_b K_b + K_a(2H_b - H_a)}{H_a H_b (K_a + K_b)/d}. \tag{14}$$

我们在在线附录 [45] 中给出推论1的证明。推论1表明，联邦学习中的客户端协作能够让单个参与者（或由多个参与者组成的联盟）获得泛化误差 ε 更低的模型，从而使其受益于协作，相较于单独进行培训。尽管如此，协作并不总是对所有参与者都有利，尤其是当客户端方差 σ^2 超过数据方差 γ^2 达到某一阈值时（该阈值与其数据规模的调和平均数有关，即精度权重 [57]）。在这种情况下，某个客户端的参与可能会增加由现有参与者训练的联邦学习模型的泛化误差。这种模型性能下降会降低现有参与者的模型效用，体现出联邦学习中客户端参与的负网络效应。

网络效应的定义与刻画。为深入研究联邦学习中不同的网络效应，我们将在定义2中定义的网络效应量化为客户端参与所导致的训练后模型泛化误差 ε 的变化。随后，我们在定理1中确定正向和负向联邦学习网络效应之间的边界。

定义2（网络效应 [32] 客户端参与）。给定任意非空的现有参与者联盟 $\mathcal{K}$，客户端 n 的参与会产生网络效应，其大小量化为由 $\mathcal{K}$ 训练的联邦学习模型的泛化误差 $\varepsilon_{\mathcal{K}}$ 与由 $\mathcal{K} \cup \{n\}$训练的模型的泛化误差 $\varepsilon_{\mathcal{K}\cup\{n\}}$ 之差，即 $\varepsilon_{\mathcal{K}} - \varepsilon_{\mathcal{K}\cup\{n\}}$。

定理1。考虑任意非空的现有参与者联盟 $\mathcal{K}$，数据量为 D 的客户端 n 参与后将带来非负网络效应，即 $\varepsilon_{\mathcal{K}} - \varepsilon_{\mathcal{K}\cup\{n\}} \geq 0$，当且仅当 （15）中的 $1/D$ 不大于 η，即 $1/D \leq \eta$，

$$\eta = \frac{(2K+1)\sum_{i\in\mathcal{I}} K_i/D_i}{K^2} - \frac{(K+1)\sigma^2}{d\gamma^2 K}, \tag{15}$$

其中， K_i 表示 $\mathcal{K}$中类型为i 的参与者数量，对任意$i \in \mathcal{I}$，且 $K = \sum_{i\in\mathcal{I}} K_i$。

我们在在线附录 [45]中给出定理1的证明。借助（15）中的 η，定理1揭示了影响客户端参与网络效应的两个因素：新参与者的数据量相对于现有参与者数据量的大小，以及客户端异质性 σ^2 与数据异质性 γ^2之比。

- 如果客户端异质性与数据异质性的比值 σ^2/γ^2 超过阈值 $(2K+1)K \frac{\sum_{i\in\mathcal{I}} K_i/D_i}{K+1}/d$ ()，客户端参与将增加训练后模型的泛化误差 ε，从而产生负向网络效应。
- 相反，当 σ^2/γ^2 低于此阈值时，新参与者只需拥有现有参与者数据量调和平均值的三分之一，就能对当前模型产生积极影响（即降低误差 ε）；这是根据 (15) 中关于 η 的上界（$3\sum_{i\in\mathcal{I}} K_i D_i$）$/K$ 推导得出的。

然而，参与者的构成会随着新客户端的加入而变化，进而影响未来新客户端为确保其参与带来非负网络效应所需达到的特定数据量阈值。

说明性示例：两种客户端类型。根据上述讨论，异质参与者共同影响联邦学习模型的性能以及客户端参与的网络效应。为展示模型性能和网络效应如何随不同类型的参与者数量而变化，我们首先以 $I = 2$ 种客户端类型为例，每种类型的客户端都拥有同质数据集（即 $\sigma^2 = 0$），如示例 1 所示。

示例 1（两种类型的客户端）。考虑 *FL* 中具有 $\sigma^2 = 0$ 的 $I = 2$ 种客户端，以及由参与者组成的联盟 $\mathcal{K}$。随着 $\mathcal{K}$ 中类型 -1 参与者的数量 K_1 增加，训练后的全局联邦学习模型的泛化误差 ε 最初会增加，但最终在 $K_1 \geq \lceil (-2K_2D_1 - D_2 + \sqrt{4K_2^2(D_2 - D_1)^2 + D_2^2})/2D_2 \rceil$后下降。相比之下，随着 $\mathcal{K}$ 中类型-2参与者的数量 K_2 增加，泛化误差 ε 始终下降。

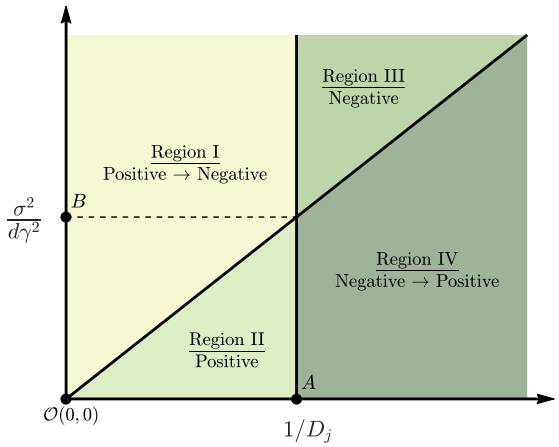
示例 1 揭示了独立同分布（i.i.d.）数据分布下一个有趣的现象：当数据量较小的参与者数量低于某个阈值时（见示例 1 中的类型1客户端），他们的参与会产生负向网络效应；然而，一旦这类参与者的数量超过该阈值，他们的参与便会带来正向网络效应。相比之下，数据量最大的客户端无论数量多少，其参与始终会带来正向网络效应。

一般网络效应分析。在介绍了具有两种客户端类型和独立同分布数据分布的情况后，我们将分析扩展到涉及 I 种客户端类型和非独立同分布数据分布的更一般情形，如定理2所述。

定理2。考虑一个由现有参与者组成的联盟 $\mathcal{K} \neq \emptyset$，其中 K_i 是 $\mathcal{K}$中类型-i 参与者的数量，对任意$i \in \mathcal{I}$和$K = \sum_{i\in\mathcal{I}} K_i$均成立。那么，对于类型为 $j \in \mathcal{I}$的客户端，

- 若 $1/D_j < \sigma^2/(d\gamma^2)$ 且 $1/D_j \leq \eta$，客户端参与的网络效应最初非负，但随着更多类型-j 客户端参与，最终会变为负值；
- 若 $\sigma^2/(d\gamma^2) \leq 1/D_j \leq \eta$，客户端参与的网络效应始终非负；
- 若 $\eta < 1/D_j \leq \sigma^2/(d\gamma^2)$，客户端参与的网络效应始终为负；
- 如果 $\max\{\sigma^2/(d\gamma^2)\ \eta\} < 1/D_j$，客户端参与的网络效应起初为负，但随着更多类型为 j 的客户端参与，最终会转为正面。

我们在在线附录 [45] 中给出定理2的证明。根据定理2，类型为 j 的客户端参与所产生的网络效应不仅取决于异质性比率 σ^2/γ^2 和数据量 D_j，对于任意 $j \in \mathcal{I}$，还可能随类型为 j 的参与者数量 K_j 而变化。具体而言，如图 3 所示，我们可以将客户端参与的网络效应划分为四个区域。在区域 I 中，随着同类型参与者数量增加，训练得到的联邦学习模型性能（及效用）先上升后下降。相比之下，在区域 II 中，网络效应始终为正，从而使泛化误差 ε 单调降低。然而，区域 III 和区域 IV 的趋势分别与区域 II 和



A $=(((2K+1)\sum_{i\in\mathcal{I}} K_i/D_i)/K^2-(K+1)\sigma^2/d\gamma^2 K,0)$.
B $=(0,((2K+1)\sum_{i\in\mathcal{I}} K_i/D_i)/K^2-(K+1)\sigma^2/d\gamma^2 K)$。

图 3. Type-j 客户端参与的网络效应。

区域 I 相反。借助这种四区域结构，给定任意参与者联盟 $\mathcal{K}\neq\emptyset$ 和异质性比率 σ^2/γ^2，我们可以确定每种客户端类型的网络效应，并在适用时确定网络效应发生反转的精确阈值。例如，当 $\sigma^2=0$ （表示独立同分布数据分布，如图 3 中的线 OA 所示）时，客户端参与的网络效应对应区域 II 或区域 IV，这与我们在示例 1 中的观察一致。

到目前为止，通过对联邦学习模型性能的理论分析，我们研究了异构客户端参与所产生的网络效应。接下来，我们将在 MoTS框架下探讨实现应用感知的社会福利最大化所对应的社会状态，旨在设计一种能够利用网络效应的相应机制。

*B. MoTS*框架下应用感知的社会福利最大化对应的社会状态

定义1中定义的社会状态 $\{\boldsymbol{K},\boldsymbol{B}\}=\{K_i,B_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 决定了 MoTS框架下的联邦学习社会福利和训练后的模型性能（以泛化误差 ε 量化）。为了实现应用感知的社会福利最大化，我们研究了在应用特定的泛化误差要求 ε_{req} 下使社会福利最大化的最优社会状态 $\{\boldsymbol{K}^*,\boldsymbol{B}^*\}$，即 $\{\boldsymbol{K}^*,\boldsymbol{B}^*\}=\text{argmax}_{\boldsymbol{K},\boldsymbol{B}} W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{B})$，满足 $\varepsilon(\boldsymbol{K}^*)\leq\varepsilon_{\text{req}}$。这确定了求解问题1的机制旨在激励异构客户端采取的策略，并为设计我们的 SWAN机制奠定基础。

社会福利最大化问题重构。为便于进行分析，我们首先在引理1中推导应用感知的社会福利最大化问题中社会状态的结构属性，从而使我们能够在后文将$W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}^*,\boldsymbol{B}^*)$重构为一种等价但更简单的形式。

引理1。 在应用感知的社会福利最大化的最优社会状态 $\{\boldsymbol{K}^*,\boldsymbol{B}^*\}$ 中，其中 $\{\boldsymbol{K}^*,\boldsymbol{B}^*\}=\text{argmax}_{\boldsymbol{K},\boldsymbol{B}} W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{B})$，满足 $\varepsilon(\boldsymbol{K}^*)\leq\varepsilon_{\text{req}}$：所有客户端都将获得联邦学习模型，即 $\sum_{i\in\mathcal{I}}(K_i^*+B_i^*)=N$。

我们在在线附录 [45]中给出引理1的证明。引理1确立了社会状态的一个必要条件：在满足联邦学习应用所要求的泛化误差ε_{req} 的同时，实现社会福利最大化。具体而言，对于任意可行的误差约束 $\varepsilon_{\text{req}}\in[\varepsilon_{\min},+\infty)$，在最优社会状态 $\{\boldsymbol{K}^*,\boldsymbol{B}^*\}$下，所有客户端都会获得训练后的全局联邦学习模型，无论是通过参与培训还是直接购买，即$\sum_{i\in\mathcal{I}}(K_i^*+B_i^*)=N$。这种广泛的模型传播使每个客户端都能从训练后的模型中受益，从而实现应用感知的社会福利最大化。

基于引理1以及式（3）中给出的泛化误差 ε，我们构建问题2，以确定MoTS框架下的最优社会状态$\{\boldsymbol{K}^*,\boldsymbol{B}^*\}$。作为问题1的变换，问题2保留了式（8）中的目标函数 $W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{B})$，为理解解决问题1的机制激励结构提供了重要见解。

问题2 （问题1的应用感知的社会福利最大化中的社会状态）。

$$
\begin{aligned}
\max\quad & \sum_{i\in\mathcal{I}}\left[N_i\cdot U(\varepsilon)-K_i\cdot C_i\right],\\
s.t.\quad & \varepsilon(\boldsymbol{K})\leq\varepsilon_{\text{req}},\ \varepsilon_{\text{req}}\in[\varepsilon_{\min},+\infty),\\
& \varepsilon=\frac{d\gamma^2}{(\sum_{i\in\mathcal{I}}K_i)^2}\sum_{i\in\mathcal{I}}\frac{K_i}{D_i}+\frac{\sum_{i\in\mathcal{I}}K_i-1}{\sum_{i\in\mathcal{I}}K_i}\sigma^2,\\
& K_i+B_i=N_i,\quad \forall i\in\mathcal{I},\\
var.\quad & K_i\in\mathbb{N},\ B_i\in\mathbb{N},\quad \forall i\in\mathcal{I}.
\end{aligned}
$$

最优社会状态刻画。 为求解问题2，我们将异构客户端的类型集合 $\mathcal{I}$ 划分为两个子集： $\mathcal{I}_L=\{i\in\mathcal{I}:\ D_i\leq d\gamma^2/\sigma^2\}$ （低类型索引）和 $\mathcal{I}_H=\{i\in\mathcal{I}:\ D_i>d\gamma^2/\sigma^2\}$ （高类型索引）。这一划分基于影响客户端参与网络效应的两个关键因素，即客户端数据规模 D_i 和异质性比率 σ^2/γ^2，详见定理2。通过分别分析这两组客户端，我们确定最优社会状态$\{\boldsymbol{K}^*,\boldsymbol{B}^*\}$下客户端的参与模式，如命题1所述。

命题1。 考虑任意非空的客户端类型集合$\mathcal{I}=\mathcal{I}_L\cup\mathcal{I}_H$，其中 $\mathcal{I}_L=\{i\in\mathcal{I}:\ D_i\leq d\gamma^2/\sigma^2\}$，以及$\mathcal{I}_H=\{i\in\mathcal{I}:\ D_i>d\gamma^2/\sigma^2\}$。在用于应用感知的社会福利最大化的最优社会状态 $\{\boldsymbol{K}^*,\boldsymbol{B}^*\}$ 中，

- 如果 $\mathcal{I}_H=\emptyset$，则 $K_i^*\in\{0,N_i\},\ \forall i\in\mathcal{I}_L$；
- 如果 $\mathcal{I}_H\neq\emptyset$，则 $K_i^*=0,\ \forall i\in\mathcal{I}_L$，且 $K_j^*\in\{0,N_j\}\cup\{K_j\in\mathbb{N}:\ \Delta L(K_j)\leq 0\leq\Delta L(K_j-1)\},\ \forall j\in\mathcal{I}_H$，

其中 $\Delta L(x)=L(x+1)-L(x)$，$L(K_j)=W_{MoTS}(K_j,N_j-K_j)+\lambda[(\varepsilon(K_j)-\sigma^2)^{-1}-(\varepsilon_{req}-\sigma^2)^{-1}]$，并且 λ 是与误差约束 $\varepsilon(\boldsymbol{K})\leq\varepsilon_{req},\ \varepsilon_{req}\in[\varepsilon_{min},+\infty)$相关联的拉格朗日乘子。

我们在在线附录 [45] 中给出命题1的证明。命题1表明，最优社会状态 $\{\boldsymbol{K}^*,\boldsymbol{B}^*\}$ 通常遵循“全有或全无”参与模式。然而，对于类型为 $j\in\mathcal{I}_H$ 的客户端，部分参与培训也可能达到最优。其背后的原理

与定理2一致。根据图 3，类型为 $i \in \mathcal{I}_L$ 的客户端属于区域 II 和区域 IV，而类型为 $j \in \mathcal{I}_H$ 的客户端属于区域 I 和区域 III。因此，在最优社会状态 $\{\boldsymbol{K}^*, \boldsymbol{B}^*\}$ 下，类型为 i 的客户端要么全部参与，以利用正向网络效应；要么全部不参加培训，以避免产生负向网络效应。相比之下，类型为 $j \in \mathcal{I}_H$ 的客户端还存在另一种最优情形 $\{\boldsymbol{K}^*, \boldsymbol{B}^*\}$：只有部分客户端参与培训，既足以获得正向网络效应，又不至于引发负向网络效应（即达到参与者数量阈值 $K_j^* = \{K_j \in \mathbb{N}: \ \Delta L(K_j) \leq 0 \leq \Delta L(K_j - 1)\}$，在该阈值处网络效应由正转负）。

总而言之，在数据分布异质性较低的情形下（其中 $\sigma^2 \leq d\gamma^2/D_I$，从而得到 $\mathcal{I}_H = \emptyset$），要实现应用感知的社会福利最大化，同一类型的客户端必须采取一致的参与决策，即对于任意类型 $i \in \mathcal{I}_L$，均有 $K_i^* \in \{0, N_i\}$。相反，在数据分布异质性较高的情形下（其中 $\sigma^2 > d\gamma^2/D_I$，从而得到 $\mathcal{I}_H \neq \emptyset$），最优社会状态 $\{\boldsymbol{K}^*, \boldsymbol{B}^*\}$ 会排除类型为 $i \in \mathcal{I}_L$ 的参与者，只有类型为 $j \in \mathcal{I}_H$ 的客户端才可能参与联邦学习模型训练。

福利—性能一致性条件。在推导出最优社会状态 $\{\boldsymbol{K}^*, \boldsymbol{B}^*\}$ 后，我们研究最大化社会福利 $W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{B})$ 与最小化泛化误差 $\varepsilon(\boldsymbol{K})$之间的一致性。命题2给出了这两个目标一致的充分条件，从而简化问题1。在满足命题2的条件时，对于任意可行的性能要求$\varepsilon_{\text{req}} \in [\varepsilon_{\min}, +\infty)$，问题1可由约束优化转化为无约束联邦学习社会福利最大化。

命题2。对于任意非空客户端类型集合 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_L \cup \mathcal{I}_H$，其中 $\mathcal{I}_L = \{i \in \mathcal{I}: \ D_i \leq d\gamma^2/\sigma^2\}$，且 $\mathcal{I}_H = \{i \in \mathcal{I}: \ D_i > d\gamma^2/\sigma^2\}$。在 *MoTS*框架中，最大化社会福利 $W_{MoTS}(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{B})$ 等价于在以下条件下最小化联邦学习模型泛化误差 $\varepsilon(\boldsymbol{K})$：

- 若 $\mathcal{I}_H = \emptyset$：对于任意非空子集 $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$，每种客户端类型 $i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}$ 满足 $\Psi_i \geq 0$

$$\frac{(K + N_i)^2 N_i C_i / N}{\partial U\left(\varepsilon_{\mathcal{J}}\right) / \partial K_i} \leq \Psi_i, \tag{16}$$

  其中 $\Psi_i = \frac{d\gamma^2 N_i}{D_i} + N_i(N_i + 2K - 1)\sigma^2 - (2KN_i + 1)\varepsilon_{\mathcal{J}}$，$\varepsilon_{\mathcal{J}}$ 是由索引为 $\mathcal{J}$ 的所有客户端训练得到的模型泛化误差，且 $K = \sum_{j \in \mathcal{J}} K_j$；
- 若 $\mathcal{I}_H \neq \emptyset$：对于任意非空参与者联盟 $\mathcal{K}$，每种客户端类型 $i \in \mathcal{I}$ 满足 $\Psi_i \geq 0$

$$\frac{(K + 1)^2 C_i / N}{\partial U\left(d\gamma^2/D_i + 2K(\sigma^2 - \varepsilon_{\mathcal{K}})\right) / \partial K_i} \leq \Psi_i, \tag{17}$$

  其中，$\Psi_i = \frac{d\gamma^2}{D_i} + 2K\sigma^2 - (2K + 1)\varepsilon_{\mathcal{K}}$，$\varepsilon_{\mathcal{K}}$ 是由 $\mathcal{K}$ 训练得到的模型泛化误差，且 $K = \sum_{i \in \mathcal{I}} K_i$。

我们在在线附录 [45] 中给出命题2的证明。命题2为理解社会福利最大化与模型泛化误差最小化之间的关系提供了理论基础。根据条件 (16) 和 (17)，这两个目标之间的不一致源于客户端参与所引发的增量模型效用 $\partial U(\varepsilon) / \partial K_i$ 与成本 C_i 之间的权衡。

当异构客户端参与联邦学习时，如果模型效用的增长始终超过其参与成本，那么社会福利最大化就与改进模型（即降低误差 ε）相一致。这种一致性消除了在应用感知的社会福利最大化中显式设置误差约束 $\varepsilon_{\text{req}} \in [\varepsilon_{\min}, +\infty)$ 的必要，从而降低了问题1的复杂性。在 MoTS框架中，更大的客户端群体 N 将放大模型改进的正外部性，进而促进最大化 $W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{B})$ 与最小化 $\varepsilon(\boldsymbol{K})$ 之间的一致性。

在分析了应用感知的社会福利最大化的最优社会状态 $\{\boldsymbol{K}^*, \boldsymbol{B}^*\}$后，我们接下来探讨其实际实现。我们的目标是设计一种机制，引导优先优化个体收益 π_n 、因而可能偏离 $\{\boldsymbol{K}^*, \boldsymbol{B}^*\}$的自利型客户端最大化社会福利 $W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{B})$，同时满足泛化误差要求 ε_{req}。

C. 应用感知与网络效应社会福利最大化（*SWAN*）机制设计

问题1中所述的应用感知的社会福利最大化机制设计，涉及确定联邦学习模型价格 p 和类型i 参与奖励 r_i。

机制设计挑战。根据引理1和命题1，要实现问题1的最优社会状态 $\{\boldsymbol{K}^*, \boldsymbol{B}^*\}$，需要对异质客户端进行策略协调。例如，当数据分布异质性 $\sigma^2 \leq d\gamma^2/D_I$较低时，最优社会状态呈现出所有客户端类型均遵循“全有或全无”参与模式的特征。然而，每个客户端 $n \in \mathcal{N}_i$无论类型如何 $i \in \mathcal{I}$，都会独立决策，以最大化其在式（6）中的个体收益 π_n，而不考虑社会福利 $W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{B})$。个体激励与社会最优之间的这种分歧，加上网络效应（即客户端决策之间的相互依赖），构成了机制设计的核心挑战。

SWAN机制。为应对这一挑战，我们提出了应用感知与网络效应社会福利最大化（SWAN）机制。SWAN机制将非单调网络效应（见定理2）纳入定价与奖励结构，确保个体收益最大化能够导向理想的社会状态 $\{\boldsymbol{K}^*, \boldsymbol{B}^*\}$。根据命题1，SWAN机制根据不同的数据分布异质性（即非独立同分布程度），将实施过程分为两种情形。

(i) 对于异质性较低的情形（$\sigma^2 \leq d\gamma^2/D_I$），对所有 $i \in \mathcal{I}$，最优社会状态均满足 $K_i^* \in \{0, N_i\}$。SWAN机制通过插值 [58]构造多重线性函数 $\theta(\boldsymbol{K})$，以实现“全有或全无”社会状态之间的转换。具体而言，

$$\theta(\boldsymbol{K}) = \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}} L(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^{I} \frac{(2K_i - N_i)x_i + (N_i - K_i)N_i}{N_i^2}, \tag{18}$$

其中 $\mathcal{X} = \prod_{i=1}^{I} \{0, N_i\}$，而 $L(\boldsymbol{K})$ 是以下问题的拉格朗日函数：

问题2:

$$L(\boldsymbol{K}) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \left[N_i \cdot U\big(\varepsilon(\boldsymbol{K})\big) - K_i \cdot C_i\right] + \lambda\left[(\varepsilon(\boldsymbol{K}) - \sigma^2)^{-1} - (\varepsilon_{\text{req}} - \sigma^2)^{-1}\right], \quad (19)$$

其中，λ表示与误差约束 $\varepsilon(\boldsymbol{K}) \le \varepsilon_{\text{req}}$, $\varepsilon_{\text{req}} \in [\varepsilon_{\min}, +\infty)$相关的拉格朗日乘子。

(ii) 对于异质性较高（$\sigma^2 > d\gamma^2/D_I$）的场景，客户端部分参与联邦学习模型训练也可能是最优的。因此，SWAN机制直接采用式(19)中的拉格朗日函数 $L(\boldsymbol{K})$，以支持应用感知的社会福利最大化所需的各种参与模式。

为了在实现社会最优性的同时最大限度地降低平台的额外激励成本，我们进一步引入激励比率 τ，根据产生的社会福利动态调整机制的奖励和定价:

$$\begin{cases} \tau = \dfrac{W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}^*, \boldsymbol{B}^*)/N}{L(\boldsymbol{K}^*) - L_0}, & \text{if } W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}^*, \boldsymbol{B}^*) > 0, \text{ (20a)} \\ \tau \to 0^+, & \text{if } W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}^*, \boldsymbol{B}^*) \le 0, \text{ (20b)} \end{cases}$$

其中，$L_0 = \inf_{\boldsymbol{K}} L(\boldsymbol{K})$表示所有可行参与模式下拉格朗日函数的最小值。该比率设计的依据是：当社会福利为正时，机制可以通过在客户端之间重新分配所产生的社会福利，实现预算平衡（平台成本为零）。当最优社会福利为非正时，平台则提供最低限度的激励以确保客户端参与。

基于上述表述，我们在下文给出完整的SWAN机制。

机制（SWAN机制）。考虑任意一组客户端类型 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_L \cup \mathcal{I}_H$，其中 $\mathcal{I}_L = \{i \in \mathcal{I}: \ D_i \le d\gamma^2/\sigma^2\}$，且 $\mathcal{I}_H = \{i \in \mathcal{I}: \ D_i > d\gamma^2/\sigma^2\}$。*SWAN*机制的运作方式如下:

(*i*) 对于数据分布异质性较低的情形，即 $\sigma^2 \le d\gamma^2/D_I$，这意味着 $\mathcal{I}_H = \emptyset$:

$$\begin{cases} p = U(\varepsilon) - \tau[\theta(\boldsymbol{K}) - L_0], \\ r_i = C_i - U(\varepsilon) + \tau[\theta(\boldsymbol{K}) - L_0], \quad \forall i \in \mathcal{I}. \end{cases} \quad (21)$$

(*ii*) 对于数据分布异质性较高的情形，即 $\sigma^2 > d\gamma^2/D_I$，这意味着 $\mathcal{I}_H \neq \emptyset$:

$$\begin{cases} p = U(\varepsilon) - \tau[L(\boldsymbol{K}) - L_0], \\ r_i = C_i - U(\varepsilon) + \tau[L(\boldsymbol{K}) - L_0], \quad \forall i \in \mathcal{I}. \end{cases} \quad (22)$$

SWAN机制经过专门设计，将适应异质性的协调与基于福利的激励缩放相结合。

SWAN最优性分析。借助所提出的SWAN机制，我们接下来证明其最优性，并说明MoTS框架优于现有联邦学习框架。我们在定理3中刻画SWAN的关键性质，并在在线附录 [45]中给出详细证明。

定理3。*SWAN*机制实现了使 $W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}、\ \boldsymbol{B})$ 最大化的最优社会状态 $\{\boldsymbol{K}^*, \boldsymbol{B}^*\}$，并满足 $\varepsilon(\boldsymbol{K}^*) \le \varepsilon_{\text{req}}$。此外，当 $W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}^*、\ \boldsymbol{B}^*) > 0$ 时，该机制实现预算平衡，不产生额外成本，即 $\sum_{i\in\mathcal{I}}(B_i^* \cdot p - K_i^* \cdot r_i) = 0$。

根据定理3，SWAN机制通过两项理想性质解决了问题1：社会最优性和预算平衡（即零额外成本）。所设计的定价 p 和奖励 r_i 将网络效应内部化，使每个客户端的最优决策 s_n^* 与在误差要求 ε_{req} 下最大化 $W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{B})$ 保持一致。在最优社会状态 $\{\boldsymbol{K}^*, \boldsymbol{B}^*\}$ 下，SWAN机制最小化平台的额外激励成本，并且当最优社会福利 $W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}^*, \ \boldsymbol{B}^*) > 0$ 时实现预算平衡。

根据定理3，我们将 MoTS 框架下的最优社会福利 $W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}^*, \ \boldsymbol{B}^*)$ 与现有联邦学习框架下的最优社会福利进行比较。现有联邦学习框架（例如，[16]–[18]）将模型访问权限限制在训练参与者之内，因此其社会福利为:

$$W_{\text{FL}}(\boldsymbol{K}) = \sum_{i\in\mathcal{I}} K_i \cdot (U(\varepsilon) - C_i). \quad (23)$$

相比之下，MoTS 框架允许未参与训练的客户端购买训练后的全局联邦学习模型，因此可获得式（7）中的 $W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}, \ \boldsymbol{B})$。因此，如命题 3 所述，在最优情况下，MoTS 框架实现的社会福利不低于现有联邦学习框架。

命题 3. 对于任意误差要求 $\varepsilon_{\text{req}} \in [\varepsilon_{\min}, +\infty)$，*MoTS* 框架可实现 $W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}^*, \boldsymbol{B}^*) \ge W_{\text{FL}}(\boldsymbol{K}^*)$，其中 $W_{\text{FL}}(\boldsymbol{K}^*)$ 表示在模型性能相同 $\varepsilon(\boldsymbol{K}^*)$的情况下，现有联邦学习框架所能实现的最大社会福利。

总之，我们分析了客户端参与所产生的网络效应，并设计了 SWAN 机制，以实现应用感知的社会福利最大化。接下来，我们将通过在联邦学习硬件原型上开展的大量实验，对理论结果进行实证评估。

V. 实验评估

本节通过实验验证理论分析，并展示所提出机制的实际效果。我们首先介绍实验设置，然后通过实证分析客户端参与的网络效应，最后评估 SWAN机制和 MoTS框架的性能。

A. 实验设置

1) 联邦学习的硬件原型：为了更好地反映真实部署场景，我们搭建了一个基于硬件的联邦学习测试平台，如图 4 所示。该测试平台由 20 台树莓派设备（作为客户端）和一台用于协调的台式机服务器组成，两者通过 Wi-Fi 连接，并采用基于 TCP 的通信方式。该硬件设置捕捉了现实世界部署中的约束，包括网络延迟、计算能力限制和通信开销。

2) 异构客户端与学习实现：我们配置了 $N = 20$跨越 $I = 3$不同类型的异构客户端：10 个类型1客户端、5 个类型2客户端和 5 个类型3客户端。具体而言，我们设定联邦学习模型效用函数[6]

[6]对于模型效用和参与成本的其他函数形式，关键见解仍然一致。

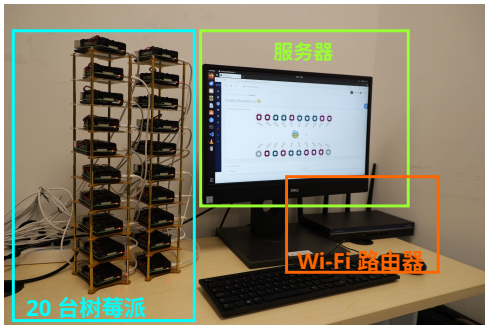


图 4. 配备 20 台树莓派客户端的联邦学习系统硬件原型。

为 $U(\varepsilon) = 40 \cdot \varepsilon^{-16}$，并将参与成本设定为与训练数据量 [15] 成正比。尽管我们的实验聚焦于这一小规模设置，但所得洞见可推广至更大规模且更加多样化的部署场景。

我们在三个广泛采用的数据集[7]：MNIST [60]、SVHN [61] 和 CIFAR-10 [59] 上，使用不同的模型架构和数据分布开展实验。表 I 总结了实验配置。对于所有实验，我们在每个通信轮次评估聚合模型，并使用测试损失作为训练后的全局联邦学习模型的泛化误差 ε。为确保可靠性，所有结果均取 30 次独立运行的平均值。下文详细介绍每个数据集的实现设置。

表 I 不同数据集的实验配置。

配置		MNIST	SVHN	CIFAR-10
测试集大小		10,000	26,000	10,000
训练规模	D_1	50	1,400	1,000
	D_2	120	3,200	2,250
	D_3	300	8,000	5,750
数据分布		独立同分布	独立同分布	非独立同分布
联邦学习模型		逻辑回归（凸）	CNN（非凸）	CNN（非凸）

MNIST 数据集上的设置：在 MNIST 数据集的实证实验中，我们沿用理论分析中的相同设置，并研究不存在数据分布异质性的极端情形（即独立同分布数据分布，此时客户端方差为 $\sigma^2 = 0$）。我们采用凸多项逻辑回归模型，初始化参数为 $\boldsymbol{w}_0 = \mathbf{0}$，随机梯度下降（SGD）的批量大小为 $b = 32$。与 [62] 类似，我们采用初始学习率 $\eta_0 = 0.001$，衰减率为 $\eta_0/(1+r)$，其中 r 为通信轮次索引，本地迭代次数为 $E = 20$。通信轮次总数为 500。

使用 SVHN 和 CIFAR-10 数据集进行设置：在 SVHN 和 CIFAR-10 数据集上的实证实验中，我们从理论设定推广到更复杂、更贴近现实的非凸模型。我们在 SVHN 数据集上模拟具有独立同分布数据分布的理想化联邦学习场景，同时在 CIFAR-10 数据集上采用客户端之间的异质（非独立同分布）数据分布，

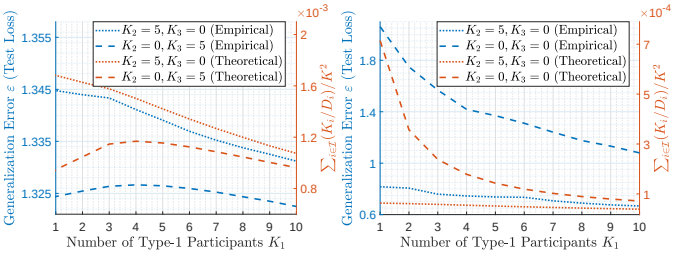
[7]我们还在 CIFAR-100 [59] 数据集上进行了实验，结果相似，如在线附录 [45] 所示。

具体而言，在非独立同分布场景中，我们将一个类别的数据样本分配给类型1客户端，将五个类别分配给类型2客户端，并将全部10个类别分配给类型

3 个客户端。对于这两个数据集，我们均采用卷积神经网络（CNN）模型，该模型由两个卷积层（使用 ReLU 激活函数）、三个全连接层，以及分别应用于每个卷积层的最大池化层组成。我们使用参数 $\boldsymbol{w}_0 = \mathbf{0}$ 初始化 CNN 模型，并将 SGD 批量大小设为 $b = 64$。初始学习率为 $\eta_0 = 0.1$，衰减率为 $\eta_0/(1+r)$，本地迭代次数为 $E = 30$。通信轮次总数为 600。

B. 网络效应的验证

图 5 展示了定理2预测的网络效应，将实证结果（蓝色曲线，左侧 y 轴）与由式（3）推导的泛化误差 ε 的理论预测（红色曲线，右侧 y 轴）进行了比较。



(a) 凸联邦学习模型（MNIST）。 (b) 非凸联邦学习模型（SVHN）。

图5. 客户端参与的网络效应：实证结果（蓝色）与理论预测（红色）。

我们首先考察图 5(a) 中的线性模型设置，该设置与我们的理论分析直接对应。实证结果表明，网络效应会随参与者构成而变化。当现有参与者属于类型2（$K_2 = 5$, $K_3 = 0$，点线）时，类型1客户端的参与会持续降低泛化误差，呈现正向网络效应。相比之下，当类型3参与者占主导地位（$K_2 = 0$, $K_3 = 5$，虚线）时，增加 K_1 会先提高误差，随后最终降低误差，这表明网络效应从负向转为正向。这种非单调模式与图 3 和定理2中的网络效应区域划分相符。

观察1（非单调网络效应）。与定理*2*一致，联邦学习网络效应呈现非单调性，会根据参与者之间相对数据规模和异质性水平的不同，在正向和负向之间转换。

实证（蓝色）曲线与理论（红色）曲线高度一致，进一步验证了我们的分析模型。例如，在图5(a)中，两者均显示，当 $K_2 = 0$、$K_3 = 5$时，泛化误差在 $K_1 = 4$ 处达到峰值。图5(b)将验证扩展至非凸联邦学习模型，该模型不同于我们的理论设定。尽管如此，实证结果仍与（3）中 ε 的预测趋势保持一致。

观察 2（理论有效性与普适性）。经验曲线与理论曲线的比较

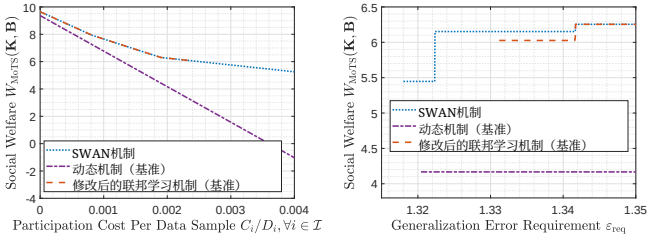
显示出高度一致性，这验证了我们的分析模型，并表明该模型可推广至非凸场景。

C. SWAN机制与MoTS框架的评估

我们在图6–9中评估所提出的SWAN机制和MoTS框架的性能，并与以下基准方法进行比较：

- 动态机制 [46]：通过网络效应博弈，考虑客户端对联邦学习模型性能不断变化的预期。然而，不完全信息和客户端异质性可能导致其偏离面向应用的社会福利最大化目标。
- 修改后的联邦学习机制 [37]：针对MoTS框架调整的现有联邦学习激励机制的修改版本。该机制将模型价格设为联邦学习模型效用，但提供固定参与奖励，未能解决客户端参与的网络效应问题。
- *FL* 框架的理论最优值：表示现有联邦学习框架下可实现的最高性能 [16]–[18]。这一理论上限为评估我们的MoTS框架的有效性提供了重要基准。

1）SWAN机制的性能：在图6和图7中，我们比较了SWAN与动态机制和修改后的联邦学习机制，这些机制均在MoTS框架下运行，以评估它们在参与成本和误差要求变化时的社会福利 $\varepsilon_{\text{req}} \in [\varepsilon_{\min}, +\infty)$ 。



（a）参与成本变化（无误差约束，即 $\varepsilon_{\text{req}} = +\infty$）。 （b）误差要求变化（参与成本 $C_i/D_i = 0.002$）。

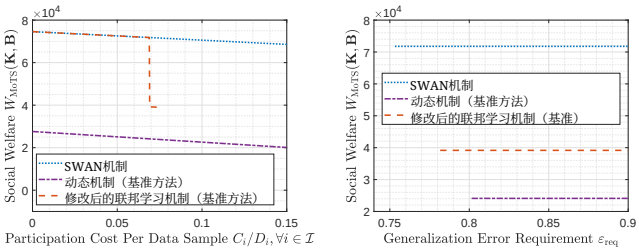
图6. SWAN与基准机制的比较：MoTS框架下的社会福利 $W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{B})$（凸模型、独立同分布数据、MNIST）。

图6展示了独立同分布客户端数据下凸联邦学习模型的实验结果。我们考察了每样本参与成本 C_i/D_i 和特定应用的误差要求 ε_{req} 对不同机制下社会福利 $W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{B})$的影响。从图6(a)可以看出，当 $\varepsilon_{\text{req}} = +\infty$（即没有泛化误差约束）时，随着参与成本上升，所有机制的 $W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{B})$均会下降。尽管如此，SWAN的表现仍优于两种基准方法。具体而言，基准方法只有在参与成本较低时才能实现有竞争力的社会福利。随着成本上升，动态机制的性能迅速下降，而修改后的联邦学习机制则因客户端异质性和

客户端参与带来的负向网络效应。相比之下，SWAN 激励异构客户端克服暂时的负向网络效应和短期收益损失，从而在所有成本水平下实现更高的社会福利。

图6(b)进一步表明，与基准方法相比，SWAN 能适应范围更广的泛化误差要求 ε_{req} 。这种适应性使 SWAN 能够在最大化社会福利的同时，满足不同应用提出的严格误差要求；而基准方法仅适用于宽松的误差约束。例如，修改后的联邦学习机制仅在 $\varepsilon_{\text{req}} \geq 1.332$ 时才有效。

观察 3（成本鲁棒性与应用适应性）。 与基准方法相比，*SWAN* 对参与成本表现出更强的鲁棒性，并能适应更宽泛的泛化误差要求；而基准方法在成本升高时性能会迅速下降，或在误差约束严格时无法满足要求。



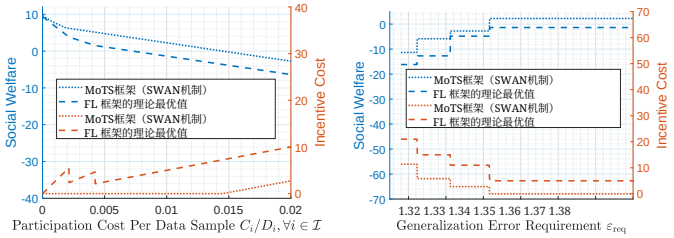
（a）参与成本变化（无误差约束，即 $\varepsilon_{\text{req}} = +\infty$）。 （b）变化的误差要求（参与成本 $C_i/D_i = 0.07$）。

图7. SWAN与基准机制的比较：MoTS框架下的社会福利 $W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{B})$（非凸模型、非独立同分布数据、CIFAR-10）。

图7将评估扩展至更贴近实际的场景，其中采用非凸联邦学习模型和非独立同分布客户端数据。与图6一致，SWAN相较于两种基准方法仍保持性能优势。此外，客户端统计异质性增加后，SWAN的优势更加明显：与独立同分布场景相比，SWAN在 $W_{\text{MoTS}}(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{B})$ 方面以更大幅度优于基准方法，并支持更广的 ε_{req} 可行范围。

观察4（实际联邦学习场景中的有效性）。在采用非独立同分布数据的非凸场景中，*SWAN*相较于基准方法的优势依然存在，而且更加明显。

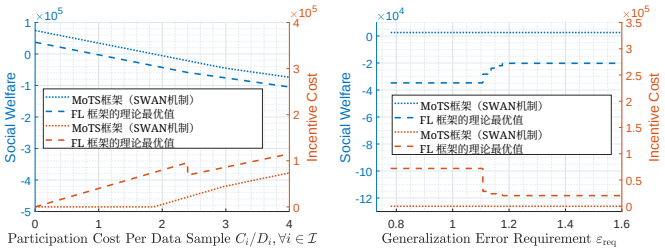
2）MoTS框架的性能：在图8和图9中，我们将MoTS框架与现有联邦学习框架的理论最优值 [16]–[18],进行比较，同时评估社会福利（蓝色，左侧y轴）和平台激励成本（红色，右侧y轴）。



(a) 变化的参与成本（误差要求 $\varepsilon_{\text{req}} = 1.35$）。 (b) 变化的误差要求（参与成本 $C_i/D_i = 0.01$）。

图8. MoTS 与联邦学习框架：社会福利和激励成本比较（凸模型、独立同分布客户端数据、MNIST）。

图8展示了在具有独立同分布客户端数据的凸模型下，我们的MoTS框架与现有联邦学习框架的性能对比。随着参与成本 C_i/D_i 增加或误差要求 ε_{req} 变得更加严格，两个框架的社会福利均下降，而激励成本均上升。然而，通过引入购买选项并借助SWAN利用网络效应，MoTS框架的性能显著优于联邦学习框架。具体而言，在图8(a)中，在变化的参与成本下，MoTS实现了高出352.42%的社会福利，同时将激励成本降低了93.07%。在图8(b)中，在变化的误差要求下，MoTS实现了高出100.48%的社会福利，并将平台激励成本降低了79.38%。



（a）参与成本变化（误差要求 $\varepsilon_{\text{req}} = 0.8$）。 （b）误差要求变化（参与—与成本 $C_i/D_i = 1.8$）。

图9。MoTS与联邦学习框架：社会福利和激励成本比较（非凸模型、非独立同分布客户端数据、CIFAR-10）。

图9考察了更具挑战性的设置：采用非独立同分布客户端数据的非凸联邦学习模型。与图8一致，MoTS框架继续优于现有联邦学习框架。如图9(a)所示，在参与成本变化时 C_i/D_i，MoTS实现了高出89.94%的社会福利，并将成本降低了67.51%。对于图9(b)中的变化的误差要求 ε_{req}，MoTS实现了高出109.72%的社会福利，同时完全消除了激励成本。值得注意的是，社会福利一旦为正，MoTS的激励成本便为零，这验证了定理3。此外，在图9(b)中，MoTS在不同的 ε_{req}下表现出恒定的社会福利和激励成本，这证实了命题2中的条件，即社会福利最大化与泛化误差最小化相一致。

观察5（MoTS框架的卓越效率）。与现有联邦学习框架的理论最优值相比，*MoTS*实现了显著更高的社会福利（最高提升352.42%），同时降低了平台成本（最高降低100%）。

观察6（预算平衡与福利性能的一致性）。 当社会福利为正时，*MoTS*实现了零平台成本，从而验证了定理*3*。在命题*2*所述条件下，即社会福利最大化与泛化误差最小化相一致时，*MoTS*在不同的 $\varepsilon_{req} \in [\varepsilon_{min}, +\infty)$ 下均保持最高社会福利。

六、结论

本研究首次探讨如何在联邦学习中最大化社会福利，同时满足应用特定的性能（即泛化误差）要求，并考虑网络效应。我们的分析表明，客户端参与带来的网络效应并非单调变化，而是取决于客户端异质性。为此，我们提出了面向联邦学习的 MoTS框架，以实现应用感知的社会福利优化。在 MoTS框架中，我们进一步设计了 SWAN机制，该机制利用网络效应，通过模型客户支付款项来激励异构客户端，同时尽可能降低额外激励成本。SWAN机制能够灵活适应不同联邦学习应用的各类性能要求，同时最大化社会福利。一旦实现的社会福利为正，SWAN机制便无需任何额外激励成本即可运行。

在未来的研究中，我们将扩展激励机制，以考虑客户端的策略性数据贡献决策，例如仅使用其部分私有数据进行有限参与。此外，我们将通过纳入客户端的效用和计算异质性，进一步完善理论模型。尽管这些进展会显著增加均衡分析和机制设计的复杂性，但预计将提升本研究的实用性。

参考文献

[1] X. Li、Y. Luo、B. Luo 和 J. Huang，《具有网络效应的联邦学习社会福利最大化》，发表于移动网络与移动计算理论、算法基础及协议设计国际研讨会，2024年，第131–140页。[2] B. Liu、N. Lv、Y. Guo 和 Y. Li，《联邦学习最新进展：系统综述》，发表于*Neurocomputing*，第597卷，C期，第1–16页，2024年。[3] Y. Zhan、J. Zhang、Z. Hong、L. Wu、P. Li 和 S. Guo，《联邦学习激励机制设计综述》，发表于*IEEE*新兴计算主题汇刊，第10卷，第2期，第1035–1044页，2022年。[4] L. U. Khan、S. R. Pandey、N. H. Tran、W. Saad、Z. Han、M. N. H. Nguyen 和 C. S. Hong，《面向边缘网络的联邦学习：资源优化与激励机制》，发表于*IEEE*通信杂志，第58卷，第10期，第88–93页，2020年。[5] X. Tu、K. Zhu、N. C. Luong、D. Niyato、Y. Zhang 和 J. Li，《联邦学习激励机制：经济学与博弈论视角》，发表于*IEEE*认知通信与网络汇刊，第8卷，第3期，第1566–1593页，2022年。[6] D. C. Nguyen、M. Ding、P. N. Pathirana、A. Seneviratne、J. Li 和 H. Vincent Poor，《物联网联邦学习：全面综述》，发表于*IEEE*通信综述与教程，第23卷，第3期，第1622–1658页，2021年。[7] F. Guo、F. R. Yu、H. Zhang、X. Li、H. Ji 和 V. C. M. Leung，《面向6G的海量物联网：全面综述》，发表于*IEEE*物联网期刊，第8卷，第15期，第11 891–11 915页，2021年。[8] R. Zeng、C. Zeng、X. Wang、B. Li 和 X. Chu，《联邦学习激励机制全面综述》，发表于*arXiv*预印本 *arXiv:2106.15406*，2021年。[9] W. Huang、M. Ye、Z. Shi、G. Wan、H. Li、B. Du 和 Q. Yang，《面向泛化、鲁棒性与公平性的联邦学习：综述与基准》，发表于*IEEE*模式分析与机器智能汇刊，第46卷，第12期，第9387–9406页，2024年。[10] A. Chaddad、Y. Wu 和 C. Desrosiers，《联邦学习在医疗保健领域的应用》，发表于*IEEE*物联网期刊，第11卷，第5期，第7339–7358页，2024年。[11] D. C. Nguyen、Q.-V. Pham、P. N. Pathirana、M. Ding、A. Seneviratne、Z. Lin、O. Dobre 和 W.-J. Hwang，《智慧医疗中的联邦学习：综述》，发表于*ACM*计算综述，第55卷，37，2022年3月，第1–页，第1期。[12] D. Javeed、M. S. Saeed、P. Kumar、A. Jolfaei、S. Islam 和 A. K. M. N. Islam，《基于联邦学习的个性化推荐系统：安全与隐私挑战概述》，发表于*IEEE*消费电子汇刊，第70卷，第1期，第2618–2627页，2024年。[13] J. Lee、D. Kim 和 D. Niyato，《物联网分布式学习资源管理的市场分析：博弈论方法》，发表于*IEEE*物联网期刊，第7卷，第9期，第8430–8439页，2020年。[14] Y. Zhao、X. Gong 和 S. Mao，《众包数据标注联邦学习的真实激励机制》，发表于*arXiv*预印本 *arXiv:2302.00106*，2023年。

[15]S. P. Karimireddy、W. Guo 和 M. I. Jordan，《激励联邦学习中数据共享的机制》，arXiv预印本 arXiv:2207.04557，2022年。[16] B. McMahan、E. Moore、D. Ramage、S. Hampson 和 B. A. y. Arcas，《利用去中心化数据进行深度网络的高效通信学习》，发表于人工智能与统计国际会议，2017年，第1273–1282页。[17] A. Z. Tan、H. Yu、L. Cui 和 Q. Yang，《迈向个性化联邦学习》，发表于IEEE神经网络与学习系统汇刊，第34卷，第12期，第9587–9603页，2023年。[18] S. Abdulrahman、H. Tout、H. Ould-Slimane、A. Mourad、C. Talhi 和 M. Guizani，《联邦学习综述：从集中式到分布式本地学习及更进一步》，发表于IEEE物联网期刊，第8卷，第7期，第5476–5497页，2021年。[19] T. H. Thi Le、N. H. Tran、Y. K. Tun、M. N. H. Nguyen、S. R. Pandey、Z. Han 和 C. S. Hong，《无线蜂窝网络中联邦学习的激励机制：拍卖方法》，发表于IEEE无线通信汇刊，第20卷，第8期，第4874–4887页，2021年。[20] X. Lin、J. Wu、A. K. Bashir、J. Li、W. Yang 和 M. J. Piran，《物联网中基于区块链的激励式能源知识交易：联合功率传输与人工智能设计》，发表于IEEE物联网期刊，第9卷，第16期，第14 685–14 698页，2022年。[21] Y. Zhan、P. Li、Z. Qu、D. Zeng 和 S. Guo，《基于学习的联邦学习激励机制》，发表于IEEE物联网期刊，第7卷，第7期，第6360–6368页，2020年。[22] Y. Jiao、P. Wang、D. Niyato、B. Lin 和 D. I. Kim，《迈向无线联邦学习服务市场的自动化拍卖框架》，发表于IEEE移动计算汇刊，第20卷，第10期，第3034–3048页，2021年。[23] Y. M. Saputra、D. T. Hoang、D. N. Nguyen、L.-N. Tran、S. Gong 和 E. Dutkiewicz，《面向车联网的基于动态联邦学习的经济框架》，发表于IEEE移动计算汇刊，第22卷，第4期，第2100–2115页，2023年。[24] B. Luo、Y. Feng、S. Wang、J. Huang 和 L. Tassiulas，《随机客户端参与下无偏联邦学习的激励机制设计》，发表于分布式计算系统国际会议，2023年，第1–11页。[25] G. Liao、B. Luo、Y. Feng、M. Zhang 和 X. Chen，《联邦学习中异构客户端采样的最优机制设计》，发表于IEEE移动计算汇刊，第23卷，10 609，2024年11月，10 598期，第–页。[26] Z. Shi、L. Zhang、Z. Yao、L. Lyu、C. Chen、L. Wang、J. Wang 和 X.-Y. Li，《Fedfaim：基于模型性能的联邦学习公平激励机制》，发表于IEEE大数据汇刊，第10卷，第6期，第1038–1050页，2024年。[27] R. Zeng、C. Zeng、X. Wang、B. Li 和 X. Chu，《联邦学习中的激励机制与博弈论方法》，发表于IEEE网络，第36卷，第6期，第229–235页，2022年。[28] M. Tang 和 V. W. Wong，《跨孤岛联邦学习的激励机制：公共物品视角》，发表于IEEE计算机通信会议，2021年，第1–10页。[29] Z. Zheng、Y. Hong、Y. Huang、T. Qiu、X. Xie 和 K. Li，《面向联邦学习社会福利优化的认知多维拍卖》，发表于IEEE物联网期刊，第12卷，第23期，第50 454–50 465页，2025年。[30] P. Sun、G. Liao、X. Chen 和 J. Huang，《采用差分隐私联邦学习的社会最优数据市场》，发表于IEEE/ACM 网络汇刊，第32卷，第3期，第2221–2236页，2024年。[31] J. Pang、J. Yu、R. Zhou 和 J. C. Lui，《联邦学习中异构客户端选择的激励拍卖》，发表于IEEE移动计算汇刊，第22卷，第10期，第5733–5750页，2023年。[32] D. Easley 和 J. Kleinberg，《网络、群体与市场：关于高度互联世界的推理》。剑桥大学出版社，2012年。[33] B. Luo、X. Li、S. Wang、J. Huang 和 L. Tassiulas，《成本效益型联邦学习设计》，发表于IEEE计算机通信会议，2021年，第1–10页。[34]《StreamML》，https://stream.ml/，访问日期：2025年9月14日。[35]《GravityAI》，https://www.gravity-ai.com/，访问日期：2025-12-18。[36]《Aimodelplace：通过出售人工智能模型赚钱》，https://aimodelplace.com/，访问日期：2025-12-18。[37] Y. Yan 和 P. Ligeti，《个性化与联邦学习激励机制综述》，发表于IEEE信息技术与数据科学会议，2022年，第324–329页。[38] S. P. Karimireddy、S. Kale、M. Mohri、S. Reddi、S. Stich 和 A. T. Suresh，《SCAFFOLD：联邦学习的随机受控平均》，发表于机器学习国际会议，2020年，第5132–5143页。[39] V. Smith、C.-K. Chiang、M. Sanjabi 和 A. S. Talwalkar，《联邦多任务学习》，载于《神经信息处理系统进展》，2017年，第 1–11 页。[40] P. P. Liang、T. Liu、L. Ziyin、N. B. Allen、R. P. Auerbach、D. Brent、R. Salakhutdinov 和 L.-P. Morency，《立足局部，着眼全局：具有局部和全局表示的联邦学习》，arXiv 预印本 arXiv:2001.01523，2020年。[41] T. Hastie、A. Montanari、S. Rosset 和 R. J. Tibshirani，《高维无正则最小二乘插值中的意外现象》，《统计年鉴》，第 50 卷，第 2 期，第 949–986 页，2022 年。[42] S. Mei 和 A. Montanari，《随机特征回归的泛化误差：精确渐近分析与双下降曲线》，《纯粹与应用数学通讯》，第 75 卷，766，2022年 4，667第。页 – 。[43] A. Krogh 和 J. A. Hertz，《噪声存在下线性感知器的泛化》，《物理学杂志 A：数学与通论》，第 25 卷，第 5 期，第 1135–1147 页，1992年。[44] A. Mas-Colell、M. D. Whinston 和 J. R. Green，《微观经济理论》。牛津大学出版社，1995年。[45] X. Li、B. Luo、J. Huang 和 Y. Luo，《补充材料：具有非单调网络效应的联邦学习机制设计》，https://drive.google.com/drive/folders/1Ktfj6cBKjKUNA0DrNyWqOztFYS3b2ARc?usp=sharing，访问日期：2025-12-18。[46] S. Hu、D. D. Ngo、S. Zheng、V. Smith 和 Z. S. Wu，《作为网络效应博弈的联邦学习》，arXiv 预印本 arXiv:2302.08533，2023年。[47] L. Chen、H. Wang、L. Chen、P. Koutris 和 A. Kumar，《nimbus 演示：数据市场中机器学习的基于模型的定价》，载于《国际数据管理会议》，2019年，第 1885–1888 页。[48] J. Liu、J. Lou、J. Liu、L. Xiong、J. Pei 和 J. Sun，《Dealer：具有差分隐私的端到端模型市场》，VLDB 基金会，第 14 卷，第 6 期，第 957–969 页，2021年。[49] A. Agarwal、M. Dahleh 和 T. Sarkar，《数据市场：一种算法解决方案》，载于 ACM 经济学与计算会议，2019年，第 701–726 页。[50] R. C. Fernandez、P. Subramaniam 和 M. J. Franklin，《数据市场平台：交易数据资产以解决数据问题》，VLDB 基金会，第 13 卷，第 12 期，第 1933–1947 页，2020年。[51] L. Chen、P. Koutris 和 A. Kumar，《迈向数据市场中机器学习的基于模型的定价》，载于《国际数据管理会议》，2019年，第 1535–1552 页。[52] Z. Cong、X. Luo、J. Pei、F. Zhu 和 Y. Zhang，《机器学习流水线中的数据定价》，《知识与信息系统》，第 64 卷，第 6 期，第 1417–1455 页，2022年。[53] J. Hestness、S. Narang、N. Ardalani、G. Diamos、H. Jun、H. Kianinejad、M. M. A. Patwary、Y. Yang 和 Y. Zhou，《深度学习规模扩展在经验上具有可预测性》，arXiv 预印本 arXiv:1712.00409，2017年。[54] S. Wang 和 M. Ji，《一种应对联邦平均中未知参与统计量的轻量级方法》，载于《第十二届国际学习表征会议》，2024年，第 1–12 页。[55] H. Yang、M. Fang 和 J. Liu，《在非独立同分布联邦学习中通过部分工作节点参与实现线性加速》，arXiv 预印本 arXiv:2101.11203，2021年。[56] A. Rodio、F. Faticanti、O. Marfoq、G. Neglia 和 E. Leonardi，《异质且相关的客户端可用性条件下的联邦学习》，《IEEE/ACM 网络汇刊》，第 32 卷，1460，2024年 2，1451第。期 – 。[57] X. Hu、S. Li 和 Y. Liu，《联邦学习的泛化界：快速收敛率、未参与客户端与无界损失》，载于《国际学习表征会议》，2023年，第 1–41 页。[58] J. Stoer、R. Bulirsch、R. Bartels、W. Gautschi 和 C. Witzgall，《数值分析导论》。施普林格，1980年，第 1993 卷。[59] A. Krizhevsky、G. Hinton 等，《从微小图像中学习多层特征》，加拿大安大略省多伦多，第 32–33 页，2009年。[60] Y. Lecun、L. Bottou、Y. Bengio 和 P. Haffner，《应用于文档识别的基于梯度的学习》，《IEEE 会议录》，第 86 卷，第 11 期，第 2278–2324 页，1998年。[61] Y. Netzer、T. Wang、A. Coates、A. Bissacco、B. Wu 和 A. Y. Ng，《利用无监督特征学习识别自然图像中的数字》，载于 NIPS 深度学习与无监督特征学习研讨会，2011年，第 1–9 页。[62] X. Li、K. Huang、W. Yang、S. Wang 和 Z. Zhang，《关于联邦平均算法在非独立同分布数据上的收敛性》，载于《国际学习表征会议》，2020年，第 1–26 页。