arXiv:2601.04652v1 [math.OC] 8 Jan 2026

部分信息下带马尔可夫体制切换和 H_∞约束的随机线性二次最优控制问题 *

Na Xiang†, Jingtao Shi‡

2026年1月9日

摘要：本文研究具有模型不确定性和部分信息的马尔可夫体制切换系统的随机线性二次最优控制问题，其中控制可用的信息基于由底层布朗运动和马尔可夫链生成的滤过的一个子σ代数。基于 H_∞ 控制理论，我们转而研究带马尔可夫链和部分信息的软约束零和线性二次随机微分博弈。借助滤波技术、黎卡提方程方法、正交分解方法和配方法，我们通过最优反馈控制策略对求得零和博弈的闭环鞍点。随后，我们证明闭环鞍点对应的结果满足 H_∞ 性能准则。最后，将所得理论结果应用于股票市场投资问题，以进一步说明其实际意义和有效性。

关键词：随机线性二次型最优控制、随机微分博弈、部分信息、马尔可夫体制切换、 H_∞ 控制、黎卡提方程

数学主题分类：93E20, 49N10, 60H10,93B36, 93C41, 60J28, 91A15

1 引言

随机线性二次（SLQ）最优控制问题是随机优化理论中极其重要的一类最优控制问题，因为它们能够对许多实际应用中的问题进行建模；更重要的是，许多非线性控制问题都可以通过 SLQ 问题进行合理近似。另一方面，SLQ 问题的解

*本研究得到国家自然科学基金（12471419，12271304）和山东省自然科学基金（ZR2024ZD35）的资助。

†*School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, P.R. China, E-mail: 202211967@mail.sdu.edu.cn*
‡*School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, P.R. China, E-mail: shijingtao@sdu.edu.cn*

具有优雅的性质，这源于其简单而良好的结构。对 SLQ 最优控制问题的研究始于 Kushner [10] 和 Wonham [42] 在20世纪60年代的工作。Bismut [1] 运用泛函分析技术研究了具有随机系数的 SLQ 最优控制问题，并以随机反馈形式得到了最优控制。Chen 等人 [4]率先研究了具有不定控制权重代价的 SLQ 最优控制问题，并提出了包含复杂非线性项的新型随机黎卡提方程。Yong 和 Zhou [49] 的专著通过随机黎卡提方程研究了 SLQ 最优控制问题，并全面综述了 SLQ 最优控制理论。Tang [33] 借助随机流，讨论了具有随机系数及状态—控制依赖噪声的一般 SLQ 最优控制问题所对应的随机黎卡提方程的存在性与唯一性，从而解决了 Bismut 和 Peng 长期悬而未决的问题。关于 SLQ 最优控制问题的研究已十分广泛，并在此基础上发展出重要的拓展方向，例如开环与闭环可解性、平均场型、风险敏感型、时间不一致型以及跳扩散模型等。关于 SLQ 最优控制问题的最新进展，读者可参阅 [14, 15, 16, 23, 28, 31, 32, 34, 47]。

在实践中，模型不确定性广泛存在于控制系统中。SLQ最优控制问题的一种扩展涉及状态方程中存在外部未知扰动。沿着这一思路，随机 H_2/H_∞ 控制问题已通过多种方法得到广泛研究，包括线性矩阵不等式（LMI）技术、凸优化方法和纳什博弈方法。在针对这类最坏情形设计问题的不同方法中，采用动态微分博弈理论框架的方法似乎最为自然。纳什博弈方法是处理 H_2/H_∞ 控制问题的经典技术。通过分别构造与H_∞ 鲁棒性和 H_2 优化相关的两个性能指标，可以将 H_2/H_∞ 控制转化为寻找纳什均衡点的问题。Limebeer 等人 [12] 首次运用非零和博弈理论解决了确定性混合 H_2/H_∞ 控制问题。所得 H_2/H_∞ 控制器具有线性状态反馈表示，其特征由一对交叉耦合黎卡提方程的解决定。Chen 和 Zhang [3] 将 [12] 的工作推广到了具有状态依赖噪声的随机情形，包括有限时域和无限时域情形，并表明有限（无限）时域随机 H_2/H_∞ 控制与一对耦合微分黎卡提方程（一对耦合代数黎卡提方程）密切相关。Zhang 等人 [55] 将 [3] 的结果扩展到具有状态、控制和外部扰动依赖噪声的系统，其中引入了四个交叉耦合的矩阵值微分方程和代数方程，以表示有限时域和无限时域随机 H_2/H_∞ 控制。随后，Zhang 等人 [56] 研究了具有状态、控制和外部扰动依赖噪声的一般有限时域非线性随机 H_2/H_∞ 控制，并证明混合 H_2/H_∞ 控制与四个交叉耦合的哈密顿–雅可比方程相关。此后，随机 H_2/H_∞ 控制理论经历了

快速发展。关于随机 H_2/H_∞ 控制问题的更多详情，读者可参阅 [38, 39, 44, 51, 54]。另一方面，H_∞ 最优控制问题也得到了广泛研究。事实上，H_∞ 最优控制问题是一个极小极大优化问题，因而也是一个零和博弈，其中控制器可视为最小化方，扰动可视为最大化方。它与零和博弈密切相关，并且与 H_2/H_∞ 控制问题相比，可以避免求解交叉耦合黎卡提方程。Ba¸sar 和 Bernhard [2]的专著系统阐述了 H_∞ 优化与线性二次零和微分博弈之间众所周知的关系。Pan 和 Ba¸sar [24] 研究了具有马尔可夫链的H_∞ 最优控制问题，包括有限时域和无限时域情形，其中控制器可以获得完全或不完全的连续状态测量。Ugrinovskii[35] 研究了具有状态依赖噪声的随机 H_∞ 控制问题，并获得了状态反馈控制器，能够为所有可容许的随机不确定性保证预先规定的扰动衰减水平。Hinrichsen 和 Pritchard [7] 研究了具有状态依赖和控制依赖噪声的随机H_∞ 控制问题，并为具有确定性和随机扰动的随机系统证明了有界实引理。van den Broek 等人[36] 研究了无限规划时域上线性二次微分博弈中纳什均衡的存在性，其中系统受到确定性噪声的扰动，策略空间属于静态线性反馈类型，并考虑了软约束和硬有界情形。Zhang 和 Chen [53] 讨论了具有状态依赖噪声和扰动依赖噪声的非线性系统的随机 H_∞ 控制，包括有限时域和无限时域情形。通过两类哈密顿–雅可比方程，分别构建了无限时域和有限时域非线性随机 H_∞ 控制设计。关于随机 H_∞ 控制问题已有大量研究，可参阅 [8, 11, 22, 45] 及其中所引用的文献。

近年来，马尔可夫机制转换模型已广泛应用于随机最优控制问题。在金融工程中，银行利率、股票升值和波动率受马尔可夫过程（例如熊市和牛市）调制，这些过程能够更直接地刻画那些变化不频繁、但对系统长期趋势有显著影响的因素和事件。关于涉及马尔可夫链的 SLQ 最优控制问题，已有大量文献，参见例如 [5, 17, 18, 41, 43, 58]。关于具有体制切换跳跃的 H_2/H_∞控制问题，可参见 [25, 38, 52]。关于具有体制切换跳跃的 H_∞ 控制问题，可参见 [19, 24, 40]。此外，体制切换模型也广泛应用于金融领域，例如均值-方差投资组合选择和投资–消费问题，参见例如 [48, 57, 60]。

我们注意到，在上述绝大多数文献中，决策者只能基于完全信息做出决策。然而，在实际问题中，我们往往缺乏完全信息，不得不依据部分信息做出决策。对于随机控制问题，如果可用信息来源于观测方程，则相应的控制问题称为部分观测最优控制问题，相关例子可参见

[13, 23, 27, 29, 37]。另一方面，如果可用信息直接由一个与控制无关的抽象子滤子给出，则相应的控制问题称为部分信息随机最优控制问题

，参见 [9, 16, 21, 26, 50]

受上述文献启发，我们研究部分信息下具有马尔可夫体制切换和模型不确定性的LQ最优控制问题，其中状态方程的漂移项和扩散项以及代价泛函均包含控制和外部未知扰动。要求控制可获得的信息基于由底层布朗运动和马尔可夫链生成的滤过的一个子-σ-代数。基于 H_∞ 控制理论，并利用H_∞ 控制问题与LQ零和随机微分博弈之间的密切关系，我们将该问题转化为一个具有马尔可夫链和部分信息的软约束零和LQ随机微分博弈，其中控制可视为具有部分信息的最小化方$\mathbb{G}$ ，扰动则视为具有完全信息的最大化方 $\mathbb{F}$。与其他已有研究一样，我们给出具有马尔可夫链和部分信息的LQ零和博弈的闭环鞍点定义（见定义2.2）。为初步确保 H_∞ 最优控制的存在，我们分析扰动衰减参数 γ，讨论相应开环上值 $\overline{V}_\gamma^0(0,0,i)$关于扰动衰减参数 γ 的性质（见命题 3.1和推论 3.1），并推导出 H_∞ 控制问题的阈值 γ^* （见命题 3.2）。受Yu [50], 的工作启发，我们构造两个辅助问题，通过以闭环形式寻求最优反馈控制策略对，来获得零和博弈的闭环鞍点。首先，利用滤波技术，我们得到相应的滤波方程以及差值所满足的方程。进一步，借助黎卡提方程方法以及状态过程与扰动的正交分解，将软约束代价泛函表示为两部分之和：一部分是控制 u、滤波状态和扰动过程（即$\hat{}x$ 和$\hat{}v$）的泛函，它属于公共信息 $\mathbb{G}$；另一部分与控制的选择无关，仅与状态过程和扰动的差值（即 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{v}$）有关，属于扰动的私有信息$\tilde{}\mathbb{G} := \mathbb{F}\backslash\mathbb{G}$。由于黎卡提方程的两种等价形式（见引理 4.2），我们分别对这两个代价泛函应用配方法，推导出关于$\hat{}x$ 的$(u^*, \hat{}\alpha_2^*(u))$和$(\alpha_1^*(\hat{}v), \hat{}v^*)$的反馈形式，以及 $\tilde{v}^*$ 关于 $\tilde{x}$ 的反馈形式（见引理 4.3、定理 4.1和定理 4.2）。随后，通过证明两个向常微分方程（BODE）的等价性并引入一个代数方程组，我们给出最优控制策略对(u^*, v^*)存在的条件（见命题4.1和定理 4.3）。接着，我们验证该最优控制策略对是零和博弈闭环鞍点的结果（见定理 4.4），并证明其满足 H_∞ 性能准则（见定理 4.5）。最后，通过数值模拟验证了理论结果的有效性。

本文的主要贡献可概括如下。

(1) 首先，我们研究一类具有马尔可夫调制和模型不确定性的部分信息 SLQ 最优控制问题，其中控制变量和外部未知扰动分别进入状态方程的漂移项和扩散项，而控制可获得的信息基于由底层布朗运动和马尔可夫链生成的滤过的一个子-σ-代数。

(2) 其次，我们讨论零初始时间、零初始状态的齐次系统的开环上值关于扰动衰减水平 γ 的性质，并从两个不同方面进一步推导 H_∞ 控制问题的阈值，以初步保证鲁棒 H_∞ 最优控制的存在性。

(3) 第三，借助 H_∞ 控制理论，我们研究具有马尔可夫链和部分信息的软约束零和线性二次随机微分博弈的闭环可解性。我们给出黎卡提方程的两种等价形式。借助滤波技术、正交分解方法和配方法，我们得到控制和扰动的两个最优控制策略对。通过证明两个 BODE 的等价性并引入一个代数方程组，我们得到零和博弈的一对闭环形式的最优反馈控制策略，进而推导出所需的零和博弈闭环鞍点。随后，我们证明该闭环鞍点的相应结果满足 H_∞-性能。

(4) 最后，为进一步展示理论结果的有效性和实际适用性，我们求解了一个股票市场投资问题，利用两状态马尔可夫链刻画股票市场中的熊市和牛市状态，考察股票市场中的熊市和牛市对个人投资者投资策略及最坏情形扰动的影响，并针对扰动衰减水平进行了敏感性分析。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍一些预备符号，并构建具有马尔可夫链和部分信息的软约束零和线性二次随机微分博弈。第 3 节讨论扰动衰减参数。第 4 节给出问题（R-SCG）的鲁棒 H_∞ 最优控制和最坏情形扰动。第 5 节给出一个数值例子。第 6 节对全文进行总结。

2 预备知识与问题表述

令 $T \in (0,\infty)$ 为一个固定且确定的时间区间。设 $(\Omega\ \mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ 为一个完备的滤过概率空间，其上定义了两个相互独立的一维标准布朗运动 $W,\overline{W}$ 以及一个连续时间有限状态空间马尔可夫链 $\alpha \equiv \{\alpha(t);\ 0 \le t < \infty\}$ 。我们假设布朗运动 $(W,\overline{W})$ 与马尔可夫链 α 相互独立。滤过 $\mathbb{F} \equiv \{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$ 由布朗运动 $(W,\overline{W})$ 和马尔可夫

链 α共同生成，如下所示:

$$\mathcal{F}_t := \sigma\{W(s), \overline{W}(s); 0 \le s \le t\} \vee \sigma\{\alpha(s); 0 \le s \le t\} \vee \mathcal{N}(\mathbb{P}),$$

其中， $\mathcal{N}(\mathbb{P})$ 表示 $\mathcal{F}$ 中所有 $\mathbb{P}$-零测集的集合。令 $\mathbb{G} \equiv \{\mathcal{G}_t\}_{t\ge 0}$ 为由 W 和 α 生成并由 $\mathcal{G}$ 中所有 $\mathbb{P}$- 零测集增广而成的自然滤过。我们假设马尔可夫链 α 取值于有限状态空间 $\mathcal{S} \equiv \{1, 2, \dots, D\}$，其中 D 为某个正整数；该链还是齐次且不可约的。 α 的生成元是一个 $D \times D$ 矩阵 $\Lambda := (\lambda_{ij})_{i,\ j=1}^{D}$。对于每个 i， $j \in \mathcal{S}$ 是该链在时间 t 从状态 i 转移到状态 j 的常数转移强度。注意，对于 $i \ne j$ 和 $\sum_{j=1}^{D} \lambda_{ij} = 0$，有 $\lambda_{ij} \ge 0$，因此 $\lambda_{ii} \le 0$。下文中，对于每个 i，若 $i \ne j$，我们进一步假设 $j \in \mathcal{S}$ 满足 $\lambda_{ij} > 0$，因此 $\lambda_{ii} < 0$。令

$$N_{ij}(t) := \sum_{0\le s\le t} \mathbb{I}_{\{\alpha(s-)=i\}} \mathbb{I}_{\{\alpha(s)=j\}},$$

计数过程 $N_{ij}(t)$ 统计截至时间 t 从状态 i 跳跃至状态 j 的次数。该过程

$$\widetilde{N}_{ij}(t) := N_{ij}(t) - \tilde{\lambda}_{ij}(t) = N_{ij}(t) - \int_0^t \lambda_{ij} \mathbb{I}_{\{\alpha(s-)=i\}} ds$$

是一个纯不连续的平方可积鞅（补偿测度）。

在全文中，令 $\mathbb{R}^n$ 表示带有标准欧几里得范数 $|\cdot|$ 和标准欧几里得内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的 n 维欧几里得空间。向量（或矩阵） x 的转置记为 $\mathrm{x}^\top$。$\mathrm{Tr}(A)$ 表示方阵 A 的迹。令 $\mathbb{R}^{n\times m}$ 表示由所有 $n\times m$-矩阵构成的希尔伯特空间，其内积为 $\langle A, B\rangle := \mathrm{Tr}(AB^\top)$，弗罗贝尼乌斯范数为 $|A| := \langle A, A\rangle^{\frac{1}{2}}$。用 $\mathbb{S}^n$ 表示实元素对称 $n \times n$ 矩阵的集合。如果 $M \in \mathbb{S}^n$ 是正（半）定的，则记为 $M > (\ge) 0$。如果存在常数 $\delta > 0$ 使得 $M \ge \delta I$，则记为 $M \gg 0$。对于给定的希尔伯特空间 $\mathbb{H}$，若 $\xi : \Omega \to \mathbb{H}$ 是一个 $\mathcal{F}_T$-可测的平方可积随机变量，则记为 $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{H})$；若 $\phi : [t, T] \times \Omega \to \mathbb{H}$ 是 $\mathbb{F}$-渐进可测的，且 $\mathbb{E}\int_t^T |\phi(s)|^2 ds < \infty$，则记为 $\phi \in L^2_{\mathbb{F}}(t, T; \mathbb{H})$；若 $\phi : [t, T] \times \Omega \to \mathbb{H}$ 是 $\mathbb{F}$-适应的连续过程，且 $\mathbb{E}\big[\sup_{s\in[t,T]} |\phi(s)|^2\big] < \infty$，则记为 $\phi \in L^2_{\mathbb{F}}(\Omega; C([t, T]; \mathbb{H}))$。

对于 $t \in [0, T)$，我们考虑有限时域 $[t, T]$ 上以下受控马尔可夫状态切换线性随机微分方程（SDE）：

$$\begin{cases} dx(s) = \big[A(s,\alpha(s))x(s) + B_1(s,\alpha(s))u(s) + B_2(s,\alpha(s))v(s) + b(s,\alpha(s))\big]ds \\ \qquad\quad + \big[C(s,\alpha(s))x(s) + D_1(s,\alpha(s))u(s) + D_2(s,\alpha(s))v(s) + \sigma(s,\alpha(s))\big]dW(s) \\ \qquad\quad + \big[\bar{C}(s,\alpha(s))x(s) + \bar{D}_1(s,\alpha(s))u(s) + \bar{D}_2(s,\alpha(s))v(s) + \bar{\sigma}(s,\alpha(s))\big]d\overline{W}(s), \\ x(t) = \xi, \quad \alpha(t) = i, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ 以及系数 $A(\cdot, j)$、 $B_1(\cdot, j)$、 $B_2(\cdot, j)$、 $C(\cdot, j)$、 $D_1(\cdot, j)$、 $D_2(\cdot, j)$、 $\bar{C}(\cdot, j)$、 $\bar{D}_1(\cdot, j)$、 $\bar{D}_2(\cdot, j)$ 是维数适当的给定确定性矩阵值函数，

且 $b(\cdot,j)$、 $\sigma(\cdot,j)$、 $\bar{\sigma}(\cdot,j)$ 是确定性的 $\mathbb{R}^n$ 值函数， $j\in\mathcal{S}$。此外， $x(\cdot)\in\mathbb{R}^n$是状态过程， $u(\cdot)\in\mathbb{R}^m$ 是控制过程，而 $v(\cdot)\in\mathbb{R}^{n_v}$ 是用于刻画模型不确定性的外部未知扰动，并表示外部环境对决策者的影响。

此外，我们考虑如下代价泛函：

$$\begin{aligned}J(t,\xi,i;u(\cdot),v(\cdot))=\mathbb{E}\Big\{&\langle G(T,\alpha(T))x(T),x(T)\rangle+2\langle g(T,\alpha(T)),x(T)\rangle\\&+\int_t^T\Big[\langle Q(s,\alpha(s))x(s),x(s)\rangle+\langle R_1(s,\alpha(s))u(s),u(s)\rangle+\langle R_2(s,\alpha(s))v(s),v(s)\rangle\\&\quad+2\langle S_1(s,\alpha(s))x(s),u(s)\rangle+2\langle S_2(s,\alpha(s))x(s),v(s)\rangle+2\langle q(s,\alpha(s)),x(s)\rangle\\&\quad+2\langle\rho_1(s,\alpha(s)),u(s)\rangle+2\langle\rho_2(s,\alpha(s)),v(s)\rangle\Big]ds\Big\},\end{aligned}\tag{2.2}$$

其中 $G(T,j)\in\mathbb{S}^n$, $g(T,j)\in\mathbb{R}^n$， 且系数 $Q(\cdot,j)$、 $R_1(\cdot,j)$、 $R_2(\cdot,j)$、 $S_1(\cdot,j)$、 $S_2(\cdot,j)$ 是维数适当的给定确定性矩阵值函数，而 $q(\cdot,j)$、 $\rho_1(\cdot,j)$、 $\rho_2(\cdot,j)$ 是维数适当的确定性向量值函数，$j\in\mathcal{S}$。

根据 H_∞ 控制理论，我们引入一族参数化（扰动衰减水平为 $\gamma>0$）的代价泛函：

$$\begin{aligned}J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot),v(\cdot))=\mathbb{E}\Big\{&\langle G(T,\alpha(T))x(T),x(T)\rangle+2\langle g(T,\alpha(T)),x(T)\rangle\\&+\int_t^T\Big[\langle Q(s,\alpha(s))x(s),x(s)\rangle+\langle R_1(s,\alpha(s))u(s),u(s)\rangle+\big\langle(R_2(s,\alpha(s))-\gamma^2I)v(s),v(s)\big\rangle\\&\quad+2\langle S_1(s,\alpha(s))x(s),u(s)\rangle+2\langle S_2(s,\alpha(s))x(s),v(s)\rangle+2\langle q(s,\alpha(s)),x(s)\rangle\\&\quad+2\langle\rho_1(s,\alpha(s)),u(s)\rangle+2\langle\rho_2(s,\alpha(s)),v(s)\rangle\Big]ds\Big\},\end{aligned}\tag{2.3}$$

这是与 H_∞ 最优控制问题相关的所谓参数化软约束成本泛函（见 [2]），其中标量参数 γ 表示“扰动衰减水平”。注意，式 (2.2) 中的泛函 J 实际上是将式 (2.3) 中的 J_γ 取值为 $\gamma=0$时得到的结果。为简化记号，我们记

$$\begin{aligned}&B(\cdot,\cdot):=\begin{pmatrix}B_1(\cdot,\cdot)&B_2(\cdot,\cdot)\end{pmatrix},\quad D(\cdot,\cdot):=\begin{pmatrix}D_1(\cdot,\cdot)&D_2(\cdot,\cdot)\end{pmatrix},\quad \bar{D}(\cdot,\cdot):=\begin{pmatrix}\bar{D}_1(\cdot,\cdot)&\bar{D}_2(\cdot,\cdot)\end{pmatrix},\\&R(\cdot,\cdot):=\begin{pmatrix}R_1(\cdot,\cdot)&0\\0&R_2(\cdot,\cdot)\end{pmatrix},\quad R_\gamma(\cdot,\cdot):=\begin{pmatrix}R_1(\cdot,\cdot)&0\\0&R_2(\cdot,\cdot)-\gamma^2I\end{pmatrix},\\&S(\cdot,\cdot):=\begin{pmatrix}S_1(\cdot,\cdot)\\S_2(\cdot,\cdot)\end{pmatrix},\quad \rho(\cdot,\cdot):=\begin{pmatrix}\rho_1(\cdot,\cdot)\\\rho_2(\cdot,\cdot)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Wit采用上述记号，本文将始终使用以下假设 r.

(H1) 状态方程的系数满足以下条件：对每个 $j \in \mathcal{S}$,

$$\begin{cases} A(\cdot,j) \in L^1(0,T;\mathbb{R}^{n\times n}), & B(\cdot,j) \in L^2(0,T;\mathbb{R}^{n\times(m+n_v)}), & b(\cdot,j) \in L^1(0,T;\mathbb{R}^n), \\ C(\cdot,j) \in L^2(0,T;\mathbb{R}^{n\times n}), & D(\cdot,j) \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{n\times(m+n_v)}), & \sigma(\cdot,j) \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n), \\ \bar{C}(\cdot,j) \in L^2(0,T;\mathbb{R}^{n\times n}), & \bar{D}(\cdot,j) \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^{n\times(m+n_v)}), & \bar{\sigma}(\cdot,j) \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

（H2） 代价泛函中的加权系数满足以下条件：对每个 $j \in \mathcal{S}$,

$$\begin{cases} Q(\cdot,j) \in L^1(0,T;\mathbb{S}^n), & S(\cdot,j) \in L^2(0,T;\mathbb{R}^{(m+n_v)\times n}), & R(\cdot,j) \in L^\infty(0,T;\mathbb{S}^{m+n_v}), \\ q(\cdot,j) \in L^1(0,T;\mathbb{R}^n), & \rho(\cdot,j) \in L^2(0,T;\mathbb{R}^{m+n_v}), & G(T,j) \in \mathbb{S}^n, \quad g(T,j) \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

（H3）满足以下标准条件：

$$G(T,j) \geq 0, \quad R(s,j) \gg 0, \quad Q(s,j) - S(s,j)^\top R(s,j)^{-1} S(s,j) \geq 0, \quad j \in \mathcal{S}, \quad a.e.\ s \in [0,T].$$

在（H1）下，对于任意初始对 $(t,\xi,i) \in [0,T) \times L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}$, $u(\cdot) \in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)$ and $v(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v})$, 状态方程（2.1）存在唯一的强解（Mao [20]）

$$x(\cdot) \equiv x(\cdot;t,\xi,i,u(\cdot),v(\cdot)) \in L^2_{\mathbb{F}}(\Omega;C([t,T];\mathbb{R}^n)).$$

$u(\cdot) \in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)$ 称为容许控制， $x(\cdot)$ 称为相应的容许状态过程。因此，在（H1）—（H2）下，对于所有 $(t,\xi,i) \in [0,T) \times L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}$ and $(u(\cdot)\ v(\cdot)) \in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m) \times L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v})$, 二次型性能泛函 $J(t,\xi,i;\ u,v)$ 和 $J_\gamma(t,\xi,i;\ u,v)$ 均有定义。若 $b(\cdot,\cdot) = \sigma(\cdot,\cdot) = \bar{\sigma}(\cdot,\cdot) = q(\cdot,\cdot) = \rho_1(\cdot,\cdot) = \rho_2(\cdot,\cdot) = g(T,\cdot) = 0$, 则系统（2.1）的解记为 $x^0(\cdot)$, 相应的代价泛函记为 $J^0(t,\xi,i;\ u(\cdot)\ v(\cdot))$ 和 $J^0_\gamma(t,\xi,i;\ u(\cdot)\ v(\cdot))$ 。

对于任意 $t \in [0,T)$, 我们定义 $u(\cdot)$ 和 $v(\cdot)$ 的闭环容许策略集合：

$$\mathcal{U}[t,T] = \left\{ u : [t,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^m \middle| u(s) \in \sigma\left\{\hat{x}(r), W(r), \alpha(r); r \leq s\right\}, \mathbb{E}\int_t^T |u(s)|^2 ds < \infty \right\},$$

$$\mathcal{V}[t,T] = \left\{ v : [t,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^{n_v} \middle| v(s) \in \sigma\left\{x(r), W(r), \overline{W}(r), \alpha(r); r \leq s\right\}, \mathbb{E}\int_t^T |v(s)|^2 ds < \infty \right\},$$

其中，$\hat{x}(r)$ 是按照 Xiong [46], 的意义，相对于 $\mathcal{G}_r$ 对 $x(r)$ 的最优滤波估计，其满足的方程见第 4 节。

由于系统 (2.1) 中存在外部未知扰动 $v(\cdot)$，决策者需要考虑 H_∞ 性能，以保证此情况下的鲁棒稳定性，即 H_∞ 范数小于固定水平 γ。本文将研究部分信息下具有马尔可夫体制切换的有限时域随机 H_∞ 控制问题的闭环控制策略设计。接下来，我们给出具有马尔可夫链和部分信息的有限时域随机鲁棒 H_∞ 闭环控制的定义。

定义 2.1（有限时域随机 H_∞ 闭环最优控制）。给定扰动衰减水平 $\gamma > 0$，求一个 H_∞ 状态反馈控制策略 $u^*(\cdot) \equiv u^*(\cdot; \hat{x}(\cdot)\ \alpha(\cdot)) \in \mathcal{U}[t,T]$，使得与控制 $u^*(\cdot)$对应的齐次闭环系统满足规定的 H_∞-性能

$$\|\mathcal{L}_{u^*}\| := \sup_{\substack{v \neq 0 \\ v(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v})}} \frac{J^0(0,0,i;u^*(\cdot),v(\cdot))^{\frac{1}{2}}}{\left(\mathbb{E}\int_0^T |v(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}} < \gamma. \tag{2.4}$$

注 2.1. (i) 若此类 $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}[t,T]$ 存在，则称具有马尔可夫体制切换和部分信息的有限时域随机 H_∞ 控制问题有解，相应的 $u^*(\cdot)$称为鲁棒 H_∞ （闭环最优）控制。

(ii) 在 (H3) 条件下，对于任意初始对以及 $u(\cdot) \in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)$和 $v(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v})$，代价泛函 $J^0(t,\xi,i;u(\cdot)\ v(\cdot))$非负，因此可视为系统输出上的一个范数。扰动对系统 (2.1)-(2.2) 的代价泛函的影响由扰动算子 $\mathcal{L}_u$描述；该算子（在初始时间和状态均为零时）将有限能量扰动信号 $v(\cdot)$映射为齐次闭环系统相应的有限能量输出信号 $J^0(0,0,i;u(\cdot)\ v(\cdot))$。这一线性算子的大小由诱导范数（$H_\infty$ 范数）度量。该范数越大，未知扰动 $v(\cdot)$在最坏情况下对代价泛函 $J^0(0,0,i;u(\cdot)\ v(\cdot))$的影响就越大。

由于 H_∞ 控制问题可以通过将其重新表述为相应的零和博弈模型来求解，因此我们考虑具有马尔可夫链和部分信息的相关软约束零和线性二次随机微分博弈，其二次代价泛函由$J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot)\ v(\cdot))$ 给出，并将其记为问题（ SCG ）。在此博弈中，决策者 $u(\cdot) \in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)$ 作为最小化方（以下简称玩家 1），只能获取部分信息；而扰动 $v(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v})$则为最大化方（称为玩家 2）。当（2.1）和（2.3）中的非齐次项为零时，我们将其记为问题（SCG）^{0}。现在，我们给出问题（SCG）的闭环鞍点定义。

定义 2.2. 对于任意给定的 $t \in [0,T)$，令 $\hat{\Theta}(\cdot,\cdot)\ \tilde{\Theta}(\cdot,\cdot) : [t,T] \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}^{(m+n_v)\times n}$ 为确定性函数，且 $\bar{v}(\cdot) : [t,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^{m+n_v}$ 为一个 $\mathbb{F}$-渐进可测过程，使得 $\hat{\Theta}(\cdot,\alpha(\cdot)) \equiv (\hat{\Theta}_1(\cdot,\alpha(\cdot))^\top, \hat{\Theta}_2(\cdot,\alpha(\cdot))^\top)^\top$，$\tilde{\Theta}(\cdot,\alpha(\cdot)) \equiv (0, \tilde{\Theta}_2(\cdot,\alpha(\cdot))^\top)^\top$，且 $\bar{v}(\cdot) \equiv (v_1(\cdot)^\top, v_2(\cdot)^\top)^\top$，满足

$$\mathbb{E}\int_t^T |\hat{\Theta}(s,\alpha(s))|^2 ds < \infty, \quad \mathbb{E}\int_t^T |\tilde{\Theta}(s,\alpha(s))|^2 ds < \infty,$$

其中 $v_1(\cdot) \in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)$，且 $v_2(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v})$。定义在 $[t,T]$ 上的所有闭环策略对 $\hat{\ }\tilde{\ }$组成的集合记为 $\mathcal{Q}[t,T]$。三元组 $(\Theta^*(\cdot,\alpha(\cdot))\ \Theta^*(\cdot,\alpha(\cdot))\ \bar{v}^*(\cdot)) \in \mathcal{Q}[t,T]$ 称为

问题（SCG）在 $[t,T]$ 上的闭环鞍点，当且仅当

$$\begin{aligned}
&J_\gamma(t,\xi,i;\hat{\Theta}_1^*(\cdot,\alpha(\cdot))\hat{x}(\cdot)+v_1^*(\cdot),v(\cdot))\\
&\le J_\gamma(t,\xi,i;\hat{\Theta}_1^*(\cdot,\alpha(\cdot))\hat{x}^*(\cdot)+v_1^*(\cdot),\hat{\Theta}_2^*(\cdot,\alpha(\cdot))\hat{x}^*(\cdot)+\tilde{\Theta}_2^*(\cdot,\alpha(\cdot))\tilde{x}^*(\cdot)+v_2^*(\cdot))\\
&\le J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot),\hat{\Theta}_2^*(\cdot,\alpha(\cdot))\hat{x}(\cdot)+\tilde{\Theta}_2^*(\cdot,\alpha(\cdot))\tilde{x}(\cdot)+v_2^*(\cdot)),\\
&\qquad\forall(\xi,i)\in L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbb{R}^n)\times\mathcal{S},\ (u(\cdot),v(\cdot))\in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)\times L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v}),
\end{aligned}\tag{2.5}$$

其中，$\hat{x}^*(\cdot)$ 和 $\tilde{x}^*(\cdot)$ 分别表示闭环系统在 $(\Theta^*(\cdot,\alpha(\cdot))\ \Theta^*(\cdot,\alpha(\cdot))\ \bar{v}^*(\cdot))$ 下的滤波状态过程及其相应的差值。

注2.2. 使用 Sun 和 Yong 中命题 3.3 的类似方法 *[30]*，，我们可以证明定义 2.2 中的不等式 (2.5) 等价于以下不等式：

$$\begin{aligned}
&J_\gamma(t,\xi,i;\hat{\Theta}_1^*(\cdot,\alpha(\cdot))\hat{x}(\cdot)+v_1^*(\cdot),\hat{\Theta}_2^*(\cdot,\alpha(\cdot))\hat{x}(\cdot)+\tilde{\Theta}_2^*(\cdot,\alpha(\cdot))\tilde{x}(\cdot)+v_2(\cdot))\\
&\le J_\gamma(t,\xi,i;\hat{\Theta}_1^*(\cdot,\alpha(\cdot))\hat{x}^*(\cdot)+v_1^*(\cdot),\hat{\Theta}_2^*(\cdot,\alpha(\cdot))\hat{x}^*(\cdot)+\tilde{\Theta}_2^*(\cdot,\alpha(\cdot))\tilde{x}^*(\cdot)+v_2^*(\cdot))\\
&\le J_\gamma(t,\xi,i;\hat{\Theta}_1^*(\cdot,\alpha(\cdot))\hat{x}(\cdot)+v_1(\cdot),\hat{\Theta}_2^*(\cdot,\alpha(\cdot))\hat{x}(\cdot)+\tilde{\Theta}_2^*(\cdot,\alpha(\cdot))\tilde{x}(\cdot)+v_2^*(\cdot)),\\
&\qquad\forall(\xi,i)\in L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbb{R}^n)\times\mathcal{S},\ (v_1(\cdot),v_2(\cdot))\in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)\times L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v}),
\end{aligned}\tag{2.6}$$

这将在后续讨论中使用。

如果问题（SCG）的闭环鞍点满足 (2.4) 所规定的 H_∞-性能，那么该闭环鞍点对应的结果就是所需的鲁棒 H_∞最优控制和最坏情形扰动，下面将其表述为问题（R-SCG），其中字母“R”表示 H_∞ 鲁棒性。

问题（R-SCG）。对于任意给定的 $t\in[0,T)$ 和扰动衰减水平 $\gamma>0$，$\hat{}\ \tilde{}$，求问题（SCG）的一个闭环鞍点 $(\Theta^*(\cdot,\alpha(\cdot))\ \Theta^*(\cdot,\alpha(\cdot))\ \bar{v}^*(\cdot))\in\mathcal{Q}[t,T]$，以及该闭环鞍点 $u^*(\cdot)$ 对应的结果：$=\Theta_1^*(\cdot,\alpha(\cdot))\hat{x}(\cdot)+v_1^*(\cdot)\in\mathcal{U}[t,T]$确保 H_∞-性能成立，即 $\|\mathcal{L}_{u^*}\|<\gamma$。

$\hat{}\ \tilde{}$如果上述闭环鞍点 $(\Theta^*(\cdot,\alpha(\cdot))\ \Theta^*(\cdot,\alpha(\cdot))\ \bar{v}^*(\cdot))\in\mathcal{Q}[t,T]$ 存在，且相应结果 $(u^*(\cdot)\ v^*(\cdot))$ 为

$$\begin{aligned}
u^*(\cdot)&:=\hat{\Theta}_1^*(\cdot,\alpha(\cdot))\hat{x}(\cdot)+v_1^*(\cdot),\\
v^*(\cdot)&:=\hat{\Theta}_2^*(\cdot,\alpha(\cdot))\hat{x}(\cdot)+\tilde{\Theta}_2^*(\cdot,\alpha(\cdot))\tilde{x}(\cdot)+v_2^*(\cdot),
\end{aligned}\tag{2.7}$$

那么，具有部分信息的马尔可夫体制切换系统的有限时域随机 H_∞ 控制被称为存在一对解（$u^*(\cdot)\ v^*(\cdot)$），其中 $u^*(\cdot)\in\mathcal{U}[t,T]$ 是该系统的鲁棒 H_∞闭环最优控制，而 $v^*(\cdot)\in\mathcal{V}[t,T]$ 是相应的最坏情形扰动。

3 扰动衰减参数

由于 H_∞ 最优控制取决于扰动衰减水平 γ，该水平越低，决策者所能容忍的外部扰动对系统输出的影响就越小。然而，扰动衰减水平的选取并非任意。如果预先指定的扰动衰减水平过低，相应的 H_∞最优控制可能不存在。因此，本节旨在确定扰动衰减参数的下界，这也为后续所有推导和讨论奠定基础。

对于任意扰动衰减水平 $\gamma>0$和初始对 $(t,\xi,i)\in[0,T)\times L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbb{R}^n)\times\mathcal{S}$，问题（SCG）^{0} 的开环上值 $\overline{V}^0_\gamma(t,\xi,i)$ 和开环下值 $\underline{V}^0_\gamma(t,\xi,i)$ 由下式确定：

$$\begin{aligned}\overline{V}^0_\gamma(t,\xi,i)&:=\inf_{u(\cdot)\in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)}\sup_{v(\cdot)\in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v})}J^0_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot),v(\cdot)),\\ \underline{V}^0_\gamma(t,\xi,i)&:=\sup_{v(\cdot)\in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v})}\inf_{u(\cdot)\in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)}J^0_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot),v(\cdot)),\end{aligned}$$

它们自动满足以下条件：

$$\underline{V}^0_\gamma(t,\xi,i)\le\overline{V}^0_\gamma(t,\xi,i),\qquad\forall(t,\xi,i)\in[0,T)\times L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbb{R}^n)\times\mathcal{S}.$$

在.....的情况下

$$\underline{V}^0_\gamma(t,\xi,i)=\overline{V}^0_\gamma(t,\xi,i)=V^0_\gamma(t,\xi,i),$$

如果满足以下情况，我们称问题（SCG）^{0} 在 (t,ξ,i) 处关于 $\gamma>0$ 存在开环值 $V^0_\gamma(t,\xi,i)$。映射 $(t,\xi,i)\mapsto\underline{V}^0_\gamma(t,\xi,i)$、$(t,\xi,i)\mapsto\overline{V}^0_\gamma(t,\xi,i)$ 和 $(t,\xi,i)\mapsto V^0_\gamma(t,\xi,i)$ 分别称为关于 γ 的开环上值函数、开环下值函数和开环值函数。

需要指出的是，开环上值 $\overline{V}^0_\gamma(0,0,i)$ 有下界 0；玩家 2 通过令 $v(\cdot)$ 为零即可确保这一点。若满足 H_∞-性能，则有$\overline{V}^0_\gamma(0,0,i)\le 0$。因此，扰动衰减水平 γ必须满足 $\overline{V}^0_\gamma(0,0,i)=0$。鉴于此，我们引入集合 Γ：

$$\bar{\Gamma}:=\{\gamma>0,\ \forall\gamma'>\gamma,\ \overline{V}^0_{\gamma'}(0,0,i)=0\},\tag{3.1}$$

以及阈值 $\bar{\gamma}$：

$$\bar{\gamma}:=\inf\bar{\Gamma}.\tag{3.2}$$

根据上述开环上值的定义，我们可以得到以下结果，这表明在 $(0,0,i)$ 处的开环上值 $\overline{V}^0_\gamma(0,0,i)$ 关于参数 γ 单调递减。

命题 3.1. 设 (H1)-(H3) 成立，若 $0 < \gamma_1 \le \gamma_2$，则 $\overline{V}^0_{\gamma_2}(0,0,i) \le \overline{V}^0_{\gamma_1}(0,0,i)$。

证明。由于 $0 < \gamma_1 \le \gamma_2$，对于任意的 $u(\cdot) \in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)$ 和 $v(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v})$，我们有

$$\begin{aligned} J^0_{\gamma_2}(0,0,i;u(\cdot),v(\cdot)) &= J^0(0,0,i;u(\cdot),v(\cdot)) - \gamma_2^2\mathbb{E}\int_0^T |v(s)|^2 ds \\ &\le J^0(0,0,i;u(\cdot),v(\cdot)) - \gamma_1^2\mathbb{E}\int_0^T |v(s)|^2 ds = J^0_{\gamma_1}(0,0,i;u(\cdot),v(\cdot)). \end{aligned}$$

对不等式两边取上确界，可得

$$\overline{V}^0_{\gamma_2}(0,0,i) \le \sup_{v(\cdot)\in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v})} J^0_{\gamma_2}(0,0,i;u(\cdot),v(\cdot)) \le \sup_{v(\cdot)\in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v})} J^0_{\gamma_1}(0,0,i;u(\cdot),v(\cdot)).$$

因此,

$$\overline{V}^0_{\gamma_2}(0,0,i) \le \overline{V}^0_{\gamma_1}(0,0,i).$$

证明完毕。 □

C推论 3.1. 设 (H1)-(H3) 成立，若 $\gamma > 0$ 满足 $\overline{V}^0_{\gamma}(0,0,i) = 0$，则 $\gamma \ge \bar{\gamma}$.

证明。由命题 3.1 可知，对于任意的 $\gamma' > \gamma$,

$$\overline{V}^0_{\gamma'}(0,0,i) \le \overline{V}^0_{\gamma}(0,0,i) = 0.$$

Thus

$$\overline{V}^0_{\gamma'}(0,0,i) = 0,$$

¯这意味着 $\gamma \in \Gamma$。证明完毕。 □

此外，令

$$\gamma^* := \inf_{u(\cdot)\in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)} \sup_{\substack{v\neq 0 \\ v(\cdot)\in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v})}} \frac{J^0(0,0,i;u(\cdot),v(\cdot))^{\frac{1}{2}}}{\left(\mathbb{E}\int_0^T |v(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.3}$$

它就是最优（极小极大）扰动衰减水平。式 (3.3) 中的外层最小化问题通常称为有限时域扰动衰减问题（见 [2]）。如果存在一个控制 $u(\cdot) \in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)$，满足式 (3.3) 中的极小极大扰动衰减界$\gamma^*$。那么，式 (3.3) 等价于:

(i)

$$J^0(0,0,i;u^*(\cdot),v(\cdot)) \le {\gamma^*}^2\mathbb{E}\int_0^T |v(s)|^2 ds, \qquad \forall v(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v}). \tag{3.4}$$

(ii) 不存在其他满足 $\hat{u}(\cdot) \in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)$ 的 $\hat{\gamma} < \gamma^*$，使得

$$J^0(0,0,i;\hat{u}(\cdot),v(\cdot)) \le \hat{\gamma}^2\mathbb{E}\int_0^T |v(s)|^2 ds, \qquad \forall v(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v}). \tag{3.5}$$

命题 3.2. 设 (H1)-(H3) 成立，则 $\gamma^* = \bar{\gamma}$。

证明。首先证明 $\bar{\gamma} \leq \gamma^*$ 成立。由 (3.3)，对于任意 $\epsilon > 0$，存在某个$u_0(\cdot) \in L^2_{\mathbb{G}}(t, T; \mathbb{R}^m)$，使得

$$\sup_{\substack{v \neq 0 \\ v(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v})}} \frac{J^0(0,0,i;u_0(\cdot),v(\cdot))}{\mathbb{E}\int_0^T |v(s)|^2 ds} \leq {\gamma^*}^2 + \epsilon.$$

由于 ϵ的任意性，对于任意 $v(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(t, T; \mathbb{R}^{n_v})$, $v \neq 0$，我们有

$$J^0_{\gamma^*}(0,0,i;u_0(\cdot),v(\cdot)) = J^0(0,0,i;u_0(\cdot),v(\cdot)) - {\gamma^*}^2 \mathbb{E}\int_0^T |v(s)|^2 ds \leq 0.$$

因此,

$$\overline{V}^0_{\gamma^*}(0,0,i) \leq \sup_{v(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v})} J^0_{\gamma^*}(0,0,i;u_0(\cdot),v(\cdot)) \leq 0.$$

由于

$$\overline{V}^0_{\gamma^*}(0,0,i) \geq 0,$$

我们得到，对于任意 $\gamma > \gamma^*$,

$$\overline{V}^0_{\gamma}(0,0,i) \leq \sup_{v(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v})} J^0_{\gamma^*}(0,0,i;u_0(\cdot),v(\cdot)) = 0.$$

因此，$\gamma^* \in \Gamma$，这意味着 $\bar{\gamma} \leq \gamma^*$。

另一方面，根据 $\bar{\gamma}$的定义可知，对于充分大的正整数k，存在一个单调非增序列 $\{\gamma_k\}_{k\geq 0} \subseteq \Gamma$，使得当 k 趋于无穷大时，$\gamma_k \downarrow \bar{\gamma}$。此外，根据集合 Γ的定义，我们有

$$\overline{V}^0_{\gamma_k + \frac{1}{k}}(0,0,i) = 0.$$

因此，对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $u_k(\cdot) \in L^2_{\mathbb{G}}(t, T; \mathbb{R}^m)$，使得

$$J^0_{\gamma_k + \frac{1}{k}}(0,0,i;u_k(\cdot),v(\cdot)) \leq \epsilon, \quad \forall v(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v}).$$

The存在一个公共收敛子序列，以及一个满足条件的 $\bar{u}(\cdot) \in L^2_{\mathbb{G}}(t, T; \mathbb{R}^m)$ g

$$J^0_{\bar{\gamma}}(0,0,i;\bar{u}(\cdot),v(\cdot)) \leq \epsilon, \quad \forall v(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v}).$$

利用 ϵ 的任意性以及（3.3）的等价定义中的第二项（3.5），可得 $\bar{\gamma} \geq \gamma^*$，这就是所需结果。

□

注 3.1. 由于扰动衰减水平 γ 应满足 $\overline{V}^0_{\gamma}(0,0,i) = 0$，由推论 3.1 和命题 3.2 可知 $\gamma \geq \gamma^*$。此外，根据问题（R-SCG），只有当 $\gamma > \gamma^*$ 时，H_∞-性能才成立，因此在后续讨论中始终取 $\gamma > \gamma^*$。

4 问题（R-SCG）的鲁棒 H_∞ 控制

为了在部分信息下推导具有马尔可夫体制切换的随机 H_∞ 控制问题的鲁棒 H_∞ 最优控制，我们将该问题重新表述为等价的问题（R-SCG），以获得鲁棒 H_∞ 最优控制和最坏情形扰动。为此，本节首先考虑具有马尔可夫链和部分信息的软约束零和线性二次随机微分博弈（问题（SCG）），并给出闭环鞍点存在的充分条件；随后验证闭环鞍点所对应的结果满足 H_∞ 性能准则。

我们定义 滤波状态和扰动过程如下：对于 $t \in [0,T)$ $s \in [t,T]$,

$$\hat{x}(s) := \mathbb{E}[x(s)|\mathcal{G}_s], \qquad \hat{v}(s) := \mathbb{E}[v(s)|\mathcal{G}_s], \qquad \hat{\xi} := \mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}_t], \tag{4.1}$$

以及差值

$$\tilde{x}(s) := x(s) - \hat{x}(s), \qquad \tilde{v}(s) := v(s) - \hat{v}(s), \qquad \tilde{\xi} := \xi - \hat{\xi}. \tag{4.2}$$

基于上述记号，我们给出以下引理，该引理将在后续讨论中频繁使用。

引理 4.1. 若 $X(\cdot)$、 $Y(\cdot)$ 是平方可积的、 $\mathbb{F}$-适应的随机过程，则对于每个 $s \in [t,T]$ 以及 $Z(\cdot) = X(\cdot)\ Y(\cdot)$， $Z(s) := \mathbb{E}[Z(s)$ 是 $Z(s)$ 在 $L^2_{\mathcal{G}_s}(\Omega;\mathbb{R}^{n_Z})$ 上的正交投影，那么差值 $\tilde{Z}(s) := Z(s) - \hat{Z}(s)$ 与 $\mathcal{G}_s$ 独立，并且

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\langle H(s,\alpha(s))Z(s), Z(s)\rangle = \mathbb{E}\langle H(s,\alpha(s))\hat{Z}(s), \hat{Z}(s)\rangle + \mathbb{E}\langle H(s,\alpha(s))\tilde{Z}(s), \tilde{Z}(s)\rangle,\\
&\mathbb{E}\langle I(s,\alpha(s))\hat{X}(s), \tilde{Y}(s)\rangle = 0, \qquad \mathbb{E}\langle h(s,\alpha(s)), \tilde{Z}(s)\rangle = 0,
\end{aligned}$$

其中， $H(\cdot,j)$、 $I(\cdot,j)$ 和 $h(\cdot,j)$、 $j \in \mathcal{S}$ 分别是维度适当的确定性矩阵（向量）值函数。

证明。首先,

$$\mathbb{E}[\tilde{Z}(s)|\mathcal{G}_s] = \mathbb{E}[Z(s) - \hat{Z}(s)|\mathcal{G}_s] = \mathbb{E}[Z(s)|\mathcal{G}_s] - \hat{Z}(s) = 0.$$

然后,

$$\mathbb{E}\langle h(s,\alpha(s)), \tilde{Z}(s)\rangle = \mathbb{E}[h(s,\alpha(s))^\top \tilde{Z}(s)] = \mathbb{E}\left[h(s,\alpha(s))^\top \mathbb{E}[\tilde{Z}(s)|\mathcal{G}_s]\right] = 0,$$

这意味着第三个方程。并且

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\langle I(s,\alpha(s))\hat{X}(s), \tilde{Y}(s)\rangle\\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\hat{X}(s)^\top I(s,\alpha(s))^\top \tilde{Y}(s)|\mathcal{G}_s]\right] = \mathbb{E}\left[\hat{X}(s)^\top I(s,\alpha(s))^\top \mathbb{E}[\tilde{Y}(s)|\mathcal{G}_s]\right] = 0.
\end{aligned}$$

同理，我们可以得到

$$\mathbb{E}\langle H(s,\alpha(s))\hat{Z}(s), \tilde{Z}(s)\rangle = 0.$$

利用 $Z(\cdot) = \hat{Z}(\cdot) + \tilde{Z}(\cdot)$，引理的第一个方程成立。 □

根据记号 (4.1)、(4.2) 和引理 4.1，滤波过程 $\hat{x}(\cdot)$ 按照以下随机微分方程演化：

$$\begin{cases} d\hat{x}(s) = \big[A(s,\alpha(s))\hat{x}(s) + B_1(s,\alpha(s))u(s) + B_2(s,\alpha(s))\hat{v}(s) + b(s,\alpha(s))\big]ds \\ \qquad\quad + \big[C(s,\alpha(s))\hat{x}(s) + D_1(s,\alpha(s))u(s) + D_2(s,\alpha(s))\hat{v}(s) + \sigma(s,\alpha(s))\big]dW(s), \\ \hat{x}(t) = \hat{\xi}, \quad \alpha(t) = i, \end{cases} \tag{4.3}$$

且差值 $\tilde{x}(\cdot)$ 满足以下随机微分方程：

$$\begin{cases} d\tilde{x}(s) = \big[A(s,\alpha(s))\tilde{x}(s) + B_2(s,\alpha(s))\tilde{v}(s)\big]ds + \big[C(s,\alpha(s))\tilde{x}(s) + D_2(s,\alpha(s))\tilde{v}(s)\big]dW(s) \\ \qquad\quad + \big[\bar{C}(s,\alpha(s))x(s) + \bar{D}_1(s,\alpha(s))u(s) + \bar{D}_2(s,\alpha(s))v(s) + \bar{\sigma}(s,\alpha(s))\big]d\overline{W}(s), \\ \tilde{x}(t) = \tilde{\xi}, \quad \alpha(t) = i. \end{cases} \tag{4.4}$$

此外，软约束代价泛函 $J_\gamma(t,\xi,i;\ u(\cdot)\ v(\cdot))$ 可改写为

$$\begin{aligned} J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot),v(\cdot)) &= \mathbb{E}\Big\{\langle G(T,\alpha(T))\tilde{x}(T),\tilde{x}(T)\rangle + \int_t^T \Big[\langle Q(s,\alpha(s))\tilde{x}(s),\tilde{x}(s)\rangle \\ &\quad + \big\langle (R_2(s,\alpha(s)) - \gamma^2 I)\tilde{v}(s),\tilde{v}(s)\big\rangle + 2\langle S_2(s,\alpha(s))\tilde{x}(s),\tilde{v}(s)\rangle\Big]ds\Big\} \\ &\quad + \mathbb{E}\Big\{\langle G(T,\alpha(T))\hat{x}(T),\hat{x}(T)\rangle + 2\langle g(T,\alpha(T)),\hat{x}(T)\rangle + \int_t^T \Big[\langle Q(s,\alpha(s))\hat{x}(s),\hat{x}(s)\rangle \\ &\qquad + \langle R_1(s,\alpha(s))u(s),u(s)\rangle + \big\langle (R_2(s,\alpha(s)) - \gamma^2 I)\hat{v}(s),\hat{v}(s)\big\rangle \\ &\qquad + 2\langle S_1(s,\alpha(s))\hat{x}(s),u(s)\rangle + 2\langle S_2(s,\alpha(s))\hat{x}(s),\hat{v}(s)\rangle + 2\langle q(s,\alpha(s)),\hat{x}(s)\rangle \\ &\qquad + 2\langle \rho_1(s,\alpha(s)),u(s)\rangle + 2\langle \rho_2(s,\alpha(s)),\hat{v}(s)\rangle\Big]ds\Big\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

为求得问题（SCG）的闭环鞍点，受 Yu [50] 关于完全信息下零和线性二次随机微分博弈的研究启发，我们采用配方法，基于黎卡提方程的解，以闭环形式求得最优反馈控制策略对，并证明该最优反馈控制策略对是问题（SCG）闭环鞍点的一个结果。为此，我们首先介绍双人零和博弈中 Elliott–Kalton策略（或非预见策略）的概念（见 [6, 50, 21]）。

定义 4.1. 玩家 1 的非预见策略是一个映射 $\alpha_1\colon\ L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\ \mathbb{R}^{n_v}) \to L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\ \mathbb{R}^m)$，满足：对于任意 $\mathbb{F}$-停时 $\tau\colon \Omega \to [t,T]$，以及任意 $v'(\cdot)\ v''(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\ \mathbb{R}^{n_v})$，若 $v' \equiv v''$ 在 $[t,\tau]$上成立，则有 $\alpha_1(v') \equiv \alpha_1(v'')$在 $[t,\tau]$上成立。玩家 2 的非预见策略$\alpha_2\colon\ L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\ \mathbb{R}^m) \to L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\ \mathbb{R}^{n_v})$ 以类似方式定义。玩家 1（分别为玩家 2）在 $[t,T]$ 上的所有可容许非预见策略的集合记为 $\mathcal{A}_1[t,T]$（分别记为 $\mathcal{A}_2[t,T]$）。

根据定义 4.1，我们提出以下两个辅助问题。

问题（SCG-1）。对于任意 $t \in [0,T)$ 及扰动衰减水平 $\gamma > 0$，寻找一个容许控制 $u^*(\cdot) \in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)$ 和一个容许非预见策略 $\alpha_2^*(\cdot) \in \mathcal{A}_2[t,T]$，使得

$$J_\gamma(t,\xi,i;u^*(\cdot),\alpha_2^*(u^*)(\cdot)) = \sup_{\alpha_2(\cdot)\in\mathcal{A}_2[t,T]} \inf_{u(\cdot)\in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)} J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot),\alpha_2(u)(\cdot)). \tag{4.6}$$

如果存在满足（4.6）的容许控制 $u^*(\cdot)$ 和容许非预见策略 $\alpha_2^*(\cdot)$，则称 $(u^*(\cdot)\ \alpha_2^*(\cdot))$ 为玩家 1 的值$J_\gamma(t,\xi,i;\ u^*(\cdot)\ \alpha_2^*(u^*)(\cdot))$ 的最优控制策略对。

问题（SCG-2）。对于任意 $t \in [0,T)$ 及扰动衰减水平 $\gamma > 0$，寻找一个容许控制 $v^*(\cdot) \in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v})$ 和一个容许非预见策略 $\alpha_1^*(\cdot) \in \mathcal{A}_1[t,T]$，使得

$$J_\gamma(t,\xi,i;\alpha_1^*(v^*)(\cdot),v^*(\cdot)) = \inf_{\alpha_1(\cdot)\in\mathcal{A}_1[t,T]} \sup_{v(\cdot)\in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v})} J_\gamma(t,\xi,i;\alpha_1(v)(\cdot),v(\cdot)). \tag{4.7}$$

若存在满足 (4.7) 的容许控制 $v^*(\cdot)$ 和容许非预见策略 $\alpha_1^*(\cdot)$，则称 $(\alpha_1^*(\cdot)\ v^*(\cdot))$ 为玩家 2 的值 $J_\gamma(t,\xi,i;\ \alpha_1^*(v^*)(\cdot)\ v^*(\cdot))$ 的最优控制策略对。

下面，我们首先介绍以下两组耦合后向广义黎卡提方程：

$$\begin{cases} \dot{\Pi}(s,i) + \Pi(s,i)A(s,i) + A(s,i)^\top \Pi(s,i) + C(s,i)^\top \Pi(s,i)C(s,i) + \bar{C}(s,i)^\top \Pi(s,i)\bar{C}(s,i) \\ \quad - \bar{\mathcal{S}}_2(s,i)^\top \bar{\mathcal{R}}_2(s,i)^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2(s,i) + Q(s,i) + \sum_{j=1}^{D}\lambda_{ij}\Pi(s,j) = 0, \\ \Pi(T,i) = G(T,i), \quad \bar{\mathcal{R}}_2(s,i) \ll 0, \quad a.e.\ s \in [t,T], \quad i \in \mathcal{S}, \end{cases} \tag{4.8}$$

$$\begin{cases} \dot{P}(s,i) + P(s,i)A(s,i) + A(s,i)^\top P(s,i) + C(s,i)^\top P(s,i)C(s,i) + \bar{C}(s,i)^\top \Pi(s,i)\bar{C}(s,i) \\ \quad - \hat{\mathcal{S}}(s,i)^\top \hat{\mathcal{R}}(s,i)^{-1}\hat{\mathcal{S}}(s,i) + Q(s,i) + \sum_{j=1}^{D}\lambda_{ij}P(s,j) = 0, \qquad a.e.\ s \in [t,T], \\ P(T,i) = G(T,i), \quad i \in \mathcal{S}, \end{cases} \tag{4.9}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{S}}_2(s,i) &:= B_2(s,i)^\top \Pi(s,i) + D_2(s,i)^\top \Pi(s,i)C(s,i) + \bar{D}_2(s,i)^\top \Pi(s,i)\bar{C}(s,i) + S_2(s,i), \\ \bar{\mathcal{R}}_2(s,i) &:= R_2(s,i) - \gamma^2 I + D_2(s,i)^\top \Pi(s,i)D_2(s,i) + \bar{D}_2(s,i)^\top \Pi(s,i)\bar{D}_2(s,i), \\ \hat{\mathcal{S}}(s,i) &:= \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{S}}_1(s,i) \\ \hat{\mathcal{S}}_2(s,i) \end{pmatrix} := B(s,i)^\top P(s,i) + D(s,i)^\top P(s,i)C(s,i) \\ &\qquad + \bar{D}(s,i)^\top \Pi(s,i)\bar{C}(s,i) + S(s,i), \end{aligned}$$

$$\hat{\mathcal{R}}(s,i) := \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{R}}_{11}(s,i) & \hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i) \\ \hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)^\top & \hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i) \end{pmatrix} := R_\gamma(s,i) + D(s,i)^\top P(s,i) D(s,i) + \bar{D}(s,i)^\top \Pi(s,i) \bar{D}(s,i).$$

接下来我们给出以下引理，它主要展示了黎卡提方程 (4.9) 的两种等价形式，并且在后续分析中使用配方法求解两个玩家的最优反馈控制策略对时发挥着重要作用。

引理 4.2. 对于任意的 $(s,i) \in [t,T] \times \mathcal{S}$和 $(\Pi, P) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$，(i) 若矩阵 $\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i)$ 和 $\hat{\mathcal{R}}_{11}(s,i) - \hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i)^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)^\top$ 可逆，则 $\hat{\mathcal{R}}(s,i)$ 也可逆，且

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{S}}(s,i)^\top \hat{\mathcal{R}}(s,i)^{-1} \hat{\mathcal{S}}(s,i) &= \hat{\mathcal{S}}_2(s,i)^\top \hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i)^{-1} \hat{\mathcal{S}}_2(s,i) \\ &+ \big(\hat{\mathcal{S}}_1(s,i) - \hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i)^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2(s,i)\big)^\top \big(\hat{\mathcal{R}}_{11}(s,i) \\ &- \hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i)^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)^\top\big)^{-1} \big(\hat{\mathcal{S}}_1(s,i) - \hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i)^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2(s,i)\big). \end{aligned} \tag{4.10}$$

(ii) 若矩阵 $\hat{\mathcal{R}}_{11}(s,i)$ 和 $\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i) - \hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}(s,i)^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)$ 可逆，则 $\hat{\mathcal{R}}(s,i)$ 也可逆，且

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{S}}(s,i)^\top \hat{\mathcal{R}}(s,i)^{-1} \hat{\mathcal{S}}(s,i) &= \hat{\mathcal{S}}_1(s,i)^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}(s,i)^{-1} \hat{\mathcal{S}}_1(s,i) \\ &+ \big(\hat{\mathcal{S}}_2(s,i) - \hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}(s,i)^{-1}\hat{\mathcal{S}}_1(s,i)\big)^\top \big(\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i) \\ &- \hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}(s,i)^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)\big)^{-1} \big(\hat{\mathcal{S}}_2(s,i) - \hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}(s,i)^{-1}\hat{\mathcal{S}}_1(s,i)\big). \end{aligned} \tag{4.11}$$

证明. 我们只证明 (i)，(ii) 的证明采用相同的方法。首先，$\hat{\mathcal{R}}(s,i)$ 的可逆性由以下关系得出：

$$\begin{pmatrix} I & -\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \hat{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{R}}_{11} - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{R}}_{22} \end{pmatrix}.$$

因此，$\hat{\mathcal{R}}(s,i)$ 的逆矩阵可表示为

$$\hat{\mathcal{R}}(s,i)^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\hat{\mathcal{R}}_{11} - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top)^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

然后，将上述方程代入 $\hat{\mathcal{S}}^\top \hat{\mathcal{R}}^{-1}\hat{\mathcal{S}}$ 并化简，可得

$$\begin{aligned} &\hat{\mathcal{S}}(s,i)^\top \hat{\mathcal{R}}(s,i)^{-1} \hat{\mathcal{S}}(s,i) \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{S}}_1^\top & \hat{\mathcal{S}}_2^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\hat{\mathcal{R}}_{11} - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top)^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{S}}_1 \\ \hat{\mathcal{S}}_2 \end{pmatrix} \\ &= \hat{\mathcal{S}}_2^\top \hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2 + \big(\hat{\mathcal{S}}_1 - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^\top \big(\hat{\mathcal{R}}_{11} - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\big)^{-1} \big(\hat{\mathcal{S}}_1 - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big). \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

基于上述引理，我们为进一步推导引入以下条件。条件（I）。

$$\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i) \ll 0, \quad \hat{\mathcal{R}}_{11}(s,i) - \hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i)^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)^{\top} \gg 0, \quad a.e.\ s \in [t,T], \quad i \in \mathcal{S}.$$

条件（II）。

$$\hat{\mathcal{R}}_{11}(s,i) \gg 0, \quad \hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i) - \hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)^{\top}\hat{\mathcal{R}}_{11}(s,i)^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i) \ll 0, \quad a.e.\ s \in [t,T], \quad i \in \mathcal{S}.$$

条件（I&II）。

$$\hat{\mathcal{R}}_{11}(s,i) \gg 0, \quad \hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i) \ll 0, \quad a.e.\ s \in [t,T], \quad i \in \mathcal{S}.$$

注记 4.1. 显然，当且仅当条件（I&II）成立时，条件（I）和条件（II）均成立。

引理 4.3. 设 (H1)-(H3) 成立，且 $(\Pi(\cdot,\cdot)\ P(\cdot,\cdot)) \in C([t,T]\times\mathcal{S};\mathbb{S}^n) \times C([t,T]\times\mathcal{S};\mathbb{S}^n)$ 是满足条件（I）的黎卡提方程 (4.8)-(4.9) 的解。则玩家 1 的可容许反馈控制-策略对 $(u^*(\cdot)\ \alpha_2^*(\cdot))$ 给出为

$$\begin{cases} u^*(s) = -\Big[\hat{\mathcal{R}}_{11}(s,\alpha(s)) - \hat{\mathcal{R}}_{12}(s,\alpha(s))\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,\alpha(s))^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,\alpha(s))^{\top}\Big]^{-1}\Big\{\Big[\hat{\mathcal{S}}_1(s,\alpha(s)) \\ \qquad - \hat{\mathcal{R}}_{12}(s,\alpha(s))\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,\alpha(s))^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2(s,\alpha(s))\Big]\hat{x}(s) + B_1(s,\alpha(s))^{\top}\eta(s,\alpha(s)) \\ \qquad + D_1(s,\alpha(s))^{\top}P(s,\alpha(s))\sigma(s,\alpha(s)) + \bar{D}_1(s,\alpha(s))^{\top}\Pi(s,\alpha(s))\bar{\sigma}(s,\alpha(s)) \\ \qquad + \rho_1(s,\alpha(s)) - \hat{\mathcal{R}}_{12}(s,\alpha(s))\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,\alpha(s))^{-1}\Big[B_2(s,\alpha(s))^{\top}\eta(s) + D_2(s,\alpha(s))^{\top} \\ \qquad \times P(s,\alpha(s))\sigma(s,\alpha(s)) + \bar{D}_2(s,\alpha(s))^{\top}\Pi(s,\alpha(s))\bar{\sigma}(s,\alpha(s)) + \rho_2(s,\alpha(s))\Big]\Big\}, \\ \hat{\alpha}_2^*(u)(s) = -\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,\alpha(s))^{-1}\Big[\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,\alpha(s))^{\top}u(s) + \hat{\mathcal{S}}_2(s,\alpha(s))\hat{x}(s) + B_2(s,\alpha(s))^{\top}\eta(s,\alpha(s)) \\ \qquad + D_2(s,\alpha(s))^{\top}P(s,\alpha(s))\sigma(s,\alpha(s)) + \bar{D}_2(s,\alpha(s))^{\top}\Pi(s,\alpha(s))\bar{\sigma}(s,\alpha(s)) \\ \qquad + \rho_2(s,\alpha(s))\Big], \\ \tilde{v}^*(s) = -\bar{\mathcal{R}}_2(s,\alpha(s))^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2(s,\alpha(s))\tilde{x}(s), \quad \alpha_2^*(u)(s) := \hat{\alpha}_2^*(u)(s) + \tilde{v}^*(s), \quad s \in [t,T], \end{cases} \tag{4.12}$$

其中 $\eta(\cdot,\cdot) \in C([t,T]\times\mathcal{S};\mathbb{R}^n)$ 是下列 BODE 的解：

$$\begin{cases} \dot{\eta}(s,i) + A(s,i)^{\top}\eta(s,i) - \hat{\mathcal{S}}_2(s,i)^{\top}\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i)^{-1}\psi(s,i) - \big(\hat{\mathcal{S}}_1(s,i) - \hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i)^{-1} \\ \quad \times \hat{\mathcal{S}}_2(s,i)\big)^{\top}\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}(s,i) - \hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i)^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)^{\top}\big)^{-1}\varphi(s,i) + C(s,i)^{\top}P(s,i)\sigma(s,i) \\ \quad + \bar{C}(s,i)^{\top}\Pi(s,i)\bar{\sigma}(s,i) + P(s,i)b(s,i) + q(s,i) + \sum_{j=1}^{D}\lambda_{ij}\eta(s,j) = 0, \quad a.e.\ s \in [t,T], \\ \eta(T,i) = g(T,i), \quad i \in \mathcal{S}, \end{cases} \tag{4.13}$$

and

$$\begin{aligned}\psi(s,i) &:= B_2(s,i)^\top \eta(s,i) + D_2(s,i)^\top P(s,i)\sigma(s,i) + \bar{D}_2(s,i)^\top \Pi(s,i)\bar{\sigma}(s,i) + \rho_2(s,i),\\ \varphi(s,i) &:= B_1(s,i)^\top \eta(s,i) + D_1(s,i)^\top P(s,i)\sigma(s,i) + \bar{D}_1(s,i)^\top \Pi(s,i)\bar{\sigma}(s,i) + \rho_1(s,i)\\ &\quad - \hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i)^{-1}\psi(s,i).\end{aligned} \tag{4.14}$$

于是我们得到:

(i) 对任意 $u(\cdot) \in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)$ 和 $\alpha_2(\cdot) \in \mathcal{A}_2[t,T]$, $J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot)\,\alpha_2(u)(\cdot)) \le J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot)\,\alpha_2^*(u)(\cdot))$。该方程成立当且仅当 $\alpha_2(u)(\cdot) = \alpha_2^*(u)(\cdot)$。

(ii) 对任意 $u(\cdot) \in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)$, $J_\gamma(t,\xi,i;u^*(\cdot)\,\alpha_2^*(u^*)(\cdot)) \le J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot)\,\alpha_2^*(u)(\cdot))$。该方程成立当且仅当 $u(\cdot) = u^*(\cdot)$。

证明。将 Itô 公式 ([20]) 分别应用于 $s \mapsto \langle \Pi(s,\alpha(s))\tilde{x}(s)\,\tilde{x}(s)\rangle$ 和 $s \mapsto \langle P(s,\alpha(s))\hat{x}(s) + 2\eta(s,\alpha(s)),\hat{x}(s)\rangle$, 可得

$$\begin{aligned}&d\langle \Pi(s,\alpha(s))\tilde{x}(s),\tilde{x}(s)\rangle\\ &= \Big[\langle \dot{\Pi}(s,\alpha(s))\tilde{x}(s),\tilde{x}(s)\rangle + \sum_{j=1}^{D}\lambda_{\alpha(s-)j}\big\langle(\Pi(s,j)-\Pi(s,\alpha(s-)))\tilde{x}(s),\tilde{x}(s)\big\rangle\\ &\quad + \langle \Pi(s,\alpha(s))\big(A(s,\alpha(s))\tilde{x}(s) + B_2(s,\alpha(s))\tilde{v}(s)\big),\tilde{x}(s)\rangle\\ &\quad + \langle \Pi(s,\alpha(s))\tilde{x}(s), A(s,\alpha(s))\tilde{x}(s) + B_2(s,\alpha(s))\tilde{v}(s)\rangle\\ &\quad + \langle \Pi(s,\alpha(s))\big(C(s,\alpha(s))\tilde{x}(s) + D_2(s,\alpha(s))\tilde{v}(s)\big), C(s,\alpha(s))\tilde{x}(s) + D_2(s,\alpha(s))\tilde{v}(s)\rangle\\ &\quad + \langle \Pi(s,\alpha(s))\big(\bar{C}(s,\alpha(s))x(s) + \bar{D}_1(s,\alpha(s))u(s) + \bar{D}_2(s,\alpha(s))v(s) + \bar{\sigma}(s,\alpha(s))\big),\\ &\qquad \bar{C}(s,\alpha(s))x(s) + \bar{D}_1(s,\alpha(s))u(s) + \bar{D}_2(s,\alpha(s))v(s) + \bar{\sigma}(s,\alpha(s))\rangle\Big]ds\\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{D}\big\langle(\Pi(s,j)-\Pi(s,i))\tilde{x}(s),\tilde{x}(s)\big\rangle d\tilde{N}_{ij}(s) + \big[\cdots\big]dW(s) + \big[\cdots\big]d\overline{W}(s),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&d\langle P(s,\alpha(s))\hat{x}(s) + 2\eta(s,\alpha(s)),\hat{x}(s)\rangle\\ &= \Big[\langle \dot{P}(s,\alpha(s))\hat{x}(s),\hat{x}(s)\rangle + \sum_{j=1}^{D}\lambda_{\alpha(s-)j}\big\langle(P(s,j)-P(s,\alpha(s-)))\hat{x}(s),\hat{x}(s)\big\rangle\\ &\quad + \langle P(s,\alpha(s))\big(A(s,\alpha(s))\hat{x}(s) + B_1(s,\alpha(s))u(s) + B_2(s,\alpha(s))\hat{v}(s) + b(s,\alpha(s))\big),\hat{x}(s)\rangle\\ &\quad + \langle P(s,\alpha(s))\hat{x}(s), A(s,\alpha(s))\hat{x}(s) + B_1(s,\alpha(s))u(s) + B_2(s,\alpha(s))\hat{v}(s) + b(s,\alpha(s))\rangle\\ &\quad + \langle P(s,\alpha(s))\big(C(s,\alpha(s))\hat{x}(s) + D_1(s,\alpha(s))u(s) + D_2(s,\alpha(s))\hat{v}(s) + \sigma(s,\alpha(s))\big),\\ &\qquad C(s,\alpha(s))\hat{x}(s) + D_1(s,\alpha(s))u(s) + D_2(s,\alpha(s))\hat{v}(s) + \sigma(s,\alpha(s))\rangle\\ &\quad + 2\langle \dot{\eta}(s,\alpha(s)),\hat{x}(s)\rangle + 2\sum_{j=1}^{D}\lambda_{\alpha(s-)j}\big\langle\eta(s,j)-\eta(s,\alpha(s-)),\hat{x}(s)\big\rangle\\ &\quad + 2\langle \eta(s,\alpha(s)), A(s,\alpha(s))\hat{x}(s) + B_1(s,\alpha(s))u(s) + B_2(s,\alpha(s))\hat{v}(s) + b(s,\alpha(s))\rangle\Big]ds\end{aligned}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{D}\big\langle (P(s,j)-P(s,i))\hat{x}(s)+2(\eta(s,j)-\eta(s,i)),\hat{x}(s)\big\rangle d\tilde{N}_{ij}(s)+\big[\cdots\big]dW(s).$$

从 t 积分至 T，取期望，并将其代入代价泛函$J_\gamma(t,\xi,i;\ u(\cdot)\ v(\cdot))$，经过化简可得

$$\begin{aligned}
J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot),v(\cdot)) &= \mathbb{E}\Big\{\langle\Pi(t,i)\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle+\int_t^T\Big[\langle\bar{\mathcal{R}}_2(s,\alpha(s))\tilde{v}(s),\tilde{v}(s)\rangle+2\langle\bar{\mathcal{S}}_2(s,\alpha(s))\tilde{x}(s),\tilde{v}(s)\rangle\\
&\quad+\langle\bar{\mathcal{S}}_2(s,\alpha(s))^\top\bar{\mathcal{R}}_2(s,\alpha(s))^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2(s,\alpha(s))\tilde{x}(s),\tilde{x}(s)\rangle+\langle\Pi(s,\alpha(s))\bar{\sigma}(s,\alpha(s)),\bar{\sigma}(s,\alpha(s))\rangle\Big]ds\Big\}\\
&\quad+\mathbb{E}\Big\{\langle P(t,i)\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle+2\langle\eta(t,i),\hat{\xi}\rangle+\int_t^T\Big[\langle\hat{\mathcal{S}}(s,\alpha(s))^\top\hat{\mathcal{R}}(s,\alpha(s))^{-1}\hat{\mathcal{S}}(s,\alpha(s))\hat{x}(s),\hat{x}(s)\rangle\\
&\qquad+\langle\hat{\mathcal{R}}_{11}(s,\alpha(s))u(s),u(s)\rangle+2\langle\hat{\mathcal{S}}_1(s,\alpha(s))\hat{x}(s),u(s)\rangle+\langle\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,\alpha(s))\hat{v}(s),\hat{v}(s)\rangle\\
&\qquad+2\langle\hat{\mathcal{S}}_2(s,\alpha(s))\hat{x}(s),\hat{v}(s)+2\langle\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,\alpha(s))^\top u(s),\hat{v}(s)\rangle\\
&\qquad+2\langle\Big(\hat{\mathcal{S}}_2^\top\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\psi+\big(\hat{\mathcal{S}}_1^\top-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^\top\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\big)^{-1}\varphi\Big)(s,\alpha(s)),\hat{x}(s)\rangle\\
&\qquad+2\langle\varphi(s,\alpha(s))+\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,\alpha(s))\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,\alpha(s))^{-1}\psi(s,\alpha(s)),u(s)\rangle+2\langle\psi(s,\alpha(s)),\hat{v}(s)\rangle\\
&\qquad+\langle P(s,\alpha(s))\sigma(s,\alpha(s)),\sigma(s,\alpha(s))\rangle+2\langle\eta(s,\alpha(s)),b(s,\alpha(s))\rangle\Big]ds\Big\}\\
&:=\tilde{J}_\gamma(t,\tilde{\xi},i;\tilde{v}(\cdot))+\hat{J}_\gamma(t,\hat{\xi},i;u(\cdot),\hat{v}(\cdot)).
\end{aligned}$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$对泛函 $J_\gamma(t,\xi,i;\ \tilde{v}(\cdot))$ 中的 $\tilde{v}(\cdot)$ 使用配方法，可得（为简洁起见，省略参数 $(s,\alpha(s))$）

$$\tilde{J}_\gamma(t,\tilde{\xi},i;\tilde{v}(\cdot))=\mathbb{E}\Big\{\langle\Pi(t,i)\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle+\int_t^T\Big[\langle\bar{\mathcal{R}}_2\big(\tilde{v}+\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x}\big),\tilde{v}+\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x}\rangle+\langle\Pi\bar{\sigma},\bar{\sigma}\rangle\Big]ds\Big\}.\quad(4.15)$$

$\hat{}$ $\hat{}$对于 $J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot),\hat{}v(\cdot))$，对 $\hat{}v(\cdot)$ 使用配方法，可得

$$\begin{aligned}
\hat{J}_\gamma(t,\hat{\xi},i;u(\cdot),\hat{v}(\cdot)) &= \mathbb{E}\Big\{\langle P(t,i)\hat{\xi}+2\eta(t,i),\hat{\xi}\rangle+\int_t^T\Big[\langle\hat{\mathcal{S}}^\top\hat{\mathcal{R}}^{-1}\hat{\mathcal{S}}\hat{x},\hat{x}\rangle+\langle\hat{\mathcal{R}}_{11}u,u\rangle\\
&\quad+2\langle\hat{\mathcal{S}}_1\hat{x},u\rangle+\langle\hat{\mathcal{R}}_{22}\big(\hat{v}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top u+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\hat{x}\big),\hat{v}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top u+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\hat{x}\rangle\\
&\quad-2\langle\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\hat{x},u\rangle-\langle\hat{\mathcal{S}}_2^\top\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\hat{x},\hat{x}\rangle-\langle\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top u,u\rangle\\
&\quad+2\langle\hat{\mathcal{S}}_2^\top\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\psi+\big(\hat{\mathcal{S}}_1^\top-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^\top\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\big)^{-1}\varphi,\hat{x}\rangle\\
&\quad+2\langle\varphi+\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\psi,u\rangle+2\langle\psi,\hat{v}\rangle+\langle P\sigma,\sigma\rangle+2\langle\eta,b\rangle\Big]ds\Big\}.
\end{aligned}$$

然后，借助引理 4.2 (i)，将 (4.10) 代入上述方程，可得

$$\begin{aligned}
\hat{J}_\gamma(t,\hat{\xi},i;u(\cdot),\hat{v}(\cdot)) &= \mathbb{E}\Big\{\langle P(t,i)\hat{\xi}+2\eta(t,i),\hat{\xi}\rangle+\int_t^T\Big[\langle\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\big)u,u\rangle\\
&\quad+2\langle\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)\hat{x},u\rangle+\langle\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^\top\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\big)^{-1}\big(\hat{\mathcal{S}}_1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2)\hat{x},\hat{x}\rangle + \langle\hat{\mathcal{R}}_{22}\big(\hat{v}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top}u+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\hat{x}\big),\hat{v}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top}u+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\hat{x}\rangle\\
&+2\langle\Big(\hat{\mathcal{S}}_2^{\top}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\psi+\big(\hat{\mathcal{S}}_1^{\top}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^{\top}\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top}\big)^{-1}\varphi\Big),\hat{x}\rangle\\
&+2\langle\varphi+\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\psi,u\rangle+2\langle\psi,\hat{v}\rangle+\langle P\sigma,\sigma\rangle+2\langle\eta,b\rangle\Big]ds\Big\}.
\end{aligned}
$$

继续对 $\hat{}v(\cdot)$ 配方，可得

$$
\begin{aligned}
\hat{J}_\gamma(t,\hat{\xi},i;u(\cdot),\hat{v}(\cdot)) = \mathbb{E}\Big\{&\langle P(t,i)\hat{\xi}+2\eta(t,i),\hat{\xi}\rangle+\int_t^T\Big[\langle\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top}\big)u,u\rangle\\
&+2\langle\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)\hat{x},u\rangle+\langle\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^{\top}\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top}\big)^{-1}\big(\hat{\mathcal{S}}_1\\
&-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)\hat{x},\hat{x}\rangle+\langle\hat{\mathcal{R}}_{22}\big(\hat{v}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top}u+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\hat{x}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\psi\big),\hat{v}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top}u\\
&+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\hat{x}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\psi\rangle+2\langle\big(\hat{\mathcal{S}}_1^{\top}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^{\top}\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top}\big)^{-1}\varphi,\hat{x}\rangle\\
&+2\langle\varphi,u\rangle-\langle\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\psi,\psi\rangle+\langle P\sigma,\sigma\rangle+2\langle\eta,b\rangle\Big]ds\Big\}.
\end{aligned}
$$

接下来，对 $u(\cdot)$ 实施两步配方法过程，

$$
\begin{aligned}
&\hat{J}_\gamma(t,\hat{\xi},i;u(\cdot),\hat{v}(\cdot))\\
&=\mathbb{E}\Big\{\langle P(t,i)\hat{\xi}+2\eta(t,i),\hat{\xi}\rangle+\int_t^T\Big[-\langle\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\psi,\psi\rangle+\langle P\sigma,\sigma\rangle+2\langle\eta,b\rangle\\
&\quad+\big|u+(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top})^{-1}(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2)\hat{x}\big|^2_{(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top})}\\
&\quad+\big|\hat{v}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top}u+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\hat{x}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\psi\big|^2_{\hat{\mathcal{R}}_{22}}\\
&\quad+2\langle\big(\hat{\mathcal{S}}_1^{\top}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^{\top}\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top}\big)^{-1}\varphi,\hat{x}\rangle+2\langle\varphi,u\rangle\Big]ds\Big\}\qquad(4.16)\\
&=\mathbb{E}\Big\{\langle P(t,i)\hat{\xi}+2\eta(t,i),\hat{\xi}\rangle+\int_t^T\Big[-\langle\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\psi,\psi\rangle+\langle P\sigma,\sigma\rangle+2\langle\eta,b\rangle\\
&\quad+\big|u+(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top})^{-1}\big((\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2)\hat{x}+\varphi\big)\big|^2_{(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top})}\\
&\quad-\langle(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top})^{-1}\varphi,\varphi\rangle+|\hat{v}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top}u+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\hat{x}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\psi|^2_{\hat{\mathcal{R}}_{22}}\Big]ds\Big\}.
\end{aligned}
$$

因此，将方程（4.15）和方程（4.16）相加，得到

$$
\begin{aligned}
&J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot),v(\cdot))=\tilde{J}_\gamma(t,\tilde{\xi},i;\tilde{v}(\cdot))+\hat{J}_\gamma(t,\hat{\xi},i;u(\cdot),\hat{v}(\cdot))\\
&=\mathbb{E}\Big\{\langle\Pi(t,i)\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle+\langle P(t,i)\hat{\xi}+2\eta(t,i),\hat{\xi}\rangle+\int_t^T\Big[\langle\bar{\mathcal{R}}_2\big(\tilde{v}+\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x}\big),\tilde{v}+\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x}\rangle\\
&\quad+\big|u+(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top})^{-1}\big((\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2)\hat{x}+\varphi\big)\big|^2_{(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top})}\\
&\quad+\big|\hat{v}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top}u+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\hat{x}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\psi\big|^2_{\hat{\mathcal{R}}_{22}}-\langle(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top})^{-1}\varphi,\varphi\rangle\\
&\quad-\langle\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\psi,\psi\rangle+\langle P\sigma,\sigma\rangle+\langle\Pi\bar{\sigma},\bar{\sigma}\rangle+2\langle\eta,b\rangle\Big]ds\Big\}
\end{aligned}
$$

$$= \mathbb{E}\Big\{ \langle \Pi(t,i)\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle + \langle P(t,i)\hat{\xi}+2\eta(t,i),\hat{\xi}\rangle + \int_t^T \Big[\langle \bar{\mathcal{R}}_2(\tilde{v}-\tilde{v}^*),\tilde{v}-\tilde{v}^*\rangle$$
$$+ \langle (\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top})(u-u^*),u-u^*\rangle + \langle \hat{\mathcal{R}}_{22}(\hat{v}-\hat{\alpha}_2^*(u)),\hat{v}-\hat{\alpha}_2^*(u)\rangle \tag{4.17}$$
$$- \langle (\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top})^{-1}\varphi,\varphi\rangle - \langle \hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\psi,\psi\rangle + \langle P\sigma,\sigma\rangle + \langle \Pi\bar{\sigma},\bar{\sigma}\rangle + 2\langle \eta,b\rangle \Big] ds \Big\}.$$

根据条件（I）以及矩阵 $\mathcal{R}_2(s,i)$ 的一致负定性，对于任意 $u(\cdot) \in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)$ 和 $\alpha_2(u)(\cdot) = \hat{\alpha}_2(u)(\cdot) + \tilde{v}(\cdot) \in \mathcal{A}_2[t,T]$，有

$$J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot),\alpha_2(u)(\cdot)) \le J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot),\alpha_2^*(u)(\cdot)).$$

上述不等式取等号，当且仅当 $\hat{\alpha}_2(u)(\cdot) = \hat{\alpha}_2^*(u)(\cdot)$ 且 $\tilde{v}(\cdot) = \tilde{v}^*(\cdot)$，即 $\alpha_2(u)(\cdot) = \alpha_2^*(u)(\cdot)$，这就是引理的第一条断言。类似地，利用矩阵 $\hat{\mathcal{R}}_{11} - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top}$ 的一致正定性，可得引理的第二条断言，证明完毕。

□

定理 4.1. 设 (H1)-(H3) 成立。对于任意扰动衰减水平 $\gamma > \gamma^*$，假设黎卡提方程 (4.8)-(4.9) 存在解 $(\Pi(\cdot,\cdot)\ P(\cdot,\cdot)) \in C([t,T]\times\mathcal{S};\mathbb{S}^n)\times C([t,T]\times\mathcal{S};\mathbb{S}^n)$，且满足条件（I）。那么，对于任意 $(\xi, i) \in L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbb{R}^n)\times\mathcal{S}$，问题（SCG-1）存在一个最优控制策略对 $(u^*(\cdot)\ \alpha_2^*(\cdot)) \in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)\times\mathcal{A}_2[t,T]$，对应于玩家 1 的值函数。该策略对具有反馈形式，由 (4.12) 定义。此外，玩家 1 的值函数为

$$J_\gamma(t,\xi,i;u^*(\cdot),\alpha_2^*(u^*)(\cdot)) = \mathbb{E}\Big\{ \langle \Pi(t,i)\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle + \langle P(t,i)\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle + 2\langle \eta(t,i),\hat{\xi}\rangle$$
$$+ \int_t^T \Big[\langle P\sigma,\sigma\rangle + \langle \Pi\bar{\sigma},\bar{\sigma}\rangle + 2\langle \eta,b\rangle - \langle (\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^{\top})^{-1}\varphi,\varphi\rangle - \langle \hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\psi,\psi\rangle \Big] ds \Big\}. \tag{4.18}$$

证明。我们将证明控制-策略对 $(u^*(\cdot)\ \alpha_2^*(\cdot))$ 是最优的，即验证 (4.6) 成立。由引理 4.3 (ii),

$$J_\gamma(t,\xi,i;u^*(\cdot),\alpha_2^*(u^*)(\cdot)) \le \inf_{u(\cdot)\in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)} J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot),\alpha_2^*(u)(\cdot)),$$

因此我们有

$$J_\gamma(t,\xi,i;u^*(\cdot),\alpha_2^*(u^*)(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)} J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot),\alpha_2^*(u)(\cdot)),$$

and

$$J_\gamma(t,\xi,i;u^*(\cdot),\alpha_2^*(u^*)(\cdot)) \le \sup_{\alpha_2(\cdot)\in\mathcal{A}_2[t,T]} \inf_{u(\cdot)\in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)} J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot),\alpha_2(u)(\cdot)). \tag{4.19}$$

同理，由引理 4.3 (i),

$$J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot),\alpha_2^*(u)(\cdot)) = \sup_{\alpha_2(\cdot)\in\mathcal{A}_2[t,T]} J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot),\alpha_2(u)(\cdot)), \quad \forall u(\cdot)\in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m).$$

因此，

$$\begin{aligned} J_\gamma(t,\xi,i;u^*(\cdot),\alpha_2^*(u^*)(\cdot)) &= \inf_{u(\cdot)\in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)}\sup_{\alpha_2(\cdot)\in\mathcal{A}_2[t,T]} J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot),\alpha_2(u)(\cdot)) \\ &\geq \sup_{\alpha_2(\cdot)\in\mathcal{A}_2[t,T]}\inf_{u(\cdot)\in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)} J_\gamma(t,\xi,i;u(\cdot),\alpha_2(u)(\cdot)). \end{aligned} \tag{4.20}$$

由 (4.19) 和 (4.20)，我们得到所需结论：$(u^*(\cdot)\ \alpha_2^*(\cdot))$ 是玩家 1 的值 $J_\gamma(t,\xi,i;\ u^*(\cdot)\ \alpha_2^*(u^*)(\cdot))$ 的一个最优控制策略对，该结论由五步配方过程得出（见引理 4.3 的证明）。

□

对玩家 2 的值进行类似的分析，可得以下结果。

定理 4.2. 设 (H1)-(H3) 成立，对于任意给定的扰动衰减水平 $\gamma>\gamma^*$，假设黎卡提方程 (4.8) 和 (4.9) 存在一个解 $(\Pi(\cdot,\cdot)\ P(\cdot,\cdot))\ \in\ C([t,T]\times\mathcal{S};\ \mathbb{S}^n)\ \times C([t,T]\times\mathcal{S};\ \mathbb{S}^n)$，且满足条件（II）。那么，对于任意 $(\xi,i)\ \in L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\ \mathbb{R}^n)\times\mathcal{S}$，问题 (SCG- 2) 存在一个使玩家 2 的值达到最优的控制策略对 $(\alpha_1^*(\cdot)\ v^*(\cdot))\ \in\mathcal{A}_1[t,T]\times L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\ \mathbb{R}^{n_v})$，其具有反馈形式，定义如下

$$\begin{cases} \alpha_1^*(\hat{v})(s) = -\hat{\mathcal{R}}_{11}(s,\alpha(s))^{-1}\Big[\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,\alpha(s))\hat{v}(s)+\hat{\mathcal{S}}_1(s,\alpha(s))\hat{x}(s) \\ \qquad\qquad +B_1(s,\alpha(s))^\top\bar{\eta}(s,\alpha(s))+D_1(s,\alpha(s))^\top P(s,\alpha(s))\sigma(s,\alpha(s)) \\ \qquad\qquad +\bar{D}_1(s,\alpha(s))^\top\Pi(s,\alpha(s))\bar{\sigma}(s,\alpha(s))+\rho_1(s,\alpha(s))\Big], \\ \hat{v}^*(s) = -\Big[\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,\alpha(s))-\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,\alpha(s))^\top\hat{\mathcal{R}}_{11}(s,\alpha(s))^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,\alpha(s))\Big]^{-1}\Big\{\Big[\hat{\mathcal{S}}_2(s,\alpha(s)) \\ \qquad\qquad -\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,\alpha(s))^\top\hat{\mathcal{R}}_{11}(s,\alpha(s))^{-1}\hat{\mathcal{S}}_1(s,\alpha(s))\Big]\hat{x}(s)+B_2(s,\alpha(s))^\top\bar{\eta}(s,\alpha(s)) \\ \qquad\qquad +D_2(s,\alpha(s))^\top P(s,\alpha(s))\sigma(s,\alpha(s))+\bar{D}_2(s,\alpha(s))^\top\Pi(s,\alpha(s))\bar{\sigma}(s,\alpha(s)) \\ \qquad\qquad +\rho_2(s,\alpha(s))-\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,\alpha(s))^\top\hat{\mathcal{R}}_{11}(s,\alpha(s))^{-1}\Big[B_1(s,\alpha(s))^\top\bar{\eta}(s)+D_1(s,\alpha(s))^\top \\ \qquad\qquad \times P(s,\alpha(s))\sigma(s,\alpha(s))+\bar{D}_1(s,\alpha(s))^\top\Pi(s,\alpha(s))\bar{\sigma}(s,\alpha(s))+\rho_1(s,\alpha(s))\Big]\Big\}, \\ \tilde{v}^*(s) = -\bar{\mathcal{R}}_2(s,\alpha(s))^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2(s,\alpha(s))\tilde{x}(s),\quad v^*(s)=\hat{v}^*(s)+\tilde{v}^*(s),\quad s\in[t,T], \end{cases} \tag{4.21}$$

其中，$\bar{\eta}(\cdot,\cdot)\ \in C([t,T]\times\mathcal{S};\ \mathbb{R}^n)$ 是以下 BODE 的解：

$$\begin{cases} \dot{\bar{\eta}}(s,i)+A(s,i)^\top\bar{\eta}(s,i)-\hat{\mathcal{S}}_1(s,i)^\top\hat{\mathcal{R}}_{11}(s,i)^{-1}\bar{\psi}(s,i)-\big(\hat{\mathcal{S}}_2(s,i)-\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)^\top\hat{\mathcal{R}}_{11}(s,i)^{-1} \\ \quad\times\hat{\mathcal{S}}_1(s,i)\big)^\top\big(\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i)-\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)^\top\hat{\mathcal{R}}_{11}(s,i)^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)\big)^{-1}\bar{\varphi}(s,i)+C(s,i)^\top P(s,i)\sigma(s,i) \\ \quad+\bar{C}(s,i)^\top\Pi(s,i)\bar{\sigma}(s,i)+P(s,i)b(s,i)+q(s,i)+\sum_{j=1}^{D}\lambda_{ij}\bar{\eta}(s,j)=0,\qquad a.e.\ s\in[t,T], \\ \bar{\eta}(T,i)=g(T,i),\quad i\in\mathcal{S}, \end{cases} \tag{4.22}$$

and

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(s,i) &:= B_1(s,i)^\top \bar{\eta}(s,i) + D_1(s,i)^\top P(s,i)\sigma(s,i) + \bar{D}_1(s,i)^\top \Pi(s,i)\bar{\sigma}(s,i) + \rho_1(s,i),\\ \bar{\varphi}(s,i) &:= B_2(s,i)^\top \bar{\eta}(s,i) + D_2(s,i)^\top P(s,i)\sigma(s,i) + \bar{D}_2(s,i)^\top \Pi(s,i)\bar{\sigma}(s,i) + \rho_2(s,i)\\ &\quad - \hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}(s,i)^{-1}\bar{\psi}(s,i).\end{aligned}$$

此外，玩家 2 的值为

$$\begin{aligned}J_\gamma(t,\xi,i;\alpha_1^*(\hat{v}^*)(\cdot),v^*(\cdot)) &= \mathbb{E}\Big\{\langle \Pi(t,i)\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle + \langle P(t,i)\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle + 2\langle \bar{\eta}(t,i),\hat{\xi}\rangle\\ &+ \int_t^T \Big[\langle P\sigma,\sigma\rangle + \langle \Pi\bar{\sigma},\bar{\sigma}\rangle + 2\langle \bar{\eta},b\rangle - \langle (\hat{\mathcal{R}}_{22} - \hat{\mathcal{R}}_{12}^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12})^{-1}\bar{\varphi},\bar{\varphi}\rangle - \langle \hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\bar{\psi},\bar{\psi}\rangle\Big] ds\Big\}.\end{aligned} \tag{4.23}$$

接下来，为了证明玩家 1 的最优控制策略对与玩家 2 的一致，我们首先需要给出以下结果，它证明了前文给出的两个 BODE 等价。

命题4.1. 若 BODE (4.13) 和 (4.22) 分别存在解 $\eta(\cdot,\cdot)$ 和 $\bar{\eta}(\cdot,\cdot)$，则这两个解相等。

证明. 从两个 BODE (4.13) 和 (4.22) 可以看出，要证明解 $\eta(\cdot,\cdot)$ 和 $\bar{\eta}(\cdot,\cdot)$ 相等，只需证明 $-\hat{\mathcal{S}}_2^\top \hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\psi - (\hat{\mathcal{S}}_1 - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2)^\top (\hat{\mathcal{R}}_{11} - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top)^{-1}\varphi$, $-\hat{\mathcal{S}}_1^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\bar{\psi} - (\hat{\mathcal{S}}_2 - \hat{\mathcal{R}}_{12}^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_1)^\top (\hat{\mathcal{R}}_{22} - \hat{\mathcal{R}}_{12}^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12})^{-1}\bar{\varphi}$ 中对应的系数分别相等。

经过化简并合并同类项，我们得到

$$\begin{aligned}&-\hat{\mathcal{S}}_2^\top \hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\psi - (\hat{\mathcal{S}}_1 - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2)^\top (\hat{\mathcal{R}}_{11} - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top)^{-1}\varphi\\ &= \Big[(\hat{\mathcal{S}}_1 - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2)^\top (\hat{\mathcal{R}}_{11} - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top)^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1} - \hat{\mathcal{S}}_2^\top \hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\Big](B_2^\top \eta + D_2^\top P\sigma + \bar{D}_2^\top \Pi\bar{\sigma}\\ &\quad + \rho_2) - (\hat{\mathcal{S}}_1 - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2)^\top (\hat{\mathcal{R}}_{11} - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top)^{-1}(B_1^\top \eta + D_1^\top P\sigma + \bar{D}_1^\top \Pi\bar{\sigma} + \rho_1),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&-\hat{\mathcal{S}}_1^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\bar{\psi} - (\hat{\mathcal{S}}_2 - \hat{\mathcal{R}}_{12}^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_1)^\top (\hat{\mathcal{R}}_{22} - \hat{\mathcal{R}}_{12}^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12})^{-1}\bar{\varphi}\\ &= \Big[(\hat{\mathcal{S}}_2 - \hat{\mathcal{R}}_{12}^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_1)^\top (\hat{\mathcal{R}}_{22} - \hat{\mathcal{R}}_{12}^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12})^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1} - \hat{\mathcal{S}}_1^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\Big](B_1^\top \bar{\eta} + D_1^\top P\sigma + \bar{D}_1^\top \Pi\bar{\sigma}\\ &\quad + \rho_1) - (\hat{\mathcal{S}}_2 - \hat{\mathcal{R}}_{12}^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_1)^\top (\hat{\mathcal{R}}_{22} - \hat{\mathcal{R}}_{12}^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12})^{-1}(B_2^\top \bar{\eta} + D_2^\top P\sigma + \bar{D}_2^\top \Pi\bar{\sigma} + \rho_2).\end{aligned}$$

事实上，只需验证对应于 $B_2^\top \eta + D_2^\top P\sigma + \bar{D}_2^\top \Pi\bar{\sigma} + \rho_2$ 和 $B_2^\top \bar{\eta} + D_2^\top P\sigma + \bar{D}_2^\top \Pi\bar{\sigma} + \rho_2$ 以及 $B_1^\top \eta + D_1^\top P\sigma + \bar{D}_1^\top \Pi\bar{\sigma} + \rho_1$ 和 $B_1^\top \bar{\eta} + D_1^\top P\sigma + \bar{D}_1^\top \Pi\bar{\sigma} + \rho_1$ 的系数相等，即可完成证明。

接下来，我们只验证第一个，第二个可以用类似的方法证明。为了便于计算，我们假设矩阵 $\mathcal{R}_{12}$ 可逆（否则，

使用 $\mathcal{R}_{12}$ 的（Moore–Penrose）伪逆），我们有

$$
\begin{aligned}
&\big(\hat{\mathcal{S}}_1 - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^\top \big(\hat{\mathcal{R}}_{11} - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\big)^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1} - \hat{\mathcal{S}}_2^\top\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1} \\
&= \big(\hat{\mathcal{S}}_1 - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^\top \big(I - \hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\big)^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1} - \hat{\mathcal{S}}_2^\top\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1} \\
&= \big(\hat{\mathcal{S}}_1 - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^\top \hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\big(I - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\big)^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1} - \hat{\mathcal{S}}_2^\top\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1} \\
&= \big(\hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_1 - \hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^\top \Big[\big(\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\big)^{-1} - \hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\Big]^{-1} - \hat{\mathcal{S}}_2^\top\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1} \\
&= \Big[\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_1 - \hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^\top - \hat{\mathcal{S}}_2^\top\big(\hat{\mathcal{R}}_{12}^{-1} - \hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\big)\Big]\Big[\big(\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\big)^{-1} - \hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\Big]^{-1} \\
&= \big(\hat{\mathcal{S}}_1^\top\hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1} - \hat{\mathcal{S}}_2^\top\hat{\mathcal{R}}_{12}^{-1}\big)\Big[\big(\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\big)^{-1} - \hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\Big]^{-1} \\
&= \big(\hat{\mathcal{S}}_1^\top\hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12} - \hat{\mathcal{S}}_2^\top\big)\hat{\mathcal{R}}_{12}^{-1}\Big[\big(\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\big)^{-1} - \hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\Big]^{-1} \\
&= -\big(\hat{\mathcal{S}}_2 - \hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_1\big)^\top\big(\hat{\mathcal{R}}_{22} - \hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}\big)^{-1}.
\end{aligned}
$$

根据上述分析与推导，将两个 BODE 相减可得 $\eta(\cdot,\cdot) = \bar{\eta}(\cdot,\cdot)$。证明完毕。

□

定理 4.3. 设 (H1)-(H3) 成立，对于任意给定的扰动衰减水平 $\gamma > \gamma^*$，假设黎卡提方程 (4.8) 和 (4.9) 存在一个解 $(\Pi(\cdot,\cdot)\ P(\cdot,\cdot)) \in C([t,T]\times\mathcal{S};\mathbb{S}^n) \times C([t,T]\times\mathcal{S};\mathbb{S}^n)$，且满足条件（I&II）。那么，对于任意 $(\xi,i) \in L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega;\mathbb{R}^n)\times\mathcal{S}$，有

$$
u^* = \alpha_1^*(\hat{v}^*), \qquad \hat{v}^* = \hat{\alpha}_2^*(u^*), \qquad v^* = \alpha_2^*(u^*) = \hat{v}^* + \tilde{v}^*, \tag{4.24}
$$

其中，$u^*(\cdot)$、$\hat{}\alpha_2^*(\cdot)$、$\tilde{v}^*(\cdot)$、$\alpha_2^*(\cdot)$ 和 $\alpha_1^*(\cdot)$、$\hat{}v^*(\cdot)$、$v^*(\cdot)$ 分别由 (4.12) 和 (4.21) 定义，其中 $\bar{\eta}(\cdot,\cdot)$ 替换为 $\eta(\cdot,\cdot)$。此外，问题（SCG）的值存在，且其表达式为

$$
\begin{aligned}
&J_\gamma(t,\xi,i;u^*(\cdot),v^*(\cdot)) \\
&= \mathbb{E}\Big\{\langle\Pi(t,i)\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle + \langle P(t,i)\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle + 2\langle\eta(t,i),\hat{\xi}\rangle + \int_t^T \Big[\langle P(s,\alpha(s))\sigma(s,\alpha(s)),\sigma(s,\alpha(s))\rangle \\
&\qquad + \langle\Pi(s,\alpha(s))\bar{\sigma}(s,\alpha(s)),\bar{\sigma}(s,\alpha(s))\rangle + 2\langle\eta(s,\alpha(s)),b(s,\alpha(s))\rangle \\
&\qquad - \langle\hat{\mathcal{R}}(s,\alpha(s))^{-1}\Psi(s,\alpha(s)),\Psi(s,\alpha(s))\rangle\Big]ds\Big\},
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\Psi(s,\alpha(s)) \equiv \begin{pmatrix}\bar{\psi}(s,\alpha(s))\\ \psi(s,\alpha(s))\end{pmatrix} &:= B(s,\alpha(s))^\top\eta(s,\alpha(s)) + D(s,\alpha(s))^\top P(s,\alpha(s))\sigma(s,\alpha(s)) \\
&\quad + \bar{D}(s,\alpha(s))^\top\Pi(s,\alpha(s))\bar{\sigma}(s,\alpha(s)) + \rho(s,\alpha(s)),
\end{aligned}
$$

且 $\eta(\cdot,\cdot) \in C([t,T]\times\mathcal{S};\mathbb{R}^n)$ 满足以下 BODE：

$$\begin{cases} \dot{\eta}(s,i) + \big(A(s,i) - B(s,i)\hat{\mathcal{R}}(s,i)^{-1}\hat{\mathcal{S}}(s,i)\big)^\top \eta(s,i) + \big(C(s,i) - D(s,i)\hat{\mathcal{R}}(s,i)^{-1}\hat{\mathcal{S}}(s,i)\big)^\top \\ \quad \times P(s,i)\sigma(s,i) + \big(\bar{C}(s,i) - \bar{D}(s,i)\hat{\mathcal{R}}(s,i)^{-1}\hat{\mathcal{S}}(s,i)\big)^\top \Pi(s,i)\bar{\sigma}(s,i) - \hat{\mathcal{S}}(s,i)^\top \\ \quad \times \hat{\mathcal{R}}(s,i)^{-1}\rho(s,i) + P(s,i)b(s,i) + q(s,i) + \sum_{j=1}^{D}\lambda_{ij}\eta(s,j) = 0, \quad a.e.\ s\in[t,T], \\ \eta(T,i) = g(T,i), \quad i\in\mathcal{S}. \end{cases} \tag{4.26}$$

证明。在条件（I&II）下，$(u^*, \hat{\alpha}_2^*(u^*))$ 和 $(\alpha_1^*(\hat{v}^*), \hat{v}^*)$ 都是以下代数方程组的唯一解：

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{R}}_{11}u + \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{v} + \hat{\mathcal{S}}_1\hat{x} + B_1^\top\eta + D_1^\top P\sigma + \bar{D}_1^\top\Pi\bar{\sigma} + \rho_1 = 0, \\ \hat{\mathcal{R}}_{12}^\top u + \hat{\mathcal{R}}_{22}\hat{v} + \hat{\mathcal{S}}_2\hat{x} + B_2^\top\eta + D_2^\top P\sigma + \bar{D}_2^\top\Pi\bar{\sigma} + \rho_2 = 0, \end{cases} \tag{4.27}$$

为简便起见，略去自变量 (s,i)。事实上，将 $\hat{v}$ 视为 $(\hat{x},u)$ 的函数，并由 (4.27) 的第二个方程求解，再将 $\hat{v}$ 的表达式代入 (4.27) 的第一个方程，可得

$$\begin{cases} u = -\big(\hat{\mathcal{R}}_{11} - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\big)^{-1}\big[\big(\hat{\mathcal{S}}_1 - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)\hat{x} + B_1^\top\eta + D_1^\top P\sigma + \bar{D}_1^\top\Pi\bar{\sigma} + \rho_1 \\ \qquad\qquad - \hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\big(B_2^\top\eta + D_2^\top P\sigma + \bar{D}_2^\top\Pi\bar{\sigma} + \rho_2\big)\big], \\ \hat{v} = -\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\big[\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top u + \hat{\mathcal{S}}_2\hat{x} + B_2^\top\eta + D_2^\top P\sigma + \bar{D}_2^\top\Pi\bar{\sigma} + \rho_2\big], \end{cases} \tag{4.28}$$

这与由 (4.12) 给出的 $(u^*, \hat{\alpha}_2^*(u^*))$ 一致。另一方面，将 u 视为 $(\hat{x},\hat{v})$ 的函数，并由 (4.27) 的第一个方程求解，再将 u 的表达式代入 (4.27) 的第二个方程，可得

$$\begin{cases} u = -\hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\big[\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{v} + \hat{\mathcal{S}}_1\hat{x} + B_1^\top\eta + D_1^\top P\sigma + \bar{D}_1^\top\Pi\bar{\sigma} + \rho_1\big], \\ \hat{v} = -\big(\hat{\mathcal{R}}_{22} - \hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}\big)^{-1}\big[\big(\hat{\mathcal{S}}_2 - \hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_1\big)\hat{x} + B_2^\top\eta + D_2^\top P\sigma + \bar{D}_2^\top\Pi\bar{\sigma} + \rho_2 \\ \qquad\qquad - \hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\hat{\mathcal{R}}_{11}^{-1}\big(B_1^\top\eta + D_1^\top P\sigma + \bar{D}_1^\top\Pi\bar{\sigma} + \rho_1\big)\big]. \end{cases} \tag{4.29}$$

可以看出，(4.29) 与 (4.21) 中记为 $(\alpha_1^*(\hat{v}^*), \hat{v}^*)$ 的解相同。此外，由于代数方程 (4.27) 的解具有存在性与唯一性，我们有

$$u^* = \alpha_1^*(\hat{v}^*), \qquad \hat{v}^* = \hat{\alpha}_2^*(u^*).$$

因此，

$$v^* = \hat{v}^* + \tilde{v}^* = \hat{\alpha}_2^*(u^*) + \tilde{v}^* = \alpha_2^*(u^*),$$

那么相应的值相等，即，

$$J_\gamma(t,\xi,i;u^*,\alpha_2^*(u^*)) = J_\gamma(t,\xi,i;\alpha_1^*(\hat{v}^*),v^*).$$

由（4.18）、（4.27）和（4.28），可得

$$
\begin{aligned}
&J_\gamma(t,\xi,i;u^*,v^*)=J_\gamma(t,\xi,i;u^*,\alpha_2^*(u^*))\\
&=\mathbb{E}\Big\{\langle\Pi(t,i)\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle+\langle P(t,i)\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle+2\langle\eta(t,i),\hat{\xi}\rangle+\int_t^T\Big[\langle P\sigma,\sigma\rangle+\langle\Pi\bar{\sigma},\bar{\sigma}\rangle+2\langle\eta,b\rangle\\
&\qquad-\langle\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\big(\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top u^*+\hat{\mathcal{R}}_{22}\hat{v}^*+\hat{\mathcal{S}}_2\hat{x}\big),\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top u^*+\hat{\mathcal{R}}_{22}\hat{v}^*+\hat{\mathcal{S}}_2\hat{x}\rangle\\
&\qquad-\big\langle(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top)^{-1}\big[\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\big)u^*+\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)\hat{x}\big],\\
&\qquad\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\big)u^*+\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)\hat{x}\big\rangle\Big]ds\Big\}\\
&=\mathbb{E}\Big\{\langle\Pi(t,i)\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle+\langle P(t,i)\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle+2\langle\eta(t,i),\hat{\xi}\rangle+\int_t^T\Big[\langle P\sigma,\sigma\rangle+\langle\Pi\bar{\sigma},\bar{\sigma}\rangle+2\langle\eta,b\rangle\\
&\qquad-\big\langle\big[\hat{\mathcal{S}}_2^\top\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2+\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^\top(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top)^{-1}\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)\big]\hat{x},\hat{x}\big\rangle\\
&\qquad-\langle\hat{\mathcal{R}}_{22}\hat{v}^*,\hat{v}^*\rangle-\langle\hat{\mathcal{R}}_{11}u^*,u^*\rangle-2\langle\hat{\mathcal{S}}_1\hat{x},u^*\rangle-2\langle\hat{\mathcal{S}}_2\hat{x},\hat{v}^*\rangle-2\langle\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top u^*,\hat{v}^*\rangle\Big]ds\Big\}.
\end{aligned}
$$

利用引理 4.2 (i) 和配方法，我们得到

$$
\begin{aligned}
&J_\gamma(t,\xi,i;u^*,v^*)=\mathbb{E}\Big\{\langle\Pi(t,i)\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle+\langle P(t,i)\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle+2\langle\eta(t,i),\hat{\xi}\rangle\\
&\qquad+\int_t^T\Big[\langle P\sigma,\sigma\rangle+\langle\Pi\bar{\sigma},\bar{\sigma}\rangle+2\langle\eta,b\rangle-\langle\hat{\mathcal{S}}^\top\hat{\mathcal{R}}^{-1}\hat{\mathcal{S}}\hat{x},\hat{x}\rangle-\langle\hat{\mathcal{R}}_{22}\hat{v}^*,\hat{v}^*\rangle\\
&\qquad-\langle\hat{\mathcal{R}}_{11}u^*,u^*\rangle-2\langle\hat{\mathcal{S}}_1\hat{x},u^*\rangle-2\langle\hat{\mathcal{S}}_2\hat{x},\hat{v}^*\rangle-2\langle\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top u^*,\hat{v}^*\rangle\Big]ds\Big\}\\
&=\mathbb{E}\Big\{\langle\Pi(t,i)\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle+\langle P(t,i)\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle+2\langle\eta(t,i),\hat{\xi}\rangle+\int_t^T\Big[\langle P\sigma,\sigma\rangle+\langle\Pi\bar{\sigma},\bar{\sigma}\rangle\\
&\qquad+2\langle\eta,b\rangle-\langle\hat{\mathcal{S}}^\top\hat{\mathcal{R}}^{-1}\hat{\mathcal{S}}\hat{x},\hat{x}\rangle-\Big\langle\hat{\mathcal{R}}\begin{pmatrix}u^*\\\hat{v}^*\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u^*\\\hat{v}^*\end{pmatrix}\Big\rangle-2\Big\langle\hat{\mathcal{S}}\hat{x},\begin{pmatrix}u^*\\\hat{v}^*\end{pmatrix}\Big\rangle\Big]ds\Big\}\\
&=\mathbb{E}\Big\{\langle\Pi(t,i)\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle+\langle P(t,i)\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle+2\langle\eta(t,i),\hat{\xi}\rangle+\int_t^T\Big[\langle P\sigma,\sigma\rangle+\langle\Pi\bar{\sigma},\bar{\sigma}\rangle\\
&\qquad+2\langle\eta,b\rangle-\Big\langle\hat{\mathcal{R}}\Big(\begin{pmatrix}u^*\\\hat{v}^*\end{pmatrix}+\hat{\mathcal{R}}^{-1}\hat{\mathcal{S}}\hat{x}\Big),\begin{pmatrix}u^*\\\hat{v}^*\end{pmatrix}+\hat{\mathcal{R}}^{-1}\hat{\mathcal{S}}\hat{x}\Big\rangle\Big]ds\Big\}.
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

注意到，(4.27) 等价于

$$
\hat{\mathcal{R}}\begin{pmatrix}u\\\hat{v}\end{pmatrix}+\hat{\mathcal{S}}\hat{x}+B^\top\eta+D^\top P\sigma+\bar{D}^\top\Pi\bar{\sigma}+\rho=0.
$$

ˆ 由于矩阵 $\mathcal{R}$ 在条件（I&II）下可逆，因此可得

$$
\begin{pmatrix}u\\\hat{v}\end{pmatrix}+\hat{\mathcal{R}}^{-1}\hat{\mathcal{S}}\hat{x}=-\hat{\mathcal{R}}^{-1}\big(B^\top\eta+D^\top P\sigma+\bar{D}^\top\Pi\bar{\sigma}+\rho\big).
$$

将上述方程代入式（4.30），得到式（4.25），即，

$$J_\gamma(t,\xi,i;u^*,v^*)=\mathbb{E}\Big\{\langle\Pi(t,i)\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle+\langle P(t,i)\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle+2\langle\eta(t,i),\hat{\xi}\rangle+\int_t^T\Big[\langle P\sigma,\sigma\rangle+\langle\Pi\bar{\sigma},\bar{\sigma}\rangle+2\langle\eta,b\rangle \\ -\langle\hat{\mathcal{R}}^{-1}\big(B^\top\eta+D^\top P\sigma+\bar{D}^\top\Pi\bar{\sigma}+\rho\big),B^\top\eta+D^\top P\sigma+\bar{D}^\top\Pi\bar{\sigma}+\rho\rangle\Big]ds\Big\},$$

其中， η 是方程（4.13）的解。

接下来，我们证明方程（4.13）（或（4.22））等价于（4.26），后者是一个更为简洁的方程。

$$\begin{aligned}
&-\hat{\mathcal{S}}_2^\top\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\psi-\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^\top\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\big)^{-1}\varphi\\
&=-\hat{\mathcal{S}}_2^\top\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\big(B_2^\top\eta+D_2^\top P\sigma+\bar{D}_2^\top\Pi\bar{\sigma}+\rho_2\big)-\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^\top\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\big)^{-1}\\
&\quad\times\big[B_1^\top\eta+D_1^\top P\sigma+\bar{D}_1^\top\Pi\bar{\sigma}+\rho_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\big(B_2^\top\eta+D_2^\top P\sigma+\bar{D}_2^\top\Pi\bar{\sigma}+\rho_2\big)\big]\\
&=-\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^\top\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\big)^{-1}\big(B_1^\top\eta+D_1^\top P\sigma+\bar{D}_1^\top\Pi\bar{\sigma}+\rho_1\big)\\
&\quad+\big[\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^\top\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\big)^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}-\hat{\mathcal{S}}_2^\top\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\big]\\
&\quad\times\big(B_2^\top\eta+D_2^\top P\sigma+\bar{D}_2^\top\Pi\bar{\sigma}+\rho_2\big)\\
&=\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^\top\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\big)^{-1}\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}u^*+\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{v}^*+\hat{\mathcal{S}}_1\hat{x}\big)\\
&\quad+\big[\hat{\mathcal{S}}_2^\top\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}-\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^\top\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\big)^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\big]\big(\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top u^*+\hat{\mathcal{R}}_{22}\hat{v}^*+\hat{\mathcal{S}}_2\hat{x}\big)\\
&=\big[\hat{\mathcal{S}}_2^\top\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2+\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^\top(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top)^{-1}\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)\big]\hat{x}\\
&\quad+\hat{\mathcal{S}}_1^\top u^*+\hat{\mathcal{S}}_2^\top\hat{v}^*\\
&=-\hat{\mathcal{S}}^\top\hat{\mathcal{R}}^{-1}\big(B^\top\eta+D^\top P\sigma+\bar{D}^\top\Pi\bar{\sigma}+\rho\big).
\end{aligned}$$

借助上述方程，我们可以通过化简得到（4.26）。证明完毕。

□

下面我们证明，定理 4.3 中给出的零和线性二次随机微分博弈的最优反馈控制策略对（u^*（·） v^*（·））$\in\mathcal{U}[t,T]\times\mathcal{V}[t,T]$ 构成问题（SCG）的闭环鞍点结果。

定理 4.4. 设 (H1)-(H3) 成立。对于任意扰动衰减水平 $\gamma>\gamma^*$，假设黎卡提方程 (4.8) 和 (4.9) 存在满足条件（I&II）的解 $(\Pi(\cdot,\cdot)\ P(\cdot,\cdot))\in C([t,T]\times\mathcal{S};\mathbb{S}^n)\times C([t,T]\times\mathcal{S};\mathbb{S}^n)$，且 $\eta(\cdot,\cdot)\in C([t,T]\times\mathcal{S};\mathbb{R}^n)$ 是 BODE (4.26) 的解。那么，问题（SCG）存在一个闭环鞍点 $(\hat{\Theta}^*(\cdot,\alpha(\cdot))\ \tilde{\Theta}^*(\cdot,\alpha(\cdot))\ \bar{v}^*(\cdot))\in\mathcal{Q}[t,T]$，其中 $\hat{\Theta}^*(\cdot,\alpha(\cdot))\equiv(\hat{\Theta}_1^*(\cdot,\alpha(\cdot))^\top,\hat{\Theta}_2^*(\cdot,\alpha(\cdot))^\top)^\top$，$\tilde{\Theta}^*(\cdot,\alpha(\cdot))\equiv(0,\tilde{\Theta}_2^*(\cdot,\alpha(\cdot))^\top)^\top$，$\bar{v}^*(\cdot)\equiv(v_1^*(\cdot)^\top,v_2^*(\cdot)^\top)^\top$，其具有如下表示：

$$\begin{cases}
\hat{\Theta}^*(s,\alpha(s))=-\hat{\mathcal{R}}(s,\alpha(s))^{-1}\hat{\mathcal{S}}(s,\alpha(s)),\\
\tilde{\Theta}_2^*(s,\alpha(s))=-\bar{\mathcal{R}}_2(s,\alpha(s))^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2(s,\alpha(s)),\\
\bar{v}^*(s)=-\hat{\mathcal{R}}(s,\alpha(s))^{-1}\big[B(s,\alpha(s))^\top\eta(s,\alpha(s))+D(s,\alpha(s))^\top P(s,\alpha(s))\sigma(s,\alpha(s))\\
\qquad\qquad+\bar{D}(s,\alpha(s))^\top\Pi(s,\alpha(s))\bar{\sigma}(s,\alpha(s))+\rho(s,\alpha(s))\big],
\end{cases}\tag{4.31}$$

且价值函数为

$$V_\gamma(t,\xi,i)=\mathbb{E}\Big\{\langle\Pi(t,i)\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle+\langle P(t,i)\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle+2\langle\eta(t,i),\hat{\xi}\rangle+\int_t^T\Big[\langle P(s,\alpha(s))\sigma(s,\alpha(s)),\sigma(s,\alpha(s))\rangle$$
$$+\langle\Pi(s,\alpha(s))\bar{\sigma}(s,\alpha(s)),\bar{\sigma}(s,\alpha(s))\rangle+2\langle\eta(s,\alpha(s)),b(s,\alpha(s))\rangle$$
$$-\langle\hat{\mathcal{R}}(s,\alpha(s))^{-1}\Psi(s,\alpha(s)),\Psi(s,\alpha(s))\rangle\Big]ds\Big\}.$$

证明。任取 $\bar{u}(\cdot)\equiv(u(\cdot)^\top,v(\cdot)^\top)^\top\in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m)\times L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v})$，并记 $\hat{}\bar{u}(\cdot)\equiv(u(\cdot)^\top,\hat{}v(\cdot)^\top)^\top$，$\tilde{u}(\cdot)\equiv(0,\tilde{v}(\cdot)^\top)^\top$。令 $x(\cdot)\equiv x(\cdot;t,\xi,i,\bar{u}(\cdot))$ 为相应的状态过程，则令 $\hat{}x(\cdot)\equiv\hat{}x(\cdot;t,\hat{}\xi,i,\hat{}\bar{u}(\cdot))$、$\tilde{x}(\cdot)\equiv\tilde{x}(\cdot;\,t,\tilde{\xi},i,\bar{u}(\cdot))$ 分别为滤波过程及其差，它们满足以下随机微分方程:

$$\begin{cases}d\hat{x}(s)=\big[A(s,\alpha(s))\hat{x}(s)+B(s,\alpha(s))\hat{\bar{u}}(s)+b(s,\alpha(s))\big]ds\\ \qquad\quad+\big[C(s,\alpha(s))\hat{x}(s)+D(s,\alpha(s))\hat{\bar{u}}(s)+\sigma(s,\alpha(s))\big]dW(s),\\ \hat{x}(t)=\hat{\xi},\quad\alpha(t)=i,\end{cases}$$

$$\begin{cases}d\tilde{x}(s)=\big[A(s,\alpha(s))\tilde{x}(s)+B(s,\alpha(s))\tilde{\bar{u}}(s)\big]ds+\big[C(s,\alpha(s))\tilde{x}(s)+D(s,\alpha(s))\tilde{\bar{u}}(s)\big]dW(s)\\ \qquad\quad+\big[\bar{C}(s,\alpha(s))x(s)+\bar{D}(s,\alpha(s))\bar{u}(s)+\bar{\sigma}(s,\alpha(s))\big]d\overline{W}(s),\\ \tilde{x}(t)=\tilde{\xi},\quad\alpha(t)=i,\end{cases}$$

此外，代价泛函为

$$J_\gamma(t,\xi,i;\bar{u}(\cdot))=\mathbb{E}\Big\{\langle G(T,\alpha(T))x(T),x(T)\rangle+2\langle g(T,\alpha(T)),x(T)\rangle$$
$$+\int_t^T\Big[\langle Q(s,\alpha(s))x(s),x(s)\rangle+\langle R_\gamma(s,\alpha(s))\bar{u}(s),\bar{u}(s)\rangle$$
$$+2\langle S(s,\alpha(s))x(s),\bar{u}(s)\rangle+2\langle q(s,\alpha(s)),x(s)\rangle+2\langle\rho(s,\alpha(s)),\bar{u}(s)\rangle\Big]ds\Big\}$$
$$=\mathbb{E}\Big\{\langle G(T,\alpha(T))\tilde{x}(T),\tilde{x}(T)\rangle+\int_t^T\Big[\langle Q(s,\alpha(s))\tilde{x}(s),\tilde{x}(s)\rangle$$
$$+\langle R_\gamma(s,\alpha(s))\tilde{\bar{u}}(s),\tilde{\bar{u}}(s)\rangle+2\langle S(s,\alpha(s))\tilde{x}(s),\tilde{\bar{u}}(s)\rangle\Big]ds\Big\}$$
$$+\mathbb{E}\Big\{\langle G(T,\alpha(T))\hat{x}(T),\hat{x}(T)\rangle+2\langle g(T,\alpha(T)),\hat{x}(T)\rangle$$
$$+\int_t^T\Big[\langle Q(s,\alpha(s))\hat{x}(s),\hat{x}(s)\rangle+\langle R_\gamma(s,\alpha(s))\hat{\bar{u}}(s),\hat{\bar{u}}(s)\rangle$$
$$+2\langle S(s,\alpha(s))\hat{x}(s),\hat{\bar{u}}(s)\rangle+2\langle q(s,\alpha(s)),\hat{x}(s)\rangle+2\langle\rho(s,\alpha(s)),\hat{\bar{u}}(s)\rangle\Big]ds\Big\}.$$

分别对 $s\mapsto\langle\Pi(s,\alpha(s))\tilde{x}(s)\ \tilde{x}(s)\rangle$，$s\mapsto\langle P(s,\alpha(s))\hat{}x(s),\hat{}x(s)\rangle$ 以及 $s\mapsto\langle\eta(s,\alpha(s)),\hat{}x(s)\rangle$应用 Itˆo 公式，从 t积分至 T，取期望，并将其代入代价泛函

$J_\gamma(t,\xi,i;\ \bar{u}(\cdot))$，利用配方法，可得

$$
\begin{aligned}
J_\gamma(t,\xi,i;\bar{u}(\cdot)) &= \mathbb{E}\Big\{\langle \Pi(t,i)\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle + \langle P(t,i)\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle + 2\langle \eta(t,i),\hat{\xi}\rangle \\
&\quad + \int_t^T \Big[\langle \bar{\mathcal{S}}_2^\top \bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x},\tilde{x}\rangle + \langle \bar{\mathcal{R}}_2\tilde{v},\tilde{v}\rangle + 2\langle \bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x},\tilde{v}\rangle + \langle \hat{\mathcal{S}}^\top\hat{\mathcal{R}}^{-1}\hat{\mathcal{S}}\hat{x},\hat{x}\rangle \\
&\qquad + \langle \hat{\mathcal{R}}\hat{\bar{u}},\hat{\bar{u}}\rangle + 2\langle \hat{\mathcal{S}}\hat{x},\hat{\bar{u}}\rangle + 2\langle \hat{\mathcal{S}}^\top\hat{\mathcal{R}}^{-1}\big(B^\top\eta + D^\top P\sigma + \bar{D}^\top\Pi\bar{\sigma}+\rho\big),\hat{x}\rangle \\
&\qquad + 2\langle B^\top\eta + D^\top P\sigma + \bar{D}^\top\Pi\bar{\sigma}+\rho,\hat{\bar{u}}\rangle + \langle P\sigma,\sigma\rangle + \langle \Pi\bar{\sigma},\bar{\sigma}\rangle + 2\langle \eta,b\rangle\Big]ds\Big\} \\
&= \mathbb{E}\Big\{\langle \Pi(t,i)\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle + \langle P(t,i)\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle + 2\langle \eta(t,i),\hat{\xi}\rangle + \int_t^T \Big[\langle P\sigma,\sigma\rangle + \langle \Pi\bar{\sigma},\bar{\sigma}\rangle + 2\langle \eta,b\rangle \\
&\quad - \langle \hat{\mathcal{R}}^{-1}\big(B^\top\eta + D^\top P\sigma + \bar{D}^\top\Pi\bar{\sigma}+\rho\big), B^\top\eta + D^\top P\sigma + \bar{D}^\top\Pi\bar{\sigma}+\rho\rangle \\
&\quad + \big\langle \hat{\mathcal{R}}\big[\hat{\bar{u}} + \hat{\mathcal{R}}^{-1}\hat{\mathcal{S}}\hat{x} + \hat{\mathcal{R}}^{-1}\big(B^\top\eta + D^\top P\sigma + \bar{D}^\top\Pi\bar{\sigma}+\rho\big)\big], \\
&\qquad \hat{\bar{u}} + \hat{\mathcal{R}}^{-1}\hat{\mathcal{S}}\hat{x} + \hat{\mathcal{R}}^{-1}\big(B^\top\eta + D^\top P\sigma + \bar{D}^\top\Pi\bar{\sigma}+\rho\big)\big\rangle \\
&\quad + \langle \bar{\mathcal{R}}_2\big(\tilde{v} + \bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x}\big), \tilde{v} + \bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x}\rangle\Big]ds\Big\} \\
&= \mathbb{E}\Big\{\langle \Pi(t,i)\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle + \langle P(t,i)\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle + 2\langle \eta(t,i),\hat{\xi}\rangle + \int_t^T \Big[\langle P\sigma,\sigma\rangle + \langle \Pi\bar{\sigma},\bar{\sigma}\rangle + 2\langle \eta,b\rangle \\
&\quad - \langle \hat{\mathcal{R}}^{-1}\big(B^\top\eta + D^\top P\sigma + \bar{D}^\top\Pi\bar{\sigma}+\rho\big), B^\top\eta + D^\top P\sigma + \bar{D}^\top\Pi\bar{\sigma}+\rho\rangle \\
&\quad + \langle \bar{\mathcal{R}}_2\big(\tilde{v} - \tilde{\Theta}_2^*\tilde{x}\big), \tilde{v} - \tilde{\Theta}_2^*\tilde{x}\rangle + \langle \hat{\mathcal{R}}\big(\hat{\bar{u}} - \hat{\Theta}^*\hat{x} - \bar{v}^*\big), \hat{\bar{u}} - \hat{\Theta}^*\hat{x} - \bar{v}^*\rangle\Big]ds\Big\} \\
&= J_\gamma(t,\xi,i;\hat{\Theta}^*(\cdot,\alpha(\cdot))\hat{x}(\cdot) + \tilde{\Theta}^*(\cdot,\alpha(\cdot))\tilde{x}(\cdot) + \bar{v}^*(\cdot)) \\
&\quad + \mathbb{E}\int_t^T \Big[\langle \bar{\mathcal{R}}_2\big(\tilde{v} - \tilde{\Theta}_2^*\tilde{x}\big), \tilde{v} - \tilde{\Theta}_2^*\tilde{x}\rangle + \langle \hat{\mathcal{R}}\big(\hat{\bar{u}} - \hat{\Theta}^*\hat{x} - \bar{v}^*\big), \hat{\bar{u}} - \hat{\Theta}^*\hat{x} - \bar{v}^*\rangle\Big]ds.
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
&J_\gamma(t,\xi,i;\hat{\Theta}_1^*\hat{x} + v_1, \hat{\Theta}_2^*\hat{x} + \tilde{\Theta}_2^*\tilde{x} + v_2^*) \\
&= J_\gamma(t,\xi,i;\hat{\Theta}^*\hat{x} + \tilde{\Theta}^*\tilde{x} + \bar{v}^*) + \mathbb{E}\int_t^T \langle \hat{\mathcal{R}}_{11}\big(v_1 - v_1^*\big), v_1 - v_1^*\rangle ds.
\end{aligned}
$$

因此，

$$
J_\gamma(t,\xi,i;\hat{\Theta}^*\hat{x} + \tilde{\Theta}^*\tilde{x} + \bar{v}^*) \le J_\gamma(t,\xi,i;\hat{\Theta}_1^*\hat{x} + v_1, \hat{\Theta}_2^*\hat{x} + \tilde{\Theta}_2^*\tilde{x} + v_2^*), \quad \forall v_1 \in L^2_{\mathbb{G}}(t,T;\mathbb{R}^m),
$$

当且仅当

$$
\hat{\mathcal{R}}_{11}(s,\alpha(s)) \ge 0, \quad a.e.\ s \in [t,T].
$$

同样，

$$
\begin{aligned}
&J_\gamma(t,\xi,i;\hat{\Theta}_1^*\hat{x} + v_1^*, \hat{\Theta}_2^*\hat{x} + \tilde{\Theta}_2^*\tilde{x} + v_2) \\
&= J_\gamma(t,\xi,i;\hat{\Theta}^*\hat{x} + \tilde{\Theta}^*\tilde{x} + \bar{v}^*) + \mathbb{E}\int_t^T \Big[\langle \bar{\mathcal{R}}_2\tilde{v}_2,\tilde{v}_2\rangle + \langle \hat{\mathcal{R}}_{22}\big(\hat{v}_2 - v_2^*\big), \hat{v}_2 - v_2^*\rangle\Big]ds.
\end{aligned}
$$

因此，

$$J_\gamma(t,\xi,i;\hat{\Theta}^*\hat{x}+\tilde{\Theta}^*\tilde{x}+\bar{v}^*)\geq J_\gamma(t,\xi,i;\hat{\Theta}_1^*\hat{x}+v_1^*,\hat{\Theta}_2^*\hat{x}+\tilde{\Theta}_2^*\tilde{x}+v_2),\quad \forall v_2\in L^2_{\mathbb{F}}(t,T;\mathbb{R}^{n_v}),$$

当且仅当

$$\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,\alpha(s))\leq 0,\quad a.e.\ s\in[t,T].$$

ˆ ˜由注2.2可知，在满足条件（I&II）时，$(\Theta^*,\Theta^*,\bar{v}^*)\in\mathcal{Q}[t,T]$ 是问题（SCG）的一个闭环鞍点。 □

定理 4.4 给出了问题（SCG）闭环鞍点存在的充分条件。接下来，以下结果讨论上述闭环鞍点的结果的 H_∞ 性能准则，这表明闭环鞍点的结果$(u^*,v^*)\in\mathcal{U}[t,T]\times\mathcal{V}[t,T]$ 构成了问题（R-SCG）的鲁棒 H_∞ 控制和最坏情形扰动。

由引理 4.2 (i) 和

$$\hat{\Theta}_1^*(s,i)=-\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}(s,i)-\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i)^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)^\top\big)^{-1}\big(\hat{\mathcal{S}}_1(s,i)-\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i)^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2(s,i)\big),$$

可得

$$\begin{aligned}
-\hat{\mathcal{S}}^\top\hat{\mathcal{R}}^{-1}\hat{\mathcal{S}}=&-\hat{\mathcal{S}}_2^\top\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2-\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^\top\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\big)^{-1}\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)\\
=&-\hat{\mathcal{S}}_2^\top\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2+\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)^\top\hat{\Theta}_1^*+\hat{\Theta}_1^{*\top}\big(\hat{\mathcal{S}}_1-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{S}}_2\big)\\
&+\hat{\Theta}_1^{*\top}\big(\hat{\mathcal{R}}_{11}-\hat{\mathcal{R}}_{12}\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\big)\hat{\Theta}_1^*\\
=&\,\hat{\mathcal{S}}_1^\top\hat{\Theta}_1^*+\hat{\Theta}_1^{*\top}\hat{\mathcal{S}}_1+\hat{\Theta}_1^{*\top}\hat{\mathcal{R}}_{11}\hat{\Theta}_1^*-\big(\hat{\mathcal{S}}_2+\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\hat{\Theta}_1^*\big)^\top\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\big(\hat{\mathcal{S}}_2+\hat{\mathcal{R}}_{12}^\top\hat{\Theta}_1^*\big)\\
=&\,\big(PB_1+C^\top PD_1+\bar{C}^\top\Pi\bar{D}_1+S_1^\top\big)\hat{\Theta}_1^*+\hat{\Theta}_1^{*\top}\big(B_1^\top P+D_1^\top PC+\bar{D}_1^\top\Pi\bar{C}+S_1\big)\\
&+\hat{\Theta}_1^{*\top}\big(R_1+D_1^\top PD_1+\bar{D}_1^\top\Pi\bar{D}_1\big)\hat{\Theta}_1^*-\mathbb{S}_2^\top\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\mathbb{S}_2,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_2(s,i):=&\,\hat{\mathcal{S}}_2(s,i)+\hat{\mathcal{R}}_{12}(s,i)^\top\hat{\Theta}_1^*(s,i)\\
=&\,B_2(s,i)^\top P(s,i)+D_2(s,i)^\top P(s,i)\big(C(s,i)+D_1(s,i)\hat{\Theta}_1^*(s,i)\big)\\
&+\bar{D}_2(s,i)^\top\Pi(s,i)\big(\bar{C}(s,i)+\bar{D}_1(s,i)\hat{\Theta}_1^*(s,i)\big)+S_2(s,i).
\end{aligned}$$

因此，　通过上述代换，黎卡提方程（4.9）可以重新整理为　s:

$$\begin{cases}
\dot{P}(s,i)+P(s,i)\big(A(s,i)+B_1(s,i)\hat{\Theta}_1^*(s,i)\big)+\big(A(s,i)+B_1(s,i)\hat{\Theta}_1^*(s,i)\big)^\top P(s,i)\\
\quad+\big(C(s,i)+D_1(s,i)\hat{\Theta}_1^*(s,i)\big)^\top P(s,i)\big(C(s,i)+D_1(s,i)\hat{\Theta}_1^*(s,i)\big)\\
\quad+\big(\bar{C}(s,i)+\bar{D}_1(s,i)\hat{\Theta}_1^*(s,i)\big)^\top\Pi(s,i)\big(\bar{C}(s,i)+\bar{D}_1(s,i)\hat{\Theta}_1^*(s,i)\big)\\
\quad+\hat{\Theta}_1^*(s,i)^\top R_1(s,i)\hat{\Theta}_1^*(s,i)+\hat{\Theta}_1^*(s,i)^\top S_1(s,i)+S_1(s,i)^\top\hat{\Theta}_1^*(s,i)+Q(s,i)\\
\quad-\mathbb{S}_2(s,i)^\top\hat{\mathcal{R}}_{22}(s,i)^{-1}\mathbb{S}_2(s,i)+\sum_{j=1}^D\lambda_{ij}P(s,j)=0,\quad a.e.\ s\in[t,T],\\
P(T,i)=G(T,i),\quad i\in\mathcal{S}.
\end{cases}\tag{4.32}$$

定理 4.5. 设（H1）-（H3）成立，对于任意给定的扰动衰减水平 $\gamma > \gamma^*$，假设黎卡提方程（4.8）和（4.32）存在一个解 $(\Pi(\cdot,\cdot)\ P(\cdot,\cdot)) \in C([t,T]\times\mathcal{S};\ \mathbb{S}^n) \times C([t,T]\times\mathcal{S};\ \mathbb{S}^n)$，满足条件（I&II），则问题（SCG）的闭环鞍点$\hat{}\ \tilde{}$point $(\Theta^*(\cdot,\alpha(\cdot))\ \Theta^*(\cdot,\alpha(\cdot))\ \bar{v}^*(\cdot)) \in \mathcal{Q}[t,T]$ 的结果之一为

$$u^*(s) = \hat{\Theta}_1^*(s,\alpha(s))\hat{x}(s) + v_1^*(s), \quad s\in[t,T],$$

满足 H_∞ 性能，即 $\|\mathcal{L}_{u^*}\| < \gamma$。

证明。将 $u^* = \hat{\Theta}_1^*\hat{x}^0$ 代入与（2.1）对应的齐次系统，可得

$$\begin{cases} dx^0(s) = \big[A(s,\alpha(s))x^0(s) + B_1(s,\alpha(s))\hat{\Theta}_1^*(s,\alpha(s))\hat{x}^0(s) + B_2(s,\alpha(s))v(s)\big]ds \\ \qquad\quad + \big[C(s,\alpha(s))x^0(s) + D_1(s,\alpha(s))\hat{\Theta}_1^*(s,\alpha(s))\hat{x}^0(s) + D_2(s,\alpha(s))v(s)\big]dW(s) \\ \qquad\quad + \big[\bar{C}(s,\alpha(s))x^0(s) + \bar{D}_1(s,\alpha(s))\hat{\Theta}_1^*(s,\alpha(s))\hat{x}^0(s) + \bar{D}_2(s,\alpha(s))v(s)\big]d\overline{W}(s), \\ x^0(t) = \xi, \qquad \alpha(t) = i, \end{cases}$$

相应的滤波过程及其差分别满足以下随机微分方程,

$$\begin{cases} d\hat{x}^0(s) = \big[\big(A(s,\alpha(s)) + B_1(s,\alpha(s))\hat{\Theta}_1^*(s,\alpha(s))\big)\hat{x}^0(s) + B_2(s,\alpha(s))\hat{v}(s)\big]ds \\ \qquad\quad + \big[\big(C(s,\alpha(s)) + D_1(s,\alpha(s))\hat{\Theta}_1^*(s,\alpha(s))\big)\hat{x}^0(s) + D_2(s,\alpha(s))\hat{v}(s)\big]dW(s), \\ \hat{x}^0(t) = \hat{\xi}, \quad \alpha(t) = i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\tilde{x}^0(s) = \big[A(s,\alpha(s))\tilde{x}^0(s) + B_2(s,\alpha(s))\tilde{v}(s)\big]ds + \big[C(s,\alpha(s))\tilde{x}^0(s) + D_2(s,\alpha(s))\tilde{v}(s)\big]dW(s) \\ \qquad\quad + \big[\bar{C}(s,\alpha(s))x^0(s) + \bar{D}_1(s,\alpha(s))\hat{\Theta}_1^*(s,\alpha(s))\hat{x}^0(s) + \bar{D}_2(s,\alpha(s))v(s)\big]d\overline{W}(s), \\ \tilde{x}^0(t) = \tilde{\xi}, \quad \alpha(t) = i. \end{cases}$$

代价泛函为

$$\begin{aligned} J_\gamma^0(t,\xi,i;u^*(\cdot),v(\cdot)) &= \mathbb{E}\Big\{\langle G(T,\alpha(T))\tilde{x}^0(T),\tilde{x}^0(T)\rangle + \int_t^T \Big[\langle Q(s,\alpha(s))\tilde{x}^0(s),\tilde{x}^0(s)\rangle \\ &\quad + 2\langle S_2(s,\alpha(s))\tilde{x}^0(s),\tilde{v}(s)\rangle + \langle (R_2(s,\alpha(s)) - \gamma^2 I)\tilde{v}(s),\tilde{v}(s)\rangle\Big]ds\Big\} \\ &+ \mathbb{E}\Big\{\langle G(T,\alpha(T))\hat{x}^0(T),\hat{x}^0(T)\rangle + \int_t^T \Big[\langle \big(Q + \hat{\Theta}_1^{*\top}R_1\hat{\Theta}_1^* + \hat{\Theta}_1^{*\top}S_1 + S_1^\top\hat{\Theta}_1^*\big)(s,\alpha(s))\hat{x}^0(s),\hat{x}^0(s)\rangle \\ &\quad + 2\langle S_2(s,\alpha(s))\hat{x}^0(s),\hat{v}(s)\rangle + \langle (R_2(s,\alpha(s)) - \gamma^2 I)\hat{v}(s),\hat{v}(s)\rangle\Big]ds\Big\}. \end{aligned}$$

同样，通过对 $s\mapsto\langle\Pi(s,\alpha(s))\tilde{x}^0(s)\ \tilde{x}^0(s)\rangle$ 和 $s\mapsto\langle P(s,\alpha(s))\hat{x}^0(s),\hat{x}^0(s)\rangle$应用 Itô 公式，可得

$$\begin{aligned} -J_\gamma^0(t,\xi,i;u^*(\cdot),v(\cdot)) &= \mathbb{E}\Big\{-\langle\Pi(t,i)\tilde{\xi},\tilde{\xi}\rangle - \langle P(t,i)\hat{\xi},\hat{\xi}\rangle \\ &\quad + \int_t^T \Big[-\langle\bar{\mathcal{R}}_2\big(\tilde{v} + \bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x}^0\big),\tilde{v} + \bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x}^0\rangle - \langle\hat{\mathcal{R}}_{22}\big(\hat{v} + \hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\mathbb{S}_2\hat{x}^0\big),\hat{v} + \hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\mathbb{S}_2\hat{x}^0\rangle\Big]ds\Big\}. \end{aligned}$$

– ˆ 注意到矩阵 $\mathcal{R}_2$ 和 $\mathcal{R}_{22}$ 一致负定，因此可得

$$
\begin{aligned}
&- J_\gamma^0(0,0,i;u^*(\cdot),v(\cdot)) \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \Big[-\langle \bar{\mathcal{R}}_2\big(\tilde{v}+\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x}^0\big),\tilde{v}+\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x}^0\rangle - \langle \hat{\mathcal{R}}_{22}\big(\hat{v}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\mathbb{S}_2\hat{x}^0\big),\hat{v}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\mathbb{S}_2\hat{x}^0\rangle\Big] ds \\
&\geq \delta\mathbb{E}\int_0^T \Big[|\tilde{v}+\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x}^0|^2 + |\hat{v}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\mathbb{S}_2\hat{x}^0|^2\Big] ds \\
&= \delta\mathbb{E}\int_0^T \Big[|v-\hat{v}+\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x}^0|^2 + |\hat{v}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\mathbb{S}_2\hat{x}^0|^2\Big] ds \\
&= \delta\mathbb{E}\int_0^T \Big[|v+\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x}^0|^2 + |\hat{v}|^2 - 2\langle v+\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x}^0,\hat{v}\rangle + |\hat{v}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\mathbb{S}_2\hat{x}^0|^2\Big] ds \\
&\geq \delta\mathbb{E}\int_0^T \Big[\frac{\beta}{1+\beta}|v+\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x}^0|^2 - \beta|\hat{v}|^2 + |\hat{v}+\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\mathbb{S}_2\hat{x}^0|^2\Big] ds.
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

接下来，定义一个有界线性算子 $\Gamma_1\colon L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^{n_v}) \to L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^{n_v})$,

$$
(\Gamma_1 v)(\cdot) := v(\cdot) + \bar{\mathcal{R}}_2(\cdot,\alpha(\cdot))^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2(\cdot,\alpha(\cdot))\tilde{x}^0(\cdot).
$$

那么， Γ_1 是双射，其逆矩阵 Γ_1^{-1}由下式给出

$$
(\Gamma_1^{-1}v)(\cdot) := v(\cdot) - \bar{\mathcal{R}}_2(\cdot,\alpha(\cdot))^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2(\cdot,\alpha(\cdot))x^v(\cdot) + \bar{\mathcal{R}}_2(\cdot,\alpha(\cdot))^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2(\cdot,\alpha(\cdot))\hat{x}^v(\cdot),
$$

其中， $x^v(\cdot)$ 和 $\hat{x}^v(\cdot)$ 是以下方程的解

$$
\begin{cases}
dx^v(s) = \big[\big(A-B_2\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\big)x^v + \big(B_1\hat{\Theta}_1^* + B_2\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\big)\hat{x}^v + B_2v\big]ds \\
\qquad\quad + \big[\big(C-D_2\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\big)x^v + \big(D_1\hat{\Theta}_1^* + D_2\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\big)\hat{x}^v + D_2v\big]dW(s) \\
\qquad\quad + \big[\big(\bar{C}-\bar{D}_2\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\big)x^v + \big(\bar{D}_1\hat{\Theta}_1^* + \bar{D}_2\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\big)\hat{x}^v + \bar{D}_2v\big]d\overline{W}(s), \\
x^v(0)=0, \quad \alpha(0)=i,
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
d\hat{x}^v(s) = \big[\big(A+B_1\hat{\Theta}_1^* + B_2\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\big)\hat{x}^v - B_2\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2x^v + B_2\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x}^v + B_2\hat{v}\big]ds \\
\qquad\quad + \big[\big(C+D_1\hat{\Theta}_1^* + D_2\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\big)\hat{x}^v - D_2\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2x^v + D_2\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x}^v + D_2\hat{v}\big]dW(s), \\
\hat{x}^v(0)=0, \quad \alpha(0)=i,
\end{cases}
$$

and

$$
\begin{cases}
d\tilde{x}^v(s) = \big[\big(A-B_2\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\big)\tilde{x}^v + B_2\tilde{v}\big]ds + \big[\big(C-D_2\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\big)\tilde{x}^v + D_2\tilde{v}\big]dW(s) \\
\qquad\quad + \big[\big(\bar{C}-\bar{D}_2\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\big)\tilde{x}^v + \bar{D}_2\tilde{v}\big]d\overline{W}(s), \\
\tilde{x}^v(0)=0, \quad \alpha(0)=i.
\end{cases}
$$

根据有界逆定理， Γ_1^{-1}是有界的，且 $\|\Gamma_1^{-1}\|>0$。因此，

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T |v(s)|^2ds = \mathbb{E}\int_0^T |(\Gamma_1^{-1}\Gamma_1 v)(s)|^2ds \\
&\leq \|\Gamma_1^{-1}\|\mathbb{E}\int_0^T |(\Gamma_1 v)(s)|^2ds = \|\Gamma_1^{-1}\|\mathbb{E}\int_0^T |v+\bar{\mathcal{R}}_2^{-1}\bar{\mathcal{S}}_2\tilde{x}^0|^2ds.
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

类似地，定义另一个有界线性算子 Γ_2： $L^2_{\mathbb{G}}(0,T;\mathbb{R}^{n_v}) \to L^2_{\mathbb{G}}(0,T;\mathbb{R}^{n_v})$,

$$(\Gamma_2\hat{v})(\cdot) := \hat{v}(\cdot) + \hat{\mathcal{R}}_{22}(\cdot,\alpha(\cdot))^{-1}\mathbb{S}_2(\cdot,\alpha(\cdot))\hat{x}^0(\cdot).$$

显然， Γ_2 是双射，其逆矩阵 Γ_2^{-1}记为

$$(\Gamma_2^{-1}\hat{v})(\cdot) := \hat{v}(\cdot) - \hat{\mathcal{R}}_{22}(\cdot,\alpha(\cdot))^{-1}\mathbb{S}_2(\cdot,\alpha(\cdot))\check{x}^v(\cdot),$$

其中，$\check{x}^v(\cdot)$满足

$$\begin{cases} d\check{x}^v(s) = \big[\big(A + B_1\hat{\Theta}_1^* - B_2\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\mathbb{S}_2\big)\check{x}^v + B_2\hat{v}\big]ds + \big[\big(C + D_1\hat{\Theta}_1^* - D_2\hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\mathbb{S}_2\big)\check{x}^v + D_2\hat{v}\big]dW(s), \\ \check{x}^v(0) = 0, \quad \alpha(0) = i. \end{cases}$$

由有界逆定理， Γ_2^{-1}有界且 $\|\Gamma_2^{-1}\| > 0$，并且

$$\mathbb{E}\int_0^T |\hat{v}(s)|^2 ds \le \|\Gamma_2^{-1}\|\mathbb{E}\int_0^T |(\Gamma_2\hat{v})(s)|^2 ds = \|\Gamma_2^{-1}\|\mathbb{E}\int_0^T |\hat{v} + \hat{\mathcal{R}}_{22}^{-1}\mathbb{S}_2\hat{x}^0|^2 ds. \tag{4.35}$$

借助(4.34)和(4.35)，可将(4.33)估计如下：

$$\begin{aligned} -J_\gamma^0(0,0,i;u^*(\cdot),v(\cdot)) &\ge \delta\mathbb{E}\int_0^T \left[\frac{\beta}{\|\Gamma_1^{-1}\|(1+\beta)}|v(s)|^2 - \beta|\hat{v}(s)|^2 + \frac{1}{\|\Gamma_2^{-1}\|}|\hat{v}(s)|^2\right]ds \\ &= \frac{\delta\beta}{\|\Gamma_1^{-1}\|(1+\beta)}\mathbb{E}\int_0^T |v(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

令 $\beta := \frac{1}{\|\Gamma_2^{-1}\|}$，则最后一个等式成立。由于对任意 v,

$$\begin{aligned} J^0(0,0,i;u^*(\cdot),v(\cdot)) &= J_\gamma^0(0,0,i;u^*(\cdot),v(\cdot)) + \gamma^2\mathbb{E}\int_0^T |v(s)|^2 ds \\ &\le \left(\gamma^2 - \frac{\delta\beta}{\|\Gamma_1^{-1}\|(1+\beta)}\right)\mathbb{E}\int_0^T |v(s)|^2 ds, \end{aligned}$$

根据$\|\mathcal{L}_{u^*}\|$的定义，我们有

$$\|\mathcal{L}_{u^*}\|^2 \equiv \sup_{\substack{v\neq 0 \\ v(\cdot)\in L^2_{\mathbb{F}}(0,T;\mathbb{R}^{n_v})}} \frac{J^0(0,0,i;u^*(\cdot),v(\cdot))}{\mathbb{E}\int_0^T |v(s)|^2 ds} \le \gamma^2 - \frac{\delta\beta}{\|\Gamma_1^{-1}\|(1+\beta)} < \gamma^2.$$

证明完成。 □

5 数值例子

在本节中，我们将给出一个数值例子，以更好地展示所提出的 H_∞ 控制策略的有效性。假设 $x(\cdot)$（股票市场的状态）满足一个随机微分方程， $u(\cdot)$ 表示机构投资者在市场中的投资策略，而 $v(\cdot)$ 是

机构投资者面临的外部未知扰动。我们用牛市和熊市来描述市场行情，它们分别对应马尔可夫链α的两种状态。假设 α 取值于 $\mathcal{S}=\{1,2\}$，其生成元如下

$$\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}.$$

仿真的时域长度选为 $T=3.5$。为降低计算复杂度，我们假设系统是齐次的。此外，假设当 $\alpha=1$ 时市场处于熊市，当 $\alpha=2$时市场处于牛市，这对应于下表所示的不同系统系数。

表 1：对应于 $\alpha=1$ 的仿真参数

A	B_1	B_2	C	D_1	D_2	$\bar{C}$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	Q	R_1	R_2	S_1	S_2	G	ξ
0.1	0.3	-0.2	0.3	0.3	-0.25	0.1	0.3	-0.2	0.3	0.2	0.1	0.2	-0.1	0	1

表 2：对应于 $\alpha=2$ 的仿真参数

A	B_1	B_2	C	D_1	D_2	$\bar{C}$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	Q	R_1	R_2	S_1	S_2	G	ξ
0.2	0.2	-0.1	0.2	0.1	-0.1	0.2	0.1	-0.05	0.2	0.1	0.05	0.1	-0.05	0	1

显然，系数满足假设（H3）。设扰动衰减水平为$\gamma=1$。通过计算机仿真，我们得到了以下图形。

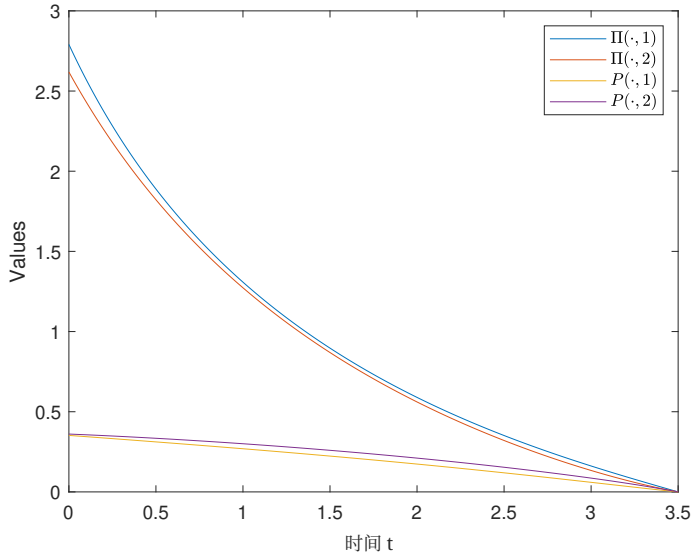
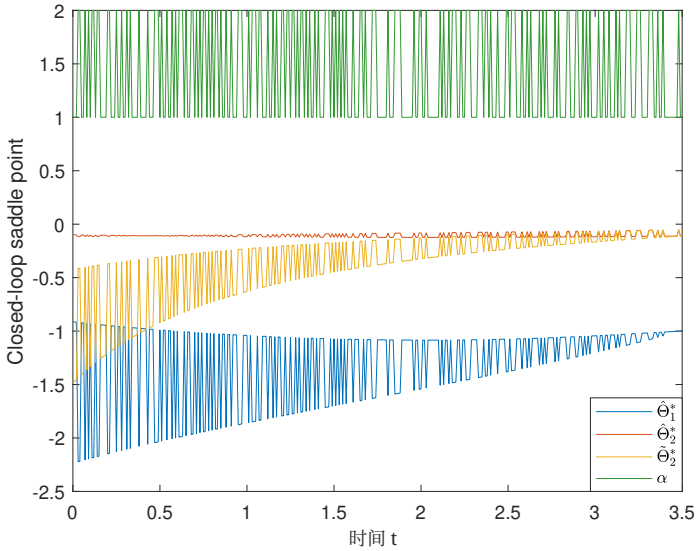


图 1：黎卡提方程的数值解 $\Pi(\cdot,1)$、 $\Pi(\cdot,2)$、 $P(\cdot,1)$ 和 $P(\cdot,2)$

图 1 给出了黎卡提方程 $\Pi(\cdot,1)$、 $\Pi(\cdot,2)$、 $P(\cdot,1)$ 和 $P(\cdot,2)$ 的数值解。



ˆ ˜图2：闭环鞍点（Θ*(·, α(·)) Θ*(·, α(·)))

ˆ ˜问题（SCG）的闭环鞍点 (Θ*(·, α(·)) Θ*(·, α(·))) 如图 ˆ 2 所示。从图中可以看出，与牛市（$\alpha = 2$）相比，市场处于熊市（$\alpha = 1$）时， Θ_1^* 的强度相对较弱，而 Θ_2^* 和 Θ_2^* 的强度则相对较强。这是因为市场处于熊市状态时，市场情绪变得低迷，负面消息频繁出现，不确定性因素不断增加，从而导致Θ_2^* 和Θ_2^*的强度更高。同时，绝大多数投资者遭受亏损，通常会选择观望态度，因此Θ_1^*的强度较弱。

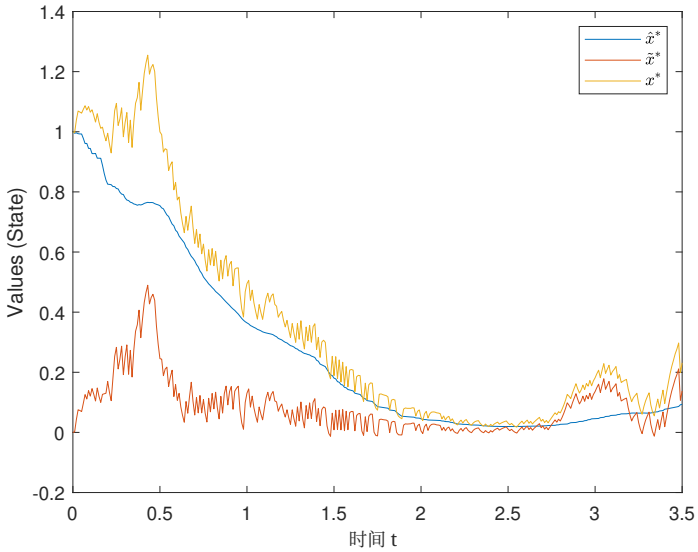


图3：状态过程 $x^*(\cdot)$、滤波状态过程 ˆ$x^*(\cdot)$ 及差值 $\tilde{x}^*(\cdot)$

图3展示了闭环系统在闭环点（$\Theta^*(\cdot,\alpha(\cdot))$ $\Theta^*(\cdot,\alpha(\cdot))$）下相应的状态过程 $x^*(\cdot)$、滤波状态过程 $\hat{x}^*(\cdot)$ 以及两者的差值 $\hat{\ }\tilde{\ }\ \tilde{x}^*(\cdot)$。

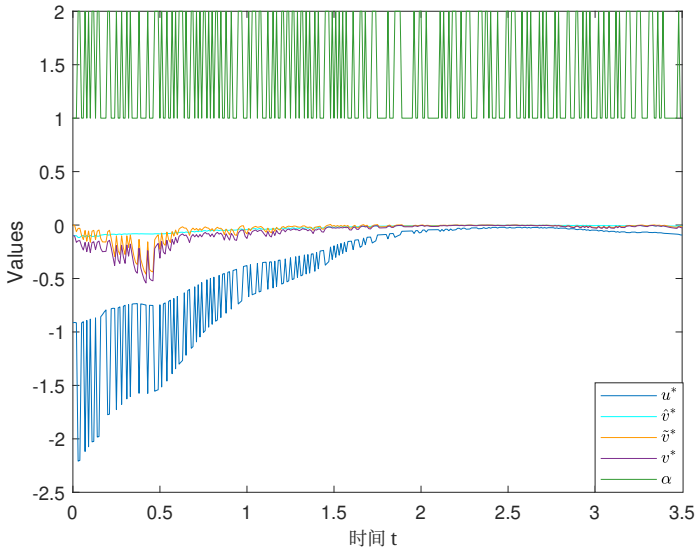
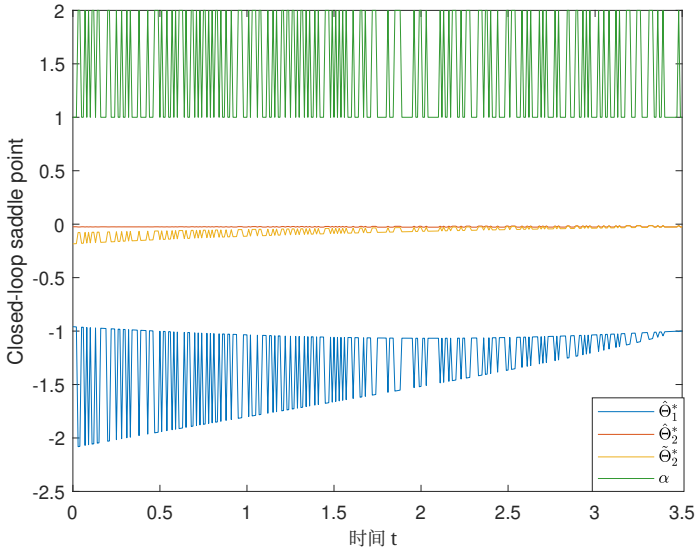


图4：鲁棒 H_∞ 最优控制 $u^*(\cdot)$与最坏情形扰动 $v^*(\cdot)$

图4展示了问题（R-SCG）对应的鲁棒 H_∞ 控制策略 $u^*(\cdot)$和最坏情形扰动 $v^*(\cdot)$，以及相应的滤波过程 $\hat{v}^*(\cdot)$和与最坏情形扰动 $v^*(\cdot)$相关的差值 $\tilde{v}^*(\cdot)$。从图中可以看出，当市场处于熊市时，机构投资者感知到的最坏情形扰动强度相对较高；因此，机构投资者的投资强度$u^*(\cdot)$会下降。这与实际市场情况一致：在熊市中，投资者信心不足、市场情绪悲观，导致买卖双方的参与意愿均有所降低，进而使市场交易活动减弱、交易量下降。

为对马尔可夫跳跃系统的扰动衰减水平进行敏感性分析，现令参数 γ 为 2。同理，我们可以得到问题（SCG）的相应闭环鞍点（$\Theta^*(\cdot,\alpha(\cdot))$ $\Theta^*(\cdot,\alpha(\cdot))$）的图像、在（$\hat{\Theta}^*(\cdot,\alpha(\cdot))$ $\tilde{\Theta}^*(\cdot,\alpha(\cdot))$）下闭环系统的相应状态过程（$x^*(\cdot)$, $\hat{x}^*(\cdot)$, $\tilde{x}^*(\cdot)$），以及问题（R-SCG）的解（$u^*(\cdot)$ $v^*(\cdot)$）（即鲁棒 H_∞ 闭环最优控制$u^*(\cdot)$ $\in \mathcal{U}[t,T]$和最坏情形扰动 $v^*(\cdot)$ $\in \mathcal{V}[t,T]$），它们对应的扰动衰减水平为 2。分别见图5—图7。



ˆ ˜图 5：闭环鞍点（Θ*(·, α(·)) Θ*(·, α(·))）（$\gamma = 2$）

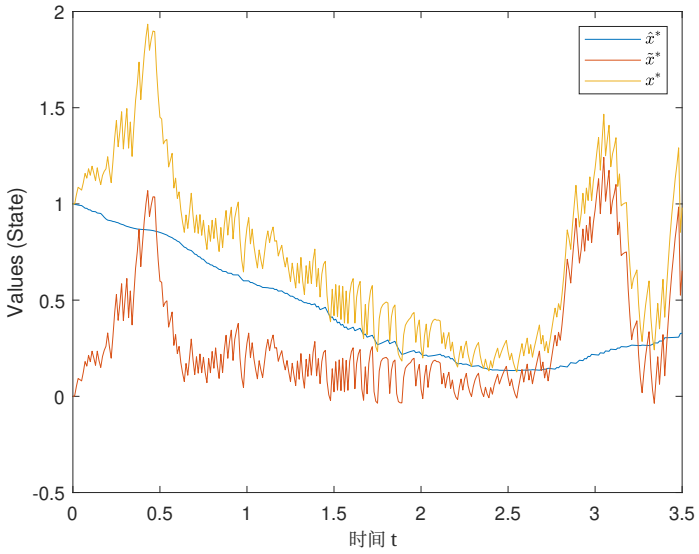


图 6：状态过程 x*(·)、ˆx*(·) 和 $\tilde{x}$*(·)（$\gamma = 2$）

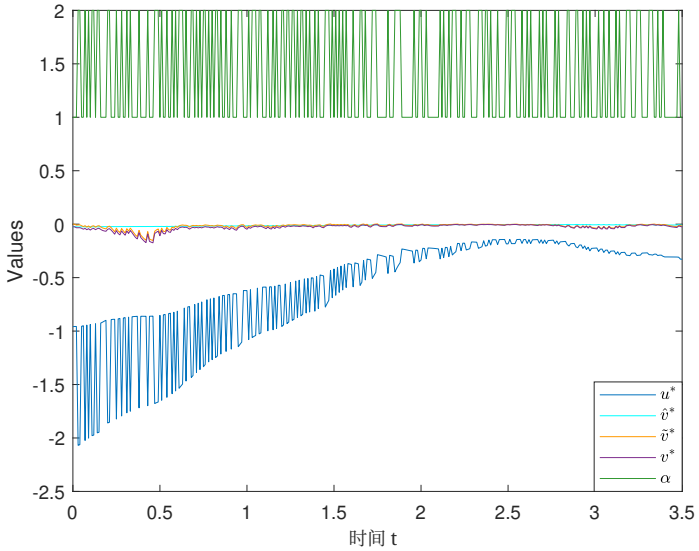
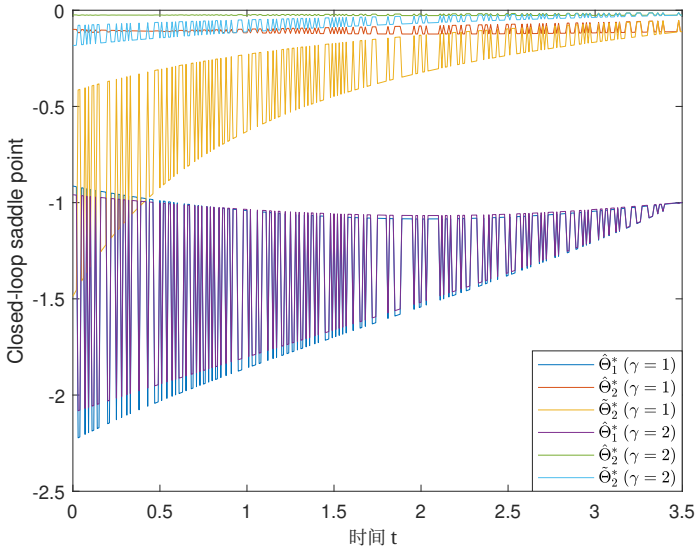


图7: 鲁棒 H_∞ 最优控制 $u^*(\cdot)$ 和最坏情形扰动 $v^*(\cdot)$ ($\gamma = 2$)

接下来，我们拟对扰动衰减水平 γ进行敏感性分析。在其他参数均保持不变的情况下，我们考察扰动衰减水平对闭环鞍点、闭环系统相应状态过程、鲁棒 H_∞ 最优控制以及最坏情形扰动的影响。分别见图8–图10。



ˆ ˜图8: γ对闭环鞍点的影响 ($\Theta^*(\cdot, \alpha(\cdot))$ $\Theta^*(\cdot, \alpha(\cdot))$)

ˆ 从图8可以看出，扰动衰减水平对 $\Theta_1^*(\cdot, \alpha(\cdot))$的影响

相对较小。然而，随着扰动衰减水平的提高，˜对应的 $\Theta_2^*(\cdot,\alpha(\cdot))$和 $\Theta_2^*(\cdot,\alpha(\cdot))$的强度显著降低。

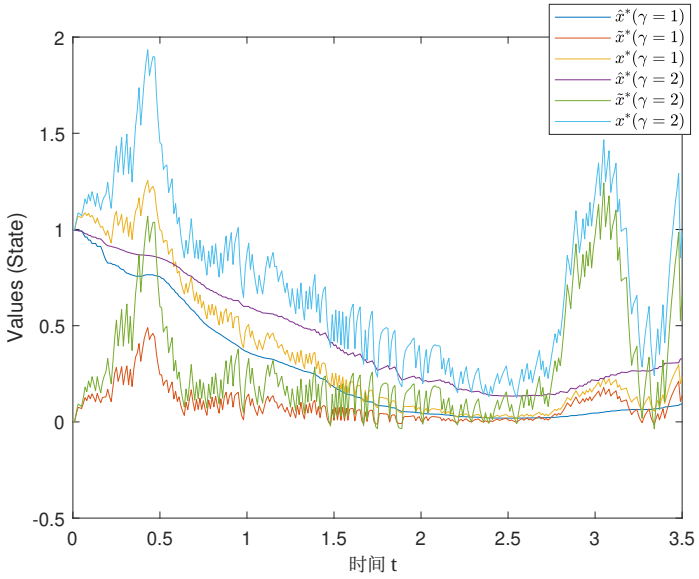


图9： γ 对状态过程的影响

从图9可以看出，扰动衰减水平越高，闭环系统在闭环鞍点下相应的状态过程 $x^*(\cdot)$、滤波状态过程 $\hat{x}^*(\cdot)$ 以及差值过程 $\tilde{x}^*(\cdot)$ 的强度越大。

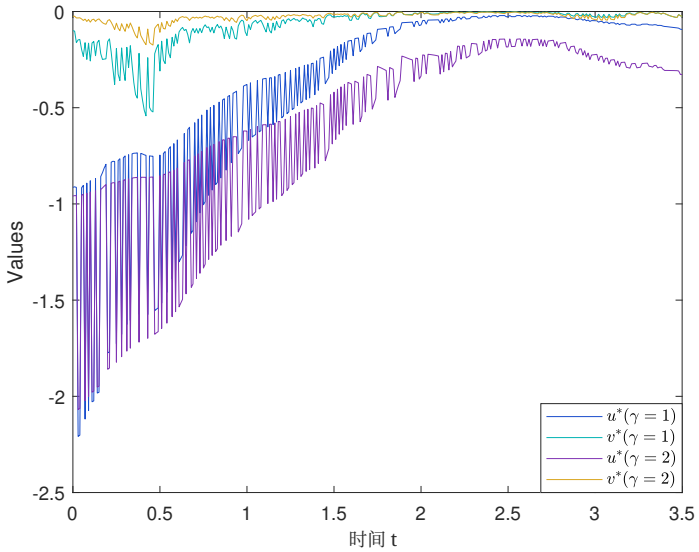


图10： γ 对 H_∞ 控制 $u^*(\cdot)$和最坏情形扰动 $v^*(\cdot)$的影响

从图10可以看出，当市场保持在相同状态时，扰动衰减水平越高，相应最优控制策略的强度越大；反之，在这种情况下，最坏情形扰动的强度会降低。这一现象与实际市场情形高度一致。较高的扰动衰减水平意味着机构投资者能够容忍外部扰动对系统输出造成更大程度的影响。在这种情况下，机构投资者不再持风险规避立场，而是对股票市场极为乐观，认为最坏情形扰动的强度相对较低，因此自然会提高其投资强度。

6 结论

本文研究了部分信息下具有马尔可夫链和模型不确定性的SLQ最优控制问题，其中状态方程的漂移项和扩散项以及代价泛函均包含控制和外部未知扰动，而控制可获得的信息基于由底层布朗运动和马尔可夫链生成的滤过的子-σ-代数。通过 H_∞ 控制理论和零和博弈方法，考虑了具有马尔可夫链和部分信息的软约束零和线性二次随机微分博弈。利用滤波技术、黎卡提方程方法、正交分解方法和配方法，通过最优反馈控制策略对推导出了零和博弈的闭环鞍点。随后，我们还证明了闭环鞍点的相应结果确保 H_∞ 性能成立。最后，我们给出了一个数值例子，以进一步说明理论结果。

未来，研究具有马尔可夫体制切换和模型不确定性的部分观测SLQ最优控制问题颇具意义。

参考文献

[1] J.-M. Bismut，随机系数下的线性二次最优随机控制，SIAM 控制与优化期刊，14(3)，419-444，1976年。[2] T. Ba¸sar，P. Bernhard，《最优控制及相关极小极大设计问题：动态博弈方法》，Birkh¨auser，波士顿，1995年。[3] B.-S. Chen，W. Zhang，状态依赖噪声下的随机控制，IEEE 自动控制汇刊，49(1)，45-57，2004年。

[4] S. Chen，X. Li 和 X. Zhou，具有不定控制权重代价的随机线性二次调节器，SIAM 控制与优化期刊，36(5)，1685-1702，1998年。[5] T. Chen、Z. Huang 和 Z. Wu，具有马尔可夫链和输入约束的线性凸部分可观测最优控制问题，ESAIM：控制、优化与变分，31，文章编号 41，2025年。[6] R.J. Elliot，N.J. Kalton，微分博弈中值的存在性，美国数学学会回忆录，126，1-75，1972年。[7] D. Hinrichsen，A. Pritchard，随机，SIAM 控制与优化期刊，36(5)，1504-1538，1998年。 H_∞J. Huang，M. Huang，具有未知扰动的鲁棒平均场线性二次高斯博弈，SIAM 控制与优化期刊，55(5)，2811-2840，2017年。L^2J. Huang、G. Wang 和 J. Xiong，部分信息后向随机控制问题的极大值原理及其应用，SIAM 控制与优化期刊，48(4)，2106-2117，2009年。[9] H. Kushner，随机最优控制，IRE 自动控制汇刊，7(5)，120-122，1962年。[10] Y. Liang、B. Wang 和 H. Zhang，鲁棒平均场线性二次社会控制：开环与闭环策略，SIAM 控制与优化期刊，60(4)，2184-2213，2022年。[11] D. Limebeer、B. Anderson 和 B. Hendel，混合控制的纳什博弈方法，IEEE 自动控制汇刊，39(1)，69-82，1994年。[12] N. Li、G. Wang 和 Z. Wu，完全信息与部分信息下具有递归效用的时滞随机系统线性二次最优控制，Automatica，121，109169，2020年。 H_2/H_∞ N. Li、Z. Wu 和 Z. Yu，具有随机跳跃的不定随机线性二次最优控制问题及相关随机黎卡提方程，中国科学：数学，61，563-576，2018年。[13] X. Li、J. Sun 和 J. Yong，平均场随机线性二次最优控制问题：闭环可解性，概率、不确定性与定量风险，1(1)，文章编号 2，2016年。[14] X. Li、G. Wang、J. Xiong 和 H. Zhang，部分信息下线性二次随机最优控制问题的弱闭环可解性，应用数学与优化，91(3)，文章编号 62，2025年。

[17] X. Li、X. Zhou，不定随机线性二次控制在有限时间范围内的马尔可夫跳变，Commun. Inf. Syst.，2(3)，265-282，2002年。[18] X. Li、X. Zhou 和 M. Ait Rami，无限时间范围内带马尔可夫跳变的不定随机线性二次控制，J. Global Optim.，27(2-3)，149-175，2003年。[19] Z. Lin、Y. Lin 和 W. Zhang，具有状态和扰动依赖噪声的非线性随机马尔可夫跳变系统状态与输出反馈 H_∞ 控制的统一设计，Automatica，45(12)，2955-2962，2009年。[20]X. Mao，带马尔可夫切换的随机微分方程，Imperial College Press，伦敦，2007年。[21] J. Moon，部分观测下带马尔可夫切换系数的跳扩散系统的线性二次随机团队与零和微分博弈，ESAIM：控制、优化与变分，31，文章编号35，2025年。[22] H. Mukaidani、S. Irie、H. Xu 和 W. Zhang，面向随机均值场系统的大规模群体鲁棒激励斯塔克尔伯格博弈，IEEE Control Systems Letters，6，1934-1939，2022年。[23] Y. Oh、J. Moon，均值场型随机系统部分观测线性二次风险敏感型最优控制问题的反馈型最优解，IEEE 自动控制汇刊，70(8)，5452-5459，2025年。[24] Z. Pan，T. Ba¸sar， H_∞ 马尔可夫跳跃系统的控制及相关分段确定性微分博弈的解，载于：动态博弈与应用新趋势，Olsder, G.J.（编），国际动态博弈学会年鉴，3，61-94，Birkh¨auser，波士顿，1995年。[25] L. Sheng、W. Zhang 和 M. Gao，带乘性噪声的随机马尔可夫跳跃系统中纳什均衡策略与H_2/H_∞ 控制之间的关系，IEEE 自动控制汇刊，59(9)，2592-2597，2014年。[26] J. Shi、G. Wang 和 J. Xiong，具有非对称信息的主从随机微分博弈及其应用，Automatica，63，60-73，2016年。[27] Y. Si、Y. Zheng 和 J. Shi，线性二次部分观测均值场斯塔克尔伯格随机微分博弈，arXiv：2503.15803，2025年。[28] J. Sun、X. Li 和 J. Yong，随机线性二次最优控制问题的开环与闭环可解性，SIAM 控制与优化期刊，54(5)，2274-2308，2016年。

[29] J. Sun、J. Xiong，部分观测下的随机线性二次最优控制，SIAM 控制与优化期刊，61(3)，1231-1247，2023年。[30] J. Sun、J. Yong，线性二次随机微分博弈：开环与闭环鞍点，SIAM 控制与优化期刊，52(6)，4082–4121，2014年。[31] J. Sun、J. Yong，随机线性二次最优控制理论：开环与闭环解，Springer 数学简明丛书，2020年。[32] J. Sun、J. Yong，均值场线性二次最优控制问题的长通道性质，SIAM 控制与优化期刊，62(1)，752-775，2024年。[33] S. Tang，具有随机系数的一般线性二次最优随机控制问题：线性随机哈密顿系统与后向随机黎卡提方程，SIAM 控制与优化期刊，42(1)，53-75，2003年。[34] S. Tang，具有随机系数的一般线性二次最优随机控制的动态规划，SIAM 控制与优化期刊，53(2)，1082-1106，2015年。[35] V. Ugrinovskii，存在随机不确定性时的鲁棒 H_∞ 控制，Int. J. Control.，71(2)，219-237，1998年。[36] W. van den Broek、J. Engwerda 和 J. Schumacher，不定线性二次微分博弈中的鲁棒均衡，优化理论与应用期刊，119(3)，565-595，2003年。[37]G. Wang、Z. Wu 和 J. Xiong，部分信息下前向–倒向随机微分方程的线性二次最优控制问题，IEEE 自动控制汇刊，60(11)，2904-2916，2015年。[38] M. Wang、Q. Meng 和 Y. Shen，马尔可夫切换随机跳扩散系统的 H_2/H_∞ 控制，系统科学与复杂性期刊，34(3)，924-954，2021年。[39] M. Wang、Q. Meng、Y. Shen 和 P. Shi，带（x、u、v）依赖噪声的随机微分系统的随机 H_2/H_∞ 控制，优化理论与应用期刊，197(3)，1024-1060，2023年。[40] Y. Wang、Z. Pan、Y. Li 和 W. Zhang，带时滞和乘性噪声的非线性随机马尔可夫系统的 H_∞ 控制，系统科学与复杂性期刊，30(6)，1293-1315，2017年。[41] J. Wen、X. Li、J. Xiong 和 X. Zhang，具有随机系数和马尔可夫体制切换系统的随机线性二次最优控制问题，SIAM 控制与优化期刊，61(2)，949-979，2023年。

[42] W.M. Wonham，关于随机控制中的矩阵黎卡提方程，SIAM 控制期刊，6(4)，681-697，1968年。[43] F. Wu、X. Li 和 X. Zhang，无限时域下具有体制切换跳跃的随机线性二次最优控制问题，SIAM 控制与优化期刊，63(2)，852-891，2025年。[44] N. Xiang、J. Shi，具有 H_∞ 约束的三级多领导者-跟随者激励斯塔克尔伯格微分博弈，ESAIM：控制、优化与变分，31，文章编号97，2025年。[45] N. Xiang、J. Shi，具有模型不确定性的鲁棒激励型斯塔克尔伯格平均场随机线性二次微分博弈，arXiv：2507.04585，2025年。[46] J. Xiong，《随机滤波理论导论》，牛津大学出版社，伦敦，2008年。[47] J. Xiong、W. Xu，具有随机系数的平均场随机线性二次控制问题，SIAM 控制与优化期刊，63(4)，3042-3060，2025年。[48] G. Yin、X. Zhou，具有体制切换的马科维茨均值-方差投资组合选择：从离散时间模型到连续时间极限，IEEE 自动控制汇刊，49(3)，349-360，2004年。[49] J. Yong、X. Zhou，《随机控制：哈密顿系统与HJB方程》，Springer-Verlag，纽约，1999年。[50] Z. Yu，零和线性二次随机微分博弈的最优反馈控制策略对：黎卡提方程方法，SIAM 控制与优化期刊，53(4)，2141-2167，2015年。[51] S. Zhang、W. Zhang 和 Q. Meng，针对平均场跳扩散系统的混合随机 H_2/H_∞ 控制的斯塔克尔伯格博弈方法，应用数学与优化，89(1)，文章编号6，2024年。[52] S. Zhang、W. Zhang 和 Q. Meng，针对具有马尔可夫切换的平均场跳扩散系统的混合随机 H_2/H_∞控制的斯塔克尔伯格博弈方法，优化、控制与应用方法，46(4)，1737-1758，2025年。[53] W. Zhang、B.-S. Chen，一类非线性随机系统的状态反馈 H_∞ 控制，SIAM 控制与优化期刊，44(6)，1973-1991，2006年。[54] W. Zhang、L. Xie 和 B.-S. Chen，随机 H_2/H_∞ 控制：纳什博弈方法，CRC出版社，2017年。

[55] W. Zhang、H. Zhang 和 B.-S. Chen，具有(x、 u、 v)依赖噪声的随机 H_2/H_∞ 控制，第四十四届IEEE决策与控制会议暨欧洲控制会议论文集，7352-7357，2005年12月12-15日，西班牙塞维利亚，2005年。[56] W. Zhang、H. Zhang 和 B.-S. Chen，具有(x、 u、 v)依赖噪声的随机 H_2/H_∞ 控制：有限时域情形，Automatica，42(11)，1891-1898，2006年。[57] X. Zhang、R.J. Elliott 和 T.K. Siu，马尔可夫体制切换跳扩散模型的随机最大值原理及其在金融中的应用，SIAM 控制与优化期刊，50(2)，964-990，2012年。[58] X. Zhang、X. Li 和 J. Xiong，马尔可夫体制切换系统随机线性二次最优控制问题的开环与闭环可解性，ESAIM：控制、优化与变分，27，文章编号69，2021年。[59] Y. Zheng、J. Shi，具有部分信息的倒向随机微分方程斯塔克尔伯格博弈，数学控制与相关领域，11(4)，797-828，2021年。[60] X. Zhou、G. Yin，具有体制切换的马科维茨均值-方差投资组合选择：连续时间模型，SIAM 控制与优化期刊，42(4)，1466-1482，2003年。