arXiv:2601.04678v1 [math.AP] 8 Jan 2026

Robin边界条件下的 Kato 平方根估计

´SEBASTIAN BECHTEL 和 ANDREAS ROSEN

摘要。我们证明了有界局部一致区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上二阶散度型椭圆算子 $-\mathrm{div}(A\nabla)$ 的 Kato 平方根估计。该算子的系数 $A \in \mathrm{L}^\infty(D;\mathbb{C}^n)$ 为强迫系数，并满足 Robin 边界条件 $\nu \cdot A\nabla u + bu = 0$，其中边界电导率 b 可能无界。与此前几乎所有关于 Kato 平方根算子的估计不同，Robin 边界条件似乎无法采用一阶方法。

1. 引言

本文研究散度型二阶椭圆算子 $L = -\mathrm{div}(A\nabla)$ 的 Kato 平方根 $\sqrt{L}$ 估计。该估计

$$\|\sqrt{L}u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} \approx \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1}$$

由 Kato 猜想提出 [26], ，最终在开创性工作 [5]中得到证明。此后，这一突破催生了许多推广，例如推广到区域 $D \subset \mathbb{R}^n$，并施加 Dirichlet、Neumann 或混合边界条件；推广到流形、退化系数或无界系数 A，推广到更一般的椭圆系统以及抛物型算子。参见例如 [1, 4, 7, 8, 10, 11, 14, 17, 19, 23, 27]。

尽管估计式（1）看起来涉及二阶偏微分方程，但可以认为它实际上涉及一阶椭圆系统。事实上，（1）可直接由广义柯西奇异积分算子 $\mathrm{sgn}(BD)$ 的有界性推出，其中

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{div} \\ \nabla & 0 \end{bmatrix}.$$

在维数 $n = 1$ 这一观察可追溯到 [6], 而在 Kato 平方根估计（1）于 [5], 中以完全一般的形式得到证明后， [6]中的框架在 [9] 中推广到了任意维数。参见 [3] ，其中对这种一阶方法作了简化介绍。虽然广义的一阶柯西–黎曼系统 BD 看起来更

日期：2026年1月9日。2020 数学主题分类。主要分类：42B37，35J25。次要分类：46E35，47A60。关键词和短语。Robin边界条件、Kato 平方根估计、二次估计、局部一致域、边界迹。Andreas Ros´en 得到了瑞典研究理事会（资助项目 2022-03996）的资助，该项目还资助了 Sebastian Bechtel 对哥德堡的短期访问，本研究正是在访问期间启动的。本项目获得了欧盟地平线2020研究与创新计划的资助，资助依据为 Marie Sk lodowska-Curie 资助协议 No 101034255 。

复杂，但与二阶算子 L相比，采用基本相同的技巧，可以更一般地证明估计

$$\|f(BD)u\|_{\mathrm{L}^2} \lesssim \|f\|_\infty \|u\|_{\mathrm{L}^2}$$

对全纯函数演算中的所有算子 $f(BD)$ 而言， BD。例如，这对于研究边值问题具有重要应用。参见 [2,3,7]。

据我们所知，在此前关于 Kato 平方根估计的所有工作中（可能不包括 [23]），要么可以进行二阶证明（大致遵循最初的证明 [5]），要么可以进行一阶证明（大致遵循 [9]或 [3]）。同样，对于区域上的 Kato 平方根估计，这两种选择也都可行 [10,15,21]。对于 Dirichlet 边界条件，使用

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{div} \\ \nabla_0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $\mathrm{D}(\nabla_0) = \mathrm{W}_0^{1,2}(D)$，且 $-\mathrm{div} = \nabla_0^*$。对于 Neumann 边界条件，使用

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{div}_0 \\ \nabla & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $\mathrm{D}(\nabla) = \mathrm{W}^{1,2}(D)$，且 $-\mathrm{div}_0 = \nabla^*$。如果区域 D 足够规则，则有 $\mathrm{D}(\mathrm{div}_0) = \{ f \in \mathrm{L}^2(D) \colon \operatorname{div}(f) \in \mathrm{L}^2(D)\ \nu \cdot f|_{\partial D} = 0\}$，其中 ν表示相对于 D的外法向。即使对于混合狄利克雷/诺伊曼边界条件，也可以通过在 ∇上施加 Dirichlet 边界条件，并在 div 上施加 Neumann 边界条件，定义一个自伴算子 D 。

在本文中，我们证明了区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 上 Robin边界条件下的 Kato 平方根估计，该条件（形式上）由下式给出

$$\nu \cdot A\nabla u + bu = 0 \quad \text{on } \partial D.$$

我们回顾一下，当使用傅里叶定律通过 $\operatorname{div}(A\nabla u) = 0$来描述热平衡时， A 是 D中的电导率，而 $b \geq 0$ 是跨越边界 ∂D的电导率。极端情形 $b = 0$ 意味着 D 是一个绝热体，并对应于 Neumann 边界条件；而极限情形 $b \to \infty$意味着 $u|_{\partial D}$ 必须等于外界温度 0。

不同于以往的工作，对于 Robin边界条件，我们不得不对 Kato 平方根估计进行二阶证明。事实上，我们甚至不清楚如何定义一个与 Robin边界条件相关的一阶自伴算子 D 。此外，由于 Robin型

$$a(u,v) = \iint_D A\nabla u \cdot \overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial D} b\gamma(u)\overline{\gamma(v)}\,\mathrm{d}\sigma$$

包含一个边界项，需要将其转化为罗宾算子的边界条件 L。在技术层面上，证明中的一项主要创新是引理5.6，它使我们能够将 Kato 平方根估计简化为一族仅作用于内部函数的算子的平方函数估计 D。我们的主要结果是定理3.8，其中在边界的一个维数为 $\nu \cdot A\nabla u + bu = 0$ 的子集上，以弱意义施加

Robin边界条件 $\Gamma \subseteq \partial D$，并在其余部分 ∂D施加 Neumann 边界条件。

2. 几何与函数空间

固定维数 $n \geq 2$。我们在一个开、有界且可能非连通的集合$D \subseteq \mathbb{R}^n$中进行研究。固定一个（相对）开且非空的子集 $\Gamma \subseteq \partial D$。下文中，我们通过记作 $\iint_D \mathrm{d}x$ 和 $\int_\Gamma \mathrm{d}\sigma$ 来区分内部和边界上的积分。为节省篇幅，我们有时会从记号中省略 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}\sigma$ 。

我们介绍一些几何测度理论中的概念，以确保 D 和 Γ 以及其上的函数空间具备一些关键性质。

定义 2.1（局部一致）。称 D 局部一致，如果存在 $\varepsilon \in (0,1]$, $\delta \in (0,\infty]$ 和 $c \in (0,\infty]$，使得以下条件成立：

(i) 任意两点 $x, y \in D$ 满足 $|x-y| < \delta$ 时，都可以在 D 中用一条 ε-雪茄连接起来，也就是说，存在一条可求长曲线 $c \subseteq D$，其长度为 $\ell(c) \leq \varepsilon^{-1}|x-y|$，并且满足

$$\mathrm{d}(z, \partial D) \geq \frac{\varepsilon |z-x||z-y|}{|x-y|}, \quad z \in c.$$

(ii) D 的所有连通分支 D' 都满足 $\operatorname{diam}(D') \geq c$。

注 2.2. 当 D 连通时，这一定义与 Jones 的定义一致 [25]。他研究了 D上的 Sobolev 空间性质，包括延拓和稠密性结果。非连通情形是 [12]的副产品。

如果集合 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 局部一致，那么它特别是下述定义意义下的内部厚，参见 [14, 命题 2。9]。内部厚度一方面对于确保 D 上函数空间的标准性质很重要，另一方面对于确保 D 上存在二进结构也很重要，后者参见第5.4节。

定义 2.3（内部厚度）。称 O 内部厚，如果满足以下条件：

$$\exists c \in (0,1]\colon\ \forall x \in D, r \in (0,1]\colon\quad |D \cap \mathrm{B}(x,r)| \geq c|\mathrm{B}(x,r)|.$$

对于边界部分 Γ，我们引入以下定义。

定义 2.4（d-集）。若满足以下条件，则称 Γ 为 $d \in (0,n]$ 的一个 d-集：

$$\exists c \in (0,1]\colon\ \forall x \in \Gamma, r \in (0,1]\colon\quad cr^d \leq \mathcal{H}^d(\Gamma \cap \mathrm{B}(x,r)) \leq c^{-1} r^d.$$

在整篇文章中，我们采用以下几何设定。

假设 D. 假定一对 (D, Γ) 满足以下条件：

(i) 开集 D 应按照定义 *2.1* 的意义满足局部一致性。(ii) 集合 Γ 是一个 d-集，其中某个 $d \in (n-2,\ n)$。

这保证了 D 上函数空间的性质，以及迹算子的存在性和有界性。

在 Kato 平方根估计的表述中使用的空间 $W^{1,2}(D)$ 是通常的 Sobolev 空间，由 $L^2(D)$ 函数组成，且其分布梯度也属于 $L^2(D)$。我们将在下文定义中引入其他 Bessel 势类型的空间。为此，回顾 $\mathbb{R}^n$ 上的 Bessel 势空间标度 $H^{t,r}(\mathbb{R}^n)$。

定义 2.5. 设 $t \in \mathbb{R}$ 和 $r \in (1,\infty)$。首先，若 $t \geq 0$，则定义空间 $H^{t,r}(D)$ 为

$$H^{t,r}(D) := \{u|_D \colon u \in H^{t,r}(\mathbb{R}^n)\}$$

并赋予其商范数。这里，运算 $|_D$ 是分布限制$\mathbb{R}^n \to D$。其次，若 $t < 0$，则定义空间 $H^{t,r}(D)$ 为拓扑反对偶空间[1] $H^{-t,r'}(D)$。

根据构造，$H^{t,r}(D)$ 是一个 Banach 空间（若 $r = 2$ 则为 Hilbert 空间），对于所有 $t \in \mathbb{R}$ 和 $r \in (1,\infty)$，$H^{t,r}(D) \cap C(D)$ 在 $H^{t,r}(D)$ 中稠密，并且通常的 Sobolev 嵌入成立。若$t_1 > t_0$，则 $H^{t_1,r}(D) \subseteq H^{t_0,r}(D)$，且为稠密嵌入。此外，由于 D 满足内部厚度条件，空间 $H^{t,r}(D)$ 遵循与 $D = \mathbb{R}^n$ 情形相同的插值规则，见 [13, 命题 3.8]。

由于 D 是局部一致的，它是一个 Sobolev 延拓域 [12, 25]。这使得 W 空间与 H 空间之间具有相容性。

引理 2.6。 对于 $r \in (1,\infty)$，空间 $W^{1,r}(D)$ 与 $H^{1,r}(D)$ 相同，且范数等价。

证明。 回顾 $H^{1,r}(\mathbb{R}^n) = W^{1,r}(\mathbb{R}^n)$。首先，设 $u \in W^{1,r}(D)$，并记 $\mathcal{E}$ 为 [12] 中引入的有界延拓算子 $W^{1,r}(D) \to W^{1,r}(\mathbb{R}^n)$。于是

$$\|u\|_{H^{1,r}(D)} \leq \|\mathcal{E}u\|_{H^{1,r}(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{E}u\|_{W^{1,r}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|u\|_{W^{1,r}(D)},$$

由此得到包含关系 $W^{1,r}(D) \subseteq H^{1,r}(D)$。其次，设 $u \in H^{1,r}(D)$，并令 $U \in H^{1,r}(\mathbb{R}^n)$ 为任意满足 $U|_D = u$ 的函数。计算

$$\|u\|_{W^{1,r}(D)} \leq \|U\|_{W^{1,r}(\mathbb{R}^n)} = \|U\|_{H^{1,r}(\mathbb{R}^n)}.$$

对 u 的所有延拓 U 取下确界，得到 $\|u\|_{W^{1,r}(D)} \leq \|u\|_{H^{1,r}(D)}$，由此得到反向包含关系 $H^{1,r}(D) \subseteq W^{1,r}(D)$。□

关于边界，对于 $r \in [1,\infty]$，令 $L^r(\Gamma) := L^r(\Gamma,\sigma)$，其中 σ 表示 d 维豪斯多夫测度。注意，Γ 的 σ 测度为正且有限，因为它是一个非空有界的 d 集。

在我们的几何设置中，迹算子的有界性已在 [16, 第 2] 节中研究。以下结果可由类似于 [16, 定理 2.13 和定理 2.16] 的论证推出，细节留给读者。

[1]也就是说，共轭线性有界泛函的空间。

命题 2.7 (迹算子)。 设 $r \in [2, \frac{2d}{n-2})$ 且 $s \in (\frac{n}{2} - \frac{d}{r}, 1]$。那么，原先定义在 $\mathrm{H}^{s,2}(D) \cap \mathrm{C}(D)$ 上、取值于 Γ 的迹算子 γ，可通过稠密性延拓为有界算子 $\mathrm{H}^{s,2}(D) \to \mathrm{L}^r(\Gamma)$。

注意，由引理 2.6，$\mathrm{W}^{1,2}(D) \subseteq \mathrm{H}^{s,2}(D)$ 连续。

3. 具有Robin边界条件的椭圆算子

我们定义具有Robin边界条件的椭圆算子，并汇集它们的一些重要性质。此外，我们在定理 3.8 中陈述主要结果。设 $A \in \mathrm{L}^\infty(D; \mathbb{C}^{n\times n})$ 和 $b \in \mathrm{L}^{\tilde{q}}(\Gamma$。为便于阅读，可以加入低阶项，但我们仍采用纯二阶情形。注意，利用 $d > n-2$ 和 $n \geq 2$，$d+2-n$ 在 $\tilde{q}$ 的定义中的分母严格为正，且 $\tilde{q} > 1$。

下面的引理将 $\tilde{q}$ 与迹算子的有界性性质联系起来　　r.

引理 3.1。 存在 $q \in [2, \infty)$ 和 $s_* \in (0,1)$ 满足

$$1 = \frac{1}{\tilde{q}} + \frac{2}{q}, \qquad s_* = \frac{n}{2} - \frac{d}{q},$$

对于这些参数，命题 2.7 中的迹算子 γ 是从 $\mathrm{H}^{s,2}(D) \to \mathrm{L}^q(\Gamma)$ 到 $s \in (s_*, 1]$的有界算子

证明。 根据陈述中的关系定义 q 和 s_*。由于

$$\frac{n}{2} - \frac{d}{q} = \frac{n}{2} - \frac{d}{2}\Big(1 - \frac{1}{\tilde{q}}\Big) < \frac{n}{2} - \frac{d}{2}\frac{n-2}{d} = 1 \tag{2}$$

一方面，

$$\frac{n}{2} - \frac{d}{q} = \frac{n}{2} - \frac{d}{2} + \frac{d}{2\tilde{q}} \geq \frac{n-d}{2} > 0$$

另一方面。因此，$s_* \in (0,1)$。为了证明迹算子的有界性，我们将命题2.7 应用于 $r := q$ 和 $s \in (s_*, 1]$。事实上，s 根据定义是可容许的，$q \geq 2$ 由 $\tilde{q} \leq \infty$可得，并且通过重新排列式（2）中的各项可得 $\frac{1}{q} > \frac{n-2}{2d}$，由此完成证明。□

在全文中，固定某个 $s \in (s_*, 1)$。注意，由引理 3.1，区间 $(s_*, 1)$ 非空。

在 $\mathrm{W}^{1,2}(D)$ 上定义半双线性型 a 如下：

$$a(u,v) := \iint_D A\nabla u \cdot \overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma b\gamma(u)\cdot\overline{\gamma(v)}\,\mathrm{d}\sigma \qquad (u, v \in \mathrm{W}^{1,2}(D)). \tag{a}$$

回顾一下，σ 表示 d 维豪斯多夫测度。

引理 3.2. 形式 $a\colon \mathrm{W}^{1,2}(D) \times \mathrm{W}^{1,2}(D) \to \mathbb{C}$ 是有界的。

证明. 只需考虑边界项。根据引理 3.1，我们使用 H¨older 不等式以及迹算子的有界性，得到

$$\left|\int_\Gamma b\gamma(u)\cdot\overline{\gamma(v)}\,\mathrm{d}\sigma\right| \le \|b\|_{\mathrm{L}^{\tilde q}(\Gamma)}\|\gamma(u)\|_{\mathrm{L}^q(\Gamma)}\|\gamma(v)\|_{\mathrm{L}^q(\Gamma)} \lesssim \|b\|_{\mathrm{L}^{\tilde q}(\Gamma)}\|u\|_{\mathrm{H}^{s,2}(D)}\|u\|_{\mathrm{H}^{s,2}(D)}.$$

由嵌入 $\mathrm{W}^{1,2}(D) \subseteq \mathrm{H}^{s,2}(D)$，证明得以完成。 □

为确保椭圆性，我们假设对某个 $\lambda > 0$ ，非齐次 G˚arding 不等式成立

$$\operatorname{Re} a(u,u) \ge \lambda\|u\|^2_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}, \qquad u \in \mathrm{W}^{1,2}(D). \tag{E}$$

例 3.3。 若 $A\colon D \to \mathbb{C}^{n\times n}$ 是椭圆系数，且 $b\colon \Gamma \to (0,\infty)$，则 (E) 成立。论证与命题 4.1证明中的步骤 1 类似。细节留给读者。

我们首先为带罗宾边界条件的椭圆算子定义一种弱形式。

定义 3.4 （带罗宾边界条件的椭圆算子——弱形式）。 定义算子 $\mathcal{L}\colon \mathrm{W}^{1,2}(D) \to (\mathrm{W}^{1,2}(D))^*$ ，使其满足关系式

$$\langle \mathcal{L}u, v\rangle = a(u,v), \qquad u,v \in \mathrm{W}^{1,2}(D).$$

注意到 $\mathcal{L}$由（E）可知可逆。

重写引理 ¨中的 Holder 关系可得 3.1 。 $\frac{1}{\tilde q} + \frac{1}{q} = \frac{1}{q'}$记住这一点，引入广义梯度算子 S 如下:

$$S := \begin{bmatrix}\nabla\\ \gamma\end{bmatrix} : \mathrm{W}^{1,2}(D) \to \mathrm{L}^2(D)^n \oplus \mathrm{L}^q(\Gamma),$$

以及系数矩阵 B 如下:

$$B := \begin{bmatrix}A & \\ & b\end{bmatrix} : \mathrm{L}^2(D)^n \oplus \mathrm{L}^q(\Gamma) \to \mathrm{L}^2(D)^n \oplus \mathrm{L}^{q'}(\Gamma). \tag{3}$$

用 S 和 B表示，形式 a可改写为

$$a(u,v) = \langle BSu, Sv\rangle.$$

配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示各分量在 D 或 Γ 上的 L^2 内积的直和。因此，我们得到因式分解恒等式

$$\mathcal{L} = S^*BS. \tag{4}$$

为简化记号，令 $-\operatorname{div} := (\nabla)^*$，其中 $\nabla\colon \mathrm{W}^{1,2}(D) \to \mathrm{L}^2(D)^n$ 是通常的分布梯度。算子 $-\operatorname{div}$ 作为一个有界算子 $\mathrm{L}^2(D)^n \to (\mathrm{W}^{1,2}(D))^*$ 起作用。采用这一记号，我们可以写成

$$S^* = \begin{bmatrix}-\operatorname{div} & \gamma^*\end{bmatrix}.$$

例3.5。 设 $F\colon D\to\mathbb{C}^n$、 $g\colon \Gamma\to\mathbb{C}$ 和 $u\colon D\to\mathbb{C}$。假设 F， g， u 和 D 都是光滑的。那么

$$\langle S^*(F,g),u\rangle = \iint_D \nabla F\cdot\overline{\nabla u}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial D}(\nu\cdot F+\mathbf{1}_\Gamma g)\overline{\gamma(u)}\,\mathrm{d}\sigma.$$

因此， S^* 的值域包含 D 中的分布以及 ∂D上的分布。在 Γ上，来自 $\nu\cdot F$和 g 的贡献相互作用。

现在，我们将$\mathcal{L}$ 限制为 $\mathrm{L}^2(D)$ 上的一个闭无界算子。

定义3.6 （带罗宾边界条件的椭圆算子——强形式）。 如下定义 $\mathrm{L}^2(D)$ 上的无界算子 L： 若 $u\in$ 属于 $\mathrm{W}^{1,2}(D)$，且 $f\in$属于 $\mathrm{L}^2(D)$，则

$$u\in \mathrm{D}(L),\ Lu=f \quad\Longleftrightarrow\quad \forall v\in \mathrm{W}^{1,2}(D)\colon \langle \mathcal{L}u,v\rangle = \iint_D f\overline{v}\,\mathrm{d}x.$$

如例3.5所示，算子 L在弱意义下满足Γ 上的罗宾边界条件，以及 $\partial D\setminus\Gamma$ 上的 Neumann 边界条件。

注3.7。 取 $A=\mathrm{Id}$ 和 $b=1$ 会得到一个具有特定罗宾边界条件的拉普拉斯算子 $-\Delta$ 。其弱形式可简单写为 S^*S。稍后我们将把该算子用作$\mathcal{L}$ 的未扰动平滑算子。由于 S^*S 是自伴的，它满足 Kato 平方根性质。

根据经典型理论， L 是闭的、稠密定义的、极大耗散的，并且是 ω-扇形的，其中某个角度为 $\omega\in[0,\frac{\pi}{2})$ 。特别地，它具有唯一的极大耗散平方根 $\sqrt{L}$，该算子将在下文定理 3.8 中出现。算子 L^* 与伴随型 $a^*(u,v)$ 相关联：$=a(v,u)$。注意， L 是自伴的，当且仅当 A 是自伴的且 a 为实数。

定理*3.8*（*Robin*边界条件下的*Kato*平方根性质）。设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$ 是开且有界的，并设 $\Gamma\subseteq\partial D$。假设数对（$D$， Γ）满足假设 *D*。令$A=(a_{ij})_{ij}\in L^\infty$（$D$）且 $b\in L^{\tilde q}$（D），其中 $\tilde q\in(\frac{d}{d+2-n},\infty]$ 使用假设 *D* 中的 d。假设*(a)*中定义的 *Robin*型 a 在（*E*）的意义下是椭圆的，并据此在 L^2（D）上关联一个算子 L （定义*3.6*）。那么有恒等式 $D(\sqrt{L})=W^{1,2}$（D），并且满足估计

$$\|\sqrt{L}u\|_{\mathrm{L}^2(D)}\approx\|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}\approx\sqrt{\mathrm{Re}\,a(u,u)},\quad u\in\mathrm{W}^{1,2}(D),$$

其中 隐常数仅通过 $\|A\|_\infty$、 $\|b\|_{\tilde q}$ 和 λ 依赖于 L 的系数。

3.1. 非对角估计。我们为具有Robin边界条件的椭圆算子建立非对角估计。由于对适当的函数 u 和 ϕ，有 $\gamma(u\phi)=\gamma(u)\gamma(\phi)$，证明与 Neumann 边界条件情形的证明类似。

命题 3.9 (非对角估计)。 存在常数 C 和 c，它们依赖于 λ、 $\|A\|_\infty$ 和维数，使得对于所有可测集 E、 $F\subseteq D$，所有 $t>0$ 以及

所有 $f \in \mathrm{L}^2(D)$ 满足 $\operatorname{supp}(f) \subseteq E$ 的情形，对于 $u := (1+t^2L)^{-1}f$，有如下估计

$$\left(\iint_F |u|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\overline{F}\cap\Gamma} |t\gamma(u)|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\iint_F |tu|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\iint_F |t\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\mathrm{e}^{-c\frac{\mathrm{d}(E,F)}{t}} \left(\iint_E |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明。 固定 $t>0$，令 E，$F \subseteq D$ 可测，并设 $d := \mathrm{d}(E, F)$。引入一个稍后确定的阈值$\alpha > 0$ 。我们将证明分为 $d \leq \alpha t$ 和 $d > \alpha t$两种情形。注意，第一种情形仅表示有界性，而第二种情形则确立了真正的非对角衰减。

步骤 1：有界性。注意，这一步尤其处理了 $d \leq \alpha t$ 的情形。令 $f \in \mathrm{L}^2(D)$ 并设 $u := (1+t^2L)^{-1}f \in \mathrm{W}^{1,2}(D)$。利用 G˚arding 不等式（E）和极大增生性，计算得

$$\lambda\|tu\|^2_{\mathrm{W}^{1,2}(D)} \leq t^2 \operatorname{Re} a(u,u) = \operatorname{Re}\langle t^2Lu, u\rangle_{\mathrm{L}^2(D)} \leq \|t^2Lu\|_{\mathrm{L}^2(D)}\|u\|_{\mathrm{L}^2(D)} \leq 2\|f\|^2_{\mathrm{L}^2(D)}.$$

开平方得到 $\|tu\|_{\mathrm{W}^{1,\,2}(D)} \lesssim \|f\|_{\mathrm{L}^2(D)}$。结合迹算子的有界性和极大增生性，我们得到

$$\|u\|_{\mathrm{L}^2(D)} + \|t\gamma(u)\|_{\mathrm{L}^q(\Gamma)} + \|tu\|_{\mathrm{L}^2(D)} + \|t\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(D)} \lesssim \|f\|_{\mathrm{L}^2(D)},$$

由此完成这一步。

步骤 2：非对角估计。假设 $d > \alpha t$，否则无需证明。取$f \in \mathrm{L}^2(D)$，满足 $\operatorname{supp}(f) \subseteq E$。注意，由于 $d > \alpha t > 0$，E 和 F 不相交。此外，取满足 $\rho = 1$（在 F 上）、$\rho = 0$（在 E 上）的 $\rho \in \mathrm{C}^\infty(D)$，并且

$$\|\rho\|_\infty + d\|\nabla\rho\|_\infty \leq C,$$

其中 C是维数常数。令 $u := (1+t^2L)^{-1}f$，于是 $(1+t^2L)u = f$。用 $v := u\eta^2$ 测试此方程，其中 $\eta := \mathrm{e}^{\frac{d\rho}{\alpha t}} - 1$，得到

$$\iint_D f\overline{v} = \iint_D u\overline{v} + t^2 a(u,v). \tag{5}$$

注意，事实上 $v \in \mathrm{W}^{1,2}(D)$，这是因为对于固定的 t，η 有界且光滑，其导数也有界。此外，考虑到 $d > \alpha t$，可观察到 η具有以下性质：

$$\eta = 0 \text{ on } E, \quad \eta = \mathrm{e}^{\frac{d}{\alpha t}} - 1 \geq \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{d}{\alpha t}} \text{ on } \overline{F}, \quad |\nabla\eta| = |\frac{d}{\alpha t}\nabla\rho \cdot \mathrm{e}^{\frac{d\rho}{\alpha t}}| \leq \frac{C}{\alpha t}|\eta + 1|. \tag{6}$$

利用恒等式 $\nabla v = \nabla(u\eta)\eta + u\eta\nabla\eta$和 $\eta\nabla u = \nabla(u\eta) - u\nabla\eta$（它们可由乘积法则直接得到），我们得到

$$a(u,v) - a(\eta u, \eta u) = -\iint_D uA\nabla\eta \cdot \overline{\nabla(\eta u)} + \iint_D \overline{u}A\nabla(\eta u)\cdot\nabla\eta - \iint_D |u|^2 A\nabla\eta\cdot\nabla\eta. \tag{7}$$

注意，由于命题前刚提到的观察，边界项不会产生任何误差项。由于 f 和 η的支集性质，式（5）的左端为零。因此，利用式（7），再将恒等式 $uv = |\underline{\eta}u|^2$ 中的各项重新排列

可得

$$\begin{aligned}&\iint_D |\eta u|^2 + t^2 a(\eta u, \eta u)\\ &= t^2 \iint_D uA\nabla\eta\cdot\overline{\nabla(\eta u)} - t^2\iint_D \overline{u}A\nabla(\eta u)\cdot\nabla\eta + t^2\iint_D |u|^2 A\nabla\eta\cdot\nabla\eta.\end{aligned}$$

接下来，迹算子（常数为 $C_\Gamma > 0$）的有界性，再结合 G˚arding 不等式（E），可得

$$\begin{aligned}&\iint_D |\eta u|^2 + \frac{\lambda}{2C_\Gamma^2}t^2\left(\iint_D |\gamma(\eta u)|^q\right)^{\frac{2}{q}} + \frac{\lambda}{2}t^2\iint_D |\eta u|^2 + |\nabla(\eta u)|^2\\ \le\ &\iint_D |\eta u|^2 + \lambda t^2\iint_D |\eta u|^2 + |\nabla(\eta u)|^2\\ \le\ &\iint_D |\eta u|^2 + t^2\operatorname{Re} a(\eta u, \eta u)\\ \le\ &2\Lambda t^2\iint_D |u||\nabla\eta||\nabla(\eta u)| + \Lambda t^2\iint_D |u|^2|\nabla\eta|^2,\end{aligned}\tag{8}$$

其中 $\Lambda := \|A\|_\infty$。我们估计（8）右端的各项。首先，利用（6）计算

$$\Lambda t^2\iint_D |u|^2|\nabla\eta|^2 \le \frac{\Lambda C^2}{\alpha^2}\iint_D |u|^2|\eta+1|^2 \le \frac{2\Lambda C^2}{\alpha^2}\iint_D |\eta u|^2 + \frac{2\Lambda C^2}{\alpha^2}\iint_D |u|^2.$$

取 α 充分大，使其依赖于 Λ 和维数，则右端第一项可吸收到（8）左端。再次使用这一界，并应用 Young 不等式 $2ab \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon}b^2$，得到

$$\begin{aligned}&2\Lambda t^2\iint_D |u||\nabla\eta|\nabla(\eta u)|\\ \le\ &\frac{\lambda}{8}t^2\iint_D |\nabla(\eta u)|^2 + \frac{8\Lambda^2}{\lambda}t^2\iint_D |u|^2|\nabla\eta|^2\\ \le\ &\frac{\lambda}{8}t^2\iint_D |\nabla(\eta u)|^2 + \frac{16\Lambda^2C^2}{\lambda\alpha^2}\iint_D |\eta u|^2 + \frac{16\Lambda^2C^2}{\lambda\alpha^2}\iint_D |u|^2.\end{aligned}$$

取 α 充分大，使其依赖于 λ、Λ 和维数，则右端前两项可吸收到（8）左端。综上，目前我们已证明

$$\left(\iint_D |\eta u|^2\right)^{\frac12} + \left(\int_\Gamma |t\gamma(\eta u)|^q\right)^{\frac1q} + \left(\iint_D |t\eta u|^2 + |t\nabla(\eta u)|^2\right)^{\frac12} \lesssim \left(\iint_D |u|^2\right)^{\frac12}.$$

注意到 η 在 F上为常数，因此 $\overline{\nabla}(\eta u) = \eta\nabla u$ 以及 $\gamma(\eta u) = \eta\gamma(u)$。然后，由（6），我们得到如下估计

$$\frac12 \mathrm{e}^{\frac{d}{\alpha t}}\left(\iint_F |u|^2\right)^{\frac12} + \frac12\mathrm{e}^{\frac{d}{\alpha t}}\left(\int_{\overline{F}\cap\Gamma} |t\gamma(u)|^q\right)^{\frac1q} + \frac12\mathrm{e}^{\frac{d}{\alpha t}}\left(\iint_F |tu|^2 + |t\nabla u)|^2\right)^{\frac12} \lesssim \left(\iint_D |u|^2\right)^{\frac12}.$$

现在，将其乘以 $\mathrm{e}^{-\frac{d}{\alpha t}}$ 后，结论由步骤 1 得出。 □

4. 罗宾边界条件下拉普拉斯算子的强制性

本节中，我们证明 S^*S 的强制性。更准确地说，我们在 D上的 Bessel 势空间尺度中，证明 S^*S 的阶略高于 $1/2$ 的分数次幂具有强制性。

命题 4.1 (S^*S的强制性)。存在 $\alpha \in (0,1]$，使得 $\mathrm{D}((S^*S)^{\frac{1+\alpha}{2}}) = \mathrm{H}^{1+\alpha,\,2}(D)$。特别地，存在 $c>0$，使得对于每个 $v \in \mathrm{D}((S^*S)^{\frac{1+\alpha}{2}})$，都有如下估计

$$\|(S^*S)^{\frac{1+\alpha}{2}} v\|_{\mathrm{L}^2(D)} \geq c\|v\|_{\mathrm{H}^{1+\alpha,2}(D)}. \tag{9}$$

注 4.2。 建立 Kato 平方根估计只需要强制性估计 (9)。

回想一下，$\mathrm{H}^{1,2}(D) = \mathrm{W}^{1,2}(D)$。我们先从一个技术性引理开始。

引理 4.3。 存在 $t_0 > 0$，使得若 $0 < t < t_0$，则 $S^*S\colon \mathrm{W}^{1,2}(D) \to (\mathrm{W}^{1,2}(D))^*$ 可限制/延拓为一个有界算子 $\mathrm{H}^{1\pm t,\,2}(D) \to (\mathrm{H}^{1\mp t,\,2}(D))^*$。

证明。 根据定义，我们有

$$\langle S^*Su, v\rangle = \iint_D \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma \gamma(u)\overline{\gamma(v)}\,\mathrm{d}\sigma, \quad u, v \in \mathrm{W}^{1,2}(D).$$

此外，假设 $u \in \mathrm{H}^{1\pm t,2}(D)$ 和 $v \in \mathrm{H}^{1\mp t,2}(D)$。由于 $\mathrm{H}^{\pm t,2}(D) - \mathrm{H}^{\mp t,2}(D)$ 对偶性将 $\mathrm{L}^2(D)$ 上的内积延拓，Bessel 势空间尺度上的梯度在 D 上的有界性（在我们的几何设定中，当 t_0 在 [14, 中足够小时，已由引理 4.10] 得到）可推出

$$\Big|\iint_D \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\,\mathrm{d}x\Big| \leq \|\nabla u\|_{\mathrm{H}^{\pm t,2}(D)}\|\nabla v\|_{\mathrm{H}^{\mp t,2}(D)} \lesssim \|u\|_{\mathrm{H}^{1\pm t,2}(D)}\|v\|_{\mathrm{H}^{1\mp t,2}(D)}.$$

Arguin g 在边界上也类似，此处使用迹算子的有界性 ，

$$\Big|\int_\Gamma \gamma(u)\overline{\gamma(v)}\,\mathrm{d}\sigma\Big| \leq \|\gamma(u)\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma)}\|\gamma(v)\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma)} \lesssim \|u\|_{\mathrm{H}^{1\pm t,2}(D)}\|v\|_{\mathrm{H}^{1\mp t,2}(D)},$$

条件是 t_0 足够小，使得 $1-t > \frac{n}{2} - \frac{d}{2}$。这里我们用到了 $d > n-2$。因此，由稠密性可得结论。□

现在，我们可以继续证明强制性。

命题 *4.1* 的证明。 设 t_0 如引理 4.3所述。证明分为四个步骤。

步骤 1：存在 $c>0$，使得 $\langle S^*Su,\ u\rangle \geq c\|u\|^2_{\mathrm{H}^1(D)}$。

注意到，由于 $S^*Su, u = \|\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(D)^n} + \|\gamma(u)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Gamma)}$，只需证明 $\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(D)^n} + \|\gamma(u)\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma)} \geq c\|u\|_{\mathrm{L}^2(D)}$。为此，写作 $u = (u-(u)_\Gamma)+(u)_\Gamma$，其中 $(u)_\Gamma := \fint_\Gamma \gamma(u)\,\mathrm{d}\sigma$表示 $\gamma(u)$ 在 Γ 上的平均值。这里我们利用了 $\sigma(\Gamma) > 0$，因为 Γ 是一个 d-集。首先，我们有

$$\|(u)_\Gamma\|_{\mathrm{L}^2(D)} = |(u)_\Gamma||D|^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{|D|}{\sigma(\Gamma)}\right)^{\frac{1}{2}} \|\gamma(u)\|_{\mathrm{L}^2(\Gamma)}$$

根据 Jensen 不等式。其次，考虑有界泛函 $W^{1,2}(D) \ni v \mapsto (v)_\Gamma \in \mathbb{C}$ 的核 N，它是 $W^{1,2}(D)$ 的闭子空间，且不包含非平凡常数。由于嵌入 $W^{1,2}(D) \subseteq L^2(D)$ 根据 D 的有界性是紧的，以下 Poincaré 不等式成立：

$$\|v\|_{L^2(D)} \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(D)^n}, \quad v \in N.$$

由于取平均是一个投影，我们得到 $u - (u)_\Gamma \in N$。因此，我们得到

$$\|u - (u)_\Gamma\|_{L^2(D)} \lesssim \|\nabla(u - (u)_\Gamma)\|_{L^2(D)^n} = \|\nabla u\|_{L^2(D)^n}.$$

结合这两个界就完成了这一步。

步骤 2：存在 $\varepsilon \in (0, t_0)$，使得 S^*S is $H^{1\pm t,2}(D) \to (H^{1\mp t,2}(D))^*$ 对所有 $t \in (0, \varepsilon)$ 都可逆。

由步骤 1 和 Lax–Milgram 引理可知，$S^*S\colon H^{1,2}(D) \to (H^{1,2}(D))^*$ 是可逆的。此外，S^*S 在复插值尺度 $\{H^{1+t,2}(D)\}_{-t_0<t<t_0}$ 和 $\{(H^{1-t,2}(D))^*\}_{-t_0<t<t_0}$之间有界。因此，由 Sneiberg 引理 [28]可得本步骤的结论。

步骤 3：对所有 $t \in (0, \varepsilon)$，恒等式 $D((S^*S)^{\frac{1+t}{2}}) = H^{1+t,2}(D)$成立。

我们简要概述论证，更多细节见 [14, 定理 1 的证明。2]。其思路是将其分解为

$$(S^*S)^{-\frac{1+t}{2}} = (S^*S)^{-1}(S^*S)^{\frac{1-t}{2}}.$$

左侧是到 $D((S^*S)^{\frac{1+t}{2}})$ 上的一个同构。因此，我们需要证明右侧是到 $H^{1+t,2}(D)$ 上的一个同构。我们刚刚在引理 4.3中证明了 $(S^*S)^{-1}$ 是一个 $H^{-1+t,2}(D) \to H^{1+t,2}(D)$ 同构。至于 $(S^*S)^{\frac{1-t}{2}}$，由自伴平方根性质、复插值和对偶论证可知，它是一个 $L^2(D) \to H^{-1+t,2}(D)$ 同构，正如所需。请注意，这些都是与 Robin边界条件无关的一般性论证。证明至此结束。

第 4 步：结论。

令 $\alpha = \varepsilon/2$。根据第 3 步，现在只需证明强制性估计（9）。由于 S^*S 可逆，空间 $D((S^*S)^{\frac{1+\alpha}{2}})$ 等价地可以赋予齐次图范数。于是，（9）立即成立。□

5. 化归为 Carleson 测度估计

在一系列化归步骤中，我们首先将定理3.8的成立改写为二次估计问题，然后逐步化归为证明某个测度是 Carleson 测度。Carleson测度性质将在第6节中证明。

5.1. 化归为二次估计。 在下述定义中引入的算子族 Θ_t 将是我们二次估计中的主要对象。

定义 5.1。 对于每个 $t > 0$，算子 $\Theta_t\colon L^2(D) \oplus L^q(\Gamma) \to W^{1,2}(D)$ 定义为

$$\Theta_t = t(1 + t^2\mathcal{L})^{-1}S^*B.$$

我们在以下结果中证明了 Θ_t 在 $\mathrm{L}^2(D)$ 中一致有界。

引理 5.2. 算子 Θ_t 作为有界算子

$$\Theta_t \colon \mathrm{L}^2(D)^n \oplus \mathrm{L}^q(\Gamma) \to \mathrm{L}^2(D)$$

对 $t > 0$一致成立。此外，存在常数 $C, c \in (0,\infty)$，使得对于任意可测集 $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$、任意 $t > 0$ 以及任意 $G \in \mathrm{L}^2(D)^n$, $g \in \mathrm{L}^q(\Gamma)$，若满足 $\operatorname{supp}(G) \subseteq E$ 且 $\operatorname{supp}(g) \subseteq E$，则有

$$u := \Theta_t \begin{bmatrix} G \\ g \end{bmatrix}$$

如下估计

$$\left(\iint_F |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \mathrm{e}^{-c\frac{\mathrm{d}(E,F)}{t}} \left[\left(\iint_E |G|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\iint_{\overline{E}\cap\Gamma} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right].$$

证明。由于 L 和 L^* 属于同一类型，命题 3.9 得出 $tS(1+t^2L^*)^{-1}$ 是 $\mathrm{L}^2(D) \to \mathrm{L}^2(D)^n \oplus \mathrm{L}^q(\Gamma)$ 有界的。因此，根据对偶性，$t(1+t^2\mathrm{L})^{-1}S^*$ 是 $\mathrm{L}^2(D)^n \oplus \mathrm{L}^{q'}(\Gamma) \to \mathrm{L}^2(D)$ 有界的。由此，引理的第一项结论可由 (3) 中 B 的映射性质推出。

由于 B 是局部的，且命题3.9 还给出了关于 $tS(1+t^2L)^{-1}$ 的非对角估计，其使用的范数与上文相同，因此通过相同的论证可推出关于 Θ_t的非对角估计。□

众所周知，定理3.8 等价于二次估计成立

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|tL(1+t^2L)^{-1}u\|^2_{\mathrm{L}^2(D)} \frac{\mathrm{d}t}{t} &\lesssim \|u\|^2_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}, \\ \int_0^\infty \|tL^*(1+t^2L^*)^{-1}u\|^2_{\mathrm{L}^2(D)} \frac{\mathrm{d}t}{t} &\lesssim \|u\|^2_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}, \end{aligned} \tag{10}$$

例如参见 [20, 命题 12。7]注意， L^* 是一个带有Robin边界条件、与系数矩阵 B^*相关联的椭圆算子。由于椭圆性假设在共轭下保持不变，只需验证（10）中的第一个二次估计即可。

令 $u \in \mathrm{W}^{1,2}(D)$。利用分解（4）将其改写为

$$tL(1+t^2L)^{-1}u = t(1+t^2\mathcal{L})^{-1}\mathcal{L}u = t(1+t^2\mathcal{L})^{-1}S^*BSu = \Theta_t Su.$$

因此，(L 10) 中的二次估计，从而定理 3.8，等价于二次估计

$$\int_0^\infty \|\Theta_t Su\|^2_{\mathrm{L}^2(D)} \frac{\mathrm{d}t}{t} \lesssim \|u\|^2_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}, \qquad u \in \mathrm{W}^{1,2}(D). \tag{QE}$$

5.2. **二次估计的平滑。** 如备注3.7所述，我们将把平滑引入 S^*S ，并纳入二次估计（QE）。

定义 5.3。 对于 $t>0$，定义平滑算子

$$P_t := (1+t^2S^*S)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^2(D)).$$

通过对平滑算子进行简单的代数运算，我们得到以下约化。

引理 5.4（引入平滑）。 成立二次估计

$$\int_0^\infty \|\Theta_t S(1-P_t)u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \lesssim \|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}^2, \quad u\in \mathrm{W}^{1,2}(D).$$

证明。 注意到代数恒等式

$$\Theta_t S(1-P_t)u = t(1+t^2\mathcal{L})^{-1}S^*BSt^2S^*SP_tu = t^2\mathcal{L}(1+t^2\mathcal{L})^{-1}t(S^*S)^{\frac12}P_t(S^*S)^{\frac12}u,$$

其中我们使用了 S^*S 的分数次幂与 P_t 可交换这一事实。注意，该论证在自伴情形下使用了 S^*S 的平方根性质。因此，利用极大增生性，我们得到

$$\int_0^\infty \|\Theta_t S(1-P_t)u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \le 2\int_0^\infty \|(t^2S^*S)^{\frac12}P_t(S^*S)^{\frac12}u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

右端是自伴算子 S^*S 作用于 $(S^*S)^{\frac12}u$ 所得到的平方函数估计，因此由谱定理可得

$$\int_0^\infty \|\Theta_t S(1-P_t)u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \lesssim \|(S^*S)^{\frac12}u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2.$$

再次利用自伴算子 S^*S 的平方根性质即可完成证明。□

5.3. **将内部问题约化到小尺度。** 到目前为止，我们已将（QE）约化为二次估计

$$\int_0^\infty \|\Theta_t SP_tu\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \lesssim \|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}^2, \quad u\in \mathrm{W}^{1,2}(D). \tag{11}$$

展开二次估计中的算子可得

$$\Theta_t SP_t = -t(1+t^2\mathcal{L})^{-1}\,\underline{\mathrm{div}}\,A\nabla P_t + t(1+t^2\mathcal{L})^{-1}\gamma^* a\gamma P_t.$$

为简化记号，令

$$\widetilde{\Theta}_t := -t(1+t^2\mathcal{L})^{-1}\,\underline{\mathrm{div}}\,A\colon \mathrm{L}^2(D)\to \mathrm{W}^{1,2}(D).$$

注意， $\widetilde{\Theta}_t$ 从 Θ_t 继承了非对角估计。根据定义，我们有

$$\Theta_t SP_t = \widetilde{\Theta}_t\nabla P_t + t(1+t^2\mathcal{L})^{-1}\gamma^* b\gamma P_t.$$

在本小节中，一方面我们将处理大尺度 $t\ge 1$ 在（11）中，另一方面将问题归结为“内部部分”，即术语 Θ_t 仅作用于 D 而不作用于 Γ。

引理 5.5 （归结为小尺度）。 成立以下二次估计

$$\int_1^\infty \|\Theta_t S P_t u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \lesssim \|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}^2, \quad u \in \mathrm{W}^{1,2}(D).$$

我们指出，证明中隐含地利用了 D 有界这一事实。

证明。 利用 Θ_t 的 $\mathrm{L}^2(D) \to \mathrm{L}^2(D)$ 有界性，再利用迹算子的有界性，对 $t > 0$ 计算：

$$\|\Theta_t S P_t u\|_{\mathrm{L}^2(D)} \lesssim \|\nabla P_t u\|_{\mathrm{L}^2(D)^n} + \|\gamma(P_t u)\|_{\mathrm{L}^q(\Gamma)} \lesssim \|P_t u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}.$$

取特例 $t \geq 1$ ，并利用嵌入 $\mathrm{H}^{1+\alpha,2}(D) \subseteq \mathrm{W}^{1,2}(D)$，可得

$$\|\Theta_t S P_t u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \lesssim t^{2\alpha} \|P_t u\|_{\mathrm{H}^{1+\alpha,2}(D)}^2,$$

where α 是在命题 4.1中引入的。现在，利用命题4.1，我们得到

$$\|\Theta_t S P_t u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \lesssim t^{2\alpha} \|(S^*S)^{\frac{1+\alpha}{2}} P_t u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 = \|(t^2 S^*S)^{\frac{\alpha}{2}} P_t (S^*S)^{\frac{1}{2}} u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2.$$

最终， S^*S 的二次估计和平方根性质给出

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \|\Theta_t S P_t u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \lesssim \int_0^\infty \|(t^2 S^*S)^{\frac{\alpha}{2}} P_t (S^*S)^{\frac{1}{2}} u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} &\lesssim \|(S^*S)^{\frac{1}{2}} u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \\ &\eqsim \|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}^2\end{aligned}$$

如所需。 □

由于迹算子的映射性质，边界上的二次估计是非奇异的，因此很容易加以控制。

引理 5.6 (化归到内部)。 有如下二次估计

$$\int_0^1 \|t(1+t^2\mathcal{L})^{-1} \gamma^* a \gamma P_t u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \lesssim \|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}^2, \quad u \in \mathrm{W}^{1,2}(D).$$

证明。由命题 3.9，预解族 $(1+t^2L^*)^{-1}$ 在 $\mathrm{L}^2(D) \to \mathrm{L}^2(D)$ 上有界，且其范数由 1 控制；在 $\mathrm{L}^2(D) \to \mathrm{H}^1(D)$ 上有界，且其范数由 t^{-1} 控制。因此，根据插值，它在 $\mathrm{L}^2(D) \to \mathrm{H}^s, 2(D)$ 上有界，且其范数由 t^{-s}控制，其中 $s \in (0,1)$ 在引理 3.1 下方引入。因此，利用引理 3.1 中所述的迹算子的有界性， $\gamma(1+t^2L^*)^{-1}$ 在 $\mathrm{L}^2(D) \to \mathrm{L}^q(\Gamma)$ 上有界，且其范数由 t^{-s} 控制。于是，经过对偶论证，再利用系数函数 a 和迹算子的映射性质，可得

$$\|t(1+t^2\mathcal{L})^{-1} \gamma^* b \gamma P_t u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \lesssim t^{2(1-s)} \|b \gamma P_t u\|_{\mathrm{L}^{q'}(\Gamma)}^2 \lesssim t^{2(1-s)} \|P_t u\|_{\mathrm{H}^{s,2}(D)}^2.$$

接下来，我们使用嵌入 $\mathrm{W}^{1,2}(D) \subseteq \mathrm{H}^{s,2}(D)$ 以及 S^*S 的平方根性质两次，得到

$$\|P_t u\|_{\mathrm{H}^{s,2}(D)} \lesssim \|P_t u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)} = \|(S^*S)^{\frac{1}{2}} P_t u\|_{\mathrm{L}^2(D)} = \|P_t (S^*S)^{\frac{1}{2}} u\|_{\mathrm{L}^2(D)} \lesssim \|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}.$$

Thus,

$$\|t(1+t^2\mathcal{L})^{-1} \gamma^* b \gamma P_t u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \lesssim t^{2(1-s)} \|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}^2,$$

因此

$$\int_0^1 \|t(1+t^2\mathcal{L})^{-1}\gamma^* b\gamma P_t u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \,\frac{\mathrm{d}t}{t} \lesssim \int_0^1 t^{2(1-s)}\|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}^2 \,\frac{\mathrm{d}t}{t} \approx \|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}^2,$$

其中最后一步用到了 $1-s>0$。证明至此完成。 □

5.4. **二进结构与二进平均算子**。我们在 D 中引入一种替代欧几里得空间中二进立方体的对象，称为“二进结构”，并介绍其基本性质。随后，我们定义由二进结构诱导的二进平均算子，并给出相应的Carleson嵌入结果。

二进结构的构造可追溯至 [18]。对于这里的表述，我们结合了 [22, 定理 7。4]与边界估计 [14,引理 5。2] 以及 [24, 命题 2。12]中的重缩放论证。记 Q(x, ℓ) 为中心为 $x\in\mathbb{R}^n$、边长为 $\ell>0$ 且平行于坐标轴的欧几里得立方体。

命题5.7 (二进结构)。 存在一个开集族 $\{Q_i^k:\ k\in\mathbb{N}_0, i\in I_k\}$，其中 I_k 是可数指标集，并且存在常数 $a_0, a_1, \eta, C>0$，使得以下结论成立：

(i) 对每个 $k\in\mathbb{N}_0$，都有 $|D\setminus \cup_{i\in I_k} Q_i^k|=0$。(ii) 若 $\ell\ge k$，则对每个 $i\in I_k$ 及每个 $j\in I_\ell$，要么 $Q_j^\ell\subseteq Q_i^k$，要么 $Q_j^\ell\cap Q_i^k=\emptyset$。(

iii) 若 $\ell\le k$，则对每个 $i\in I_k$，存在唯一的 $j\in I_\ell$，使得 $Q_i^k\subseteq Q_j^\ell$。(iv) 对每个 Q_i^k, $k\in\mathbb{N}_0$, $i\in I_k$，存在 $z_i^k\in D$，使得Q(z_i^k, $a_0 2^{-k}$) $\cap D\subseteq Q_i^k\subseteq$ Q($z_i^k, a_1 2^{-k}$) $\cap D$.(v) 若 $k\in\mathbb{N}_0$, $i\in I_k$, 且 $t>0$，则

$$\big|\{x\in Q_i^k:\ \mathrm{d}(x,\mathbb{R}^n\setminus Q_i^k)\le t2^{-k}\}\big|\le Ct^\eta |Q_i^k|.$$

请注意，除 (v) 外，所有性质对仅仅内部厚的 D 区域都成立。对于 (v)，则需要一种称为孔隙性的温和形式的边界正则性。局部一致域具有孔隙性边界。

定义 5.8（二进立方体）。在命题5.7的设置下，令 $\square_{2^{-k}} := \{Q_i^k:\ i\in I_k\}$。该集合中的元素称为第 2^{-k} 代的二进立方体。对于 $t\in(2^{-(k+1)}, 2^{-k}]$，定义 $\square_t := \square_{2^{-k}}$。在这种情况下，$Q\in\square_t$ 的边长为 $\ell(Q):=2^{-k}$。最后，所有（局部）二进立方体的集合 $\square$ 定义为 $\bigcup_k \square_{2^{-k}}$。

利用度量论证，可以在立方体上定义加倍操作。

定义 5.9 （双倍立方体）。 若 $Q\in\square$，则定义双倍立方体 $2Q$ 如下： $2Q := \{x\in D: \mathrm{d}(x, Q) < \frac{1}{2}\ell(Q)\}$。

利用二进立方体的性质 (iv)、 D 的内部厚度以及初等几何考量，我们得到 $|2Q|\lesssim|Q|$。

定义 **第 5.10 节**。 对于 $t \in (0,1]$, 定义 二进平均算子 E_t 于 $\mathrm{L}^2(D)^n$ b y

$$E_t(F)(x) \coloneqq \fint\!\!\!\fint_{Q_t} F,$$

where Q_t 是 $\square_t$ 中包含 x的唯一集合，对于几乎处处的 $x \in D$都有意义。

为了表述下面关于二进平均算子的有界性结果，我们首先需要引入 Carleson 测度的记号。

定义 5.11。 称 $D\times$上的博雷尔测度 μ 为 ***Carleson*** 测度 ，如果存在常数 C 使得

$$\mu(R(Q)) \leq C|Q|, \quad Q \in \square. \tag{12}$$

这里， R（Q）表示 Q 上的 Carleson 盒，定义为 R（Q）：= （0， ℓ（Q）] $\times Q \subseteq$ （0， 1] $\times D$。的 Carleson 范数 μ 是所有使（12）成立的常数 的下确界。

以下版本的二进结构上二进平均算子的 Carleson 嵌入可见于 [27, 定理4。3]。

命题 5.12 (Carleson嵌入)。 若 μ 是定义在 $D \times (0,1]$ 上的 ***Carleson*** 测度，且 ***Carleson*** 范数为 $\|\sigma\|_{\mathcal{C}}$，则

$$\iiint_{D\times(0,1]} |(E_t u)(x)|^2 \,\mathrm{d}\mu(x,t) \lesssim \|\sigma\|_{\mathcal{C}} \|u\|^2_{\mathrm{L}^2(D)}.$$

5.5. **平滑主部近似**。 在上一小节中，我们已将(QE)归结为二次估计的成立

$$\int_0^1 \|\widetilde{\Theta}_t \nabla P_t u\|^2_{\mathrm{L}^2(D)} \frac{\mathrm{d}t}{t} \lesssim \|u\|^2_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}, \quad u \in \mathrm{W}^{1,2}(D).$$

接下来，我们将这个二次估计归结为其“平滑主部”。后者将在下一个定义中给出。

~利用非对角估计，算子 Θ_t 可以延拓为一个定义良好的线性算子 $\mathrm{L}^\infty(D)^n \to \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(D)$, 并且对 $t > 0$一致成立，见 [5]。下一个定义将使用此延拓。

定义 5.13 (主部)。 将标准单位向量 $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{C}^n$~分别视为定义在 D上的常值函数, 对于 $t \in (0,1]$ 定义 Θ_t的主部 为

$$\widetilde{\gamma}_t \coloneqq (\widetilde{\Theta}_t(e_1), \ldots, \widetilde{\Theta}_t(e_n)) \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(D)^n.$$

注 5.14。 对于几乎处处的 $x \in D$，主部 $\widetilde{\gamma}_t(x)$ 是作用于 $\mathbb{C}^n$ 上的线性泛函，其作用方式为

$$\widetilde{\gamma}_t(x) w = \widetilde{\Theta}_t(w \mathbf{1}_D)(x), \quad w \in \mathbb{C}^n.$$

以下界的证明与 [5]中的证明相同。

引理5.15。 对于所有 $t \in (0,1]$ 以及 $F \in \mathrm{L}^2(D)^n$，我们有

$$\|\widetilde{\gamma}_t E_t F\|_{\mathrm{L}^2(D)} \lesssim \|F\|_{\mathrm{L}^2(D)^n}.$$

作为进一步的化简步骤，对于 $0 < t \leq 1$ 分解

$$\widetilde{\Theta}_t = (\widetilde{\Theta}_t - \widetilde{\gamma}_t E_t) + \widetilde{\gamma}_t E_t.$$

引理 5.16（光滑主部近似）。 存在如下二次估计 e

$$\int_0^1 \|(\widetilde{\Theta}_t - \widetilde{\gamma}_t E_t)\nabla P_t u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \lesssim \|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}^2, \quad u \in \mathrm{W}^{1,2}(D).$$

证明。 我们将证明分为两个步骤。

步骤 1：我们有 $\|\widetilde{\Theta}_t - \widetilde{\gamma}_t E_t\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H}^{\theta,2}(D)^n,\ \mathrm{L}^2(D))} \lesssim t^\theta$ 对于 $t \in (0,1]$ 以及 $\theta \in [0,1]$。

我们通过插值进行论证。为此，设 $t \in (0,1]$ and $F \in \mathrm{W}^{1,2}(D)^n$。我们断言以下界成立

$$\|(\widetilde{\Theta}_t - \widetilde{\gamma}_t E_t)F\|_{\mathrm{L}^2(D)} \lesssim t\|F\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)^n}. \tag{13}$$

事实上，这可由一个标准论证推出，该论证使用庞加莱不等式，并关键地利用了$^2(D)$ 对 Θ_t 的非对角估计。适用于我们这一几何设定的一个版本，见例如 [15，引理 7。8]。

使用 L 引理 5.15 以及 $\mathrm{L}^2(D)$ 对 Θ_t的非对角估计，我们也可得到以下界 d

$$\|(\widetilde{\Theta}_t - \widetilde{\gamma}_t E_t)F\|_{\mathrm{L}^2(D)} \lesssim \|F\|_{\mathrm{L}^2(D)^n}, \quad F \in \mathrm{L}^2(D)^n. \tag{14}$$

The，在界 (13) 与 (14) 之间进行插值，即可得到本步骤的结论 .

步骤 2：利用 $(S^*S)^{\frac{1+\alpha}{2}}$ 的强制性得出结论。 —

代入步骤 1 中关于 θ 的界：$= \alpha$ 代入二次估计，其中 α 是在命题4.1中引入的，以得到

$$\int_0^1 \|(\widetilde{\Theta}_t - \widetilde{\gamma}_t E_t)\nabla P_t u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \lesssim \int_0^1 t^{2\alpha}\|\nabla P_t u\|_{\mathrm{H}^{\alpha,2}(D)^n}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

利用 ∇ 在 Bessel 势空间尺度中的映射性质，我们有$\|\nabla P_t u\|_{\mathrm{H}^{\alpha,\ 2}(D)^n} \lesssim \|P_t u\|_{\mathrm{H}^{1+\alpha,\ 2}(D)}$。因此，命题 4.1结合 $v := P_t u = (1+t^2 S^*S)^{-1}u \in \mathrm{D}(S^*S)$ 可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \|(\widetilde{\Theta}_t - \widetilde{\gamma}_t E_t)\nabla P_t u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} &\lesssim \int_0^1 t^{2\alpha}\|(S^*S)^{\frac{1+\alpha}{2}}(1+t^2S^*S)^{-1}u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= \int_0^1 \|(t^2S^*S)^{\frac{\alpha}{2}}(1+t^2S^*S)^{-1}(S^*S)^{\frac{1}{2}}u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t}.\end{aligned}$$

右侧的表达式受算子 S^*S 的二次估计控制，因此可由 $\|(S^*S)^{\frac{1}{2}}u\|_{\mathrm{L}^2}^2{}_{(D)}$ 控制。最后，利用自伴算子 S^*S 的 Kato 平方根性质即可得出结论。□

5.6. **去除平滑算子**。 到目前为止，我们已将（QE）归结为二次估计

$$\int_0^1 \|\widetilde{\gamma}_t E_t \nabla P_t u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \lesssim \|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}^2, \quad u \in \mathrm{W}^{1,2}(D).$$

接下来，我们拆分

$$\widetilde{\gamma}_t E_t \nabla P_t = \widetilde{\gamma}_t E_t \nabla (P_t - 1) + \widetilde{\gamma}_t E_t \nabla$$

以从二次估计中去除平滑算子 P_t 。

引理 5.17 （去除平滑算子）。 存在如下二次估计

$$\int_0^1 \|\widetilde{\gamma}_t E_t \nabla (P_t - 1) u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \lesssim \|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}^2, \quad u \in \mathrm{W}^{1,2}(D).$$

证明。 由 $\widetilde{\gamma}_t E_t = (\widetilde{\gamma}_t E_t) E_t$ 以及引理 5.15，我们可以从二次估计中去除 $\widetilde{\gamma}_t$ 。我们从再生恒等式开始

$$E_t \nabla (P_t - 1) u = \int_0^\infty E_t \nabla (P_t - 1) s^2 S^* S (1 + s^2 S^* S)^{-2} u \frac{\mathrm{d}s}{s}, \quad u \in \mathrm{W}^{1,2}(D).$$

证明依赖于通常的 Schur 型论证：只要

$$\|E_t s \nabla (P_t - 1) P_s\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(D))} \lesssim \eta(t/s), \quad s \in (0, \infty), t \in (0, 1), \tag{15}$$

对函数 $\eta \in \mathrm{L}^1((0, \infty), \frac{\mathrm{d}t}{t})$成立，则由 Young 卷积不等式可得该结论

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \|E_t \nabla (P_t - 1) u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&\lesssim \left(\int_0^\infty |\eta(t)| \frac{\mathrm{d}t}{t} \right)^2 \int_0^\infty \|(s^2 S^* S)^{\frac{1}{2}} (1 + s^2 S^* S)^{-1} (S^* S)^{\frac{1}{2}} u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \frac{\mathrm{d}s}{s} \\
&\lesssim \|(S^* S)^{\frac{1}{2}} u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \\
&\approx \|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}^2.
\end{aligned}$$

这里，在最后一步我们再次使用了 $S^* S$ 的 Kato 平方根性质。

因此，只需证明（15）。令 $f \in \mathrm{L}^2(D)$ 。首先，考虑 $t \le s$。注意到

$$s \nabla (P_t - 1) P_s = \frac{t}{s} t \nabla P_t (P_s - 1).$$

因此，利用平均算子是一个压缩映射，计算得

$$\begin{aligned}
\|E_t s \nabla (P_t - 1) P_s f\|_{\mathrm{L}^2(D)} \le \|s \nabla (P_t - 1) P_s f\|_{\mathrm{L}^2(D)^n} &= \frac{t}{s} \|t \nabla P_t (P_s - 1) f\|_{\mathrm{L}^2(D)^n} \\
&\lesssim \frac{t}{s} \|f\|_{\mathrm{L}^2(D)}.
\end{aligned}$$

这里我们还利用了 $(t \nabla P_t)_{t>0}$ 的一致有界性，这可由椭圆性推出。现在，考虑 $s \le t$。将其拆分

$$\begin{aligned}
\|E_t s \nabla (P_t - 1) P_s f\|_{\mathrm{L}^2(D)} &\le \|E_t s \nabla P_t P_s f\|_{\mathrm{L}^2(D)} + \|E_t s \nabla P_s f\|_{\mathrm{L}^2(D)} \\
&\le \|s \nabla P_t P_s f\|_{\mathrm{L}^2(D)} + \|E_t s \nabla P_s f\|_{\mathrm{L}^2(D)},
\end{aligned} \tag{16}$$

其中在最后一步我们再次利用了平均算子是压缩映射。对于右侧的第一项，我们很容易得到

$$\|s\nabla P_tP_sf\|_{\mathrm{L}^2(D)} \leq \frac{s}{t}\|t\nabla P_tP_sf\|_{\mathrm{L}^2(D)} \lesssim \frac{s}{t}\|f\|_{\mathrm{L}^2(D)}.$$

对于右侧的第二项（16），我们回顾以下插值不等式，见 [15, 引理 7。11]适用于我们几何设置的一个证明：

$$\left|\fint_Q \nabla u\right|^2 \lesssim \frac{1}{t^\eta}\left(\fint_Q |u|^2\right)^{\frac{\eta}{2}}\left(\fint_Q |\nabla u|^2\right)^{1-\frac{\eta}{2}}, \quad t\in(0,1], Q\in\square_t, u\in \mathrm{W}^{1,2}(D). \tag{17}$$

这里，数值 η 是在命题 5.7 中引入的。此外，注意到 E_t 是一个投影，我们注意到

$$\|\widetilde{\gamma}_tE_ts\nabla P_sf\|_{\mathrm{L}^2(D)} = \|(\widetilde{\gamma}_tE_t)E_ts\nabla P_sf\|_{\mathrm{L}^2(D)} \lesssim \|E_ts\nabla P_sf\|_{\mathrm{L}^2(D)}.$$

因此，利用插值不等式和序列空间上的 H¨older 不等式，计算

$$\begin{aligned}
\|E_ts\nabla P_sf\|^2_{\mathrm{L}^2(D)} &= \sum_{Q\in\square_t}|Q|\left|\fint_Q s\nabla P_sf\right|^2\\
&\lesssim \frac{1}{t^\eta}\sum_{Q\in\square_t}|Q|\left(\fint_Q |sP_sf|^2\right)^{\frac{\eta}{2}}\left(\fint_Q |s\nabla P_sf|^2\right)^{1-\frac{\eta}{2}}\\
&= \left(\frac{s}{t}\right)^\eta\sum_{Q\in\square_t}\left(\int_Q |P_sf|^2\right)^{\frac{\eta}{2}}\left(\int_Q |s\nabla P_sf|^2\right)^{1-\frac{\eta}{2}}\\
&\leq \left(\frac{s}{t}\right)^\eta \|P_sf\|^\eta_{\mathrm{L}^2(D)}\|s\nabla P_s\|^{2-\eta}_{\mathrm{L}^2(D)}\\
&\lesssim \left(\frac{s}{t}\right)^\eta \|f\|^2_{\mathrm{L}^2(D)}.
\end{aligned}$$

总之，我们已证明（16）成立，其中 $\eta(\tau) := C\min(\tau,\tau^{-1}+\tau^{-\eta}$，对某个适当的绝对常数 C 成立。证明至此完成。□

5.7. **完整的主部近似及化归为 Carleson测度性质。** 结合迄今为止的所有化归步骤，我们已将（QE）化归为二次估计

$$\int_0^1 \|\widetilde{\gamma}_tE_t\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(D)}\frac{\mathrm{d}t}{t} \lesssim \|u\|^2_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}, \quad u\in \mathrm{W}^{1,2}(D). \tag{18}$$

我们可以如下估计左端：

$$\int_0^1 \|\widetilde{\gamma}_tE_t\nabla u\|^2_{\mathrm{L}^2(D)}\frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \int_0^1\iint_D |E_t\nabla u|^2|\widetilde{\gamma}_t|^2\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t}.$$

因此，只要我们能证明测度 $\mu(t,x) := |\widetilde{\gamma}_t|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}_t\,t$ 是 D 上的 Carleson 测度，便可由 Carleson 嵌入（命题5.12）推出（18）。

我们记录内部的完整主部近似，以供后续使用。

Prop命题 5.18 (主部近似)。 成立以下二次估计 te

$$\int_0^\infty \|(\widetilde{\Theta}_t - \widetilde{\gamma}_t E_t)\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \lesssim \|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}^2, \quad u \in \mathrm{W}^{1,2}(D).$$

证明。设

$$(\widetilde{\Theta}_t - \widetilde{\gamma}_t E_t)\nabla = (\widetilde{\Theta}_t - \widetilde{\gamma}_t E_t)\nabla P_t + \widetilde{\Theta}_t \nabla(1-P_t) - \widetilde{\gamma}_t E_t \nabla(1-P_t) =: \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.$$

与 I 对应的二次估计已在引理5.16中建立。至于 II，$\|\Theta_t \nabla(1-P_t)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(D))} \leq \|\Theta_t S(1-P_t)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(D))}$，因此我们可以应用引理5.4。最后，III 的二次估计刚刚已在引理5.17中建立。□

6. Carleson 测度估计

本节旨在证明测度 $\mu := \|\widetilde{\gamma}_t\|^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}_t \, t$ 是 D上的 Carleson 测度。由于上一节所作的约化，这将推出我们的主要结果（定理3.8）。

关键步骤是在下面的命题中构造 Tb 型测试函数。由于 $\widetilde{\gamma}_t$ 是 Θ_t的主部，而 Θ_t是一个仅作用于内部的算子，因此论证与 Neumann 边界条件的情形十分相似。因此，本节将尽量简短；对于 Neumann 情形可直接套用的论证，请参阅相关文献。

命题 6.1 (Tb 型测试函数). 存在常数 $\varepsilon_0 \in (0,1)$，使得对于所有 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$、所有单位向量 $\xi \in \mathbb{C}^n$ 以及每个立方体 $Q \in \square$，都存在一个测试函数$b = b^{\xi,Q,\varepsilon} \in \mathrm{L}^2(D)^n$，使其满足以下条件：

(a) $\|b\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \lesssim |Q|$,

(b) $\mathrm{Re}\left(\xi \cdot \fint_Q b\right) \geq 1$,

(c) $\iint_{R(Q)} |\widetilde{\gamma}_t(x)(E_t b)(x)|^2 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t} \lesssim \frac{|Q|}{\varepsilon^2}$.

证明。 设 $\xi \in \mathbb{C}^n$ 为单位向量， $\varepsilon \in (0,1)$ 且 $Q \in \square$。记 ℓ 为 Q的边长。取一个截断函数 $\eta \in \mathrm{C}_0^\infty(2Q)$，使其满足 $\eta \equiv 1$ 于 Q 上，且 $\|\eta\|_\infty + \ell\|\nabla\eta\|_\infty \leq C$，其中$C$ 为维数常数，并令 $\Phi(x) := \eta(x)(x - x_Q)\cdot \xi$。 Φ 的重要性质如下：

$$\Phi \in \mathrm{W}^{1,2}(D), \quad |\nabla\Phi(x)| \lesssim \mathbf{1}_{2Q}(x), \quad \nabla\Phi = \overline{\xi} \text{ on } Q. \tag{19}$$

现在，定义测试函数 $b = b^{\xi,Q,\varepsilon}$ 如下：

$$b := 2\nabla(1 + (\varepsilon\ell)^2 L)^{-1}\Phi.$$

注意这个恒等式

$$\frac{1}{2}b - \nabla\Phi = -(\varepsilon\ell)^2\nabla(1+(\varepsilon\ell)^2\mathcal{L})^{-1}\mathcal{L}\Phi = (\varepsilon\ell)^2\nabla(1+(\varepsilon\ell)^2\mathcal{L})^{-1}\,\underline{\mathrm{div}}(A\nabla\Phi). \tag{20}$$

为得到 (a)，使用 (19) 和 (20) 中的第二个性质可得

$$\|b\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \lesssim \|b - 2\nabla\Phi\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 + \|\nabla\Phi\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \lesssim \|A\nabla\Phi\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 + \|\nabla\Phi\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \lesssim |Q|,$$

其中隐常数与 ε 和 ℓ 无关。注意，此处我们还使用了族 $(t^2\nabla(1+t^2\mathcal{L})^{-1}\mathrm{div})_{t>0}$ 的一致有界性，参见 [5, 引理 2 的证明。2]。——

对于 (b)，利用 (19) 中的第三个性质可得

$$\fint\!\!\!\fint_Q b - 2\overline{\xi}\,\mathrm{d}x = \fint_Q b - 2\nabla\Phi\,\mathrm{d}x = 2(\varepsilon\ell)^2 \fint_Q \nabla u,$$

其中 $u := (1+(\varepsilon\ell)^2\mathcal{L})^{-1}\underline{\mathrm{div}}(A\Phi)$。由 $(t^2\nabla(1+t^2\mathcal{L})^{-1}\mathrm{div})_{t>0}$和 $(t(1+t^2\mathcal{L})^{-1}\mathrm{div})_{\underline{t>0}}$ 的一致有界性，结合 (19) 中的第二个性质，可得

$$\|u\|_{\mathrm{L}^2(D)} \lesssim \frac{1}{\varepsilon\ell}|Q|^{\frac{1}{2}}, \quad \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2(D)} \lesssim |Q|^{\frac{1}{2}}.$$

因此，由 (17) 可得

$$\left|\fint\!\!\!\fint_Q b - 2\overline{\xi}\,\mathrm{d}x\right|^2 \lesssim \varepsilon^4\ell^{4-\eta}\left(\fint\!\!\!\fint_Q |u|^2\right)^{\frac{\eta}{2}}\left(\fint\!\!\!\fint_Q |\nabla u|^2\right)^{1-\frac{\eta}{2}} \lesssim \varepsilon^\eta. \tag{21}$$

因此，由于 ξ 是单位向量，

$$\mathrm{Re}\left(\xi\cdot\fint\!\!\!\fint_Q b\,\mathrm{d}x\right) = 2 + \mathrm{Re}\left(\xi\cdot\fint\!\!\!\fint_Q b - 2\overline{\xi}\,\mathrm{d}x\right) \geq 2 - \sqrt{C\varepsilon^\eta},$$

其中 C 是 (21) 中的隐常数。取 ε 足够小，使得 $\sqrt{C\varepsilon^\eta} \leq 1$，即可完成 (b) 的证明。

对于 (c)，使用命题 5.18 和 $F = b$ 可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\iiint_{R(Q)} |\widetilde{\gamma}_t(x)(E_t b)(x)|^2\,\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{t} &\leq \int_0^\ell \left(\|(\widetilde{\gamma}_t E_t - \widetilde{\Theta}_t)b\|^2_{\mathrm{L}^2(D)} + \|\widetilde{\Theta}_t b\|^2_{\mathrm{L}^2(D)}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&\leq C\|b\|^2_{\mathrm{L}^2(D)} + \int_0^\ell \|\widetilde{\Theta}_t b\|^2_{\mathrm{L}^2(D)}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&\leq C|Q| + \int_0^\ell \|\widetilde{\Theta}_t b\|^2_{\mathrm{L}^2(D)}\,\frac{\mathrm{d}t}{t},
\end{aligned}$$

其中最后一步用到了 (a)。为控制最后一项，展开

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Theta}_t b &= -2t(1+t^2\mathcal{L})^{-1}\,\underline{\mathrm{div}}(A\nabla(1+\varepsilon^2\ell^2 L)^{-1}\Phi) \\
&= 2t(1+t^2\mathcal{L})^{-1}\mathcal{L}(1+\varepsilon^2\ell^2 L)^{-1}\Phi \\
&= -2t(1+t^2 L)^{-1}((1+\varepsilon^2\ell^2\mathcal{L})^{-1}\,\underline{\mathrm{div}})A\nabla\Phi.
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\|\widetilde{\Theta}_t b\|^2_{\mathrm{L}^2(D)} \lesssim \frac{t^2}{\varepsilon^2\ell^2}\|A\nabla\Phi\|^2_{\mathrm{L}^2(D)} \lesssim \frac{t^2}{\varepsilon^2\ell^2}|Q|,$$

其中，最后一步所用的估计 $\|\nabla\Phi\|^2_{\mathrm{L}^2(D)} \lesssim |Q|$ 由式 (19) 得出。因此，我们得到

$$\int_0^\ell \|\widetilde{\Theta}_t b\|^2_{\mathrm{L}^2(D)}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{C}{\varepsilon^2}|Q|$$

如所需。 □

有了这些测试函数，Carleson 测度估计即可按通常步骤得出：对 $\mathbb{C}^n$作扇形分解，运用停时论证，并使用 Carleson 测度的 John– Nirenberg 引理，详见 [5]。关于采用与上述相同测试函数的表述，参见 [20, 命题 14.5、引理 14.8、引理 14。10]。

命题 6.2 (Carleson 测度)。 测度 $\mu = |\widetilde{\gamma}_t(x)|^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}_t{}^t$ 是 D上的 ***Carleson*** 测度。

汇总所有化简步骤后，我们得出定理 3.8。

定理 *3.8*的证明。 如第 5.1 节所示，定理 3.8 由二次估计推出

$$\int_0^\infty \|\Theta_t S u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \lesssim \|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}^2, \qquad u \in \mathrm{W}^{1,2}(D).$$

令 $u \in \mathrm{W}^{1,2}(D)$。利用第 5 节中的化简结果（引理 5.4、引理 5.5、引理 5.6、引理 5.16和引理5.17）以及命题 6.2 结合命题 5.12，计算

$$\int_0^\infty \|\Theta_t S u\|_{\mathrm{L}^2(D)}^2 \, \frac{\mathrm{d}t}{t} \lesssim \|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}^2 + \int_0^1 \iint_D |(E_t \nabla u)(x)|^2 \, \mathrm{d}\mu(t,x) \lesssim \|u\|_{\mathrm{W}^{1,2}(D)}^2$$

如所需。 □

参考文献

[1] *A. Ataei*、*M. Egert* 和 *K. Nystr¨om*。加权抛物算子的 *Kato* 平方根问题。《分析与偏微分方程》 **18** 2025 1, 141 169 1 *( )*，第 – 期。*P. Auscher* 和 *A. Axelsson*。加权最大正则性估计与非光滑椭圆系统[2]的可解性 *I*。《数学发明》 **184** 2011 1, 47 115 2 *( )*，第 – 期。*P. Auscher*、*A. Axelsson* 和 *A. McIntosh*。具有平方[3]可积边界数据的椭圆系统的可解性。《阿克数学》 **48** 2010 2, 253 287 1, 2 *( )*，第 – 期。*K. Nystrom*。 $\mathbb{R}^{n+1}$中二阶抛物算子的平方函数估计与[4]*Kato* 问题。《数学进展》 **293** 2016 1 36 1 *( )*，–。*P. Auscher*、*S. Hofmann*、*M. Lacey*、*A. McIntosh* 和 *P. Tchamitchian*[5]。 $\mathbb{R}^n$上二阶椭圆算子的 *Kato* 平方根问题的解。《数学年刊》*(2) 156 (2002)*，第 2, 633 654 1, 2, 16, 21, 22 – 期。*P. Auscher*、*A. McIntosh* 和 *A. Nahmod*。一维中的 *Kato* 平方根问题与一阶椭圆系统。[6]《印第安纳大学数学杂志》 **46** 1997 3, 659 695 1 *( )*，第 – 期。*P. Auscher*、*A. Morris* 和 *A. Rosen*[7]。具有下界 *Ricci* 曲率界的流形上退化椭圆系统的二次估计与边值问题。《分析与几何通讯》 **33** 2025 2, 403 451 1, 2 *( )*，第 – 期。*P. Auscher*、*A. Rosen* 和 *D. Rule*。退化椭圆方程与系统的边值问题。《巴黎高等师[8]范学院科学年刊》 *´Ec. Norm. Sup ´* 4 **48** 2015 4, 951 1000 1 *er. ( ) ( )*，第 – 期。*A. Axelsson*、*S. Keith* 和 *A. McIntosh*[9]。扰动 *Dirac* 算子的二次估计与函数演算。《数学发明》 **163** 2006 3, 455 497 1, 2 *( )*，第 – 期。*A. Axelsson*、*S. Keith* 和 *A. McIntosh*。混合边值[10]问题的 *Kato* 平方根问题。《伦敦数学会杂志》*(* 2 **74** 2006 1, 113 130 1, 2 *) ( )*，第 – 期。*L. Bandara* 和 *A. McIntosh*[11]。具有广义有界几何的向量丛上的 *Kato* 平方根问题。《几何分析杂志》 **26** 2016 1, 428 462 1 *( )*，第 – 期。*S. Bechtel*、*R. Brown*、*R. Haller-Dintelmann* 和[12]*P. Tolksdorf*。具有部分消失迹的函数的 *Sobolev* 延拓算子。即将在《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）发表。可见：https://aif.centre-mersenne.org/item/10.5802/aif.3707.pdf。*3*，*4*

[13] *S. Bechtel* 和 *M. Egert*。具有部分消失迹的 *Sobolev* 函数在不规则开集上的插值理论。《傅里叶分析与应用杂志》 **25** 2019 5, 2733 2781 4 *( )*，第 – 期。*S. Bechtel*、*M. Egert* 和 *R.* [14] *Haller-Dintelmann*。局部一致域上的 *Kato* 平方根问题。《数学进展》 **375** 2020 1, 3, 10, 11, 15 *( )*。*S. Bechtel*、*C. Hutcheson*、*T. Schmatzler*、*T. Tasci* 和 *M.* [15] *Wittig*。开集上 *Kato* 平方根问题的二阶方法。见 *arXiv*: https://arxiv.org/abs/2406. 2, 17, 19 12812 。[16] ¨ *T.* *Bohnlein*、*M. Egert* 和 *J. Rehberg*。具有动态边界条件的散度型算子的有界函数演算。在线可查 https://arxiv.org/abs/2406.09583 4 。*G. Brocchi* 和 *A. Rosen*。矩阵 [17] 退化 *Kato* 平方根算子的度量。《伊比利亚美洲数学评论》 **41** 2025 6, 2085 2118 1 *( )*，第 – 期。*M. Christ*。一 个（）定理，兼论解析容量与柯西积分。《数学讨论》 **60 61** 1990 2, 601 628 15 */ ( )*，第 – 期。*D. Cruz-Uribe* 和 *C.* [18] $T\ b$ *Rios*。具有高斯界的退化椭圆算子的 *Kato* 问题的解。《美国数学会汇刊》 **364** 2012 7, 3449 3478 1 *( )*，第 – 期。*M. Egert*、*R. Haller*、*S. Monniaux* 和 [19] *P. Tolksdorf*。椭圆算子的调和分析技巧。讲义。在线可查 https://www.mathematik.tu-darmstadt.de/media/ analysis/lehrmaterial_anapde/ISem_complete_lecture_notes.pdf 。 [20] 12, 22 [21] *M. Egert*、*R. Haller-Dintelmann* 和 *P.* *Tolksdorf*。混合边界条件下的 *Kato* 平方根问题。《泛函分析杂志》 **267** 2014 5, 1419 1461 2 *( )*，第 – 期。*M. Egert*、*R. Haller-Dintelmann* 和 *P.* [22] *Tolksdorf*。拉普拉斯算子的外推性质蕴含 *Kato* 平方根问题。《数学出版物》 **61** 2016 2, 451 483 15 *( )*，第 – 期。*L. Haardt* 和 *P.* [23] *Tolksdorf*。关于广义斯托克斯算子的 *Kato* 平方根性质。在线可查 https://arxiv.org/abs/2410.18787 1, 2 。 *S. Hofmann*、*D. Mitrea*、*M. Mitrea* 和 *A. Morris*。 [24] L^p齐次型空间与一致可整流集上的平方函数估计。在线可查 https://arxiv.org/abs/ 1301.4943 15 。[25] *P. Jones*。拟共形映射与 *Sobolev* 空间中函数的可延拓性。《数学学报》 **147** 1981 1 2, 71 88 3, 4 *( )*，第 / – 期。*T. Kato*。耗散算子的分数次幂。 《日本数学会杂志》 [26] **13** 1961 246 274 1 *( )*，–。 [27] **86** 2011 *A. Morris*。子流形上的 *Kato* 平方根问题。《伦敦数学会杂志》*( )*，第 *3* 期，*879 910 1*，*16*–。[28] *I.* ˇ *Sne*¨ *ıberg*。*Banach* 空间插值 族中线性算子的谱性质。《数学研究》*9 (1974)*，第 *2* 期，*214–229*，*254–255*。*11*

巴黎-萨克雷大学，法国国家科学研究中心，奥赛数学实验室，91405 奥赛，法国

电子邮箱： sebastian.bechtel@universite-paris-saclay.fr

数学科学，查尔姆斯理工大学与哥德堡大学，SE-412 96 哥德堡，瑞典

电子邮箱地址： andreas.rosen@chalmers.se