arXiv:2601.04679v1 [math.DS] 8 Jan 2026

随机阿诺索夫微分同胚的李雅普诺夫谱刚性与同时线性化

Aaron Brown 和 Yi Shi

2026年1月9日

摘要

本文研究单位圆 $\mathbb{S}^1$ 上扩张映射的随机游走以及 $\mathbb{T}^d$ 上 d 维环面上的阿诺索夫微分同胚的李雅普诺夫谱刚性。设 ν 是一个概率测度，其支撑集包含扩张映射集合中的元素，$\mathbb{S}^1$ 或者包含 $\mathbb{T}^d$ 上某个一般阿诺索夫自同构邻域中的元素。如果 ν-平稳 SRB 测度的李雅普诺夫谱与代数作用的李雅普诺夫谱一致，那么我们可以将几乎所有 ν 系统同时线性化为一个仿射作用。此外，我们证明了不可约正矩阵在 $\mathbb{T}^2$ 上作用的随机游走的正李雅普诺夫指数刚性。

目录

1 引言 **2**

1.1 $\mathbb{S}^1$ 上的随机扩张映射.2 1.2 $\mathbb{T}^d$ 上的随机阿诺索夫微分同胚.3

2 预备定义与构造 5

2.1 斜积与纤维方向李雅普诺夫指数.7 2.2 纤维 Anosov 系统.8 2.3 平稳与纤维SRB测度.9 2.4 $\mathbb{S}^1$ 上随机扩张映射的平稳SRB测度 10

3 结果陈述 **11**

3.1 $\mathbb{S}^1$ 上扩张映射的谱刚性.11 3.2 随机自同构的李雅普诺夫指数.12 3.3 单个自同构及其交换族的谱刚性 . . 12 3.4 $\mathbb{T}^2$ 上非交换自同构的谱刚性.15

4 随机扩张映射的同时线性化 16

5 斜积与纤维逐叶共轭 19

5.1 纤维 Anosov 系统的结构稳定性.19 5.2 $\mathbb{T}^d$ 上的线性叶状结构.21 5.3 $\mathbb{T}^d$ 上的纤维叶共轭.22 5.4 扩张叶状结构的纤维 u-吉布斯态.27

6 正谱刚性与光滑共轭 28
6.1 $\mathbb{T}$ 上的正谱刚性.29 6.2 $\mathbb{T}^d$ 上一般自同构的正谱刚性.31 6.3 二维共形丛上的光滑性.34 6.4 强不稳定叶状结构的匹配.38

7 稳定丛的非随机性 **41**
7.1 $\mathbb{T}^2$ 上的稳定丛的非随机性.41 7.2 $\mathbb{T}^d$ 上的稳定丛的非随机性.44

8 阿诺索夫作用的同时线性化 **48**
8.1 可交换自同构的随机扰动.49 8.2 非交换自同构的随机扰动.51

1 引言

设 M 是一个闭的 d 维 C ∞黎曼流形。记 C r (M) 为 C r 映射空间，Diff^r(M) 为 C r 微分同胚群，二者均赋予自然的 C r 拓扑。本文中假设 r ≥ 2。设 { f$_i$}^{m}i=1 是 C r (M) 或 Diff^r (M) 中的一个元组。令 $\omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为一列独立随机变量，且在 {1, · · · , m} 上均匀分布。考虑 M 上的马尔可夫过程 x$_{n+1}$ = f$_{\omega_n}$(x$_n$)，并记 f n$_\omega$ = f$_{\omega_{n-1}}$ ◦ · · · ◦ f$_{\omega_0}$。W

e say a Borel probability 测度 μon M i$^{\text{s stat}}$ i$_{\text{onary}}$ for this Mark$^{\text{ov process}}$ if

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mu(f_i^{-1}(A)) = \mu(A), \qquad \forall \text{ Borel set } A \subseteq M.$$

如果一个平稳测度不能表示为两个不同平稳测度的非平凡凸组合，则称其为遍历的平稳测度。固定一个遍历的平稳测度 μ，存在李雅普诺夫指数

$$\lambda_1(\mu) \le \lambda_2(\mu) \le \cdots\cdots \le \lambda_d(\mu)$$

使得对于 μ-几乎处处的 $x \in M$以及任意满足 $v \neq 0$ 的 $v \in T_xM$，极限 lim$_{n\to\infty}$ 1/$n$log ‖$Dxf_{n\omega}$ v‖ 存在，并且等于这些李雅普诺夫指数中的某一个。

本文的目标是从平稳测度的李雅普诺夫指数刚性出发，研究随机游走的同时光滑共轭。这一现象最早由 Dolgopyat 和 Krikorian 观察到。他们 [7] 证明，生成 SO(d +1) 的一族旋转 $\{R_i\}$ 具有李雅普诺夫谱刚性，即对于 $\{R_i\}$ 的扰动 $\{f_i\}$，如果由 $\{f_i\}$ 生成的随机游走的李雅普诺夫指数全部为零（等于 $\{R_i\}$），那么存在一个同时将 $\{f_i\}$ 共轭到旋转的光滑共轭。后来，DeWitt [5] 证明了各向同性流形上等距随机游走的李雅普诺夫谱刚性。

本文聚焦于具有李雅普诺夫谱刚性的单位圆 $\mathbb{S}^1$ 上扩张映射的随机游走与d维环面 $\mathbb{T}^d$ 上阿诺索夫微分同胚的同时光滑共轭映射。

1.1 $\mathbb{S}^1$ 上的随机扩张映射

若局部微分同胚 f: $M \to M$的导数 Df在TM中一致地扩张每个单位向量，则称其为扩张映射。显然，扩张映射在 $C^r(M)$ 中构成一个开集。

对于扩张映射 $f\colon M \to M$，Shub [42] 证明，若 $\pi_1(M)$ 是幂零群，则f与基础幂零流形上的一个仿射扩张自映射拓扑共轭。之后，Franks [9] 证明了 $\pi_1(M)$ 具有多项式增长。最后，Gromov [16] 证明有限生成群是虚幂零的，这意味着每个扩张映射都与基础幂零流形上的一个仿射扩张自映射拓扑共轭。这给出了扩张映射的完整拓扑分类。

关于扩张映射的光滑分类，一维情形已由 Shub 和 Sullivan [43]彻底解决。他们证明，若两个C^r光滑圆扩张映射之间的拓扑共轭是绝对连续的，那么该共轭就是C^r光滑的。最近，Gogolev 和 Hertz [14] 根据周期点处回归映射的雅可比行列式，对高维中的（非代数）扩张映射给出了光滑分类。

我们的第一个结果涉及由圆扩张映射构成的独立同分布随机游走中，唯一平稳 SRB 测度对应的李雅普诺夫指数的全局刚性。这里，平稳 SRB 测度是相对于弧长参数绝对连续的唯一平稳测度。更一般且精确的定义见定义 2.9；存在性和唯一性见下文 2.11。平稳 SRB 测度的李雅普诺夫指数满足一个不等式；当且仅当该随机游走同时光滑共轭于一个仿射随机游走时，等号成立。

定理 1.1。 设 $\{f_i\}^m i=1$ 是一族定义在 $\mathbb{S}^1$ 上的 $C\text{^}r$ 扩张映射，其次数为 $\{d_i\}^m i=1 \subseteq \mathbb{N}_{\geq 2}$。设 μ_{SRB} 是由随机游走 $\{f_i\}^m i=1$ 生成的（唯一）平稳 *SRB* 测度。那么， μ_{SRB} 的李雅普诺夫指数满足

$$\lambda(\mu_{\mathrm{SRB}}) \leq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log|d_i|. \tag{1}$$

此外，当且仅当存在 $h \in \mathrm{Diff}^r(\mathbb{S}^1)$ 以及 $\{\rho_i\}^m i=1 \subseteq \mathbb{S}^1$，使得 $h \circ f_i \circ h^{-1}\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是如下形式的仿射映射时，*(1)* 中的等号成立

$$h \circ f_i \circ h^{-1}(x) = d_i \cdot x + \rho_i, \qquad i = 1 \cdots, m.$$

注 1.2。 我们有以下几点说明：

1. 定理 *1.1* 的类似结论也适用于由任意一个支撑在满足某个矩条件的 $\mathbb{S}^1$ 上的 C^r 扩张映射集合上的概率测度 ν 所生成的独立同分布随机游走；一般性表述见定理 *3.1*。

2. 在(1)取等号的情况下，平稳 *SRB* 测度 μ_{SRB} 必然在每个生成元 $\{f_i\}^m i=1$ 作用下保持不变，并且

$$\mu_{\mathrm{SRB}} = h_*(\mathrm{Leb}_{\mathbb{S}^1}).$$

1.2 $\mathbb{T}^d$上的随机阿诺索夫微分同胚

阿诺索夫微分同胚的拓扑分类问题由 Smale [44, 问题（3.5）], 提出，至今仍悬而未决。Franks [9] 和 Manning [35] 的经典结果表明，环面、幂零流形或幂零纤维流形上的 Anosov 微分同胚都与一个仿射自同构拓扑共轭。一般来说，我们不认为这种共轭是光滑的；事实上，周期点处导数的谱数据

构成了 C^1 共轭映射的障碍。对于二维环面（[32, 36, 34]）上的阿诺索夫微分同胚，或在其线性化为泛型 （[11, 10, 12, 6, 21]；见定义 3.6）的假设下，对于 d 维环面上的阿诺索夫微分同胚，周期点相关谱数据相匹配足以保证存在光滑共轭。类似地，对于作为自同构扰动的保体积 Anosov 微分同胚，若其李雅普诺夫谱（相对于体积）与该自同构的李雅普诺夫谱一致，也意味着共轭是光滑的（[38, 13, 4]）。

对于环面或幂零流形上的不可约高秩阿诺索夫 $\mathbb{Z}^k$ 作用，Rodriguez Hertz 和 Wang [17] 证明了，所有此类作用都与一个仿射作用光滑共轭；另见 Fisher 、 Kalinin 和 Spatzier [8] 的早期结果。与单个微分同胚的情形不同， [17] 中共轭的光滑性仅源于高秩群结构本身，无需对周期数据或李雅普诺夫谱作出额外假设。

我们研究泛型自同构的一个子集 $A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{Z})$，它具有这样的性质：当 $\|A\| \to +\infty$ 时，$\mathrm{GL}(d, \mathbb{Z})$ 中泛型自同构所占的比例趋于 1；见定义 3.6。特别地，泛型自同构在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，且其特征值的绝对值彼此不同，或成共轭复数对。

对于 d 维环面上的阿诺索夫微分同胚随机游走，我们有如下定理。

定理 1.3。 设 $A \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{Z})$ 是一个泛型自同构，且 $\{f_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^d)$ 是 A 的扰动。设 μ_{SRB} 是由随机游走 $\{f_i\}_{i=1}^m$ 生成的（唯一）平稳 *SRB* 测度。若 μ_{SRB} 的李雅普诺夫指数与 A 的相同，则存在 $h \in \mathrm{Diff}^{1+}(\mathbb{T}^d)$ 和 $\{v_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathbb{T}^d$，使得

$$h \circ f_i \circ h^{-1} = A + v_i, \qquad i = 1, \cdots, m.$$

注1.4。 我们有以下几点说明：

1. 关键观察是，如果正李雅普诺夫指数与线性作用相等，那么稳定丛就是非随机的；参见定理 *3.4* 和定理 *3.7* 的第一项。稳定丛和不稳定丛均为非随机，意味着可以同时进行拓扑线性化。*2.* 若取接近 A 的 $\{f_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^d)$，那么根据 *[21, 22],* 的自举结果，共轭 h 也属于 $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^d)$。*3.* 若 $d = 2$，可取 $\{f_i\}_{i=1}^m$，使其包含于阿诺索夫微分同胚 $f \in \mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^2)$ 的一个邻域内，参见定理 *3.4*。

对于由不对易正矩阵诱导的 $\mathbb{T}^2$ 上的自同构族的扰动，正李雅普诺夫指数（相对于平稳 SRB测度）的一致性足以推出同时光滑共轭。

如果矩阵族 $\{A_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathrm{GL}(d, \mathbb{Z})$ 中唯一满足对于每个 $i = 1, \cdots, m$ 都有 $A_i(V) = V$ 的子空间 $V \subseteq \mathbb{R}^d$ 是 $V = \{0\}$ 或 $V = \mathbb{R}^d$，则称其为不可约。若 $A_i = (a_{ij})_{d \times d} \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{Z})$ 是一个正矩阵，则称矩阵 $a_{ij} > 0$ 的所有元素均为正数。$\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ 中的正矩阵总是双曲的，并且会扩张第一和第三象限中的向量。

由非交换正矩阵诱导的 $\mathbb{T}^2$ 上线性作用的生成元经扰动后得到的随机游走具有一个遍历平稳SRB测度。令

$\lambda^+(\mu_{\mathrm{SRB}})$记为相对于该平稳SRB测度的随机游走的正李雅普诺夫指数。类似地，我们将随机矩阵乘积$\{A_i\}$的顶李雅普诺夫指数定义为几乎处处的极限

$$\lambda^+(\{A_i\}) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A_{i_{n-1}} \cdots A_{i_0}\|$$

其中 A_i 以概率 $1/m$独立同分布地选取。

定理 1.5。 设 $\{A_i\}^m i=1 \subseteq \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ 是一个不可约的正矩阵族，并设 $\{f_i\}^m i=1 \subseteq \mathrm{Diff}^r(\mathbb{T}^2)$ 是 $\{A_i\}^m i=1$ 的扰动，且 $r \geq 2$。那么

$$\lambda^+(\mu_{\mathrm{SRB}}) \leq \lambda^+(\{A_i\}).$$

此外，当且仅当存在 $h \in \mathrm{Diff}^{r-}(\mathbb{T}^2)$ 以及$\{v_i\}^m i=1 \subseteq \mathbb{T}^2$ 使得等式 $\lambda^+(\mu_{\mathrm{SRB}}) = \lambda^+(\{A_i\})$ 成立，

$$h \circ f_i \circ h^{-1} = A_i + v_i, \qquad i = 1, \cdots, m.$$

注 1.6。 我们有如下评论：

1. 共轭 h 的正则性满足 $r- = r$（当 r 不是整数时），并且当 r 为整数时，对每个 $\epsilon > 0$ 都满足 $r- > r$。正则性的轻微损失源于使用了 *Journé*定理*[19]*。

2. 该定理的主要新意在于，我们只需要正李雅普诺夫指数相等，而不需要对负李雅普诺夫指数作任何假设。这源于利用了 $\{A_i\}$ 的作用是不可约的，因此存在 $A_i \neq Aj$，使得它们的稳定叶状结构彼此横截。

3. 对于足够小的扰动， *[2]* 的结果表明，平稳 *SRB* 测度 μ_{SRB} 相对于环境体积是绝对连续的。不过，我们注意到，在本定理的证明中并未直接使用 μ_{SRB} 的绝对连续性。

2 初步定义与构造

设M是一个C^∞闭黎曼流形，且$\Gamma \subseteq \mathrm{Diff}^r(M)$是一个子群。若对每个$f \in \Gamma$ 和每个博雷尔集 $A \subseteq M$，都有 $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$，则称M上的博雷尔概率测度 μ 为 Γ-不变测度。一般而言，当 Γ 不是 amenable 时，可能不存在任何 Γ-不变测度，因此我们需要一个更弱的不变性概念。

设 ν 是 Γ上的博雷尔概率测度。若M 上的博雷尔概率测度 μ 满足以下条件，则称其为ν-平稳测度：

$$\int f_*\mu \, d\nu(f) = \mu, \qquad \text{or equivalently} \qquad \int \mu(f^{-1}(A)) \, d\nu(f) = \mu(A)$$

对于每个博雷尔子集$A \subseteq M$。显然，如果 μ 是 Γ-不变的，那么对于任何支集包含于 Γ 上的概率测度 ν，它都是 ν-平稳的。给定一个 ν-平稳测度 μ，如果对 ν-几乎处处的$f_*\mu = \mu \, f \in \Gamma$，则称 μ 是 ν-几乎必然（a.s.）不变的。当取 ν 为$C_r(M)$ 上的博雷尔概率测度时，同样的定义也成立。

记 $\Sigma_+ = \left(\mathrm{Diff}^r(M)\right)^{\mathbb{N}}$ 为微分同胚序列的集合

$$\omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} = (f_{\omega_0}, f_{\omega_1}, f_{\omega_2}, \cdots) \in \Sigma_+, \qquad \text{where} \qquad f_{\omega_i} \in \mathrm{Diff}^r(M).$$

给定 $\mathrm{Diff}^2(M)$ 上的概率测度 ν，我们赋予 Σ_+ 乘积测度 $\nu^{\mathbb{N}}$。固定 $r = 2$ 作为下文的约定。由于 $\mathrm{Diff}^2(M)$ 是一个波兰空间，Σ_+ 也是波兰空间，且测度 $\nu^{\mathbb{N}}$ 是 Radon 测度。记为σ: $\Sigma_+ \to \Sigma_+$，它是移位映射

$$\sigma : (f_{\omega_0}, f_{\omega_1}, f_{\omega_2}, \cdots) \mapsto (f_{\omega_1}, f_{\omega_2}, f_{\omega_3}, \cdots),$$

则 $\nu^{\mathbb{N}}$ 是σ-不变的。

给定 $\omega = (f_{\omega_0}, f_{\omega_1}, f_{\omega_2}, \cdots) \in \Sigma_+$ 以及 $n \in \mathbb{N}$，我们可以定义一个余循环

$$f_\omega^0 = \mathrm{Id}, \qquad f_\omega = f_\omega^1 = f_{\omega_0}, \qquad f_\omega^n = f_{\omega_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{\omega_1} \circ f_{\omega_0}, \quad \forall n \geq 1.$$

我们将由随机复合 $\{f_{n\omega}\}_{\omega\in\Sigma_+}$ 定义在 M上的随机动力系统记为 $\chi^+(M, \nu)$。

类似地，记为 $\mathrm{Diff}^2(M))^{\mathbb{Z}}$，表示由微分同胚序列构成的集合 s

$$\omega = (\cdots, f_{\omega_{-1}}, f_{\omega_0}, f_{\omega_1}, \cdots) \in \Sigma.$$

相应的在 Σ 上的乘积测度 $\nu^{\mathbb{Z}}$ 也在移位映射 σ 下保持不变: $\Sigma \to \Sigma$.

对于 $\omega = (\cdots、 f_{\omega_{-1}}、 f_{\omega_0}、 f_{\omega_1}、 \cdots) \in \Sigma$，我们将如下定义 $f_{n\omega}$（其中 $n \in \mathbb{N}$）：

$$f_\omega^n = f_{\omega_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{\omega_1} \circ f_{\omega_0};$$
$$f_\omega^{-n} = (f_{\omega_{-n}})^{-1} \circ (f_{\omega_{-(n-1)}})^{-1} \circ \cdots \circ (f_{\omega_{-1}})^{-1}.$$

对于 $\mathrm{Diff}^2(\mathrm{M})$ 上的概率测度 ν，我们固定一个 ν-平稳测度 μ。若子集 $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{M}$ 满足：对于 ν-几乎处处的 f 和 μ-几乎处处的 $\mathrm{x} \in \mathrm{M}$，$\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ 蕴含 $\mathrm{f}(\mathrm{x}) \in \mathrm{A}$，且 $\mathrm{x} \notin \mathrm{A}$ 蕴含 $\mathrm{f}(\mathrm{x}) \notin \mathrm{A}$，则称 A 是 (M, ν)-不变的。若对每个 (M, ν)-不变集 A 都有 $\mu(\mathrm{A}) \cdot \mu(\mathrm{M} \setminus \mathrm{A}) = 0$，则称 μ 是遍历的。

我们有如下随机 Oseledec ’乘法定理。

命题 2.1 ([31, 命题 I.3.1])**.** 设 ν 是 $\mathrm{Diff}^2(M)$ 上的一个概率测度，满足

$$\int \log^+(\|f\|_{C^2}) + \log^+(\|f^{-1}\|_{C^2}) d\nu < \infty, \tag{2}$$

并设 μ 是一个遍历的 ν-平稳测度。

存在一些数（称为李雅普诺夫指数）$-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_l < \infty$，使得对 $\nu^{\mathbb{N}}$-几乎处处的 $\omega \in \Sigma_+$ 以及 μ-几乎处处的 $x \in M$，都存在一个线性子空间旗

$$\{0\} = V_\omega^0(x) \subsetneq V_\omega^1(x) \subsetneq \cdots \subsetneq V_\omega^l(x) = T_x M,$$

满足

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|D_x f_\omega^n(v)\| = \lambda_k, \qquad \forall v \in V_\omega^k(x) \setminus V_\omega^{k-1}(x).$$

此外，$m_k =$ 维数$V\,k_\omega(x) -$ 维数$V\,k_\omega{}^{-1}(x)$ 几乎处处为常数，且 $V\,k_\omega(x)$ 是等变的:

$$D_x f_\omega V_\omega^k(x) = V_{\sigma(\omega)}^k(f_\omega(x)).$$

2.1 斜积与纤维方向的 Lyapunov 指数

考虑乘积空间 $\Sigma_+ \times M$ 以及与随机动力系统 $\chi^+(M, \nu)$ 在 $\Sigma_+ \times M$ 上相关的斜积系统:

$$F_+ : \Sigma_+ \times M \to \Sigma_+ \times M, \qquad F_+(\omega, x) = \big(\sigma(\omega), f_\omega(x)\big).$$

根据 [31, 第 1], 章，概率测度$\hat{}\mu$ 是 ν-平稳测度，当且仅当 $\nu^{\mathbb{N}} \otimes \hat{}\mu$是$F_+$-不变的。

对于乘积空间 $\Sigma \times M$，我们还定义斜扩张映射F： $\Sigma \times M \to \Sigma \times M$，其定义如下:

$$F(\omega, x) = \big(\sigma(\omega), f_\omega(x)\big), \qquad \omega \in \Sigma,\ x \in M.$$

我们有如下对应关系： ν-平稳测度与斜积系统的不变测度之间存在一一对应。

命题 2.2([31, 命题 I.1.2])**.** 设$\hat{}\mu$ 为 ν-平稳概率测度。存在唯一的 F-不变概率测度 μ 定义在 $\Sigma \times M$上，使得

$$\pi^+_*(\mu) = \nu^{\mathbb{N}} \otimes \hat{\mu},$$

其中 π^+： $\Sigma \times M \to \Sigma_+ \times M$ 是自然投影，且 $\mu = \lim_{n\to+\infty}(F^n)_*(\nu^{\mathbb{Z}} \otimes \hat{}\mu$).

此外，若我们关于投影 π： $\Sigma \times M \to \Sigma$对 μ 作测度分解，则存在一族博雷尔概率测度$\{\mu_\omega\}_{\omega\in\Sigma}$ 满足

$$\mu = \int_\Sigma \mu_\omega d\nu^{\mathbb{Z}}(\omega).$$

最后，对于 $\nu^{\mathbb{Z}}$-几乎处处的 $\omega \in \Sigma$ 以及满足对所有 $i < 0$都有 $\omega_i = \xi_i$的 $\xi \in \Sigma$，我们有 $\mu_\omega = \mu_\xi$.

命题 2.2 将一个 ν-平稳测度 $\hat{}\mu$ 赋予M上的一个典范不变概率测度 μ，对应于斜积 F: $\Sigma \times M \to \Sigma \times M$，其中 $\pi_*\mu = \nu^{\mathbb{Z}}$。我们也可以考虑 $\Sigma \times M$上更一般的F-不变概率测度 μ，其中 $\pi_*\mu = \nu^{\mathbb{Z}}$；它们不一定如命题 2.2 中那样是平稳测度的自然扩张。

令 μ 为 $\Sigma \times M$ 上的一个 F-不变概率测度，使得 $\pi_*(\mu) = \nu^{\mathbb{Z}}$。定义于纤维切丛上的纤维微分为

$$\begin{aligned} DF : \Sigma \times TM &\to \Sigma \times TM, \\ (\omega, (x, v)) &\mapsto \big(\sigma(\omega), (f_\omega(x), D_x f_\omega(v))\big), \end{aligned}$$

它在保测系统 F: $(\Sigma \times M,\ \mu) \to (\Sigma \times M,\ \mu)$ 上定义了一个线性余循环。为M配备任意黎曼度量。假设 μ 是遍历的，并满足可积性条件

$$\int \log^+(\|D_x f_\omega\|_{C^2} + \log^+(\|(D_x f_\omega)^{-1}\|_{C^2}) d\mu(\omega, x) < \infty. \tag{3}$$

于是，我们可以将奥塞莱德茨定理应用于余循环 DF。特别地，存在称为纤维方向李雅普诺夫指数的数 $\{\lambda_k\}^l{}_{k=1}$，以及一个 μ-可测分裂

$$\{\omega\} \times T_x M = \bigoplus_{k=1}^{l} E^k_\omega(x)$$

使得对于每个$v \in E^k_\omega(x) \setminus \{0\}$,

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|DF^n(v)\| = \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|D_x f^n_\omega(v)\| = \lambda_k.$$

2.2 纤维 Anosov 系统

设M是一个紧流形。我们赋予 $\Sigma = \left(\mathrm{Diff}^2(M)\right)^{\mathbb{Z}}$ 乘积度量，对于 $\omega = (\omega_i)$，$\xi = (\xi_i) \in \Sigma$,

$$d_\Sigma(\omega,\xi) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{\|f_{\omega_i} - f_{\xi_i}\|_{C^2} + \|f_{\omega_i}^{-1} - f_{\xi_i}^{-1}\|_{C^2}}{2^{|i|}}.$$

对于乘积空间 $\Sigma \times M$，我们定义度量

$$d\left((\omega,x),(\xi,y)\right) := \max\left\{d_\Sigma(\omega,\xi), d_M(x,y)\right\}$$

对每个 (ω, x)、$(\xi, y) \in \Sigma \times M$，其中 $d_M(\cdot,\cdot)$ 由 M上的黎曼度量诱导。$\Sigma_+ = \left(\mathrm{Diff}^2(M)\right)^{\mathbb{N}}$ 和 $\Sigma_+ \times M$上的度量也以类似方式定义。

我们用 $M_\omega = \{\omega\} \times M$表示 $\Omega \times M$在 ω 上的纤维，并用 $TM_\omega := \{\omega\} \times TM$表示。

定义 2.3. 设 $\mathscr{A} \subset \mathrm{Diff}^2(M)$，并设 $\Omega = \mathscr{A}^{\mathbb{Z}} \subset \Sigma$。我们称斜积 $F : \Omega \times M \to \Omega \times M$,

$$F(\omega,x) = \left(\sigma(\omega), f_\omega(x)\right), \qquad \omega \in \Omega,\ x \in M,$$

是纤维方向 *Anosov* 的，如果对每个字 $\omega \in \Omega$，都存在连续分裂 $TM_\omega = E^s_\omega \oplus E^u_\omega$以及常数 $\gamma > 0$、$C > 1$、$0 < \theta < 1$、$L > 1$，使得以下条件成立：

1. 该分裂是 *DF*-不变的：

$$DF\left(E^s_\omega\right) = Df_{\omega_0}\left(E^s_\omega\right) = E^s_{\sigma(\omega)} \qquad and \qquad DF\left(E^s_\omega\right) = Df_{\omega_0}\left(E^u_\omega\right) = E^u_{\sigma(\omega)}.$$

2. 对于非零向量 $v^s \in E^s_\omega$和 $v^u \in E^u_\omega$，有

$$\|Df^n_\omega v^s\| < C\exp(-n\gamma)\|v^s\| \qquad and \qquad \|Df^{-n}_\omega v^u\| < C\exp(-n\gamma)\|v^u\|, \qquad \forall n \geq 0.$$

3. 对所有$(\omega, x) \in \Omega \times M$, $(\omega, x) \mapsto E^s_\omega(x)$以及 $(\omega, x) \mapsto E^u_\omega(x)$均为 (L, θ)-赫尔德连续。

经典的稳定流形定理同样适用于纤维方向 Anosov 斜积。

引理 2.4. 设 $\mathscr{A} \subset \mathrm{Diff}^2(M)$且 $\Omega = \mathscr{A}^{\mathbb{Z}}$，若斜积 $F(\omega, x) = \left(\sigma(\omega), f_\omega(x)\right) : \Omega \times M \to \Omega \times M$ 是纤维方向 *Anosov* 的，则存在稳定与不稳定叶状结构族

$$\left\{\mathscr{F}^s_\omega\right\}_{\omega\in\Omega} \qquad and \qquad \left\{\mathscr{F}^u_\omega\right\}_{\omega\in\Omega}$$

使得以下条件成立：

1. 对于每个 $\omega \in \Omega$、$\mathscr{F}^s_\omega$ 和 $\mathscr{F}^u_\omega$，它们是纤维 $M_\omega = \{\omega\} \times M$ 上的两个横截叶状结构，并且对于每个 $x \in M_\omega$,

$$T_x\mathscr{F}^s_\omega(x) = E^s_\omega(x), \qquad and \qquad T_u\mathscr{F}^s_\omega(x) = E^u_\omega(x).$$

2. 令 $\gamma > 0$ 为定义 *2.3* 中的常数。存在 $r > 0$，使得对于每个 $0 < \epsilon < \gamma$，存在 $C = C_\epsilon > 1$，满足对于 $y, z \in \mathscr{F}^s_{\omega,r}(x)$ 和 $n > 0$,

$$d_M(f^n_\omega(y), f^n_\omega(z)) \leq C\exp[n(-\gamma+\epsilon)]d_M(y,z).$$

上文中，$\mathscr{F}^s_{\omega,r}(x)$ 表示交集 $\mathscr{F}^s_\omega(x)$ 与以 x 为中心、半径为 r 的球的交集中包含 x 的路径连通分支。

在负向迭代 f^{-n}_ω 下，y、$z \in \mathscr{F}^u_\omega$，$r$（$x$）也成立。

设 M 是一个紧黎曼流形。给定子空间 $V \subset T_xM$ 和向量$w \in T_xM$，记 $w =$<style id='w $_V + w^{\perp}$，其中 $w_V \in V$且 $w^{\perp} \in V^{\perp}$。定义$C_\kappa(V)$，即以V为中心、半径为$0 < \kappa < 1$ 的锥：

$$C_\kappa(V) := \{w \in T_xM : |w^{\perp}| \le \kappa |w_V|\}$$

M 上的 k-锥场是一个连续族 $x \mapsto \mathscr{C}(x)$，其中每个 $\mathscr{C}(x)$ 都是围绕一个 $C_\kappa(V)$、维数为 k 的向量空间的锥。

定义 2.5。 设 M 是一个维数为 n 的紧黎曼流形。设 $\mathscr{A} \subseteq \mathrm{Diff}^2(M)$ 是一族微分同胚。若存在 $1 \le k \le n-1$、一个连续的 k-锥场 $x \mapsto \mathscr{C}sx$ 、一个连续的 $(n-k)$-锥场 $x \mapsto \mathscr{C}ux$，以及 $\gamma > 0$，使得对于每个 $x \in M$、非零向量 $v s \in \mathscr{C}sx$ 、$v^u \in \mathscr{C}ux$，以及每个 $f \in \mathscr{A}$，则称 $\mathscr{A}$ 是锥双曲的，

- $Df^{-1}(\mathscr{C}s(x)) \subset \mathscr{C}sf^{-1}(x)$，且 $\|Df^{-1}(vs)\| > \exp(\gamma) \cdot \|vs\|$;
- $Df(\mathscr{C}u(x)) \subset \mathscr{C}uf(x)$，且 $\|Df(vu)\| > \exp(\gamma) \cdot \|vu\|$。

注 2.6。 *1.* 我们指出，如果 $\mathscr{A}$ 是锥双曲的，那么 $f \in \mathscr{A}$ 中的每个元素都是 *Anosov* 微分同胚。此外，对于每个 $x \in M$，稳定子空间 $E^s f(x)$ 的维数为 k，且 $E\,sf(x) \subset \mathscr{C}s(x)$。

2. 显然，锥双曲性是一个 C^1-开性质。也就是说，若 $\mathscr{A} \subseteq \mathrm{Diff}^1(M)$ 是锥双曲的，则存在 $\mathscr{A}$ 的一个邻域 $\mathscr{U} \subseteq \mathrm{Diff}^1(M)$，使得其中的元素 $\mathscr{U}$均为锥双曲。特别地，对于 $\mathscr{A} = \{f\}$，只要 f 是一个 *Anosov* 微分同胚，此结论便成立。

对于由阿诺索夫微分同胚组成的锥双曲族，根据经典的锥场论证，相关的斜积系统是一个纤维 Anosov 系统。

引理 2.7. 设 $\mathscr{A} \subseteq$ 微分同胚$^2(M)$ 是一个锥双曲微分同胚族。记为 $\Omega = \mathscr{A}^{\mathbb{Z}}$。那么，斜积 $F : \Omega \times M \to \Omega \times M$ 定义为 $F(\omega, x) = \big(\sigma(\omega), f_\omega(x)\big)$ 是纤维方向 *Anosov*。

证明。 证明采用经典锥判据。稳定丛和不稳定丛定义如下：

$$E^s_\omega = \bigcap_{n \ge 0} Df^{-n}_{\sigma^n(\omega)}\big(\mathscr{C}^s_{\sigma^n(\omega)}\big) \qquad \text{and} \qquad E^u_\omega = \bigcap_{n \ge 0} Df^{n}_{\sigma^{-n}(\omega)}\big(\mathscr{C}^u_{\sigma^{-n}(\omega)}\big).$$

详见 [3, 第 2.2] 节。 □

2.3 平稳与纤维方向 SRB 测度

设 $\mathscr{A} \subseteq \mathrm{Diff}^2(M)$ 是一个微分同胚族，使得对于 $\Omega = \mathscr{A}^{\mathbb{Z}}$，斜积 F: $\Omega \times M \to \Omega \times M$是纤维方向 Anosov。设 $\{\mathscr{F}^u_\omega(x)\}_{(\omega,x)\in\Omega\times M}$是 F的纤维不稳定叶状结构。

对于每个F-不变测度 μ，我们考虑 $\Omega \times M$的一个可测分划 $\mathscr{P}$，使得对于 μ-几乎处处的 $(\omega, x) \in \Omega \times M$，存在一个 $r = r(\omega, x) > 0$，使得 (ω, x) 的半径为 r的不稳定流形满足

$$\mathscr{F}^u_{\omega,r}(x) \subset \mathscr{P}(\omega, x) \subset \mathscr{F}^u_\omega(x).$$

这样的划分称为 $\mathscr{F}^u$-从属划分。记 $\{\tilde{\mu}^{\mathscr{P}}(\omega,x)\}_{(\omega,x)\in\Omega\times M}$为相对于划分 $\mathscr{P}$ 的 μ 的一族条件测度。

定义 2.8。 设 $F:\Omega\times M\to\Omega\times M$ 是一个纤维 *Anosov* 错列积。若对任意 $\mathscr{F}^u$-从属可测划分 $\mathscr{P}$ 及其对应条件测度族 $\{\tilde{\mu}^{\mathscr{P}}_{(\omega,x)}\}_{(\omega,x)\in\Omega\times M}$，条件测度 $\tilde{\mu}^{\mathscr{P}}_{(\omega,x)}$ 相对于 $\mathscr{F}u_\omega(x)$ 上的勒贝格测度绝对连续，则称 F-不变测度 μ 为纤维方向 *SRB* 测度；上述性质对 μ-几乎处处的 $(\omega,x)\in\Omega\times M$ 均成立。

我们指出，纤维方向 SRB 实际上等价于在 $\mathscr{F}_{u\omega}(x)$ 上的勒贝格测度，对 μ-几乎处处的 $(\omega, x)\in\Omega\times M$ 而言。

回顾命题 2.2：对于任意概率测度 ν on $\mathscr{A}$ 以及任意 ν-平稳测度 $\hat{}\mu$，存在唯一的 F-不变测度 μ on $\Omega\times M$，使得

$$\pi_*(\mu)=\nu^{\mathbb{Z}}\qquad\text{and}\qquad\mu=\lim_{n\to+\infty}(F^n)_*(\nu^{\mathbb{Z}}\otimes\hat{\mu}),$$

其中 $\pi:\Omega\times M\to\Omega$ 是投影。现在我们可以定义满足 SRB 性质的 ν-平稳测度。我们将讨论范围限定在F为纤维方向 Anosov 的情形。

定义 2.9。 设 $\mathscr{A}\subseteq\mathrm{Diff}^2(M)$ 且 $\Omega=\mathscr{A}^{\mathbb{Z}}$，其中相应的斜积 $F:\Omega\times M\to\Omega\times M$ 为纤维方向 *Anosov*。假设概率测度 ν 支撑在 $\mathscr{A}$ 上，且$\hat{}\mu$ 是一个 ν-平稳概率测度。若由命题 *2.2* 给出的相应 F-不变测度 μ 为纤维方向 *SRB*，则称$\hat{}\mu$ 为 *SRB*。

下述定理表明，对于一族共享稳定与不稳定锥场的传递阿诺索夫微分同胚，平稳 SRB 测度存在且唯一；这一结果本质上已在 [31, 定理 VII.1.1], 中得到证明，另见 [2, 定理 2.9]。

定理 2.10。 设 $\mathscr{A}\subseteq\mathrm{Diff}^2(M)$ 是一族共享稳定与不稳定锥场的传递 *Anosov* 微分同胚。对于每个支撑在 $\mathscr{A}$ 上且满足可积性条件 *(2)* 的概率测度 ν，存在唯一的遍历 ν-平稳 *SRB* 测度 $\hat{}\mu$，使得由命题 *2.2* 给出的相应 F-不变测度 μ 满足 $\pi_*(\mu)=\nu^{\mathbb{Z}}$，且为纤维方向 *SRB* 测度：

- 沿纤维方向不稳定叶状结构对 $\hat{}\mu$的解 *disintegration* 是绝对连续的；
- $\hat{}\mu$满足纤维方向熵公式：

$$h_{\hat{\mu}}(\chi^+(M,\nu))=\sum_{\lambda_k>0}m_k\cdot\lambda_k.$$

这里，$h_{\hat{\mu}}(\chi^+(M,\nu))$ 是由 ν （*[31,*定义 *I.2.1]*）生成的随机动力系统的测度熵，$\{(\lambda_k, m_k)\}^l{}_{k=1}$是$\hat{}\mu$的李雅普诺夫指数及其重数，定义见命题 *2.1*。

2.4 圆周 $\mathbb{S}^1$ 上随机扩张映射的平稳 SRB 测度

令$E^r(\mathbb{S}^1)$ 表示$C_r(\mathbb{S}^1)$ 的开子集，由 $\mathbb{S}^1$ 的C_r扩张映射构成，

$$E^r(\mathbb{S}^1)=\left\{f\in C^r(\mathbb{S}^1):|f'(x)|>1,\ \forall x\in\mathbb{S}^1\right\}.$$

回想一下，本文中我们始终假设$r\geq 2$。

对每个 $f\in E^r(\mathbb{S}^1)$，记为

$$\|f\|_{C^2}=\sup_{x\in\mathbb{S}^1}\max\left\{|f'(x)|,|f''(x)|\right\}.$$

并令 $\deg(f)$ 表示f的次数。对于每个扩张映射$f \in E^r(\mathbb{S}^1)$，我们有

$$1 < |\deg(f)| = \int |f'(x)| d\mathrm{Leb}(x) \le \|f\|_{C^2}.$$

and

$$\left|\log|f'(x)| - \log|f'(y)|\right| \le \|f\|_{C^2} \cdot d(x,y).$$

记 $\Sigma_+ = \left(E^r(\mathbb{S}^1)\right)^{\mathbb{N}}$ 为扩张映射序列的集合

$$\omega = (\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} = (f_{\omega_0}, f_{\omega_1}, f_{\omega_2}, \cdots) \in \Sigma_+, \qquad \text{where} \qquad f_{\omega_i} \in E^r(M).$$

设 $\sigma\colon \Sigma_+ \to \Sigma_+$ 为移位映射（f_{ω_i}）$\mapsto$（$f_{\omega_{i+1}}$），且 $F_+\colon \Sigma_+ \times \mathbb{S}^1 \to \Sigma_+ \times \mathbb{S}^1$ 为相应的扭积系统

$$F_+(\omega, x) = \left(\sigma(\omega), f_\omega(x)\right) = \left(\sigma(\omega), f_{\omega_0}(x)\right), \qquad \omega \in \Sigma_+,\ x \in \mathbb{S}^1.$$

设 ν 为 $E^r(\mathbb{S}^1)$ 上的博雷尔概率测度。与 ν 支持在微分同胚上的情形一样，$\mathbb{S}^1$ 上的博雷尔概率测度 μ 是一个 ν-平稳测度

$$\mu = \int f_*(\mu) d\nu(f),$$

if a当且仅当 $\nu^{\mathbb{N}} \times \mu$ 是 $\Sigma_+ \times \mathbb{S}^1$ 上的 F_+-不变测度。（参见 [31, 第 1] 章）　　.

下述定理证明了 ν-平稳 SRB 测度的存在性和绝对连续性，该结果已在 [25, 定理B'], 中证明，另见 [26, 27]。

定理 2.11. 设 ν 是 $E^2(\mathbb{S}^1)$ 上满足以下条件的概率测度

$$\int \log\|f\|_{C^2} d\nu(f) < \infty.$$

存在唯一的 ν-平稳遍历 *SRB* 测度 μ_{SRB}，其与 $\mathbb{S}^1$ 上的勒贝格测度等价。

注 2.12。由于 μ_{SRB} 与 $\mathbb{S}^1$ 上的勒贝格测度等价，因此存在非负函数 $q(x) \in L^1(\mathbb{S}^1, \mathrm{Leb})$，使得

$$\frac{1}{q(x)} \in L^1(\mathbb{S}^1, \mu_{\mathrm{SRB}}) \qquad and \qquad q(x) = \frac{d\mu_{\mathrm{SRB}}}{d\mathrm{Leb}}(x), \qquad \mathrm{Leb}\ a.e.\ x \in \mathbb{S}^1.$$

3 结果陈述

3.1 $\mathbb{S}^1$ 上扩张映射的谱刚性

我们回顾 Baxendale 在 [1] 中给出的一个定理：对于由微分同胚生成的随机游走以及任意遍历的、绝对连续的平稳测度 μ，所有李雅普诺夫指数之和（计重数）均不大于零。此外，当且仅当 μ 在几乎处处的生成元下不变时，等号成立。

在 $\mathbb{S}^1$ 上扩张映射的情形中，我们有如下 Baxendale 型定理，它推广了定理 1.1。事实上，下面的结果给出了唯一绝对连续平稳测度的李雅普诺夫指数所满足的不等式。当等号成立时，我们的随机动力系统具有刚性：平稳测度在每个生成元下均不变，并且这些生成元可以同时光滑共轭于仿射映射。

回忆一下，对于$f \in E^r(\mathbb{S}^1)$ 和 $r \ge 2$，有 $\|f\|_{C^2} = \sup_{x\in\mathbb{S}^1} \max\left\{|f'(x)|, |f''(x)|\right\}$。

定理 3.1。 设 ν 是 $E^r(\mathbb{S}^1)$ $(r \geq 2)$ 上满足以下条件的概率测度

$$\int \log \|f\|_{C^2} d\nu(f) < \infty.$$

ν平稳 *SRB* 测度 μ_{SRB} 的李雅普诺夫指数满足

$$\lambda(\mu_{\mathrm{SRB}}) \leq \int \log|\deg(f)| d\nu(f).$$

此外，当且仅当存在 $h \in$ 微分同胚$^r(\mathbb{S}^1)$ 同时将支集 ν中的每个 f 共轭到一个仿射扩张映射时，等号成立：

$$h \circ f \circ h^{-1}(x) = \deg(f) \cdot x + \rho_f, \qquad where \quad \rho_f \in \mathbb{S}^1.$$

注记 3.2. 这里我们无需假设 ν 的支集在 $E^r(\mathbb{S}^1)$中有界或离散。直接取 ν 为具有有限支撑且概率相等的测度，即可由该定理推出定理 *1.1*。证明的主要思路源自 *[29]* 和 *[1]*的经典论证。

3.2 随机自同构的李雅普诺夫指数

全文中，我们考虑一族 $\{A_i\}^m{}_{i=1} \subseteq \mathrm{GL}(d, \mathbb{Z})$。对于独立同分布矩阵乘积，我们有如下 Oseledec 乘法遍历定理版本。

命题 3 3 $= \quad i \ 1 \leq i \leq m \qquad i \quad =1 \subseteq \quad \mathbb{Z} \quad i \quad i \ >$**..** 设 p $\{p\}$是定义在 $0 \quad 1 \leq \quad \leq \quad -\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < \quad < \lambda_l < \infty \quad \mathbb{N}$ $\{A\}^m i\, GL(d,)$ 上的概率向量，且对每个 i m 都有 $p(A)$。存在 $\cdots$，使得对于 p 几乎处处的序列 $\omega = (A_{i_0}, A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots)$，存在一个旗标

$$\{0\} = V_\omega^0 \subsetneq V_\omega^1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_\omega^l = T_x M,$$

使得对所有 $1 \leq k \leq l$ 和 $v \in V_{k\omega} \backslash V_{k_\omega}{}^{-1}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|A_{i_{n-1}} \circ \cdots \circ A_{i_0}(v)\| = \lambda_k.$$

我们注意到，如果 μ 是 $\mathbb{T}^d$ 上的 p-平稳概率测度，那么命题 2.1 给出的李雅普诺夫指数和旗标与命题 prop:Lyapaffine 中的相同；特别是，它们与 x 无关。

3.3 单个自同构及交换族的谱刚性

我们考察二维环面上单个阿诺索夫微分同胚 f 的随机扰动相对于 SRB 平稳测度的李雅普诺夫指数。当 SRB 指数与 f 的线性化指数一致时，我们证明了扰动族具有刚性。

定理 3.4。 设 $f \in \mathrm{Diff}^r(\mathbb{T}^2)$ 是一个阿诺索夫微分同胚（$r \geq 2$），且 $A = f_* \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ 是其线性部分。存在 f 的一个 C^2-邻域 $\mathscr{U}f \subseteq \mathrm{Diff}^r(\mathbb{T}^2)$，使得对于 $\mathrm{Diff}^r(\mathbb{T}^2)$ 上任意满足 $\nu(\mathscr{U}_f) = 1$ 的概率 ν，令 μ_{SRB} 为唯一的 ν-平稳 *SRB* 测度，则有：

- $|\lambda^{\pm}(\mu\text{SRB})| \le |\lambda^{\pm}(A)|$。

- 若 $\lambda^{+}(\mu_{\text{SRB}}) = \lambda^{+}(A)$，则存在一个 $C\hat{}r$ 叶状结构 $\mathscr{F}s$，使得对于 ν-几乎处处的 $g \in \text{Diff}r(\mathbb{T}^2)$，$\mathscr{F}s = \mathscr{F}sg$。特别地，稳定叶状结构 $\{\mathscr{F}s_\omega\}$ 几乎必然独立于 ω，且为 $C\hat{}r$ 光滑。

- 若 $\lambda^{+}(\mu_{\text{SRB}}) = \lambda^{+}(A)$ 且 $\lambda^{-}(\mu_{\text{SRB}}) = \lambda^{-}(A)$，则存在 $h \in \text{Diff}r_{-}(\mathbb{T}^2)$，它能同时将 ν 支集中的每个 g 共轭为一个仿射 *Anosov* 微分同胚：

$$h \circ g \circ h^{-1} = A + v_g, \qquad \nu\text{-a.e. } g \in \text{Diff}^r(\mathbb{T}^2),$$

其中 $v_g \in \mathbb{T}^2$。

注 3.5。 在此定理中，对于每个 $g \in \text{Supp}(\nu)$，稳定丛的非随机性和同时线性化实际上都成立。此外，若取 ν 支撑于 f 的一个 C^1-邻域内，但满足可积性条件 *(2)*，则本定理的结论仍然成立。本文其余定理也有相同的结论。

在高维情形下，de la Llave [33] 构造了具有可约线性化的保体积 Anosov 微分同胚，其李雅普诺夫谱与其线性化的李雅普诺夫谱相同，但它们并非 Lipschitz 共轭于其线性化。为排除 de la Llave 的此类例子，我们为 $\text{GL}(d, \mathbb{Z})$ 中的自同构引入以下一般性假设。

定义 3.6。 若 $A \in \text{GL}(d, \mathbb{Z})$ 满足以下条件，则称其为泛型：

1. A 是双曲的，即 A 的谱与 $\mathbb{C}$ 中的单位圆不相交；*2.* A 和 A^4 不可约，即它们的特征多项式在 $\mathbb{Q}$ 上不可约；*3.* A 没有三个特征值的绝对值相同；若 A 的两个特征值绝对值相同，则它们是一对共轭复特征值。

已在 [12] 证明，一般自同构$A \in \text{GL}(d, \mathbb{Z})$在$\text{GL}(d, \mathbb{Z})$中具有满概率：

$$\lim_{K\to+\infty} \frac{\sharp\{A \in \text{GL}(d,\mathbb{Z}) \text{ is generic} : \|A\| \le K\}}{\sharp\{A \in \text{GL}(d,\mathbb{Z}) : \|A\| \le K\}} = 1.$$

设$A \in \text{GL}(d, \mathbb{Z})$是一个泛型（特别是对 $\mathbb{Q}$不可约的）双曲自同构，它具有最细支配分裂

$$T\mathbb{T}^d = L_l^s \oplus \cdots L_1^s \oplus L_1^u \oplus \cdots L_k^u. \tag{4}$$

也就是说，(4) 中的分裂是A-不变的，A 在每个不变子空间$A|_{L^{s/u}j}$上的限制都是共形的。此外，令 $\lambda(A, L^{s/u}{}_j) := \log \|A|_{L^{s/u}j}\|$，我们假设这些子空间按如下顺序排列

$$\lambda(A, L_{i+1}^s) < \lambda(A, L_i^s) < 0, \qquad 0 < \lambda(A, L_j^u) < \lambda(A, L_{j+1}^u), \qquad i = 1, \cdots, l-1,\ j = 1, \cdots, k-1.$$

设$A' \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{Z})$与$A$可交换。那么每个$L^{s/u}{}_j$都是$A'$-不变的。若分裂 (4) 也是$A'$的最细支配分裂，我们就称$A'$具有相同的最细支配分裂；也就是说，若

$$\lambda(A', L^s_{i+1}) < \lambda(A', L^s_i) < 0, \qquad 0 < \lambda(A', L^u_j) < \lambda(A', L^u_{j+1}), \qquad i = 1, \cdots, l-1,\ j = 1, \cdots, k-1.$$

设 $\{A_i\}^m{}_{i=1} \subseteq \mathrm{GL}(d,\mathbb{Z})$ 是一族具有最细支配分裂的泛型可交换自同构，其最细支配分裂为 A_1 (4)。那么，每个向量丛 $E^{s/u}{}_j$ 的维数都小于或等于 2。由可交换性可知，分裂 (4) 对 $i = 2, \cdots, m$ 是 A_i-不变的。设 ν_0 是 $\{A_i\}^m{}_{i=1}$ 上的一个概率测度，满足 $\nu_0(A_i) = p_i \in [0,1]$ 且 $\sum p_i = 1$。那么，对于任意 ν_0-平稳测度 μ，μ 在 $L^{s/u}{}_j$ 中的李雅普诺夫指数等于以下线性组合

$$\lambda(\mu, L^{s/u}_j) = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot \lambda(A_i, L^{s/u}_j).$$

例如，我们可以取 μ 为 $\mathbb{T}^d$ 上的勒贝格测度，它是 ν_0-不变的，因此也是 ν_0-平稳的。

我们证明以下关于具有相同最细支配分裂的可交换自同构扰动的定理，该定理蕴含定理 1.3。显然，具有相同分裂的可交换自同构扰动共享相同的稳定与不稳定锥场。定理 2.10 表明，支撑在这些扰动上的每个概率测度都存在一个平稳 SRB 测度。

定理 3.7。 设 $\{A_i\}^m i_{=1} \subseteq \mathrm{GL}(d,\mathbb{Z})$ 是一族相互交换且具有相同支配分裂的一般自同构。存在一个邻域族 $A_i \in \mathcal{U}_i \subseteq \mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^d)$，对应于 $i = 1, \cdots, m$，使得对于任意支撑在 $\cup \mathcal{U}_i \subseteq \mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^d)$ 上的概率测度 ν，满足

$$\nu(\mathcal{U}_i) = p_i \in [0,1] \qquad and \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

令 μ_{SRB} 为 ν-平稳 *SRB* 测度，并记 ν_0 为支撑在 $\{A_i\}^m\, i_{=1}$ 上的概率测度，其中$\nu_0(A_i) = p_i$。

- 若 μ_{SRB} 的正李雅普诺夫指数与任意 ν_0-平稳测度的正李雅普诺夫指数（计重数）相同，则存在一个 C^{1+} 叶状结构 $\mathcal{F}s$，使得对 ν_0-几乎处处的 $g \in \mathrm{Diff}r(\mathbb{T}d)$，有 $\mathcal{F}s = \mathcal{F}sg$。特别地，稳定叶状结构 $\{\mathcal{F}s_\omega\}$ 几乎必然独立于 ω，且为 C^{1+} 光滑。

- 如果 μ_{SRB} 测度的所有李雅普诺夫指数都与任意 ν_0-平稳测度的所有李雅普诺夫指数（计重数）相同，那么存在 $h \in \mathrm{Diff}^{1+}(\mathbb{T}^2)$，使其同时将 ν 支集中的每个 f 共轭为一个仿射 *Anosov* 微分同胚：

$$h \circ f \circ h^{-1} = A_i + v_f, \qquad \nu\text{-}a.e.\ f \in \mathcal{U}_i,$$

其中 $v f \in \mathbb{R}^d$，且对每个 $i = 1. \cdots, m$。

注记 3.8. 在此，同时线性化的结论成立。若取支撑$(\nu) \subseteq \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^d)$，则根据 *Kalinin-Sadovskaya-Wang [21, 22]*近期的研究，共轭 h 也是 C^∞-光滑的。

定理 3.4 和 3.7 是 Saghin 和 Yang [38] 以及 Gogolev、Kalinin 和 Sadovskaya [12]所得结果在随机情形下的对应版本。另可参见 DeWitt [4]的研究。事实上， [38, 12],文中考察了（李雅普诺夫指数简单或泛型的）Anosov 自同构的保体积扰动。如果扰动的李雅普诺夫指数与该自同构的李雅普诺夫指数一致，则证明相应的共轭是光滑的。

3.4 $\mathbb{T}^2$上的非交换自同构的谱刚性

设 $\{A_i\}^m{}_{i=1} \subseteq \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ 是一族具有双曲分裂 $T\mathbb{T}^2 = L^s{}_i \oplus L^u{}_i$ 的双曲非交换自同构，其中定义在 A_i 上。非交换性意味着存在满足 $L^s{}_i \neq L^s{}_j$ 且 $L^u{}_i \neq L^u{}_j$ 的 $i \neq j$。

例 3.9. 对于每个 $n_i \in \mathbb{N}_{\geq 2}$，$i = 1, \cdots, m$，且当 $i \neq j$ 时 $n_i \neq n_j$，令

$$A_i = \begin{bmatrix} n_i & n_i - 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

族 $\{A_i\}^m i_{=1}$ 在 $\mathbb{T}^2$ 上诱导出一族双曲非交换自同构。此外，$\{A_i\}^m i_{=1}$ 在 $\mathbb{T}^2$ 上共享稳定与不稳定锥场，其定义见定义 *2.5*。通过取平凡化 $T\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$，我们可以取

$$\mathscr{C}^s = \mathbb{T}^2 \times \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y \leq 0\} \qquad and \qquad \mathscr{C}^u = \mathbb{T}^2 \times \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y \geq 0\}. \tag{5}$$

下面的定理给出了非交换且具有共同稳定锥场和不稳定锥场的自同构的扰动的同时线性化，这蕴含定理 1.5。

通过同调上的诱导映射定义 $\Upsilon : \mathrm{Diff}^r(\mathbb{T}^2) \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$。也就是说，$f$与由 $\Upsilon(f)$ 诱导的 $\mathbb{T}^2$ 上的映射同伦。于是，给定 $\mathrm{Diff}^r(\mathbb{T}^2)$ 上的概率测度 ν，我们将其视为 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ 上的概率测度。令 $\lambda^{\pm}(\Upsilon_*\nu)$ 分别表示由命题 2.1 给出的独立同分布随机游走的最大和最小李雅普诺夫指数；特别地，它们是几乎必然的极限

$$\lambda^{\pm}(\Upsilon_*\nu) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|(A_{n-1} \dots A_0)^{\pm 1}\|$$

其中，A_i 相对于 $\Upsilon_*\nu$ 独立同分布地选取。

定理 3.10。 设 $\{A_i\}^m i_{=1} \subset \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ $(m \geq 2)$ 是一个非交换的锥双曲自同构族。存在邻域族 $\mathscr{U}_i \subseteq \mathrm{Diff}^r(\mathbb{T}^2)$，其分别是 A_i 的邻域，对 $i = 1, \cdots, m$ 以及 $r \geq 2$ 均成立，使得对于任意支撑在 $\cup \mathscr{U}_i \subseteq \mathrm{Diff}^r(\mathbb{T}^2)$ 上的概率测度 ν，若满足

$$\nu(\mathscr{U}_i) = p_i \in (0,1) \qquad and \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

存在唯一的 ν-平稳 *SRB* 测度 μ。

Then

$$\lambda^+(\mu) \leq \lambda^+(\Upsilon_*\nu). \tag{6}$$

此外，当且仅当存在 $h \in$ 微分同胚$^{r-}(\mathbb{T}^2)$，使得它同时将支集 ν 中的每个 f 共轭为仿射 *Anosov* 微分同胚时，(6) 中的等号成立：

$$h \circ f \circ h^{-1} = A_i + v_f, \qquad f \in \mathrm{Supp}(\nu),$$

其中 $v_f \in \mathbb{R}^2$，且对每个 $i = 1, \cdots, m$。

注 3.11. 取一族正矩阵$\{A_i\} \subseteq \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$时，由式 *(5)* 定义的稳定与不稳定锥场 $\mathscr{C}s, \mathscr{C}u$ 是$\{A_i\}$的公共稳定与不稳定锥场。此外，族$\{A_i\}$不可约，当且仅当存在不对易的 $A_i \neq Aj$。因此，任意不可约正矩阵族都满足定理 *3.10* 的假设，而定理 *3.10* 推出定理 *1.5*。

注记 3.12. 我们对 $\mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^d)$ 上的一族阿诺索夫微分同胚的 C^2-小扰动陈述所有扰动结果（定理 *3.7*、*3.4* 和 *3.10*）。若改为考虑在 $\mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^d)$ 中 C^2-有界且 C^1-小的扰动，所有结果仍然成立。为简洁起见，我们陈述 C^2-扰动的结果。

4 随机扩张映射的同时线性化

本节证明定理 3.1，该定理表明，平稳SRB测度的李雅普诺夫谱刚性意味着 $\mathbb{S}^1$ 上随机扩张映射的同时线性化。关键在于证明李雅普诺夫谱刚性意味着平稳 SRB 测度实际上是不变测度。这一想法源自 [29] 和 [1]。

证明　定理 *3.1.* 设 ν 是 $E^r(\mathbb{S}^1)$ $(r \geq 2)$ 上的一个概率测度，满足　s

$$\int \log \|f\|_{C^2} d\nu(f) < \infty. \tag{7}$$

因此，定理 2.11 和注 2.12 表明，存在唯一的 ν-平稳 SRB 测度 μ_{SRB}，它等价于勒贝格测度，且其密度满足

$$q(x) = \frac{d\mu_{\mathrm{SRB}}}{d\mathrm{Leb}}(x) \in L^1(\mathbb{S}^1, \mathrm{Leb}), \qquad \frac{1}{q(x)} \in L^1(\mathbb{S}^1, \mu_{\mathrm{SRB}}).$$

我们考虑斜积系统 F_+： $\Sigma_+ \times \mathbb{S}^1 \to \Sigma_+ \times \mathbb{S}^1$，其中

$$F_+(\omega, x) = \big(\sigma(\omega), f_\omega(x)\big) = \big(\sigma(\omega), f_{\omega_0}(x)\big), \qquad \omega \in \Sigma_+ = \big(E^r(\mathbb{S}^1)\big)^{\mathbb{N}},\ x \in \mathbb{S}^1.$$

概率测度 $\nu^{\mathbb{N}} \times \mu_{\mathrm{SRB}}$ 是一个遍历的 F_+-不变测度。

由于 $1/q(x) \in L^1(\mathbb{S}^1, \mu_{\mathrm{SRB}})$，且 ν 满足可积性条件 (7)，我们有

$$Q(\omega, x) = \frac{q(f_\omega(x))}{q(x)} \cdot \frac{|f'_\omega(x)|}{|\deg(f_\omega)|} \in L^1(\nu^{\mathbb{N}} \times \mu_{\mathrm{SRB}}).$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_+}\int_{\mathbb{S}^1} Q(\omega,x)\, d\mu_{\mathrm{SRB}}(x)\, d\nu^{\mathbb{N}}(\omega) &= \int_{\Sigma_+}\int_{\mathbb{S}^1} \frac{q(f_{\omega(x)})}{q(x)} \cdot \frac{|f'_\omega(x)|}{|\deg(f_\omega)|}\, d\mu_{\mathrm{SRB}}(x)\, d\nu^{\mathbb{N}}(\omega) \\
&= \int_{\Sigma_+} \frac{1}{|\deg(f_\omega)|} \left[\int_{\mathbb{S}^1} q(f_\omega(x)) |f'_\omega(x)|\, d\mathrm{Leb}(x)\right] d\nu^{\mathbb{N}}(\omega) \\
&= \int_{\Sigma_+} \frac{|\deg(f_\omega)|}{|\deg(f_\omega)|}\, d\nu^{\mathbb{N}}(\omega) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

由于 $\nu^{\mathbb{N}}\times\mu_{\mathrm{SRB}}$ 相对于 F_+ 是遍历的，对于 $\nu^{\mathbb{N}}\times\mu_{\mathrm{SRB}}$-几乎处处的 $(\omega,x)\in\Sigma_+\times\mathbb{S}^1$，记为

$$\mu_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{F_+^i(\omega,x)},\qquad \text{we have}\qquad \lim_{n\to\infty}\int Q d\mu_n=1.$$

取 $\nu^{\mathbb{N}}\times\mu_{\mathrm{SRB}}$ 的典型点 (ω,x)，它满足

$$\begin{aligned}0&=\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}Q\circ F_+^i(\omega,x)\right)\geq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log Q\circ F_+^i(\omega,x)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\log q(f_\omega^n(x))-\log q(x)\right]+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log\frac{\left|f'_{\sigma^i(\omega)}\left(f_\omega^i(x)\right)\right|}{\left|\deg(f_{\sigma^i(\omega)})\right|}\end{aligned}\tag{8}$$

命题 4.1. 存在一个无限子列 $\{n_k\}\subseteq\mathbb{N}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\left[\log q(f_\omega^{n_k}(x))-\log q(x)\right]=0.$$

命题的证明。定义 $n_{k+1}=\inf\{m>n_k\colon q(f_{m\omega}(x))<\sqrt{m}\}$，其中 $n_0=0$ 满足 n，于是我们有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\left[\log q(f_\omega^{n_k}(x))-\log q(x)\right]\leq\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\left[\log\sqrt{n_k}-\log q(x)\right]=0.$$

我们只需证明 $n_k\to\infty$ 随 $k\to\infty$ 趋于无穷。否则，对于每个足够大的 $m\in\mathbb{N}$，

$$\frac{1}{q(f_\omega^m(x))}\leq\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

由于测度 $\sum_{m=0}^{n-1}\delta_{f^{m\omega}}(x)$ 在 $\mathbb{S}^1$ 上收敛到 μ_{SRB}，我们有

$$1=\int_{\mathbb{S}^1}\frac{\mathrm{Leb}}{\mu_{\mathrm{SRB}}}d\mu_{\mathrm{SRB}}=\int_{\mathbb{S}^1}\frac{1}{q(x)}d\mu_{\mathrm{SRB}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{q(f_\omega^m(x))}\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{m}}=0.$$

这显然荒谬。 □

我们继续证明定理 3.1。由方程 (8) 和命题 4.1，可得

$$0\geq\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}\log\frac{\left|f'_{\sigma^i(\omega)}\left(f_\omega^i(x)\right)\right|}{\left|\deg(f_{\sigma^i(\omega)})\right|}.$$

这等价于

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}\log\left|f'_{\sigma^i(\omega)}\left(f_\omega^i(x)\right)\right|\leq\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}\left|\deg(f_{\sigma^i(\omega)})\right|.$$

由于 (ω,x) 是 $\nu^{\mathbb{N}}\times\mu_{\mathrm{SRB}}$ 的一个典型点，μ_{SRB} 的李雅普诺夫指数满足

$$\begin{aligned}\lambda(\mu_{\mathrm{SRB}})&=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}\log\left|f'_{\sigma^i(\omega)}\left(f_\omega^i(x)\right)\right|\\&\leq\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}\left|\deg(f_{\sigma^i(\omega)})\right|=\int_{E^r(\mathbb{S}^1)}|\deg(f)|d\nu(f).\end{aligned}$$

这就证明了定理 3.1 中的不等式。

最后，假设 $\lambda(\mu_{\mathrm{SRB}})=\int_{E^r(\mathbb{S}^1)}|\text{度}(f)|d\nu(f)$，我们有如下断言。

命题 4.2. 如果 $\lambda(\mu_{\mathrm{SRB}})=\int_{E^r(\mathbb{S}^1)}$度$(f)d\nu(f)$，那么 μ_{SRB}是一个f-不变测度，对 ν-几乎处处的$f\in Er(\mathbb{S}^1)$以及

$$q(f(x))\cdot|f'(x)|=|\deg(f)|\cdot q(x),\qquad \text{Leb - a.e. } x\in\mathbb{S}^1.$$

命题的证明。记该集合为

$$G=\left\{(\omega,x)\in\Sigma_+\times\mathbb{S}^1:\ Q(\omega,x)=\frac{q(f_\omega(x))}{q(x)}\cdot\frac{|f'_\omega(x)|}{|\deg(f_\omega)|}\neq 1\right\}.$$

若 $\nu^{\mathbb{N}}\times\mu_{\mathrm{SRB}}(G)>0$，则存在一个 <0，使得

$$\int_{\Sigma_+\times\mathbb{S}^1}\log(G)\,d\nu^{\mathbb{N}}\times\mu_{\mathrm{SRB}}<a.$$

对于 $\nu^{\mathbb{N}}\times\mu_{\mathrm{SRB}}$ 的典型点 (ω,x) 和 $\mu_n=1/n\cdot\sum^{n-1}{}_{i=0}\,\delta_{F_+^i(\omega,x)}$，存在一个 $N>0$，使得

$$\int_{\Sigma_+\times\mathbb{S}^1}\log(G)\,d\mu_n<\frac{a}{2},\qquad \forall n\geq N.$$

由方程 (8)，对于每个$n\geq N$，有

$$\frac{1}{n}\left[\log q(f_\omega^n(x))-\log q(x)\right]+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log\frac{\left|f'_{\sigma^i(\omega)}\left(f_\omega^i(x)\right)\right|}{\left|\deg(f_{\sigma^i(\omega)})\right|}<\frac{a}{2}.$$

取命题 4.1 中的子列 $\{n_k\}$，并令$k\to\infty$，则有

$$\begin{aligned}\lambda(\mu_{\mathrm{SRB}})&=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}\log\left|f'_{\sigma^i(\omega)}\left(f_\omega^i(x)\right)\right|\\&\leq\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}\left|\deg(f_{\sigma^i(\omega)})\right|+\frac{a}{2}\\&=\int_{E^r(\mathbb{S}^1)}|\deg(f)|d\nu(f)+\frac{a}{2}.\end{aligned}$$

这就产生了矛盾。因此，我们有 $\nu^{\mathbb{N}}\times\mu_{\mathrm{SRB}}(G)=0$，也就是说

$$Q(\omega,x)=\frac{q(f_\omega(x))}{q(x)}\cdot\frac{|f'_\omega(x)|}{|\deg(f_\omega)|}=1,\qquad \nu^{\mathbb{N}}\times\mu_{\mathrm{SRB}}\text{ - a.e. }(\omega,x)\in\Sigma_+\times\mathbb{S}^1.$$

这意味着，对于 ν-几乎处处的$f\in E^r(\mathbb{S}^1)$，它满足

$$q(f(x))\cdot|f'(x)|=|\deg(f)|\cdot q(x),\qquad \text{Leb - a.e. } x\in\mathbb{S}^1.$$

这证明了该断言。 □

对于 ν-几乎处处的$f\in E^r(\mathbb{S}^1)$，由于 μ_{SRB} 与勒贝格测度等价且为 f-不变测度，它是 f 唯一的 SRB 测度。因此，密度 $q(x)$ 是C^{r-1}-光滑的，并且在 $\mathbb{S}^1$上有正下界，参见 [41, 28]。由f和q的光滑性可知，

$$q(f(x))\cdot|f'(x)|\equiv q(x)\cdot|\deg(f)|,\qquad \forall x\in\mathbb{S}^1.$$

定义

$$h(x)=\int_0^x q(t)\,d\mathrm{Leb}(t)\ \in\ \mathrm{Diff}^r(\mathbb{S}^1),$$

它满足

$$|\left(h\circ f\circ h^{-1}\right)'(x)|\equiv|\deg(f)|,\qquad \forall x\in\mathbb{S}^1,\ \nu\text{ - a.e. }f\in E^r(\mathbb{S}^1).$$

这意味着，对于几乎处处的 ν，$f\in E^r(\mathbb{S}^1)$，存在 $\rho_f\in\mathbb{S}^1$，使得

$$h\circ f\circ h^{-1}(x)\equiv\deg(f)\cdot x+\rho_f,\qquad \forall x\in\mathbb{S}^1.$$

这就证明了定理 3.1。 □

5 斜积与纤维逐叶共轭

本节将说明具有 $\mathbb{T}^d$ 纤维的纤维 Anosov 斜乘积系统的结构稳定性，以及其中间稳定与不稳定叶状结构的稳定性。

5.1 纤维方向 Anosov 系统的结构稳定性

如注 2.6 所述，锥双曲性是 C^1-开性质。

引理 5.1。 设 $\mathscr{A}=\{A_i\}^m i=1\subseteq\mathrm{GL}(d,\mathbb{Z})$ 是一个由自同构组成的锥双曲族。设 $\Omega_0=\mathscr{A}^{\mathbb{Z}}$，并令

$$A:\Omega_0\times\mathbb{T}^d\to\Omega_0\times\mathbb{T}^d,\qquad A(\omega,x)=\left(\sigma(\omega),f_\omega(x)\right)$$

其为纤维方向 *Anosov* 错列积。

那么存在一族两两不交的邻域 $\mathscr{U}_i\subseteq\mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^d)$，它们分别对应于 A_i，使得对于 $\mathscr{U}=\cup\mathscr{U}_i$ 和 $\Omega=\mathscr{U}^{\mathbb{Z}}$，相应的斜积

$$F:\Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega\times\mathbb{T}^d,\qquad F(\omega,x)=\left(\sigma(\omega),f_\omega(x)\right)$$

也是纤维方向 *Anosov*。

我们引入若干个与 A 的扰动相关联的扭系统。

定义 5.2。 令 $\mathscr{A}=\{A_i\}^m i=1\subset\mathrm{GL}(d,\mathbb{Z})\subseteq\mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^d)$，并令 $\Omega_0:=\mathscr{A}^{\mathbb{Z}}$。给定

$$\omega=(\ldots,M_{-1},M_0,M_1,\ldots)\in\Omega_0,$$

令 $A_\omega=M_0$。令 $A:\ \Omega_0\times\mathbb{T}^d\to\Omega_0\times\mathbb{T}^d$ 为由下式给出的诱导扭积

$$A(\omega,x)=(\sigma(\omega),A_\omega(x)).$$

给定 $\mathscr{U}\subseteq\mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^d)$ 的一个开邻域 $\mathscr{A}$，回顾映射 $\Upsilon:\ \mathscr{U}\subseteq\mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^d)\to\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$，它由同调上的诱导映射给出。记作 $\Omega=\mathscr{U}^{\mathbb{Z}}$。取 $\mathscr{U}$ 充分小后，对于 $\omega=(\ldots,f_{-1},f_0,f_1,\ldots)\cdots\in\Omega$，也将诱导映射记作 $\Upsilon:\ \Omega\to\Omega_0$，

$$\Upsilon(\omega):=\left(\ldots,\Upsilon(f_{-1}),\Upsilon(f_0),\Upsilon(f_1),\ldots\right).\tag{9}$$

对于 $\mathscr{U}$ 作为 *ab ove* 和 $\Omega=\mathscr{U}^{\mathbb{Z}}$，令 $\bar{}A:\ \Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega\times\mathbb{T}^d$ 为 A 在移位 Ω上的扩张：

$$\bar{A}(\omega,x)=\left(\sigma(\omega),\bar{A}_\omega(x)\right)=\left(\sigma(\omega),\Upsilon(f_\omega)(x)\right).$$

我们还将 $\Upsilon:\ \Omega\to\Omega_0$ 推广至 $\Upsilon:\ \Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega_0\times\mathbb{T}^d$，方法是

$$\Upsilon(\omega,x)=(\Upsilon(\omega),x).$$

纤维 Anosov 系统在充分小的扰动下满足纤维方向结构稳定性。对于单个 Anosov 微分同胚，这是一个经典标准结果（参见[23, 定理 18.2.1 和 19.1.2]）。关于单个 Anosov（或 Axiom A）微分同胚的随机扰动的结构稳定性，参见 [30]。对纤维方向 Anosov 系统 A 进行扰动时的证明，是对 [30] 中经典论证的直接改编。

命题 5.3。 设 $\mathscr{A}=\{A_i\}_{i=1}^m \subset \mathrm{GL}(d,\mathbb{Z}) \subseteq \mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^d)$ 是一族具有共同稳定与不稳定锥场的阿诺索夫微分同胚，并设 $\Omega_0=\mathscr{A}^{\mathbb{Z}}$。纤维 *Anosov* 错列积 $A:\Omega_0\times M \to \Omega_0\times M$ 在以下意义下结构稳定：

固定邻域 $\mathscr{U}$，使其充分小，从而斜积 $F:\Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega\times\mathbb{T}^d$ 是纤维方向 *Anosov*。于是存在一个投影到底空间上的恒等映射的同胚

$$H:\Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega\times\mathbb{T}^d,\qquad H(\omega,x)=(\omega,H_\omega(x)),$$

它满足以下性质：

1. H 是一个连续共轭，满足 $H\circ F=\bar{A}\circ H:\Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega\times\mathbb{T}^d$，并且它下降为一个连续半共轭 $(\Upsilon\circ H)\circ F=A\circ(\Upsilon\circ H):\Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega_0\times\mathbb{T}^d$。

2. 对每个 $\omega\in\Omega$，$H_\omega:\ \mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$ 都是双 *Hölder* 同胚，使得对每个 $x\in\mathbb{T}^d$，

$$H_{\sigma(\omega)}\left(f_\omega(x)\right)=\bar{A}_\omega\left(H_\omega(x)\right)=A_{\Upsilon(\omega)}\left(H_\omega(x)\right).$$

3. 对每个 $\omega\in\Omega$，映射 $H_\omega:\ \mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$ 一致地（关于 ω）C^0 接近恒等映射，并且将稳定和不稳定叶状结构相互交织：

$$H_\omega\left(\mathscr{F}^s_\omega\right)=\mathscr{F}^s_{\Upsilon(\omega)},\qquad and\qquad H_\omega\left(\mathscr{F}^u_{\omega,}\right)=\mathscr{F}^u_{\Upsilon(\omega)}.$$

给定 $\omega=(..,\omega_{-1},\omega_0,\omega_1,..),\xi=(..,\xi{-}1,\xi_0,\xi_1,\ldots)\in\Omega$，我们定义 Smale 括号 et

$$[\omega,\xi]:=(\ldots,\omega_{-2},\omega_{-1},\xi_0,\xi_1,\ldots).$$

我们有

$$\mathscr{F}^s_\omega=\mathscr{F}^s_{[\xi,\omega]},\qquad \mathscr{F}^u_\omega=\mathscr{F}^u_{[\omega,\xi]}. \tag{10}$$

我们指出，（命题 5.3 的证明）给出如下结论：对于任意 (ω,x)、$(\xi,y)\in\Omega\times\mathbb{T}^d$，存在 $R>0$，使得

$$z\in\mathscr{F}^u_\omega(x)\cap\mathscr{F}^s_\xi(y)=\mathscr{F}^u_{[\omega,\xi]}(x)\cap\mathscr{F}^s_{[\omega,\xi]}(y)$$

使得相对于浸入子流形上诱导的黎曼距离 $d_{\mathscr{F}^u_\omega}(\cdot,\cdot)$ 和 $d_{\mathscr{F}^{s}\omega}(\cdot,\cdot)$,

$$d_{\mathscr{F}^u_\omega}(x,z)\le R,\qquad d_{\mathscr{F}^s_\xi}(y,z)\le R.$$

由于斜积系统 $F:\ \Omega\times M\to\Omega\times M$ 和扩张 $A:\ \Omega_0\times M\to\Omega_0\times M$ 都是在字母表为波兰空间（完备、可分、第二可数空间）子集的全移位上纤维方向 Anosov，因此这些斜积系统满足阿诺索夫闭合引理和 Livšic 定理。我们首先回顾阿诺索夫闭合引理的定义。

引理 5.4。 纤维方向 *Anosov* 错列积系统 $F:\Omega\times M\to\Omega\times M$ 满足阿诺索夫闭合引理和 *Livšic* 定理：

1. 存在常数 c， δ_0， $\gamma>0$，使得对于任意 $x \in X$ 和 $k \in \mathbb{N}$，若 $d\left(x, f k(x)\right)<\delta_0$，则存在一个周期点 $p \in X$，使得 $f k(p)=p$，并且轨道段 x， $f(x)$， $\cdots$， $f k(x)$ 和 p， $f(p)$， $\cdots$， $f k(p)$ 保持指数级接近

$$d\left(f^i(x), f^i(p)\right) \leq c \cdot \exp\left(-\gamma \cdot \min\{i, k-i\}\right) \cdot d\left(x, f^k(x)\right), \qquad \forall i=0, \cdots, k.$$

2. 若 $\varphi, \psi: \Omega \times M \rightarrow \mathbb{R}$ 是两个有界赫尔德连续函数，满足

$$\sum_{i=0}^{l-1} \varphi \circ F^i(\omega, x)=\sum_{i=0}^{l-1} \psi \circ F^i(\omega, x), \qquad \forall(\omega, x) \text{ with } F^l(\omega, x)=(\omega, x),$$

那么存在一个赫尔德连续函数 $u: \Omega \times M \rightarrow \mathbb{R}$，使得

$$\varphi=\psi+u \circ F-u.$$

此外，u 在相差一个常数的意义下唯一。

扩张系统 $A: \Omega \times M \rightarrow \Omega \times M$ 也满足阿诺索夫闭合引理和 *Livšic* 定理。

我们指出，斜积系统 $F: \Omega \times \mathbb{T}^d \rightarrow \Omega \times \mathbb{T}^d$ 是以全移位系统 $\sigma: \Omega \rightarrow \Omega$ 为底的纤维方向 Anosov 系统，因此沿纤维方向和底空间方向都具有局部乘积结构。这意味着阿诺索夫闭合引理对 F 成立。我们还指出，由于 Ω 的字母表是第二可数的，全移位 $\omega: \Omega \rightarrow \Omega$ 是拓扑传递的，因此斜积系统 $F: \Omega \times \mathbb{T}^d \rightarrow \Omega \times \mathbb{T}^d$ 也是拓扑传递的。由此，Livšic 定理可由阿诺索夫闭合引理和稠密轨道的存在性推出。

$\mathbb{T}^d$ 上的线性叶状结构

注意， $\mathbb{R}^d$ 通过加法在 $\mathbb{T}^d$ 上起传递作用。所谓 $\mathbb{T}^d$ 上的线性叶状结构 $\mathscr{L}$，是指其叶 $\mathscr{L}$（x）具有如下形式的叶状结构：

$$\mathscr{L}(x):=x+E_{\mathscr{L}}$$

其中，向量子空间 $E_{\mathscr{L}} \subset \mathbb{R}^d$ 可任意选取。对每个 $x \in \mathbb{T}^d$，我们自然地将 $T_x \mathscr{L}$（x）$\simeq$ 与 $E_{\mathscr{L}}$ 等同。我们陈述一些引理，给出确保 $\mathbb{T}^d$ 上的叶状结构为线性叶状结构的充分条件。首先，我们有以下引理，出自 [15]。

所谓 C^0-叶状结构，我们仅指拓扑叶状结构。特别地，我们只假设叶是连续子流形。给定两个 C^0-叶状结构 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{F}$，要使 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{F}$ 拓扑横截，一个充分条件是存在相应的局部坐标图，使得 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{F}$ 的原像具有 C^1 叶，且这些叶处处横截（维数互补）。若每一条叶都稠密，则叶状结构 $\mathscr{F}$ 称为极小。

引理5.5 ([15, 引理2。1])。 设 $\mathbb{T}^d$ 上有一个 C^0-叶状结构 $\mathscr{F}$，它由一个极小线性叶状结构 $\mathscr{L}$ 子叶状分层。那么， $\mathscr{F}$ 是 $\mathbb{T}^d$ 上的极小线性叶状结构。

现在我们有以下引理，它表明整体映射的平行平移意味着 $\mathbb{T}^d$ 上的叶状结构是线性的。

引理 5.6. 设 $\mathscr{L}$ 是 $\mathbb{T}^d$ 上的极小线性叶状结构， $\mathscr{F}$ 是 $\mathbb{T}^d$ 上的一个 C^0-叶状结构，满足以下条件：

- 存在一个极小线性叶状结构 $\mathscr{G}$，其叶完全饱和于 $\mathscr{F}$ 的叶和 $\mathscr{L}$的叶；此外，限制在 $\mathscr{G}$ 的每一叶上时，叶状结构 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{L}$ 在拓扑意义下横截；

- 对每个 $x \in \mathbb{T}d$ 和 $y \in \mathscr{F}(x)$，由 $\mathscr{F}$ 在叶 $\mathscr{F} \oplus \mathscr{L}(x)$ 内诱导的整体映射 $\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}}x,y : \mathscr{L}(x) \to \mathscr{L}(y)$ 是 C^1-光滑的，且其导数为恒等映射

$$D\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}}_{x,y} = \mathrm{Id} : T_x\mathscr{L}(x) = E_{\mathscr{L}} \longrightarrow T_y\mathscr{L}(y) = E_{\mathscr{L}}.$$

于是 $\mathscr{F}$ 是线性叶状结构。

证明。固定 $x_0 \in \mathbb{T}^d$，并令 $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^d$ 为一条 C^0 曲线，使得对每个$t \in [0,1]$，$x_0 + \gamma(t) \in \mathscr{F}(x_0)$。由于整体映射 $\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}}{}_{x_0,x_0+\gamma(t)} : \mathscr{L}(x_0) \to \mathscr{L}(x_0 + \gamma(t))$ 是恒等映射，对于每个 $x \in \mathscr{L}(x_0)$，我们有

$$\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}}_{x_0,x_0+\gamma(t)}(x) = x + \gamma(t) \in \mathscr{F}(x) \cap \mathscr{L}(x_0 + \gamma(t)).$$

因此，对每个 $x \in \mathscr{L}(x_0)$，$x + \gamma(t) \in \mathscr{F}(x)$。由$x \in \mathscr{L}(x_0)$ 参数化的映射族 $t \mapsto x + \gamma(t)$ 是等度连续的；根据 $\mathscr{L}(x_0)$ 的密度以及 $\mathscr{F}$ 的连续性，

$$x + \gamma(t) \in \mathscr{F}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{T}^d, t \in [0,1].$$

由此可知，如果 γ、γ'：$[0,1] \to \mathbb{R}^d$ 是两条 C^0 曲线，使得对于每个 s、$t \in [0,1]$，都有 $x_0 + \gamma'(s) \in \mathscr{F}(x_0)$ 以及 $x_0 + \gamma(t) \in \mathscr{F}(x_0)$，那么对于每个

$$x + \gamma'(s) + \gamma(t) \in \mathscr{F}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{T}^d, s, t \in [0,1].$$

设 V为包含所有 $\gamma(t)$ 的 $\mathbb{R}^d$闭子群，其中 γ：$[0,1] \to \mathbb{R}^d$ 是一条满足对于每个 $t \in [0,1]$ 都有 $x_0 + \gamma(t) \in \mathscr{F}(x_0)$ 的 C^0曲线。则 V是连通的，因而是线性的，并且对于所有 $v \in V$ 和 $x \in \mathbb{T}^d$，都有 $x + v \in \mathscr{F}(x)$。 □

5.3 $\mathbb{T}^d$上的纤维逐叶共轭

在本小节中，我们考虑一族作用于 $\mathbb{T}^d$、具有相同最细支配分裂的交换自同构 $\{A_i\}^m{}_{i=1} \subseteq \mathrm{GL}(d, \mathbb{Z})$

$$T\mathbb{T}^d = L^s_l \oplus \cdots L^s_1 \oplus L^u_1 \oplus \cdots L^u_k.$$

记 $\mathscr{A} = \{A_i\}^m{}_{i=1}$ 和 $\Omega_0 = \mathscr{A}^{\mathbb{Z}}$。令

$$A : \Omega_0 \times \mathbb{T}^d \to \Omega_0 \times \mathbb{T}^d, \qquad A(\omega, x) = (\sigma(\omega), A_\omega(x))$$

为相应的纤维 Anosov 错列积。

根据命题 5.3，设 $\{\mathscr{U}_i\}$ 是分别属于 $\{A_i\}$ 的一族（两两不相交的）邻域，使得对于 $\mathscr{U} = \cup\mathscr{U}_i \subseteq \mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^d)$ 且满足 $\Omega = \mathscr{U}^{\mathbb{Z}}$ 时，相应的斜积 F: $\Omega \times \mathbb{T}^d \to \Omega \times \mathbb{T}^d$ 是纤维方向 Anosov。

令 $\bar{A}$：$\Omega \times \mathbb{T}^d \to \Omega \times \mathbb{T}^d$表示定义 5.2 中的扩张。由于$A$的纤维方向动力学是 $\{A_i\}^m{}_{i=1}$ 的复合，因此有以下引理。

引理 5.7. 斜积 $\bar{A}: \Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega\times\mathbb{T}^d$ 通过识别 $\mathbb{T}^d=\mathbb{T}^d_\omega=\{\omega\}\times\mathbb{T}^d$，存在纤维方向最精细支配分裂：

$$T\mathbb{T}^d_\omega=L^s_{l,\omega}\oplus\cdots L^s_{1\omega}\oplus L^u_{1,\omega}\oplus\cdots\oplus L^u_{k,\omega}=L^s_l\oplus\cdots L^s_1\oplus L^u_1\oplus\cdots\oplus L^u_k.$$

对于任意 $1\le i\le j\le k$，都存在一个 A-不变纤维方向线性叶状结构族 $\{\mathscr{L}u_{(i,j),\omega}\}_{\omega\in\Omega_0}$，使得

$$T\mathscr{L}^u_{(i,j),\omega}=L^u_{(i,j),\omega}=L^u_{i,\omega}\oplus\cdots\oplus L^u_{j,\omega}=L^u_i\oplus\cdots\oplus L^u_j.$$

稳定丛及相应稳定叶状结构 $\{\mathscr{L}s_{(i,j),\omega}\}_{\omega\in\Omega}$ 也有同样的结论，且对任意$1\le i\le j\le l$ 均成立。

对于每个 $1\le j<k$，分裂 $T\mathbb{T}^d=(L^s\oplus L^u(1,j))\oplus L^u(j+1,k)$ 对每个 A_i, $i=1,\cdots,m$ 都是支配分裂。在 $\mathbb{T}^d$ 上取一个适配黎曼度量后，存在常数 $\{\lambda^u{}_{j,i}>0\}^m{}_{i=1}$, $\{\lambda^u{}_{j+1,i}>0\}^m{}_{i=1}$ 和 $\epsilon>0$, 使得

$$\|A_i|_{L^u_{(1,j)}}\|<\exp(\lambda^u_{j,i}+\epsilon/2)<\exp(\lambda^u_{j+1,i}-\epsilon/2)<m(A_i|_{L^u_{(j+1,k)}}),\qquad\forall 1\le i\le m。\tag{11}$$

这里，$m(\cdot)$ 表示线性算子的余范数，定义为$m(L)=\|L^{-1}\|^{-1}$。注意，$\epsilon>0$可以取为与i、j无关。

对每个 $\omega\in\Omega$ 和 $n\ge1$，定义

$$\lambda^u_{j,\omega}(n):=\lambda^u_{j,\sigma^{n-1}(\omega)}+\lambda^u_{j,\sigma^{n-2}(\omega)}+\cdots+\lambda^u_{j,\sigma(\omega)}+\lambda^u_{j,\omega}.\tag{12}$$

通过迭代式 (11)，我们得到如下结果：

引理 5.8。 相对于 $\mathbb{T}^d$ 上的适配黎曼度量，存在 $\epsilon>0$，使得对每个 $(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{T}^d$, $1\le j<k$ 且 $n\ge1$,

$$\left\|\bar{A}^n(\omega,x)|_{L^u_{(1,j),\omega}}\right\|<\exp\left[\lambda^u_{j,\omega}(n)+\frac{n\cdot\epsilon}{2}\right]<\exp\left[\lambda^u_{j+1,\omega}(n)-\frac{n\cdot\epsilon}{2}\right]<m\left(\bar{A}^n(\omega,x)|_{L^u_{(j+1,k),\omega}}\right).$$

引入移位 Ω 上的斜积 A 后，根据命题 5.3，我们得到一个同胚 H: $\Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega\times\mathbb{T}^d$, 满足

$$H\circ F=\bar{A}\circ H.$$

如有必要，缩小邻域 $\mathscr{U}_i$后，我们得到以下命题。

命题 5.9。 存在一族（两两不相交的）邻域 $\mathscr{U}_i\subseteq\mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^d)$，它们是 A_i 的邻域，使得若 $\mathscr{U}=\cup\mathscr{U}_i$ 且 $\Omega=\mathscr{U}^{\mathbb{Z}}$，则对应的斜积

$$F:\Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega\times\mathbb{T}^d,\qquad F(\omega,x)=\left(\sigma(\omega),f_\omega(x)\right)$$

满足以下性质：

1. F 存在一个与 A 维数相同的纤维方向最精细支配分裂：

$$T\mathbb{T}^d_\omega=E^s_{l,\omega}\oplus\cdots E^s_{1,\omega}\oplus E^u_{1,\omega}\oplus\cdots E^u_{k,\omega},\qquad with\qquad \dim E^{s/u}_{j,\omega}=\dim L^{s/u}_j,\quad\forall j.$$

2. 对于每个 $1\le j<k$，$(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{T}^d$以及 $n\ge1$，我们有

$$\left\|Df^n_\omega(x)|_{E^u_{(1,j),\omega}}\right\|<\exp\left[\lambda^u_{j,\omega}(n)+n\cdot\epsilon\right]<\exp\left[\lambda^u_{j+1,\omega}(n)-n\cdot\epsilon\right]<m\left(Df^n_\omega(x)|_{E^u_{(j+1,k),\omega}}\right).$$

3. 对于每个 $1 \le i \le j \le k$，都存在一族纤维方向上的 C^0 叶状结构，其叶为 C^1，$\{\mathscr{F}^u_{(i,j),\omega}\}_{\omega\in\Omega}$，使得对于每个 $\omega \in \Omega$,

$$F\left(\mathscr{F}^u_{(i,j),\omega}\right) = \mathscr{F}^u_{(i,j),\sigma(\omega)} \qquad and \qquad T\mathscr{F}^u_{(i,j),\omega} = E^u_{(i,j),\omega} = E^u_{i,\omega} \oplus \cdots \oplus E^u_{j,\omega}.$$

此外，对于 $1 \le i \le i' \le j' \le j \le k$，$\mathscr{F}^u_{(i',j'),\omega}$ 的叶是 $\mathscr{F}^u_{(i,j),\omega}$ 的叶的子叶状结构。

4. 对每个 $\omega \in \Omega$，拓扑共轭 $\bar{H}_\omega : \mathbb{T}^d_\omega \to \mathbb{T}^d_\omega$ 满足

$$H_\omega\left(\mathscr{F}^u_{(1,j),\omega}\right) = \mathscr{L}^u_{(1,j),\omega} = \mathscr{L}^u_{(1,j)}, \qquad \forall 1 \le j \le k.$$

稳定丛和稳定叶状结构的对应支配分裂也具有类似性质。

证明。第一项的证明。斜积 F 是 $\bar{A}$ 在 $\Omega \times \mathbb{T}^d$ 上的纤维方向扰动。根据支配分裂的持久性，F 具有与 A 维数相同的支配分裂。

第二项的证明。必要时缩小邻域 $\mathscr{U} = \cup \mathscr{U}_i$。由于 F 是 $\bar{A}$ 的纤维方向扰动，且 F 与 $\bar{A}$ 的纤维动力学在 C^2-范数下足够接近，第二项可直接由引理 5.8 得出。

第三项的证明。对于任意 $1 \le i \le k$，经典稳定流形定理表明，存在纤维方向强不稳定叶状结构 $\{\mathscr{F}^u_{(i,k),\omega}\}_{\omega\in\Omega}$ 它是 F-不变的，且切于 $E^u_{(i,k),\omega}$ 处处成立。

另一方面，对于每个 $i \le j \le k$，叶状结构 $\mathscr{L}^u_{(1,j)}$ 关于 A 是纤维方向正规双曲的。此外，由于线性叶状结构 $\mathscr{L}^u_{(1,j)}$ 是光滑的，因此它也是纤维方向板块扩张的 [18, 定理 7。2] 和 [37, 定理 5。12]。

由于 F 是 $\bar{A}$ 的纤维方向扰动，且 F 与 A 的纤维动力学的 C^2-范数接近，因此正规双曲叶状结构的纤维方向结构稳定性 [18, 定理 7。1] 给出以下断言。

断言 5.10。存在一个纤维逐点叶状结构 $\{\mathscr{F}^u_{(1,j),\omega}\}_{\omega\in\Omega}$，使得

$$F\left(\mathscr{F}^u_{(1,j),\omega}\right) = \mathscr{F}^u_{(1,j),\sigma(\omega)} \qquad and \qquad T\mathscr{F}^u_{(1,j),\omega} = E^u_{(1,j),\omega}.$$

此外，$\{\mathscr{F}^u_{(1,j),\omega}\}_{\omega\in\Omega}$ 与 $\{\mathscr{L}^u_{(1,j),\omega}\}_{\omega\in\Omega}$ 叶共轭，即存在一个同胚

$$G : \Omega \times \mathbb{T}^d \to \Omega \times \mathbb{T}^d, \qquad G(\omega, x) = (\omega, G_\omega(x)) \qquad such\ that \qquad G_\omega\left(\mathscr{F}^u_\omega\right) = \mathscr{L}^u_\omega,$$

其中 G_ω 是 $\mathbb{T}^d_\omega$ 上的一个同胚，且接近恒等映射，并且

$$\begin{aligned} G_{\sigma(\omega)} \circ F\left(\mathscr{F}^u_{(1,j),\omega}(x)\right) &= \bar{A}_\omega \circ G_\omega\left(\mathscr{F}^u_{(1,j),\omega}(x)\right) \\ &= \bar{A}_\omega\left(\mathscr{L}^u_{(1,j),\omega}(G_\omega(x))\right) = \mathscr{L}^u_{(1,j),\sigma(\omega)}(\bar{A}_\omega \circ G_\omega(x)). \end{aligned}$$

现在我们取

$$\mathscr{F}^u_{(i,j),\omega} = \mathscr{F}^u_{(1,j),\omega} \cap \mathscr{F}^u_{(i,k),\omega} \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

显然， $\mathscr{F}^u(i,j)_\omega$ 是 F-不变的，并且切于 $E^u(i,j)$，$\omega = E^u(1,j)$，$\omega \cap E^u(i,k)_\omega$。这证明了第三项。

第四项的证明。记 $\tilde{\mathscr{L}}^u(1,j),\omega$ $\mathscr{L}^u(1,j)$ 在 $\mathbb{R}^d_\omega$ 上的提升叶状结构；对每个 $n \geq 1$，记

- $\tilde{A}^n_\omega : \mathbb{R}^d_\omega \to \mathbb{R}^{d\sigma^n(\omega)}$ 为 $\tilde{A}^n_\omega : \mathbb{T}^d_\omega \to \mathbb{T}^{d\sigma^n(\omega)}$ 的提升线性映射；
- $\tilde{f}^n_\omega : \mathbb{R}^d_\omega \to \mathbb{R}^{d\sigma^n(\omega)}$ 为与 $\tilde{A}^n_\omega$ 接近的 $f^n_\omega : \mathbb{T}^d_\omega \to \mathbb{T}^{d\sigma^n(\omega)}$ 的提升映射；
- $\tilde{H}_\omega : \mathbb{R}^d_\omega \to \mathbb{R}^d_\omega$ 为 $H_\omega : \mathbb{T}^d_\omega \to \mathbb{T}^d_\omega$ 的纤维共轭的提升，使得– $\tilde{H}_{\sigma^n(\omega)} \circ \tilde{f}^n_\omega = \tilde{A}^n_\omega \circ \tilde{H}_\omega$；– 存在某个常数 $C > 0$，使得

$$\|\tilde{H}_\omega - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d_\omega}\| < C, \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

记 $d(\cdot,\cdot)$ 为 $\mathbb{R}^d_\omega$ 上由 $\mathbb{T}^d_\omega$ 的提升的适配黎曼度量所诱导的距离。应用引理 5.8 的估计和第二项，我们得到以下断言。

断言 5.11. 对于每个 $\omega \in \Omega$ 以及任意一对点 $x, y \in \mathbb{R}^d_\omega$，有

1. $y \in \tilde{\mathscr{F}}^u(1,j),\omega(x)$ 当且仅当 $\lim_{n\to+\infty} \exp[-\lambda^u_{j,\omega}(n)] \cdot d(\tilde{f}^n_\omega(x), \tilde{f}^n_\omega(y)) = 0$；*2.* $y \notin \mathscr{F}^u(1,j),\omega(x)$ 当且仅当 $\lim_{n\to+\infty} \exp[-\lambda^u_{j,\omega}(n)] \cdot d(f^n_\omega(x), f^n_\omega(y)) = \infty$；*3.* $y \in \tilde{\mathscr{L}}^u(1,j),\omega(x)$ 当且仅当 $\lim_{n\to+\infty} \exp[-\lambda^u_{j,\omega}(n)] \cdot d(\tilde{A}^n_\omega(x), \tilde{A}^n_\omega(y)) = 0$；*4.* $y \notin \tilde{\mathscr{L}}^u(1,j),\omega(x)$ 当且仅当 $\lim_{n\to+\infty} \exp[-\lambda^u_{j,\omega}(n)] \cdot d(\tilde{A}^n_\omega(x), \tilde{A}^n_\omega(y)) = \infty$。

断言 *5.11* 的证明。 根据命题的第二项，在 $\mathbb{R}^d_\omega$ 上的 $E^u(1,j)$ 的提升丛 $\tilde{E}^u(1,j),\omega$ 中，我们有

$$\|Df^n_\omega|_{\tilde{E}^u_{(1,j),\omega}}\| < \exp[\lambda^u_{j,\omega}(n) - n\cdot\epsilon/2].$$

如果 $y \in \mathscr{F}^u(1,j),\omega(x)$，那么

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{d(\tilde{f}^n_\omega(x), \tilde{f}^n_\omega(y))}{\exp[\lambda^u_{j,\omega}(n)]} &\leq \lim_{n\to+\infty} \frac{d_{\tilde{\mathscr{F}}^u_{(1,j),\sigma^n(\omega)}}(\tilde{f}^n_\omega(x), \tilde{f}^n_\omega(y))}{\exp[\lambda^u_{j,\omega}(n)]} \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\exp[\lambda^u_{j,\omega}(n) - n\cdot\epsilon/2] \cdot d_{\tilde{\mathscr{F}}^u_{(1,j),\omega}}(x,y)}{\exp[\lambda^u_{j,\omega}(n)]} \\ &= 0\end{aligned}$$

若 $y \notin \mathscr{F}^u(1,j),\omega(x)$，则 $\mathscr{F}^u(1,j),\omega(x) \neq \mathscr{F}^u(1,j),\omega(y)$。记为

$$d_{\min}\left(\tilde{\mathscr{F}}^u_{(1,j),\omega}(x), \tilde{\mathscr{F}}^u_{(1,j),\omega}(y)\right) := \inf\left\{d(z,w) : z \in \tilde{\mathscr{F}}^u_{(1,j),\omega}(x),\ w \in \tilde{\mathscr{F}}^u_{(1,j),\omega}(y)\right\},$$

且 $\tilde{G}_\omega$：$\mathbb{R}^d_\omega \to \mathbb{R}^d_\omega$ 断言 5.10 中G_ω：$\mathbb{T}^d_\omega \to \mathbb{T}^d_\omega$ 的叶共轭，它在 $\mathbb{R}^d_\omega$ 上接近恒等映射，并满足

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{\sigma(\omega)} \circ \tilde{f}_\omega \left(\mathscr{F}^u_{(1,j),\omega}(x)\right) &= \tilde{A}_\omega \circ \tilde{G}_\omega \left(\mathscr{F}^u_{(1,j),\omega}(x)\right) \\ &= \tilde{A}_\omega \left(\mathscr{L}^u_{(1,j),\omega}(\tilde{G}_\omega(x))\right) = \mathscr{L}^u_{(1,j),\sigma(\omega)}(\tilde{A}_\omega \circ \tilde{G}_\omega(x)).\end{aligned}$$

由于 $\tilde{G}_\omega$ 是一个同胚，若 $\tilde{\mathscr{F}}u(1,j),\omega(x)$ 与 $\neq \tilde{\mathscr{F}}u(1,j),\omega(y)$，则

$$\tilde{\mathscr{L}}^u_{(1,j),\omega}(\tilde{G}_\omega(x)) = \tilde{G}_\omega \left(\tilde{\mathscr{F}}^u_{(1,j),\omega}(x)\right) \neq \tilde{G}_\omega \left(\tilde{\mathscr{F}}^u_{(1,j),\omega}(y)\right) = \tilde{\mathscr{L}}^u_{(1,j),\omega}(\tilde{G}_\omega(y)).$$

From 叶共轭以及 $\tilde{G}_\omega$ 在 $\mathbb{R}^d_\omega$ 上与恒等映射一致接近，因此我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{d(\tilde{f}^n_\omega(x), \tilde{f}^n_\omega(y))}{\exp[\lambda^u_{j,\omega}(n)]} &\geq \lim_{n\to+\infty} \frac{d_{\min}\left(\tilde{f}^n_\omega\left(\tilde{\mathscr{F}}^u_{(1,j),\omega}(x)\right), \tilde{f}^n_\omega\left(\tilde{\mathscr{F}}^u_{(1,j),\omega}(y)\right)\right)}{\exp[\lambda^u_{j,\omega}(n)]} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{d_{\min}\left(\tilde{G}_{\sigma^n(\omega)} \circ \tilde{f}^n_\omega\left(\tilde{\mathscr{F}}^u_{(1,j),\omega}(x)\right), \tilde{G}_{\sigma^n(\omega)} \circ \tilde{f}^n_\omega\left(\tilde{\mathscr{F}}^u_{(1,j),\omega}(y)\right)\right)}{\exp[\lambda^u_{j,\omega}(n)]} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{d_{\min}\left(\tilde{A}^n_\omega \circ \tilde{G}_\omega\left(\tilde{\mathscr{F}}^u_{(1,j),\omega}(x)\right), \tilde{A}^n_\omega \circ \tilde{G}_\omega\left(\tilde{\mathscr{F}}^u_{(1,j),\omega}(y)\right)\right)}{\exp[\lambda^u_{j,\omega}(n)]} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{d_{\min}\left(\tilde{A}^n_\omega\left(\tilde{\mathscr{L}}^u_{(1,j),\omega}(\tilde{G}_\omega(x))\right), \tilde{A}^n_\omega\left(\tilde{\mathscr{L}}^u_{(1,j),\omega}(\tilde{G}_\omega(x))\right)\right)}{\exp[\lambda^u_{j,\omega}(n)]} \\ &\geq \lim_{n\to+\infty} \frac{\exp\left[\lambda^u_{j,\omega}(n) + n\cdot\epsilon\right] \cdot d_{\min}\left(\tilde{\mathscr{L}}^u_{(1,j),\omega}(\tilde{G}_\omega(x)), \tilde{\mathscr{L}}^u_{(1,j),\omega}(\tilde{G}_\omega(x))\right)}{\exp[\lambda^u_{j,\omega}(n)]} \\ &= \infty.\end{aligned}$$

最后一个不等式来自引理 5.8：$\tilde{\mathscr{L}}u(1,j),\omega$ 的两条线性中心叶之间的距离增长率大于 $\exp\left[\lambda^u_{j,\omega}(n) + n\cdot\epsilon\right]$。这证明了断言 5.11 的第一项和第二项。

同样，由于两个叶状结构 $\tilde{\mathscr{L}}u(1,j),\omega$ 和 $\tilde{\mathscr{L}}u(j+1,k),\omega$ 都是 $\mathbb{R}^d_\omega$ 上的线性叶状结构，且提升的适配黎曼度量与 $\mathbb{R}^d_\omega$ 上的欧几里得度量等价，引理 5.8 蕴含断言 5.11 的最后两项。

□

由于对每个 $\omega \in \Omega$ 都有 $\|H_\omega - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d_\omega}\| < C$，断言 5.11 推出

$$\begin{aligned}y \in \tilde{\mathscr{F}}^u_{(1,j),\omega}(x) &\iff \lim_{n\to+\infty} \frac{d(\tilde{f}^n_\omega(x), \tilde{f}^n_\omega(y))}{\exp[\lambda^u_{j,\omega}(n)]} = 0 \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} \frac{d(\tilde{H}_{\sigma^n(\omega)} \circ \tilde{f}^n_\omega(x), \tilde{H}_{\sigma^n(\omega)} \circ \tilde{f}^n_\omega(y))}{\exp[\lambda^u_{j,\omega}(n)]} = 0 \\ &\iff \lim_{n\to+\infty} \frac{d(\tilde{A}^n_\omega \circ \tilde{H}_\omega(x), \tilde{A}^n_\omega \circ \tilde{H}_\omega(y))}{\exp[\lambda^u_{j,\omega}(n)]} = 0 \\ &\iff \tilde{H}_\omega(y) \in \tilde{\mathscr{F}}^u_{(1,j),\omega}(\tilde{H}_\omega(x)).\end{aligned}$$

这证明了 $\tilde{H}\omega(\tilde{\mathscr{F}}u(1,j),\omega) = \tilde{\mathscr{L}}u(1,j),\omega$，因此 $H\omega(\mathscr{F}u(1,j),\omega) = \mathscr{L}u(1,j),\omega$。至此，命题 5.9 的证明完成。 □

5.4 纤维方向扩张u-Gibbs态的扩张叶状结构

设 X 是一个度量空间，$T: X \to X$ 是 X 上的一个同胚。设 M 是一个紧流形，并设 $f: X \to \mathrm{Diff}^2(M)$ 是一个连续映射，且其 C^2-范数有界；也就是说，存在 $K > 0$，使得对每个 $\omega \in X$,

$$\omega \mapsto f_\omega \in \mathrm{Diff}^2(M) \qquad \text{satisfies} \qquad \|f_\omega\|_{C^2} + \|f_\omega^{-1}\|_{C^2} < K.$$

映射f定义了一个基于T的斜积系统:

$$F: X \times M \to X \times M, \qquad F(\omega, x) = \big(T(\omega), f_\omega(x)\big), \quad \forall (\omega, x) \in X \times M.$$

对于$n \in \mathbb{N}$，我们有如下概念

$$f_\omega^n := f_{T^{n-1}\omega} \circ \cdots \circ f_{T\omega} \circ f_\omega, \qquad \text{and} \qquad f_\omega^{-n} := (f_{T^{-n}\omega})^{-1} \circ \cdots \circ (f_{T^{-1}\omega})^{-1}.$$

定义 5.12。 设 $F: X \times M \to X \times M$ 为上述斜积。设 $\mathscr{F} = \{\mathscr{F}_\omega\}_{\omega \in X}$ 为 M 的 C^0 叶状结构的参数化族，其叶为 C^1。

如果存在 $C > 1$、$\gamma > 0$ 和 $L > 1$、$0 < \theta < 1$，使得下述条件成立，我们称 $\mathscr{F} = \{\mathscr{F}_\omega\}_{\omega \in X}$ 是纤维方向扩张的:

1. 对所有 $(\omega, x) \in \Omega \times M$，$x \mapsto T\ \mathscr{F}_\omega(x)$ 在 $M_\omega = \{\omega\} \times M$ 上是(L, θ)-赫尔德连续的。
2. 叶层 $\mathscr{F}$ 是 F-不变的：$F(\mathscr{F}_\omega(x)) = f_\omega(\mathscr{F}_\omega(x)) = \mathscr{F}_{T(\omega)}(f_\omega(x))$。
3. 对于每个非零向量 $v \in T\mathscr{F}_\omega$，$\|Df^{-n}_\omega v\| < C\exp(-n\gamma)\|v\|$ 对每个 $n \geq 0$ 均成立。

由于向量丛 $T\mathscr{F}$ 是（L，θ）-赫尔德连续的，$\mathscr{F}$ 的叶是一致$C^{1+\theta}$连续的。

给定一个 F-不变概率测度 μ，我们可以考虑一个从属于 $\mathscr{F}$ 的可测分划$\mathscr{P}$，即对于 μ-几乎处处的（ω，x）$\in \Omega \times M$，存在 $r > 0$ 使得

$$\mathscr{F}_{\omega,r}(x) \subset \mathscr{P}(\omega, x) \subset \mathscr{F}_\omega(x).$$

我们可以将纤维方向 SRB 测度的概念推广为与 F 的纤维方向扩张叶状结构相关联的u-Gibbs态。

定义 5.13。 设 $\mathscr{F}$ 是 F 的纤维方向扩张叶状结构。若一个 F-不变概率测度 μ 沿 $\mathscr{F}$ 是 *u-Gibbs* 态，则对于任意 $\mathscr{F}$-从属可测划分 $\mathscr{P}$及其对应条件测度族$\{\tilde{\mu}^{\mathscr{P}}(\omega, x)\}_{(\omega,x)\in\Omega\times M}$，条件测度 $\tilde{\mu}^{\mathscr{P}}(\omega, x)$ 相对于 $\mathscr{F}_\omega(x)$ 上的勒贝格测度是绝对连续的，这对 μ-几乎处处的（ω，x）$\in X \times M$ 成立。

下面的命题由 [38] 中的定理 G 推出。

命题 5.14。 设 F，G：$X \times M \to X \times M$ 是定义在同胚 T：$X \to X$ 上的两个斜积系统，分别由具有有界 C^2-范数的连续映射 f，g：$X \to \mathrm{Diff}^2(M)$ 定义:

$$F(\omega, x) = \big(T(\omega), f_\omega(x)\big), \qquad G(\omega, x) = \big(T(\omega), g_\omega(x)\big), \qquad \forall (\omega, x) \in X \times M.$$

设 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 分别是 F 和 G 的两个纤维方向扩张叶状结构，并设 μ_F 是沿着 $\mathscr{F}$ 的 F-不变 *u-Gibbs* 测度。假设存在一个同胚

$$H : X \times M \to X \times M, \qquad H(\omega, x) = (\omega, H_\omega(x)) \quad \forall (\omega, x) \in X \times M.$$

使得 $H\omega$： $M_\omega \to M\omega$ 对每个 $\omega \in X$ 都是一个同胚。如果 H 满足

$$H \circ F = G \circ H \qquad and \qquad H(\mathscr{F}) = \mathscr{G},$$

那么对于 $\mu_G = H_*(\mu_F)$，以下条件等价：

1. μ_G 是沿着 $\mathscr{G}$ 的 *u-Gibbs* 测度。

2. H 在 $\mathscr{F}$ 的叶上、μ_F 的支集上绝对连续，其雅可比行列式在 $\mathrm{Supp}(\mu_F)$ 上连续，并且有正的下界和有限的上界。

3. 存在 $K > 1$，使得对于每个 $(\omega,x) \in \Omega \times M$ 和 $n \geq 0$,

$$\frac{1}{K} < \frac{\det(DF^n(T\mathscr{F}_\omega(x)))}{\det(DG^n(T\mathscr{G}_\omega(H_\omega(x))))} < K.$$

4. 沿膨胀叶状结构的纤维方向李雅普诺夫指数之和相同：

$$\sum \lambda(F, \mu_F, \mathscr{F}) = \int \log(\det(DF|_{T\mathscr{F}}))d\mu = \int \log(\det(DG|_{T\mathscr{G}}))d\mu_G = \sum \lambda(G, \mu_G, \mathscr{L}).$$

5. 若我们进一步假设 维数$\mathscr{F} = 1$，那么 H 沿着 $\mathscr{F}$ 的叶是均匀 C^{1+}-光滑的。

在命题 5.14 的第 4 项中，

$$\sum \lambda(F, \mu_F, \mathscr{F})$$

表示余循环 *DF* 限制在 *DF*-不变子向量丛 $(\omega, x) \mapsto T_x\mathscr{F}_\omega(x)$ 上时，按重数计算的所有李雅普诺夫指数之和。

我们将频繁地在以下情形中应用命题 5.14：设 $\mathscr{A} = \{\mathrm{f}_i\}^m \mathrm{i}_{=1} \subseteq \mathrm{Diff}^2(\mathrm{M})$ 是一个由（阿诺索夫）微分同胚构成的锥双曲族。那么斜积 $\mathrm{A} : \mathscr{A}^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{M} \to \mathscr{A}\mathrm{Z} \times \mathrm{M}$ 是纤维方向 Anosov 的。记 $\mathscr{U} = \cup \mathscr{U}_i$ 为 $\mathscr{A}$ 的邻域，并令 $\Omega = \mathscr{U}^{\mathbb{Z}}$ 如引理 5.1 所述，使得斜积 $\mathrm{F} : \Omega \times \mathrm{M} \to \Omega \times \mathrm{M}$ 也是纤维方向¯阿诺索夫的。设 $\mathrm{A} : \Omega \times \mathrm{M} \to \Omega \times \mathrm{M}$ 为定义 5.2 中 A 的扩张，并设 $\mathrm{H} : \Omega \times \mathrm{M} \to \Omega \times \mathrm{M}$ 是拓扑共轭，满足 $\mathrm{H} \circ \mathrm{F} = \mathrm{A} \circ \mathrm{H}$。接下来，我们将对纤维方向扩张叶状结构 $\mathscr{F}^u \mathrm{j},\omega$ 和 $\mathscr{L}\mathrm{u}\,\mathrm{j},\omega$ 应用命题 5.14。

6 正谱刚性与光滑共轭

本节我们将证明，对于线性映射的纤维方向阿诺索夫扰动，如果相对于纤维方向 SRB 测度的李雅普诺夫指数与线性系统的李雅普诺夫指数一致，那么命题 5.3 中的拓扑共轭沿纤维方向扩张叶状结构是 C^{1+} 光滑的。我们指出，我们并未假设纤维方向 SRB 测度是由平稳测度得到的、如命题 2.2 中所述的测度。注意，反向结论自动成立。我们将首先在 $\mathbb{T}^2$ 上证明这一点，适用于单个

阿诺索夫微分同胚的扰动，以及非交换锥双曲自同构族的扰动。

回忆一下，我们考虑 $\mathscr{A}=\{A_i\}^m{}_{i=1}\subseteq GL(d,\mathbb{Z})$ 是一个由阿诺索夫自同构构成的锥双曲族。根据引理 5.1，存在一个（两两不交的）邻域族$\mathscr{U}_i\subseteq \mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^d)$，围绕 A_i，使得对于 $\mathscr{U}=\cup\mathscr{U}_i$和 $\Omega=\mathscr{U}^{\mathbb{Z}}$，相应的斜积

$$F:\Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega\times\mathbb{T}^d,\qquad F(\omega,x)=\big(\sigma(\omega),f_\omega(x)\big)$$

是纤维方向 Anosov。

命题 5.3 表明，存在一个拓扑共轭 $H\colon \Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega\times\mathbb{T}^d$，满足

$$H(\omega,x)=(\omega,H_\omega(x)),\qquad \text{such that}\qquad H\circ F=\bar{A}\circ H.$$

如果记 $\mathscr{L}u$和 $\mathscr{F}^u$分别为 $\bar{A}$和 F在 $\Omega\times\mathbb{T}^d$上的纤维方向扩张叶状结构，那么 $H(\mathscr{F}u)=\mathscr{L}u$。

注意，由于 $\bar{A}\colon \Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega\times\mathbb{T}^d$的纤维动力学是仿射映射的复合，对于每个 $(\omega,x)\in\Omega\times\mathbb{T}^d$，都有 $\{A_i\}^m{}_{i=1}\subseteq GL(d,\mathbb{Z})$，因此纤维方向导数 A_ω与 $x\in\mathbb{T}^d$的选择无关。

这尤其证明了如下结论。

引理 *6.1*。设 $p=\{p_i\}_{1\le i\le m}$是 $\{A_i\}^m i_{=1}\subseteq GL(d,\mathbb{Z})$ 上的概率测度，且对每个 $1\le i\le m$ 都有 $p(A_i)=p_i>0$。设 ν 是 $\mathscr{U}=\cup\mathscr{U}_i$ 上的概率测度，满足 $\nu(\mathscr{U}_i)=p_i$，$i=1,\cdots,m$。那么，对任意在 $\bar{A}:\Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega\times\mathbb{T}^d$ 下不变且满足$\pi_*(\bar{\mu})=\nu^{\mathbb{Z}}$的概率测度 $\bar{\mu}$，其纤维方向李雅普诺夫指数与命题 *3.3* 中给出的矩阵 $\{A_i\}^m i_{=1}$ 的独立同分布（相对于 p）乘积的李雅普诺夫指数一致。

需要指出的是，测度 $\bar{\mu}$ 不一定是像命题 2.2 中那样由平稳测度得到的测度。

6.1 T^2 上的正谱刚性

在本小节中，我们考虑 $\mathscr{A}=\{A_i\}^m{}_{i=1}\subseteq GL(2,\mathbb{Z})$ 是一个由（阿诺索夫）自同构构成的锥双曲族的情形。有两种可能：

引理 6.2. 设 $\mathscr{A}=\{A_i\}^m i_{=1}\subseteq GL(2,\mathbb{Z})$ 是一个自同构的锥双曲族。那么，以下二者必有其一：

- 存在 $i\neq j$，使得 Ai 和 Aj 不对易；或者
- 存在一个双曲自同构 $A\in GL(2,\mathbb{Z})$，使得对每个 $i=1,\cdots,m$，都有 $Ai=An_i$，其中 $ni\in\mathbb{N}$。

证明。根据定义，每个 $\mathrm{A}\in\mathscr{A}$都是双曲的。固定 $\mathrm{A}_1\in\mathscr{A}$，并令 E^u、$\mathrm{E}\,\mathrm{s}$ 表示 A_1的不同特征子空间。对于 $\mathrm{A}\,\mathrm{j}$，要么 $\mathrm{A}\,\mathrm{j}\,\mathrm{E}\,\mathrm{s}=\mathrm{E}\,\mathrm{s}$ 且 $\mathrm{A}\,\mathrm{j}\,\mathrm{E}^u=\mathrm{E}\,\mathrm{u}$，此时 $\mathrm{A}\,\mathrm{j}$ 与 A_1对易；要么 $\mathrm{A}\,\mathrm{j}\,\mathrm{E}\,\mathrm{s}\neq\mathrm{E}\,\mathrm{s}$ 或 $\mathrm{A}\,\mathrm{j}\,\mathrm{E}\,\mathrm{u}\neq\mathrm{E}^u$。在后一种情况下，实际上有 $\mathrm{A}\,\mathrm{j}\,\mathrm{E}\,\mathrm{s}\neq\mathrm{E}\,\mathrm{s}$ 且 $\mathrm{A}\,\mathrm{j}\,\mathrm{E}\,\mathrm{u}\neq\mathrm{E}^u$，并且 A_1与 $\mathrm{A}\,\mathrm{j}$ 不对易。如果 $\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_m$都是双曲的且两两对易，那么它们必然都是同一个矩阵的幂。□

我们有如下命题，它表明正李雅普诺夫指数相同意味着拓扑共轭沿纤维方向扩张叶状结构 $\mathscr{F}u$光滑。

命题 6.3. 设 ν 是 $\mathscr{U}=\cup\mathscr{U}_i$上的一个概率测度，满足 $\nu(\mathscr{U}_i)=p_i$。设 $F:\Omega\times\mathbb{T}^2\to\Omega\times\mathbb{T}^2$ 是相应的斜积系统，且 μ 是 F 的纤维方向 *SRB* 测度，满足 $\pi_*(\mu)=\nu^{\mathbb{Z}}$。设 p 是 $\{A_i\}_{i=1}^m\subseteq GL(d,\mathbb{Z})$ 上的概率测度，且对每个 $1\le i\le m$ 都有 $p(A_i)=p_i$。记为

- $\lambda^+(\mu)$ μ 的正纤维方向李雅普诺夫指数；
- $\lambda^+(p)$ 如引理 *6.1* 所示，$\bar{A}$ 下不变且投影到 $\nu^{\mathbb{Z}}$ 的任意遍历测度的正李雅普诺夫指数。

那么 $\lambda^+(\mu)\le\lambda^+(p)$。

此外，若 $\lambda^+(\mu)=\lambda^+(p)$，则拓扑共轭 H 在 μ的支集上沿纤维方向不稳定叶状结构 $\mathscr{F}^u$ 的叶是 C^{1+} 光滑的：

$$\mathrm{Supp}(\mu)=\mathrm{Supp}(\nu)^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{T}^2\subseteq\Omega\times\mathbb{T}^2\qquad and\qquad H_*(\mu)=\nu^{\mathbb{Z}}\times\mathrm{Leb}_{\mathbb{T}^2}.$$

证明。令 $\mu_0:=H_*(\mu)$。那么 μ_0 是 $\bar{A}$-不变、遍历的，并满足 $\pi_*(\mu_0)=\nu^{\mathbb{Z}}$。不等式 $\lambda^+(\mu)\le\lambda^+(p)$ 立即成立，因为共轭 H保持纤维熵。事实上，令 h_μ^{fib}表示扭系统的纤维熵，根据纤维方向 Ledrappier-Young 公式和 Ruelle 不等式，我们有

$$\lambda^+(\mu)=h_\mu^{\mathrm{fib}}(F)=h_{\mu_0}^{\mathrm{fib}}(\bar{A})\le\lambda^+(p).$$

由于，$\lambda^+(\mu)=\lambda^+(p)$，引理 6.1 蕴含

$$\lambda^+(\mu_0)=\lambda^+(p)=\lambda^+(\mu).$$

我们应用命题 5.14。由于F的$\mathscr{F}^u$不稳定叶状结构维数为一，$\lambda^+(\mu_0)=\lambda^+(\mu)$意味着$H$沿 $\mathscr{F}^u$的叶是处处C^{1+}-光滑的，并且 μ_0是u-Gibbs 测度 $\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$，其对应于沿A的线性膨胀叶状结构 $\mathscr{L}^u$的A。对于A，唯一的纤维方向u-Gibbs 态沿$\mathscr{L}^u_\omega$ 的叶的条件测度，与该叶的勒贝格测度（归一化方式可任选）重合。由于在每个纤维$\mathbb{T}^2_\omega$上，不稳定叶状结构$\mathscr{L}^u_\omega$是$\bar{}$线性无理叶状结构，因而A 沿$\mathscr{L}^u_\omega$的条件u-Gibbs 测度就是 $\mathbb{T}^2_\omega$上的勒贝格测度 $\mathrm{Leb}_{\mathbb{T}^2}$。这就证明了 $\mu_0=\nu^{\mathbb{Z}}\times\mathrm{Leb}_{\mathbb{T}^2}$。

□

现在考虑随机扰动以及任意阿诺索夫微分同胚$f\in\mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^2)$的情形。将$A=f_*\in GL(2,\mathbb{Z})$记为$f$的线性化。由于$f$与$A$在拓扑上共轭，根据$f$的结构稳定性，扰动后的扭系统$F$ 将与直积系统 $\bar{A}=(\sigma\times A):\ \Omega\times\mathbb{T}^2\to\Omega\times\mathbb{T}^2$在纤维方向上共轭。

引理 6.4。存在 f 的一个邻域 $\mathscr{U}\subseteq\mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^2)$，使得对于 $\Omega=\mathscr{U}^{\mathbb{Z}}$，相应的斜积系统

$$F:\Omega\times\mathbb{T}^2\to\Omega\times\mathbb{T}^2,\qquad F(\omega,x)=\big(\sigma(x),f_\omega(x)\big)$$

是纤维方向 *Anosov* 的。此外，若我们将 $\bar{A}=\sigma\times A:\ \Omega\times\mathbb{T}^2\to\Omega\times\mathbb{T}^2$ 记为乘积系统，则存在一个拓扑共轭 $H:\ \Omega\times\mathbb{T}^2\to\Omega\times\mathbb{T}^2$，满足

$$H(\omega,x)=(\sigma(\omega),H_\omega(x)),\qquad such\ that\qquad H\circ F=\bar{A}\circ H,$$

且 H 将 F 的纤维方向扩张叶状结构 $\mathscr{F}^u$ 映射为 A 的纤维方向线性扩张叶状结构 $\mathscr{L}^u$。

证明。 由于 $\{f\}$ 是锥双曲的，斜积 F 是纤维方向 Anosov 的。如命题 5.3 的证明所示，纤维 Anosov 系统是纤维方向结构稳定的。因此，在恒等映射之上纤维化的拓扑共轭存在于 F 与 $(\sigma \times f)$ 之间： $\Omega \times \mathbb{T}^2 \to \Omega \times \mathbb{T}^2$ 以及 $(\sigma \times f)$： $\Omega \times \mathbb{T}^2 \to \Omega \times \mathbb{T}^2$ 与 $\bar{A} = (\sigma \times A)$： $\Omega \times \mathbb{T}^2 \to \Omega \times \mathbb{T}^2$ 之间。将这些共轭复合，即得到引理中的拓扑共轭 H。 □

在这种情形下，我们还有如下命题，其证明与命题 6.3 的证明完全相同。

命题 6.5。 设 ν 是支撑在 f 的邻域 $\mathcal{U}$ 上的一个概率测度，其中 f 属于 $\mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^2)$。设 μ 是满足 $\pi_*(\mu) = \nu^{\mathbb{Z}}$ 的斜积 F 的纤维方向 *SRB* 测度。

若 μ 的正李雅普诺夫指数 $\lambda^+(\mu)$ 等于 A 的正李雅普诺夫指数 $\lambda^+(A)$，则 H 在 μ 的支集上沿纤维方向不稳定叶状结构 $\mathcal{F}u$ 的叶是 C^{1+} 光滑的：

$$\mathrm{Supp}(\mu) = \mathrm{Supp}(\nu)^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{T}^2 \subseteq \Omega \times \mathbb{T}^2 \qquad and \qquad H_*(\mu) = \nu^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Leb}_{\mathbb{T}^2}.$$

我们指出，若取 ν 为某个与 f 共轭的 $g \in \mathcal{U}$ 所对应的原子测度 $\nu = \delta_g$，则命题 6.5 恰好就是 [38, 定理 G]。

6.2 Td 上泛型自同构的正谱刚性

在本小节中，我们考虑以下情形： $\mathscr{A} = \{A_i\}^m{}_{i=1} \subseteq GL(d, \mathbb{Z})$ 是一族彼此对易、具有相同最细支配分裂的阿诺索夫自同构

$$T\mathbb{T}^d = L_1^s \oplus \cdots \oplus L_l^s \oplus L_1^u \oplus \cdots \oplus L_k^u.$$

此外，我们要求 A_i 中至少有一个满足一般性假设，即 A_i 是双曲的、不可约的，且每个 $L^{s/u}{}_j$ 的维数为 1 或 2；其中，每个二维子空间 $L^{s/u}{}_j$ 上的特征值对应于 A_i 的一对共轭复特征值，且它们不是 i 的实数倍。根据此类 A_i [24,的中心化子分类命题 3.7], , 每个 $A_{i'} \in \mathscr{A}$ 也都满足一般性假设。

现在，我们取 A_i 在 $\mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^d)$ 中的一个邻域族 $\mathcal{U}_i$，记 $\mathcal{U} = \cup \mathcal{U}_i$ 和 $\Omega = \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$，使得相应的斜积

$$F : \Omega \times \mathbb{T}^d \to \Omega \times \mathbb{T}^d, \qquad F(\omega, x) = \big(\sigma(\omega), f_\omega(x)\big)$$

是纤维方向 Anosov，并满足命题 5.3 和命题 5.9 的结论。于是 F 具有纤维方向最精细支配分裂

$$T\mathbb{T}^d_\omega = E^s_{1,\omega} \oplus \cdots E^s_{l,\omega} \oplus E^u_{1,\omega} \oplus \cdots E^u_{k,\omega}, \qquad \text{with} \qquad \dim E^{s/u}_{j,\omega} = \dim L^{s/u}_j, \quad \forall\, j.$$

设 H： $\Omega \times \mathbb{T}^d \to \Omega \times \mathbb{T}^d$ 为命题 5.3 中定义且满足命题 5.9 的拓扑共轭。

以下命题是本小节的主要结果。

命题 6.6。 设 ν 是 $\mathcal{U} = \cup \mathcal{U}_i$ 上的一个概率测度，并定义概率测度 $p = \{p_i\}_{1 \le i \le m}$ 在 $\{A_i\}^m{}_{i=1} \subseteq GL(d, \mathbb{Z})$ 上，使得

$$p(A_i) = p_i := \nu(\mathcal{U}_i).$$

令 μ 为斜积 F： $\Omega \times \mathbb{T}^d \to \Omega \times \mathbb{T}^d$ 满足 $\pi_*(\mu) = \nu^{\mathbb{Z}}$ 的纤维方向 *SRB* 测度。对于每个 $1 \le j \le k$，记为

• λ（$\{pi$，Luj）是 $\bar{A}$ 的任一遍历测度投影到 $\nu^{\mathbb{Z}}$上的纤维方向李雅普诺夫指数，如引理 *6.1* 所示，其中

$$\lambda(\{p_i\}, L^u_j) = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot \lambda(A_i, L^u_j).$$

• $\lambda(\mu,\ Euj)$（或 $\lambda_{\min}(\mu,\ E\,u\,j) \le \lambda_{\max}(\mu,\ E\,u\,j)$） μ沿 $E\,u\,j$ 的纤维方向李雅普诺夫指数，其中 $\dim E\,u\,j = 1$（或 $\dim E\,u\,j = 2$）。

$\bar{}$假设对每个 $1 \le j \le k$，F 和 A 的相应李雅普诺夫指数都相等：

• *either* $\dim E^u_j = 1$ *and* $\lambda(\{p_i\}, L^u_j) = \lambda(\mu, E^u_j)$*;*

• *or* $\dim E^u_j = 2$ *and* $\lambda(\{p_i\}, L^u_j) = \lambda_{\min}(\mu, E^u_j) = \lambda_{\max}(\mu, E^u_j) := \lambda(\mu, E^u_j)$.

那么 $H_*(\mu) = \nu^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Leb}_{\mathbb{T}^d}$，并且在 μ 的支集上

$$\mathrm{Supp}(\mu) = \mathrm{Supp}(\nu)^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{T}^d \subseteq \Omega \times \mathbb{T}^d,$$

拓扑共轭 H 满足

1. H 保持中间不稳定不变叶状结构：

$$H_\omega\left(\mathscr{F}^u_{j,\omega}\right) = \mathscr{L}^u_{j,\omega}, \qquad \forall\, j = 1, \cdots, k, \quad \forall \omega \in \mathrm{Supp}(\nu)^{\mathbb{Z}}.$$

特别地，这意味着向量丛 $E\,s_\omega \oplus E\,u\,k,\ \omega$ 在 $\mathbb{T}^d_\omega$ 上对每个 $\omega \in \mathrm{Supp}(\nu)^{\mathbb{Z}}$ 都可积为叶状结构 $\mathscr{F}s^\omega \oplus \mathscr{F}u\,k,\ \omega$。

2. 对于每个 $j = 1, \cdots, k$，H 沿纤维方向不变叶状结构 $\mathscr{F}u\,j$ 的叶是 C^{1+}-光滑的，并且导数 $D\,H|_{E^u j}$是赫尔德连续的，其赫尔德常数在$(\omega,\ x) \in$ 支撑(μ)上是一致的。

特别地，H 在支撑(μ)上的纤维方向不稳定叶状结构 $\mathscr{F}u$ 的叶上是 C^{1+}-光滑的。

注 6.7。 当所有 $L^u\,j$ 都是一维时，该命题基本上是斜积版本的 *[38,* 定理 *B]*。对于具有某些二维 $L^u\,j$ 的一般自同构，这一结果由 *[13,* 定理 *1.1]*证明。处理二维向量丛的关键在于应用“二维连续可约化”，参见 *[13,* 命题 *3.1]*。

我们将在本小节末尾证明命题 6.6。证明由以下引理和归纳步骤组成。首先，我们有如下观察。

引理 6.8. 假设斜积系统 F 和纤维方向 *SRB* 测度 μ 满足命题 *6.6* 的假设，则

$$H_*(\mu) = \nu^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Leb}_{\mathbb{T}^d} \qquad \textit{and} \qquad \mathrm{Supp}(\mu) = \mathrm{Supp}(\nu)^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{T}^d.$$

证明. 根据假设，(F,μ,E^u_j)和 $(A,H_*(\mu),L^u_j)$ 对$j=1,\cdots,k$ 的相应纤维方向李雅普诺夫指数均相等。将它们相加可得

$$\sum_{j=1}^{k}\dim E^u_j\cdot\lambda(\mu,E^u_j)=\sum_{j=1}^{k}\dim L^u_j\cdot\lambda(\{p_i\},L^u_j)=\sum_{j=1}^{k}\dim L^u_j\cdot\lambda(H_*(\mu),L^u_j).$$

由于 μ 是纤维方向 SRB 测度，它也是沿 $\mathscr{F}^u$ 的 u-Gibbs 测度。命题5.14 表明，$H_*(\mu)$ 是沿 $\mathscr{L}^u$ 的 u-Gibbs 测度。由于

A的纤维动力学是 $\{A_i\}^m{}_{i=1}$的复合，因此 A 的 u-Gibbs 测度沿$\mathscr{L}_u$-叶的条件测度必定是 $\mathscr{L}^u$-叶上的勒贝格测度。$H_*(\mu)$ 沿 $\mathbb{T}^d$-纤维的纤维方向条件测度是 $\mathbb{T}^d$ 上的勒贝格测度。由 $\mathscr{L}_u$ 在 $\mathbb{T}^d$ 中的等分布性可知，这意味着 $H_*(\mu)=\nu^{\mathbb{Z}}\times\mathrm{Leb}_{\mathbb{T}^d}$，且 $\mathrm{Supp}(\mu)=\mathrm{Supp}(\nu)^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{T}^d$。 □

以下三个引理使我们能够通过归纳法证明命题 6.6。这些步骤主要沿用 [12, Section 2] 和 [13, Section 3] 中关于单个一般的 Anosov 自同构扰动的光滑共轭的论述。关键在于，在我们的设定中，即使空间$\Omega\times\mathbb{T}^d$并不紧致，斜积系统 $F\colon\Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega\times\mathbb{T}^d$ 仍满足以下性质：

- F的纤维不变丛是一致赫尔德连续的，且它们之间的夹角一致有界；
- F 的纤维动力学范数有界，沿不变丛的导数赫尔德连续，且具有一致赫尔德常数；
- F在基动力学 $\sigma\colon\Omega\to\Omega$ 以及 $\mathbb{T}^d$ 维纤维上的纤维动力学中，均具有一致收缩与扩张率。

这些性质使我们能够重现 [12, 13]中的证明。

引理 6.9。对于 $1\le j\le k$，若 $H(\mathscr{F}^u_j)=\mathscr{L}^u_j$ 在 支撑(μ) 上成立，且(F,μ) 沿 E^u_j 的纤维李雅普诺夫指数均等于$(A,H_*(\mu))$的指数，则

- μ 是 F 沿 $\mathscr{F}^u_j$ 的 *u-Gibbs* 态；并且
- H 在 $\mathscr{F}^u_j$ 的叶上是 C^{1+} 光滑的，在 支撑(μ)上。此外，对于每个 $(\omega,x)\in$ 支撑(μ)，导数 $(DH|_{E^u_j})$ 关于 ω 和 x 均为赫尔德连续，且赫尔德常数一致有界。

注 6.10. 当 维数$E^u_{j,\omega}=1$ 时，引理 *6.9* 是命题 *5.14* 的直接推论。当 维数$E^u_{j,\omega}=2$ 时，我们需要应用共形结构和二维连续可 *amenable* 约化，参见 *[13]*。

引理 6.11. 对于每个 $1\le j<k$，若拓扑共轭 H 满足

- $H(\mathscr{F}^u_i)=\mathscr{L}^u_i$，其中 $1\le i\le j$，在 支撑(μ)上；
- H 在 支撑(μ)上的 $\mathscr{F}^u_{(1,j)}$ 方向是 C^{1+}-光滑的，

那么在 $(\mathscr{F}^u_{j+1})=\mathscr{L}^u_{j+1}$ 的 支撑(μ) 上有 H。

由于 $\Omega = \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$ 其中所有 $f \in \mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}$ 都接近 A_i，所有不变丛 $Eu(1,j)$ 和 Eu_{j+1} 都是赫尔德连续的，并且具有一致赫尔德常数和有界角度。随着归纳的进行，我们需要以下 Journé定理 [19] 来获得光滑性。

引理 *6.12*（[19]）。对于每个 $1 \le j < k$，若拓扑共轭 H 满足 $H(\mathcal{F}u_{j+1}) = \mathcal{L}u_{j+1}$，且 H 沿 $\mathcal{F}u_{(1,j)}$ 和 $\mathcal{F}u_{j+1}$ 在支撑(μ)上均为 C^{1+}-光滑，则 H 沿 $\mathcal{F}u_{(1,j+1)}$ 在支撑(μ)上为 C^{1+}-光滑，并且对于每个 $(\omega, x) \in$ 支撑(μ)，导数 $(DH|_{E^u(1,j+1)})$ 关于 ω 和 x 均为赫尔德连续，且赫尔德常数一致有界。

我们将在接下来的两个小节中证明引理 6.9 和引理 6.11。现在，假设引理 6.9 和引理 6.11 成立，我们可以证明命题 6.6。

命题 *6.6* 的证明。根据命题 5.9 的第四条，我们知道$H(\mathcal{F}u_1) = \mathcal{L}u_1$。应用引理 6.9 可知，$H$沿 $\mathcal{F}u_1$ 为C^{1+}-光滑。

假设 $H(\mathcal{F}u_i) = \mathcal{L}u_i$对 $1 \le i \le j$成立，并且 H在 $\mathcal{F}u_{(1,j)}$ 上是 C^{1+}-光滑的，且在 Supp(μ) 上具有一致有界的导数，则引理 6.11 意味着 $H(\mathcal{F}u_{j+1}) = \mathcal{L}u_{j+1}$ 在 Supp(μ) 上成立。

由于我们假设（F, μ）沿 Eu_{j+1} 的逐纤维李雅普诺夫指数都等于（$\bar{A}, H_*(\mu)$）沿 $L^u{}_{j+1}$ 的李雅普诺夫指数，引理 6.9 意味着 H沿 $\mathcal{F}u_{j+1}$ 是 C^{1+}-光滑的。应用引理 6.12，我们得到 H沿 $\mathcal{F}u_{(1,j+1)}$ 是 C^{1+}-光滑的，并且导数（$DH|_{E^u(1,j+1)}$）关于 ω 和 x 对每个 $(\omega,x) \in$ Supp(μ) 都是赫尔德连续的，其中赫尔德常数是一致有界的。

通过归纳法以及引理 6.8（该引理表明 $H_*(\mu) = \nu^{\mathbb{Z}} \times \text{Leb}_{\mathbb{T}^d}$、$H(\mathcal{F}u_j) = \mathcal{L}u_j$，并且$H$沿着 $\mathcal{F}u_j$对每个$j = 1$、$\cdots$、k都是C^{1+}-光滑的，其中导数（$DH_{E^u j}$）关于 ω 和 x 都是赫尔德连续的，对每个（ω、x）$\in$ Supp(μ) 均成立，且赫尔德常数一致有界），H 在 $\mathcal{F}^u$ 上的整个扩张叶层中、于 Supp(μ) 上也具有同样性质。命题 6.6 的证明至此完成。

□

6.3 沿二维共形丛的光滑性

在本小节中，我们证明引理 6.9。证明主要遵循 [13, 命题 2.4]，但是在斜积系统中进行。在本小节中，F 和 A 满足引理 6.9 中的所有假设。我们首先证明第一项。

引理 6.13。对于 $1 \le j \le k$，若 $H(\mathcal{F}u_j) = \mathcal{L}u_j$ 在 支撑(μ) 上成立，并且 (F, μ)沿 $E^u j$ 的纤维方向李雅普诺夫指数全都等于 (A, H_0) 沿 $\mathcal{L}u_j$ 的李雅普诺夫指数（即 $\lambda(\{p_i\}, L^u j)$），那么 μ 是 F 沿 $\mathcal{F}u_j$ 的 *u-Gibbs* 态。

证明。由引理 6.8 可知，$H_*(\mu) = \nu^{\mathbb{Z}} \times$勒贝格测度$_{\mathbb{T}^d}$。由于 $\mathcal{L}u_j$是 $\mathbb{T}^d$ 上的线性叶状结构，勒贝格测度 Leb$_{\mathbb{T}^d}$沿 $\mathcal{L}u_j$的解 disintegration 也是沿 $\mathcal{L}u_j$-叶的逐叶勒贝格测度。因此，$H_*(\mu)$ 是 A 沿 $\mathcal{L}^u{}_j$的 u-Gibbs 态。

根据假设，(F, μ) 沿 $E^u{}_j$的纤维方向李雅普诺夫指数全都等于 $(A, H_*(\mu))$ 沿 $L^u{}_j$的纤维方向李雅普诺夫指数。命题 5.14 表明，$\mu = (H^{-1})_* \circ H_*(\mu)$ 是 F 沿 $\mathcal{F}u_j$的 u-Gibbs 态。这就证明了该引理。 □

引理 6.9 第二项的证明基本遵循 [13, 命题 2.4], ，但应用于斜积系统。如果 $\dim E^u{}_j = 1$，则这直接是命题 5.14 的推论。

对于 $\dim E^u{}_j = 2$ 的情形，我们需要以下二维连续可 amenable 约化定理，该定理已在 [13, 命题 3.1] 以及 [40, 定理 7.4 和推论 7.6]中得到证明。

命题 6.14。 设 $f\colon X \to X$ 是一个满足阿诺索夫闭合引理的双曲系统。设 E 是 X 上的一个向量丛，其纤维为二维，且 μ 是一个具有全支撑和局部乘积结构的遍历的 f-不变概率测度。设 $\Phi\colon E \to E$ 是 f 上的一个赫尔德连续纤维束化余循环，且关于 μ 只有一个李雅普诺夫指数。则以下至少有一项成立：

1. Φ 关于 E 上的某个赫尔德连续黎曼范数是共形的；
2. Φ保持一个赫尔德连续的一维子丛不变；
3. Φ 保持一个赫尔德连续的两条横截直线场不变。

推论 6.15。 假设 F 满足命题 *6.6*。对于每个满足维数$E^u j = 2$ 且 (F,μ) 的两个李雅普诺夫指数相等的子丛，余循环 DF 在支撑$\mu) =$ 支撑$\nu)^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{T}^d$上的限制关于 $E^u j$ 上的某个赫尔德连续黎曼范数是共形的。

证明。 由引理 6.8 可知，$\mathrm{Supp}(\mu) = \mathrm{Supp}(\nu)^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{T}^d$且

$$H_*\mu = \nu^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Leb}_{\mathbb{T}^d}.$$

特别地，$H_*\mu$具有局部乘积结构。由于拓扑共轭 H在斜积系统 F和 A上，在 $\mathrm{Supp}(\mu)$ 上交织了全稳定集与全不稳定集（包括组合分量），因此 μ也具有局部乘积结构。于是，我们可以将命题 6.14 应用于 $\mathrm{Supp}(\mu)$ 上子向量丛 $E^u{}_j$ 上的限制 DF。我们需要排除可能性 2 和 3。

回想一下，我们假设集合 $\mathscr{A} = \{A_i\}^m{}_{i=1}$ 是泛型的。这意味着，当我们将每个 A_i 的邻域取得足够小时，每个 $f_i \in \mathscr{U}_i$ 都有一个不动点，使得导数 $DF_{E^u j}$具有一对共轭复特征值，且它们不是实数倍i。这意味着余循环 $DF_{E^u{}_j}$既没有连续不变的一维子向量丛，也没有连续不变的两条横截直线场。这排除了余循环 $DF_{E^u j}$在命题 6.14 中的可能性 2 和 3。

□

根据共形结构，我们可以证明共轭 H沿 $\mathscr{F}^u{}_j$是 Lipschitz 的。回想一下，对于扩张系统 $\bar{A}\colon \Omega \times \mathbb{T}^d \to \Omega \times \mathbb{T}^d$，纤维动力学由 $\{A_i\}^m{}_{i=1}$的复合构成，它们都是线性的，这意味着对任意 $x \in \mathbb{T}^d$

$$D\bar{A}_\omega(x) = \bar{A}_\omega \qquad \text{where } A_\omega = A_i \quad \text{if} \quad \Upsilon(f_{\omega_0}) = A_i.$$

引理 6.16。 假设 维数$E\,u\,j = 2$，且 (F,μ)沿 $E^u j$ 的两个李雅普诺夫指数$\bar{}$都等于 $(A,H_*(\mu))$ 沿 $L^u j$ 的李雅普诺夫指数。则：

- F 沿 $\mathscr{F}u\,j$ 的雅可比行列式在 $\mathrm{Supp}(\mu)$ 上与 A 沿 $\mathscr{L}u\,j$ 的雅可比行列式上同调，即存在赫尔德连续函数 $u : \mathrm{Supp}(\mu) = \mathrm{Supp}(\nu)^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{T}d \to \mathbb{R}$，它在 $\mathrm{Supp}(\mu)$ 上一致有界，使得对每个 $(\omega,x) \in \mathrm{Supp}(\mu)$，

$$\begin{aligned}\log\left|\det\left(DF|_{E^u_{j,\omega}(x)}\right)\right| &= \log\left|\det\left(D\bar{A}|_{L^u_{j,\omega}(H_\omega(x))}\right)\right| + u\circ\bar{A}(\omega,x) - u(\omega,x)\\ &= \log\left|\det\left(D\bar{A}_\omega|_{L^u_j}\right)\right| + u\circ\bar{A}(\omega,x) - u(\omega,x).\end{aligned}$$

• 拓扑共轭 H 在 $\mathrm{Supp}(\mu)=\mathrm{Supp}(\nu)$ 上沿 $\mathscr{F}^u_j$ 是 *Lipschitz* 的，并且 $DH|_{\mathscr{F}^{uj}}$ 几乎处处存在且可逆（相对于 μ）。

证明。 根据假设，(F,μ) 的两个李雅普诺夫指数都等于 $(A,H_*(\mu))$ 沿 L^u_j 的李雅普诺夫指数，命题 5.14 的第三项说明，对于每个周期点 $(\omega,x)=Fl(\omega,x)\in\mathrm{Supp}(\mu)$，都有

$$\sum_{i=0}^{l-1}\log\left|\det\left(DF|_{E^u_{j,\sigma^i(\omega)}(f^i_\omega x)}\right)\right|=\sum_{i=0}^{l-1}\log\left|\det\left(D\bar{A}|_{L^u_{j,\sigma^i(\omega)}(H_{\sigma^i(\omega)}\circ f^i_\omega x)}\right)\right|.$$

由于 $\mathrm{Supp}(\mu)=\mathrm{Supp}(\nu)^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{T}^d$，根据引理 5.4，存在一个赫尔德连续函数 $u:\mathrm{Supp}(\mu)\to\mathbb{R}$，使得对于每个 $(\omega,x)\in\mathrm{Supp}(\mu)$,

$$\begin{aligned}\log\left|\det\left(DF|_{E^u_{j,\omega}(x)}\right)\right|&=\log\left|\det\left(D\bar{A}|_{L^u_{j,\omega}(H_\omega(x))}\right)\right|+u\circ\bar{A}(\omega,x)-u(\omega,x)\\&=\log\left|\det\left(D\bar{A}_\omega|_{L^u_j}\right)\right|+u\circ\bar{A}(\omega,x)-u(\omega,x).\end{aligned}$$

这就证明了第一项。

第二项的证明主要沿用 [13, Section 3.3]。我们仅简述证明。注意，共轭 H 将非线性叶状结构 $\mathscr{F}^u_j$ 映射到线性叶状结构 $\mathscr{L}_{uj}$，后者对应于 [13, Section 3.3] 中的 h^{-1}。令 $\bar{\mathscr{L}}$ 为

$$L^s_1\oplus\cdots\oplus L^s_l\oplus L^u_1\oplus\cdots\oplus L^u_{j-1}\oplus L^u_{j+1}\oplus\cdots\oplus L^u_k.$$

对于每个 $(\omega,x)\in\mathrm{Supp}(\mu)=\mathrm{Supp}(\nu)^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{T}^d$，定义 $H_0^{-1},\omega(x)$ 为局部叶片的交集

$$H^{-1}_{0,\omega}(x)=\mathscr{F}^u_{j,\omega,loc}(H^{-1}_\omega(x))\cap\bar{\mathscr{L}}_{\omega,loc}(x).$$

那么 $H_0^{-1}:\mathrm{Supp}(\nu)^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{T}^d\to\mathrm{Supp}(\nu)^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{T}^d$ 有良好定义，接近 H^{-1}，并满足：

1. $H_0^{-1},\omega(\mathscr{L}_{uj,\omega})=\mathscr{F}_{uj,\omega}$，且 $H_0^{-1},\omega(\mathscr{L}_{uj,\omega}(x))=\mathscr{F}_{uj,\omega}(H^{-1}_\omega(x))$ 对每个 $x\in\mathbb{T}^d_\omega$ 均成立；

2. $\sup^{(\omega,x)\in\mathrm{Supp}(\mu)}d_{\mathscr{F}^u_j}(H_0^{-1},\omega(x),H^{-1}_\omega(x))<+\infty$，其中 $d_{\mathscr{F}^u_j}(\cdot,\cdot)$ 是沿 $\mathscr{F}^u_j$ 的叶的距离；

3. H_0^{-1},ω 是沿 $\mathscr{L}_{uj}$ 的叶的 C^{1+} 微分同胚，在 $\mathrm{Supp}(\mu)$ 上的导数一致有界；

4. $H^{-1}=\lim_{n\to\infty}H_n^{-1}$在支撑$(\nu)$上一致收敛$\mathbb{Z}\times\mathbb{T}^d$其中 $H^{-1}{}_n=F^{-}{}_n\circ H_0^{-1}\circ\bar{}A^n$。

N现在我们证明沿着 $\mathscr{L}_{uj}$的导数 DH_n^{-1}一致有界。

$$\begin{aligned}&\left\|DH_n^{-1}|_{L^u_{j,\omega}(x)}\right\|\\\le&\left\|\left(DF^n|_{E^u_{j,\omega}(F^{-n}_{\sigma^n(\omega)}\circ H^{-1}_{0,\sigma^n(\omega)}\circ\bar{A}^n_\omega(x))}\right)^{-1}\right\|\cdot\left\|DH^{-1}_{0,\sigma^n(\omega)}|_{L^u_{j,\sigma^n(\omega)}(\bar{A}^n_\omega(x))}\right\|\cdot\left\|D\bar{A}^n_\omega|_{L^u_{j,\omega}(x)}\right\|\\\le&\left\|\left(DF^n|_{E^u_{j,\omega}(H^{-1}_{n,\omega}(x))}\right)^{-1}\right\|\cdot\left\|D\bar{A}^n_\omega|_{L^u_{j,\omega}(x)}\right\|\cdot\sup\left\{\left\|DH^{-1}_{0,\omega}|_{L^u_{j,\omega}(x)}\right\|:(\omega,x)\in\mathrm{Supp}(\mu)\right\}\end{aligned}\tag{13}$$

由于最后一项有限，我们只需证明第一项和第二项的乘积一致有界。

¯我们可以选取范数 $\|\cdot\|$ 使得 $DA|_{L^u j}$是共形的，于是有

$$\|D\bar{A}|_{L^u_{j,\omega}(x)}\| = \sqrt{\det\left(D\bar{A}|_{L^u_{j,\omega}}(x)\right)} = \sqrt{\det\left(A_\omega|_{L^u_j}\right)} := b(\omega).$$

根据推论 6.15，存在定义在 $E^u{}_j$ $|_{\mathrm{Supp}(\mu)}$上的赫尔德连续黎曼范数 $\|\cdot\|^F$，使得

$$\|DF(v)\|^F = a(\omega,x)\cdot\|v\|^F, \qquad \forall(\omega,x)\in\mathrm{Supp}(\mu), \quad \forall v\in E^u_{j,\omega}(x),$$

其中

$$a(\omega,x) = \sqrt{\det\left(DF|_{E^u_{j,\omega}}(x)\right)}.$$

这意味着 $\|(DF|_{E^u j,\omega}(x))^{-1}\|^F = a(\omega,x)^{-1}$。

根据第一项，DF 沿 $E^u{}_j$ 的雅可比行列式与 A 沿 $L^u{}_j$ 的雅可比行列式 Hölder 上同调，因此存在某个赫尔德连续函数

$$\phi(\omega,x) = \exp\left(\frac{1}{2}\cdot u(\omega,x)\right):\ \mathrm{Supp}(\mu)\to\mathbb{R}^+,$$

其中 $u(\omega,x)$由本引理的第一项定义，并且

$$\frac{b(\omega)}{a(\omega,x)} = \frac{\phi(\omega,x)}{\phi\circ\bar{A}(\omega,x)}.$$

由于$u(\omega,x)$在 $\mathrm{Supp}(\mu)$ 上一致有界，因此 $\phi(\omega,x)$在 $\mathrm{Supp}(\mu)$ 上从 0 到 $+\infty$ 一致有界。这意味着

$$\begin{aligned}\left\|\left(DF^n|_{E^u_{j,\omega}(H^{-1}_{n,\omega}(x))}\right)^{-1}\right\|^F\cdot\left\|D\bar{A}^n_\omega|_{L^u_{j,\omega}(x)}\right\| &= \frac{b(\sigma^{n-1}(\omega))\cdot\cdots\cdot b(\sigma(\omega))\cdot b(\omega)}{a\circ F^{n-1}(\omega,x)\cdot\cdots\cdot a\circ F(\omega,x)\cdot a(\omega,x)}\\ &= \frac{\phi(\omega,x)}{\phi\circ\bar{A}^n(\omega,x)},\end{aligned}$$

它在 $\mathrm{Supp}(\mu)$ 上一致有界。

由于范数 $\|\cdot\|^F$与 $\|\cdot\|$等价，根据等式 13，我们有 $\left\|DH_n^{-1}|_{L^u j,\omega}(x)\right\|$ 在 (ω, x) 和 n 上一致有界，这意味着 $H^{-1}=\lim_{n\to\infty}H_n^{-1}$沿 $\mathscr{L}_{uj}$在 $\mathrm{Supp}(\mu)$ 上是 Lipschitz 的。

类似的论证表明，拓扑共轭 H 沿 $\mathscr{F}^u{}_j$ 在 $\mathrm{Supp}(\mu)$ 上是 Lipschitz 的。特别地，由于 μ 是沿 $\mathscr{F}_{uj}$的 u-Gibbs 态，$DH|_{\mathscr{F}^u j}$几乎处处存在且可逆（相对于 μ）。

□

现在我们可以完成引理 6.9 的证明。

引理 6.9 的证明。 第一项已在引理 6.13 中证明。现在我们证明第二项，即共轭 H 沿 $\mathscr{F}^u{}_j$ 光滑，且其沿 $\mathscr{F}^u{}_j$ 的导数在 $\mathrm{Supp}(\mu)$ 上一致 Hölder 连续。

首先，假设 $\dim E^u_j = 1$，那么 (F, μ) 沿 E^u_j 的纤维方向李雅普诺夫指数等于 $\lambda(\{p_i\}, L^u_j)$，这意味着拓扑共轭 H 沿 $\mathscr{F}^u_j$ 为 C^{1+}-光滑，这再次由命题 5.14 得出。此外，沿 $\mathscr{F}^u_j$ 对 $H \circ F = A \circ H$ 求导，我们得到

$$\log \|D\bar{A}|_{L^u_j}\| = \log \|DF|_{E^u_j}\| + \log \|DH|_{E^u_j}\| \circ F - \log \|DH|_{E^u_j}\|.$$

这意味着 $\log \|DH|_{E^u_j}\|$ 是 $\log \|DA|_{L^u_j}\|$ 与 $\log \|DF|_{E^u_j}\|$ 之间的余边界。引理 5.4 表明，$\log \|DH|_{E^u_j}\|$ 是赫尔德连续的。

这证明了当 $\dim E^u_j = 1$ 时的引理 6.9。现在我们假设 $\dim E^u_j = 2$。

根据引理 6.16 的第二项，我们可以在一个具有全 Lebesgue 测度的集合上沿 $\mathscr{F}^u_j$ 对 $H \circ F = A \circ H$ 求导，并得到

$$\left(DH|_{E^u_{j,\sigma(\omega)}(f_\omega(x))}\right) \circ \left(DF|_{E^u_{j,\omega}(x)}\right) = \left(D\bar{A}|_{L^u_{j,\omega}(H_\omega(x))}\right) \circ \left(DH|_{E^u_{j,\omega}(x)}\right).$$

这意味着 $DF|_{E^u_j}$ 和 $DA|_{L^u_j}$ 是两个共形余循环，它们通过一个可测余循环 $DH|_{E^u_j}$ 上同调。由于两个余循环 $DF|_{E^u_j}$ 和 $DA|_{L^u_j}$ 均有界且赫尔德连续，因此 [39, 定理 2.7] 表明 $DH|_{E^u_j}$ 是赫尔德连续的，另见 [40, 定理 4.14]。

至此，引理 6.9 的证明完成。 □

6.4 匹配强不稳定叶状结构

在本小节中，我们证明引理 6.11。证明主要沿用 [12, 命题 2.2]，但应用于斜积系统。在本小节中，F 和 A 满足引理 6.11 中的所有假设。

引理 6.11 的证明基于以下引理。

引理 6.17. 对每个 $1 \le j < k$，假设 $H(\mathscr{F}^u_{(j,k)}) = \mathscr{L}^u_{(j,k)}$、$H(\mathscr{F}^u_j) = \mathscr{L}^u_j$，且 H 沿 $\mathscr{F}^u_j$ 在 支撑(μ) 上是 C^{1+}-光滑的，则 $H(\mathscr{F}^u_{(j+1,k)}) = \mathscr{L}^u_{(j+1,k)}$。

假设引理 6.17，即可证明引理 6.11。

引理 *6.11* 的证明。对于每个固定的 $1 \le j < k$，我们用归纳法证明引理 6.11。由于 $H(\mathscr{F}^u_{(1,k)}) = \mathscr{L}^u_{(1,k)}$，且 H 沿着 $\mathscr{F}^u_1$ 是 C^{1+} 光滑的，导数一致有界，因此由引理 6.17 可得 $H(\mathscr{F}^u_{(2,k)}) = \mathscr{L}^u_{(2,k)}$。命题 5.9 的第四条表明

$$H(\mathscr{F}^u_{(1,2)}) = \mathscr{L}^u_{(1,2)}.$$

取交集后，我们得到

$$H\left(\mathscr{F}^u_2\right) = H\left(\mathscr{F}^u_{(1,2)} \cap \mathscr{F}^u_{(2,k)}\right) = \mathscr{L}^u_{(1,2)} \cap \mathscr{L}^u_{(2,k)} = \mathscr{L}^u_2 \quad \text{on} \quad \mathrm{Supp}(\mu).$$

由假设 H 沿 $\mathscr{F}^u_{(1,j)}$ 是 C^{1+}-光滑的，它沿 $\mathscr{F}^u_2$ 也是 C^{1+}-光滑的。于是我们可以再次应用引理6.17，这表明 $H(\mathscr{F}^u_{(3,k)}) = \mathscr{L}^u_{(3,k)}$，从而 $H(\mathscr{F}^u_3) = \mathscr{L}^u_3$。重复这一论证，我们得到 $H(\mathscr{F}^u_{j+1,k}) = \mathscr{L}^u_{(j+1,k)}$，因此

$$H\left(\mathscr{F}^u_{j+1}\right) = H\left(\mathscr{F}^u_{(1,j+1)} \cap \mathscr{F}^u_{(j+1,k)}\right) = \mathscr{L}^u_{(1,j+1)} \cap \mathscr{L}^u_{(j+1,k)} = \mathscr{L}^u_{j+1} \quad \text{on} \quad \mathrm{Supp}(\mu).$$

□

引理 6.17 的证明主要遵循 [12, 命题 2.3]。由于我们有 $\mathscr{F}^u_j$， $\mathscr{F}^u_{(j+1,k)}$ 是 $\mathscr{F}^u_{(j,k)}$ 的每个叶中的两个一致横截叶状结构，并且

$$H\left(\mathscr{F}^u_{(j,k)}\right)=\mathscr{L}^u_{(j,k)},\qquad H\left(\mathscr{F}^u_j\right)=\mathscr{L}^u_j,$$

叶状结构 $H(\mathscr{F}^u_{(j+1,k)})$ 是一个 A-不变叶状结构，它将 $\mathscr{L}^u_{(j,k)}$ 子叶化，并且在 $\mathscr{L}^u_{(j,k)}$ 的每个叶内与 $\mathscr{L}^u_{(j+1,k)}$ 横截。

引理 6.18. 记 $\mathscr{L}:=H(\mathscr{F}^u_{(j+1,k)})$。那么，沿 $\mathscr{L}$*be- tween leaves of* $\mathscr{L}^u_j$ 的叶的整体映射是一致 C^{1+}-光滑的；也就是说，对于每个 $\omega\in$ 支撑$(\nu)^{\mathbb{Z}}$ 以及 $y\in\mathscr{L}(x)\subseteq\mathbb{T}^d_\omega$，若记为

$$\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}}_{x,y}:\ \mathscr{L}^u_j(x)\to\mathscr{L}^u_j(y)$$

由 $\mathscr{L}$ 在 $\mathscr{L}^u_j$ 的叶之间诱导的整体映射，则 $\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}}_{x,y}$ 一致 C^{1+}-光滑，且导数 $D\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}}_{x,y}$ 一致收敛到 L^u_j 上的恒等映射 Id，当 $y\to x$ 时。

证明。由于 $\mathscr{F}^u_{(j+1,k)}$ 是将 $\mathscr{F}^u_{(j,k)}$ 子叶化的强叶状结构，因此它在 $\mathscr{F}^u_{(j,k)}$ 的每个叶内都是 C^2-光滑的，参见 [20, 命题 3.9])。引理的其余部分由以下共轭得到：

$$\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}}_{x,y}=\left(H_\omega|_{\mathscr{F}^u_j(y)}\right)\circ\left(\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}^u_{(j+1,k)}}_{H^{-1}_\omega(x),H^{-1}_\omega(y)}\right)\circ\left(H^{-1}_\omega|_{\mathscr{L}^u_j(x)}\right).$$

实际上，$y\to x$意味着 $H^{-1}_\omega(y)\to H^{-1}_\omega(x)$。因此，由$\mathscr{F}^u_{(j+1,k)}$诱导的整体映射的导数一致收敛于恒等映射。由沿着$\mathscr{F}^u_j$的$H$的导数的连续性，我们有 $D\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}}_{x,y}$在 $\mathscr{L}^u_j(x)$上一致收敛于恒等映射。 □

利用 $\mathscr{L}$的整体映射的光滑性，我们证明 $\mathscr{L}$是$\mathscr{L}^u_{(j,k)}$的每个叶内的平行平移，并将利用这一点证明 $\mathscr{L}=\mathscr{L}^u_{(j+1,k)}$。

引理 6.19。对于每个 $\omega\in$ 支撑$(\nu)^{\mathbb{Z}}$ 以及 $y\in\mathscr{L}(x)\subseteq\mathbb{T}^d_\omega$，整体映射

$$\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}}_{x,y}:\ \mathscr{L}^u_j(x)\to\mathscr{L}^u_j(y)$$

是 $\mathscr{L}^u_{(j,k),\omega}(x)$内的平行平移。

证明。为了证明 $\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}}_{x,y}$是平行平移，我们只需证明 $D\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}}_{x,y}=\mathrm{Id}$.　　记 $x_n=A^n_\omega(x)$ 和 $y_n=A^n_\omega(y)$，其中$y_n\in\mathscr{L}(x_n)$ 且 $\lim_{n\to+\infty}d(x_n,y_n)=0$。于是我们有

$$\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}}_{x,y}=\bar{A}^n_{\sigma^{-n}(\omega)}\circ\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}}_{x_n,y_n}\circ\bar{A}^{-n}_\omega,$$

其中，$\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}}_{x_n,y_n}:\ \mathscr{L}^u_j(x_n)\to\mathscr{L}^u_j(y_n)$ 也是由 $\mathscr{L}$ 诱导的整体映射。

求导并记$D\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}}_{x_n,y_n}=\mathrm{Id}+\Delta_n$，我们得到

$$\begin{aligned}D\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}}_{x,y}&=\left(\bar{A}^n_{\sigma^{-n}(\omega)}|_{L^u_j}\right)\circ D\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}}_{x_n,y_n}\circ\left(\bar{A}^{-n}_\omega|_{L^u_j}\right)\\&=\left(\bar{A}^n_{\sigma^{-n}(\omega)}|_{L^u_j}\right)\circ(\mathrm{Id}+\Delta_n)\circ\left(\bar{A}^{-n}_\omega|_{L^u_j}\right)\\&=\mathrm{Id}+\left(\bar{A}^n_{\sigma^{-n}(\omega)}|_{L^u_j}\right)\circ\Delta_n\circ\left(\bar{A}^{-n}_\omega|_{L^u_j}\right).\end{aligned}$$

由引理 6.18 可知，当$n \to +\infty$时，$D\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}}_{x_n,y_n} \to \mathrm{Id}$；也就是说，当$n \to +\infty$时，$\Delta_n \to 0$。

由于A沿着$\mathscr{L}^u{}_j$是共形的，因此存在某个常数$C > 0$使得

$$\left\| \left(\bar{A}^n_{\sigma^{-n}(\omega)}|_{L^u_j} \right) \circ \Delta_n \circ \left(\bar{A}^{-n}_{\omega}|_{L^u_j} \right) \right\| \le C \cdot \|\Delta_n\| \to 0 \qquad \text{as} \quad n \to +\infty.$$

这意味着$D\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}}_{x,y} = \mathrm{Id}$，且$\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}}_{x,y}$是平行平移。 □

现在我们可以证明引理 6.17。关键在于，如果$\mathscr{L} \neq \mathscr{L}^u(j+1,k)$在$\mathrm{Supp}(\mu)$上成立，那么它相对于$\mathscr{L}^u(j+1,k)$会有线性偏离，从而导致矛盾。证明沿用[12, 命题 2.2]；为求完整起见，我们将其列出。

引理 6.17 的证明。回忆$\mathscr{L}_\omega(\mathrm{H}\omega(\mathrm{x})) = \mathrm{H}^\omega(\mathrm{F\ u\ (j+1,k)},\omega)(\mathrm{x}))$。由于A的周期点在$\mathrm{Supp}(\mu)$中稠密$= \mathrm{Supp}(\nu)^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{T}^d$，并且$\mathscr{L}_\omega(\mathrm{x})$关于$\omega$和x连续，我们只需证明对于每个$(\omega, \mathrm{x}) \in \mathrm{Per(A)} \cap \mathrm{Supp}(\mu)$，都有$\mathscr{L}_\omega(\mathrm{x}) = \mathscr{L}\mathrm{u\ (j+1,k)},\omega(\mathrm{x})$。

固定（ω、x）$\in \mathrm{Per}(A) \cap$支撑$(H_*(\mu))$，周期为$\kappa \in \mathbb{N}$。记B为以$\bar{x}$为中心、位于$\mathscr{L}^u$（$j+1$、k）中的单位球，ω（x）。如果$B \subset \mathscr{L}_\omega$（$x$），则$\mathscr{L}$在$A$作用下的不变性意味着$\mathscr{L}_\omega$（$x$）$= \mathscr{L}^u$（$j+1$、$k$），$\omega$（$x$）。设存在$z_1 \in B$，且$z_1 \notin \mathscr{L}_\omega$（$x$）。记

$$x_1 = \mathscr{L}_\omega(x) \cap \mathscr{L}^u_{j,\omega}(z_1).$$

由于$\mathscr{L}^u{}_j$，ω（x）具有稠密叶于$\mathbb{T}^d_\omega$中，因此存在

$$\{b_n : n \ge 0\} \subseteq \mathscr{L}^u_{j,\omega}(x) \qquad \text{such that} \qquad b_n \to x_1 \ \text{ as } \ n \to \infty.$$

Let

$$y_n = \mathrm{Hol}^{\mathscr{L}}_{x,x_1}(b_n).$$

由引理 6.19，$y_n = x_1 + bn$；由于$x_1 \in \mathscr{L}$（x），存在$x_2 \in \mathscr{L}x$（），使得$y_n \to x_2$，当$n \to \infty$时。此外，$\{x_1, x_2\}$是$\{x$、$x_1\}$在$\mathscr{L}$（x）内的平行平移。

我们递归地继续这一过程，得到$\{xn : n \ge 1\} \subseteq \mathscr{L}_\omega$（$x$）。令

$$z_n = \mathscr{L}^u_{j,\omega}(x_n) \cap \mathscr{L}^u_{(j+1,k),\omega}(x).$$

由于所有叶状结构都是线性的，我们有

$$d_{\mathscr{L}^u_{(j+1,k)}}(z_n, x) = n \cdot d_{\mathscr{L}^u_{(j+1,k)}}(z_1, x) \qquad \text{and} \qquad d_{\mathscr{L}^u_j}(x_n, z_n) = n \cdot d_{\mathscr{L}^u_j}(x_1, z_1). \tag{14}$$

对于每个n，将$N(n)$记为满足$\bar{A}^{-\kappa \cdot N(n)}_\omega(zn) \in B$的最小整数。由于$\bar{A}^{-\kappa}$收缩$u(j+1,k)$的速度指数级快于$\mathscr{L}u\,j$，公式 (14) 推出

$$d_{\mathscr{L}^u_j}\left(\bar{A}^{-\kappa \cdot N(n)}_\omega(z_n),\ \bar{A}^{-\kappa \cdot N(n)}_\omega(x_n) \right) \to \infty \qquad \text{as} \qquad n \to \infty.$$

这与B的紧致性相矛盾，其中

$$\max_{z \in B} d_{\mathscr{L}^u_j}\left(z, \mathscr{L}^u_{j,\omega}(z) \cap \mathscr{L}_\omega(x) \right) < \infty.$$

因此，我们有$H(\mathscr{F}u(j+1,k)) = \mathscr{L} = \mathscr{L}u(j+1,k)$属于支撑$(\mu)$。 □

7 稳定丛的非随机性

本节中，我们证明，如果拓扑共轭沿纤维不稳定叶状结构是C^{1+}-光滑的，那么扰动系统的稳定丛是非随机的。

设 $\mathscr{U}=\mathscr{U}_i$ 是 $\mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^d)$ 中 $\mathscr{A}$ 的邻域，且 $\Omega=\mathscr{U}^{\mathbb{Z}}$ 如命题 5.3 所述，使得相应的斜积

$$F:\Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega\times\mathbb{T}^d,\qquad F(\omega,x)=\big(\sigma(\omega),\,f_\omega(x)\big)$$

是纤维方向 Anosov。此外，对于定义 5.2 中的扩张系统 $\bar{A}\colon\ \Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega\times\mathbb{T}^d$，存在拓扑共轭 $H\colon\ \Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega\times\mathbb{T}^d$，满足

$$H(\omega,x)=(\omega,H_\omega(x)),\qquad \text{such that}\qquad H\circ F=\bar{A}\circ H.$$

若记 $\mathscr{L}^u$ 和 $\mathscr{F}^u$ 分别为 $\bar{A}$ 与 F 在 $\Omega\times\mathbb{T}^d$ 上的纤维方向扩张叶状结构，则 $H(\mathscr{F}^u)=\mathscr{L}^u$。

7.1 $\mathbb{T}^2$ 上稳定丛的非随机性

在本小节中，我们考虑这样的情形：$\mathscr{A}=\{A_i\}_{i=1}^m\subseteq GL(2,\mathbb{Z})$ 是一个由阿诺索夫自同构构成的锥双曲族。回顾引理 6.2 中的两种可能性。

令 $\mathscr{U}$ 为 $\mathscr{A}$ 在 $\mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^2)$ 中的一个充分小的邻域。令 ν 为支撑于 $\mathscr{U}$ 上的一个概率测度。回顾命题 6.3，若 F 的唯一 ν-平稳 SRB 测度 μ 的正李雅普诺夫指数与线性随机游走（或扭系统 $\bar{A}$）的正李雅普诺夫指数一致，则共轭 H 沿纤维方向不稳定叶状结构 $\mathscr{F}^u$ 是 C^{1+} 的，并且定义在 $\mathrm{Supp}(\mu)=\mathrm{Supp}(\nu)^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{T}^2$ 之上。

在下文中，我们固定一些记号。

记号。

- 令 $\mathcal{K}\subseteq\mathscr{U}=\cup\mathscr{U}i$ 为一个子集，并令 $\Sigma=\mathcal{K}^{\mathbb{Z}}$。令 $f\in\mathcal{K}\cap\mathscr{U}i$，它是 C^2 接近 $Ai\in\mathscr{U}i$ 的，因而是阿诺索夫的。记 $\mathscr{F}sf$ 和 $\mathscr{F}uf$ 分别为 f 的稳定与不稳定叶状结构。若 $f\in\mathscr{U}i$，则令 $Af=Ai$。
- 记 $Af=\Upsilon(f)$ 为 f 在 $GL(2,\mathbb{Z})$ 中的线性化。记 $\mathscr{L}sf$ 和 $\mathscr{L}uf$ 分别为 Af 的线性稳定与不稳定叶状结构。
- 令 $Hf\colon\ \mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ 为拓扑共轭，使得 $Hf\circ f=Af\circ Hf$，且与恒等映射 $\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^2}$ 的距离小于 C^0，则

$$H_f(\mathscr{F}^s_f)=\mathscr{L}^s_f\qquad and\qquad H_f(\mathscr{F}^u_f)=\mathscr{L}^u_f.$$

引理 7.1。令 $t\ \omega=(\cdots,f,f,f,\cdots)\in\Sigma$ 为移位 $\sigma\colon\ \sigma(\omega)=\omega$ 的不动点。于是我们有

$$\Upsilon(\omega)=(\cdots,A_f,A_f,A_f,\cdots)\qquad and\qquad \bar{A}_\omega=A_f:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2.$$

*Mo*此外，对于命题 *5.3* 中的拓扑共轭 $H_\omega\colon\ \mathbb{T}^2_\omega\to\mathbb{T}^2_\omega$，我们有

$$H_\omega=H_f.$$

¯证明。 该引理是由 A 和拓扑共轭 H的定义直接推导出的。

□

我们取 $\mathscr{K}$ =支撑(ν)。在本小节中，我们的所有结果都与 ν 无关。它适用于任意子集 $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{U}$。以下命题是本小节的主要定理。

命题 7.2. 假设拓扑共轭 $H : \Sigma \times \mathbb{T}^2 \to \Sigma \times \mathbb{T}^2$ 沿纤维方向不稳定叶状结构是 C^{1+}-光滑的，且导数有界。对于每一对 $f, g \in \mathscr{K}$，设 $Hf, Hg: \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 是相应的拓扑共轭，满足 $Hf \circ f = Af \circ f$ 且 $Hg \circ g = Ag \circ g$。那么它们满足

$$H_f(\mathscr{F}^s_g) = \mathscr{L}^s_g \qquad and \qquad H_g(\mathscr{F}^s_f) = \mathscr{L}^s_f.$$

这里 $\mathscr{F}sf$和 $\mathscr{F}^s_g$ 分别是f和 g 的稳定叶状结构， $\mathscr{L}sf$和 $\mathscr{L}sg$ 分别是 Af 和 Ag 的线性稳定叶状结构。

证明。 我们证明 $Hf(\mathscr{F}sg) = \mathscr{L}sg$，因为证明 $Hg(\mathscr{F}sf) = \mathscr{L}sf$的过程与之对称。由于 $Hg(\mathscr{F}sg) = \mathscr{L}sg$是 $\mathbb{T}^2$ 上的无理线性叶状结构，并且 Hg、Hf 都是与 $\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^2}$ 相距 C^0 的，由于将这些叶状结构提升到万有覆盖 $\mathbb{R}^2$ 上，我们得到

- $\mathscr{F}sg$的每个叶都包含在 $\mathbb{R}^2$中 $\mathscr{L}sg$某个叶的有界邻域内;
- $Hf(\mathscr{F}sg)$的每个叶都包含在 $\mathbb{R}^2$中 $\mathscr{F}sg$某个叶的有界邻域内 .

这意味着$Hf(\mathscr{F}sg)$包含在 $\mathbb{R}^2$中 $\mathscr{L}sg$某个叶的有界邻域内。只需证明$Hf(\mathscr{F}sg)$是线性叶状结构。事实上，如果$Hf(\mathscr{F}sg)$是线性叶状结构，且每个叶到 $\mathscr{L}sg$的某个叶的距离有界，那么$Hf(\mathscr{F}sg)$与 $\mathscr{L}sg$重合。

记为 $\omega = (\cdots, f, f, f, \cdots)$、 $\xi = (\cdots, g, g, g, \cdots)$和 $\tau = [\omega, \xi] = (\cdots, f, g, g, \cdots)$。也就是说，对于所有$i < 0$，$\tau_i = f$; 对于所有$j \geq 0$, $\tau_j = g$。由于f、$g \in \mathscr{K}$，我们有 ω、ξ、$\tau \in \Sigma = \mathscr{K}^{\mathbb{Z}}$，且 τ 是移位映射 σ: $\Sigma \to \Sigma$下从 ω 到 τ 的一条异宿轨道。

对于斜积的纤维动力学 $F_n(\tau, x) = \left(\sigma^n(\tau), f_{n\tau}(x)\right)$，我们有

$$f^n_\tau(x) = g^n(x) : \mathbb{T}^2_\tau \to \mathbb{T}^2_{\sigma^n(\tau)}, \qquad \forall n \geq 0;$$
$$f^n_\tau(x) = f^n(x) : \mathbb{T}^2_\tau \to \mathbb{T}^2_{\sigma^n(\tau)}, \qquad \forall n < 0.$$

这意味着F在纤维 $\mathbb{T}^2_\tau$ 上的纤维稳定与不稳定叶状结构为

$$\mathscr{F}^s_\tau = \mathscr{F}^s_g \qquad \text{and} \qquad \mathscr{F}^u_\tau = \mathscr{F}^u_f.$$

类似地，斜积系统 $\bar{A}^n(\tau, x) = \left(\sigma^n(\tau), \bar{A}^n_\tau(x)\right)$的纤维动力学为

$$\bar{A}^n_\tau(x) = A^n_g(x) : \mathbb{T}^2_\tau \to \mathbb{T}^2_{\sigma^n(\tau)}, \qquad \forall n \geq 0;$$
$$\bar{A}^n_\tau(x) = A^n_f(x) : \mathbb{T}^2_\tau \to \mathbb{T}^2_{\sigma^n(\tau)}, \qquad \forall n < 0.$$

¯A 在纤维 $\mathbb{T}^2_\tau$ 上的纤维稳定与不稳定线性叶状结构为

$$\mathscr{L}^s_\tau = \mathscr{L}^s_g \qquad \text{and} \qquad \mathscr{L}^u_\tau = \mathscr{L}^u_f.$$

此外，纤维上的拓扑共轭 $H_\tau : \mathbb{T}^2_\tau \to \mathbb{T}^2_\tau$ 满足

$$H_\tau(\mathscr{F}^s_g) = H_\tau(\mathscr{F}^s_\tau) = \mathscr{L}^s_\tau = \mathscr{L}^s_g \qquad \text{and} \qquad H_\tau(\mathscr{F}^u_f) = H_\tau(\mathscr{F}^u_\tau) = \mathscr{L}^u_\tau = \mathscr{L}^u_f.$$

由于我们有 $H_\omega = Hf\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 满足

$$H_\omega \circ f = H_\omega \circ f_\omega = A_f \circ H_\omega,$$

我们只需证明$Hf(\mathcal{F}sg) = H\omega(\mathcal{F}s\tau) = Hf(\mathcal{F}s\tau)$ 是线性叶状结构，这可由以下断言推出。

断言。 设 $\mathcal{F} = H\omega(\mathcal{F}s\tau)$。对每个 $x \in \mathbb{T}^2$ 以及每个 $y \in \mathcal{F}(x)$，$H\omega(\mathcal{F}_\tau^u) = H\omega(\mathcal{F}^u f) = \mathcal{L}uf$ 的叶之间由 $\mathcal{F}$ 诱导的整体映射：

$$\mathrm{Hol}_{x,y}^{\mathcal{F}}\colon \mathcal{L}_f^u(x) \to \mathcal{L}_f^u(y)$$

是 C^{1+}-光滑的，且导数满足 $D\mathrm{Hol}_{x,y}^{\mathcal{F}} = \mathrm{Id}$。

断言的证明。 对每个 $x \in \mathbb{T}^2$、$y \in \mathcal{F}(x)$ 和 $n > 0$，记

$$x_n = \bar{A}_\tau^{-n}(x) = A_f^{-n}(x) \in \mathbb{T}^2_{\sigma^{-n}(\tau)} \qquad \text{and} \qquad y_n = \bar{A}_\tau^{-n}(y) = A_f^{-n}(y) \in \mathbb{T}^2_{\sigma^{-n}(\tau)}.$$

记 $\mathcal{F}_n = A_\tau^{-n}(\mathcal{F}) = A^{-n} f(\mathcal{F})$，则 $y_n \in \mathcal{F}_n(x)$。

由于 $\bar{A}_\tau^{-n}(\mathcal{L}uf) = A^{-n} f(\mathcal{L}uf) = \mathcal{L}uf$，记 $\mathrm{Hol}^{\mathcal{F}_n}{}_{x_n,y_n}\colon \mathcal{L}uf(x^n) \to \mathcal{L}^u f(y^n)$ 为由 $\mathcal{F}_n$ 在 $\mathcal{L}uf(x^n)$ 与 $\mathcal{L}^u f(y^n)$ 之间诱导的整体映射，我们有

$$\mathrm{Hol}_{x,y}^{\mathcal{F}} = \bar{A}_{\sigma^n(\tau)} \circ \mathrm{Hol}_{x_n,y_n}^{\mathcal{F}_n} \circ \bar{A}_\tau^{-n} = A_f^n \circ \mathrm{Hol}_{x_n,y_n}^{\mathcal{F}_n} \circ A_f^{-n}. \tag{15}$$

根据拓扑共轭的性质，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n = \bar{A}_\tau^{-n}(\mathcal{F}) &= \bar{A}_\tau^{-n} \circ H_\omega(\mathcal{F}_\tau^s) = A_f^{-n} \circ H_\omega(\mathcal{F}_\tau^s) \\ &= H_\omega \circ f^{-n}(\mathcal{F}_\tau^s) = H_\omega \circ f_\tau^{-n}(\mathcal{F}_\tau^s) \\ &= H_\omega(\mathcal{F}^s_{\sigma^{-n}(\tau)}).\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{F}u\sigma^{-n}(\tau) = \mathcal{F}_\tau^u = \mathcal{F}_{uf}$，共轭映射 H^ω 和 $H\sigma^{-n}(\tau)$ 均满足

$$\mathcal{L}_f^u = H_\omega(\mathcal{F}^u_{\sigma^{-n}(\tau)}) = H_{\sigma^{-n}(\tau)}(\mathcal{F}^u_{\sigma^{-n}(\tau)}).$$

记为

- $x\prime n = H_\omega^{-1}(xn)$ and $y\prime n = H_\omega^{-1}(yn) \in \mathcal{F}s\sigma^{-}{}^{n}(\tau)(x\prime n)$;
- $\mathrm{Hol}^{\mathcal{F}s\sigma^{-}n(\tau)\,x\prime n,\ y\prime n}\colon \mathcal{F}uf(x\prime n) \to \mathcal{F}uf(y\prime n)$ 是由 $\mathcal{F}s\sigma^{-}{}^{n}(\tau) = H_\omega^{-1}(\mathcal{F}n)$ 诱导的整体映射；
- $x''n = H\sigma^{-}n(\tau)(x'n)$ and $y''n = H\sigma^{-}n(\tau)(y'n) \in H\sigma^{-}n(\tau)(\mathcal{F}s\,\sigma^{-}n(\tau)(x'n)) = \mathcal{L}s\,\sigma^{-}n(\tau)(x''n)$;
- $\mathrm{Hol}^{\mathcal{L}s\sigma^{-}n(\tau)\,x\prime\prime n,y\prime\prime n}\colon \mathcal{L}uf(x\prime\prime n) \to \mathcal{L}uf(y\prime\prime n)$ $\mathcal{L}s\sigma^{-}{}^{n}(\tau)$ 所诱导的整体映射，是$\mathcal{L}uf(x\prime\prime n)$ 与 $\mathcal{L}uf(y\prime\prime n)$之间的平行平移。

整体映射 $\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}^n}{}_{x_n,y_n}$：$\mathscr{L}^u f(x^n) \to \mathscr{L}^u f(y^n)$ 满足

$$\begin{aligned}\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}^n}_{x_n,y_n} &= \left(H_\omega|_{\mathscr{F}^u_f(y'_n)}\right)\circ\left(\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}^s_{\sigma^{-n}(\tau)}}_{x'_n,y'_n}\right)\circ\left(H_\omega^{-1}|_{\mathscr{L}^u_f(x_n)}\right)\\ &= \left(H_\omega|_{\mathscr{F}^u_f(y'_n)}\right)\circ\left(H^{-1}_{\sigma^{-n}(\tau)}|_{\mathscr{L}^u_f(y''_n)}\right)\circ\left(\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}^s_{\sigma^{-n}(\tau)}}_{x''_n,y''_n}\right)\circ\left(H_{\sigma^{-n}(\tau)}|_{\mathscr{F}^u_f(x'_n)}\right)\circ\left(H_\omega^{-1}|_{\mathscr{L}^u_f(x_n)}\right). \quad (16)\end{aligned}$$

这里，$\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}^s_{\sigma^{-n(\tau)}}}{}_{x''_n,y''_n}$ 是一个平行平移，其导数为恒等映射 Id。

由于两个共轭映射 H_ω 和 $H_{\sigma^{-n}(\tau)}$ 沿着 $\mathscr{F}^u_{\sigma^{-n}(\tau)} = \mathscr{F}^u_f$ 均为 C^{1+}-光滑，且具有赫尔德连续的有界导数，因此整体映射 $\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}^n}{}_{x_n,y_n}$ 可微。

此外，由于当 $\tau \to \omega$ 时 σ^{-n}，$DH|_{\mathscr{F}^u}$ 的连续性意味着

$$\begin{aligned}\left(DH_{\sigma^{-n}(\tau)}|_{\mathscr{F}^u_f(x'_n)}\right)\circ\left(DH_\omega^{-1}|_{\mathscr{L}^u_f(x_n)}\right) &= \mathrm{Id}+\Delta_n \to \mathrm{Id} \qquad \text{as} \quad n\to+\infty;\\ \left(DH_\omega|_{\mathscr{F}^u_f(y'_n)}\right)\circ\left(DH^{-1}_{\sigma^{-n}(\tau)}|_{\mathscr{L}^u_f(y''_n)}\right) &= \mathrm{Id}+\Delta'_n \to \mathrm{Id} \qquad \text{as} \quad n\to+\infty.\end{aligned}$$

上面，作为从 $\mathscr{L}^u f(x^n)$ 到 $\mathscr{L}^u f(x''_n)$ 的线性算子（一阶分别取原点为 x_n 和 x''_n 的线性空间）是一致的。由方程 15 和 16，整体映射 $\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}}_{x,y}: \mathscr{L}^u f(x^n) \to \mathscr{L}^u f(y^n)$ 可微，且满足

$$\begin{aligned}D\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}}_{x,y} &= A^n_f\circ\left(D\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}^n}_{x_n,y_n}\right)\circ A_f^{-n}\\ &= A^n_f\circ(\mathrm{Id}+\Delta'_n)\circ(\mathrm{Id}+\Delta_n)\circ A_f^{-n}.\end{aligned}$$

由于 $A^n f$ 在 $\mathscr{L}^u f$ 的叶上的限制是共形的，且其导数与基点无关，因此我们有

$$A^n_f\circ(\mathrm{Id}+\Delta'_n)\circ(\mathrm{Id}+\Delta_n)\circ A_f^{-n} \to \mathrm{Id}$$

由于 $n \to \infty$。这证明了该断言。 □

由于 $H_\omega(\mathscr{F}^u_\tau) = H_\omega(\mathscr{F}^u f) = \mathscr{L}^u f$ 是 $\mathbb{T}^2$ 上的极小线性叶状结构，并且横截于 $\mathscr{F}$，引理 5.6 表明 $\mathscr{F}$ 是一个线性叶状结构。因此我们有

$$H_f(\mathscr{F}^s_g) = H_\omega(\mathscr{F}^s_\tau) = \mathscr{F} = \mathscr{L}^s_g.$$

对称地，我们有 $H_g(\mathscr{F}^s f) = \mathscr{L}^s f$。这就完成了该命题的证明。 □

7.2 $\mathbb{T}^d$ 上稳定向量丛的非随机性

在本小节中，我们考虑以下情形：$\mathscr{A} = \{A_i\}^m_{i=1} \subseteq GL(d, \mathbb{Z})$ 是一族两两可交换的阿诺索夫自同构，并且具有相同的最细支配分裂

$$T\mathbb{T}^d = L^s_1 \oplus \cdots \oplus L^s_l \oplus L^u_1 \oplus \cdots \oplus L^u_k.$$

此外，每个 A_i 都满足一般性假设，即 A_i 是双曲的、不可约的，并且 A_i 在每个满足 $\dim L^{s/u}{}_j \le 2$ 的 $L^{s/u}{}_j$ 中都是共形的。由于所有 $\{A_i\}^m{}_{i=1}$ 都具有相同的不变叶状结构，我们将与 L^s、L^u、$L^u{}_j$ 相切的相应线性叶状结构分别记为 $\mathscr{L}^s$、$\mathscr{L}^u$、$\mathscr{L}^u{}_j$，其中 $j = 1、\cdots、k$。

令 $\mathcal{U}_i$为 Diff$^2(\mathbb{T}^d)$ 中 A_i 的一个邻域，记为 $\mathcal{U}=\cup\mathcal{U}_i$ 和 $\Omega=\mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$，使得相应的斜积

$$F:\Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega\times\mathbb{T}^d,\qquad F(\omega,x)=\big(\sigma(\omega),f_\omega(x)\big)$$

是纤维方向 Anosov，并满足命题 5.3 和命题 5.9 的结论，则F具有纤维方向最精细支配分裂

$$T\mathbb{T}^d_\omega=E^s_{1,\omega}\oplus\cdots E^s_{l,\omega}\oplus E^u_{1,\omega}\oplus\cdots E^u_{k,\omega},\qquad\text{with}\qquad \dim E^{s/u}_{j,\omega}=\dim L^{s/u}_j,\quad\forall j.$$

设H： $\Omega\times\mathbb{T}^d\to\Omega\times\mathbb{T}^d$是命题 5.3 中定义的拓扑共轭，且$^-$ $^-$满足命题 5.9，并满足$H\circ F=A\circ H$，其中A是定义 5.2 中定义的扩展斜积。

设 ν 是一个概率测度，满足 Supp(ν) $\subseteq\mathcal{U}$，其中F对应的纤维方向 SRB 测度（$\pi_*(\mu)=\nu^{\mathbb{Z}}$）具有正李雅普诺夫指数刚性，即 ν 满足命题 6.6 的假设。

设 $\mathcal{K}$ =Supp(ν)且 $\Sigma=\mathcal{K}^{\mathbb{Z}}$。对于限制斜积系统$F$： $\Sigma\times\mathbb{T}^d\to\Sigma\times\mathbb{T}^d$和$A$：$\Sigma\times\mathbb{T}^d\to\Sigma\times\mathbb{T}^d$，命题 6.6 表明相应的共轭$H$： $\Sigma\times\mathbb{T}^d\to\Sigma\times\mathbb{T}^d$满足

1. H intertwines 所有中间不稳定叶状结构:

$$H_\omega\left(\mathcal{F}^u_{j,\omega}\right)=\mathcal{L}^u_{j,\omega},\qquad\forall j=1,\cdots,k,\quad\forall\omega\in\Sigma.$$

In 特别地，向量丛 $Es_\omega\oplus E^u{}_{k,\omega}$ 联合可积为叶状结构 $\mathcal{F}s\omega\oplus\mathcal{F}_{u\,k,\omega}$。

2. H是C^{1+}-s 光滑的，沿 $\mathcal{F}uj$的叶具有有界导数，其中 $j=1,\cdots,k$，在 $\Sigma\times\mathbb{T}^d$ 上。

对于每个 f $\in\mathcal{K}\cap\mathcal{U}_i$，记 $\mathcal{F}$s f ,$\mathcal{F}$u f 为 f 的稳定叶状结构和不稳定叶状结构，并记 $\mathcal{F}$u j,f 为与 E u j,f 相切的 f-不变叶状结构，其中 j $=1,\cdots,$ k。记 A f $=$A$_i\in$GL(d , $\mathbb{Z}$) 为 f 的线性化。设 Hf: $\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$ 为拓扑共轭，满足 H f $\circ$ f $=$A f $\circ$ H f，则由命题 6.6 可知，H f ($\mathcal{F}$u j,f) $=\mathcal{L}$u j，且 Hf 沿 $\mathcal{F}$u j 是 C $^{1+}$-光滑的，其中 j $=1,\cdots,$ k。

记为 $\omega=(\cdots,f,f,f,\cdots)\in\Sigma$，则有

$$\bar{A}_\omega=A_f:\mathbb{T}^d_\omega\to\mathbb{T}^d_{\sigma(\omega)}=\mathbb{T}^d_\omega,\qquad\text{and}\qquad H_\omega=H_f:\mathbb{T}^d_\omega\to\mathbb{T}^d_\omega.$$

以下命题是本小节的主要定理，是命题 7.2 的高维版本。

命题 7.3。假设拓扑共轭 $H:\Sigma\times\mathbb{T}^d\to\Sigma\times\mathbb{T}^d$将最强扩张叶丛 $H(\mathcal{F}u\,k)=\mathcal{L}u\,k$ 相互对应，并且沿 $\mathcal{F}u\,k$ 是 C^{1+}-光滑的，且具有有界导数。对于每一对$f,g\in\mathcal{K}$，令 Hf,Hg: $\mathbb{T}^d\to\mathbb{T}^d$为相应的拓扑共轭。则有

$$H_f(\mathcal{F}^s_g)=\mathcal{L}^s\qquad and\qquad H_g(\mathcal{F}^s_f)=\mathcal{L}^s.$$

证明与命题 7.2 类似。为完整起见，我们将其列出。

证明。 我们只需证明$Hf(\mathscr{F}_{sg})$是线性叶状结构。然后，如命题 7.2 的证明所示，我们有$Hg(\mathscr{F}_{sg}) = \mathscr{L}_s$。

对于f、$g \in \mathscr{K}$，记 $\omega = (\cdots, f, f, f, \cdots)$、$\xi = (\cdots, g, g, g, \cdots)$，以及

$$\tau = (\cdots, f, g, g, \cdots), \qquad \text{that is} \quad \tau_i = f, \ \forall i < 0; \quad \text{and} \quad \tau_j = g, \ \forall j \geq 0.$$

那么 ω、ξ、$\tau \in \Sigma$ 以及 $\lim_{n\to+\infty} \sigma^{-n}(\tau) = \omega$。

对于 斜积系统的纤维动力学$F_n(\tau, x) = \left(\sigma^n(\tau)、f_{n\tau}(x)\right)$，我们有 e

$$f_\tau^n(x) = g^n(x) : \mathbb{T}_\tau^d \to \mathbb{T}_{\sigma^n(\tau)}^d, \qquad \forall n \geq 0;$$
$$f_\tau^n(x) = f^n(x) : \mathbb{T}_\tau^d \to \mathbb{T}_{\sigma^n(\tau)}^d, \qquad \forall n < 0.$$

这意味着F在纤维 $\mathbb{T}_\tau^d$ 上的纤维方向不变叶状结构为

$$\mathscr{F}_\tau^s = \mathscr{F}_g^s \qquad \text{and} \qquad \mathscr{F}_\tau^u = \mathscr{F}_f^u.$$

特别地，最强扩张叶丛 $\mathscr{F}^u{}_k$、τ 取决于负向迭代，因此我们有

$$\mathscr{F}_{k,\tau}^u = \mathscr{F}_{k,f}^u = \mathscr{F}_{k,\omega}^u.$$

对于斜积系统 $\bar{A}^n(\tau, x) = \left(\sigma^n(\tau)$ 的纤维动力学，$\bar{A}_\tau^n(x)\right)$ 是

$$\bar{A}_\tau^n(x) = A_g^n(x) : \mathbb{T}_\tau^d \to \mathbb{T}_{\sigma^n(\tau)}^d, \qquad \forall n \geq 0;$$
$$\bar{A}_\tau^n(x) = A_f^n(x) : \mathbb{T}_\tau^d \to \mathbb{T}_{\sigma^n(\tau)}^d, \qquad \forall n < 0.$$

$\mathbb{T}_\tau^d$ 上的相应线性叶状结构为

$$\mathscr{L}_\tau^s = \mathscr{L}^s, \qquad \mathscr{L}_\tau^u = \mathscr{L}^u, \qquad \text{and} \qquad \mathscr{L}_{k,\tau}^u = \mathscr{L}_k^u.$$

此外，纤维上的拓扑共轭 $H_\tau : \mathbb{T}_\tau^d \to \mathbb{T}_\tau^d$ 满足

$$H_\tau(\mathscr{F}_g^s) = H_\tau(\mathscr{F}_\tau^s) = \mathscr{L}^s \qquad \text{and} \qquad H_\tau(\mathscr{F}_f^u) = H_\tau(\mathscr{F}_\tau^u) = \mathscr{L}^u.$$

由于我们有 $H_\omega = Hf : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 满足

$$H_\omega \circ f = H_\omega \circ f_\omega = A_f \circ H_\omega,$$

我们只需证明 $H_\omega(\mathscr{F}_{s\tau}) = Hf(\mathscr{F}_{s\tau})$ 是线性叶状结构。

由于 $H_\tau(\mathscr{F}_{u\,k,\tau}) = \mathscr{L}_{u\,k}$ 与 $H_\tau(\mathscr{F}_{s\tau}) = \mathscr{L}_s$ 联合可积，且 $\mathscr{F}_{u\,k,\tau} = \mathscr{F}_{u\,k,\omega}$，我们有

- 叶状结构 $\mathscr{F}_{u\,k,\tau}$ 与 $\mathscr{F}_{s\tau}$ 联合可积；
- $H_\omega(\mathscr{F}_{u\,k,\ \tau}) = \mathscr{L}_{u\,k}$。

记为 $\mathscr{F} = H_\omega(\mathscr{F}_{s\tau})$，它与 $\mathscr{L}_{u\,k}$ 联合可积。由于 A_i 不可约，我们有 $\mathscr{L}_{u\,k}$ 是极小的，而引理 5.5 表明 $\mathscr{F} \oplus \mathscr{L}_{u\,k}$ 是 $\mathbb{T}^d$ 上的极小线性叶状结构。由于 H_ω 和 H_τ 都与 $\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^d}$ 同伦，事实是

$$H_\tau \circ H_\omega^{-1}\left(\mathscr{F} \oplus \mathscr{L}_k^u\right) = H_\tau\left(\mathscr{F}_\tau^s \oplus \mathscr{F}_{k,\tau}^u\right) = \mathscr{L}^s \oplus \mathscr{L}_k^u$$

意味着

$$\mathscr{F} \oplus \mathscr{L}_k^u = \mathscr{L}^s \oplus \mathscr{L}_k^u.$$

下述断言表明，$\mathscr{F}$ 是一个线性叶状结构。

断言。 对于每个 $x \in \mathbb{T}^2$ 和每个 $y \in \mathscr{F}(x)$， $\mathscr{F}$ 在叶 $\mathscr{L}^u_k$ 与叶 $\mathscr{F} \oplus \mathscr{L}^u_k(x)$之间的整体映射：

$$\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}}_{x,y} : \mathscr{L}^u_k(x) \to \mathscr{L}^u_k(y)$$

是 C^{1+}光滑的，且导数为 $D\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}}_{x,y} = \mathrm{Id}$。

断言的证明。 对于每个 $x \in \mathbb{T}^d$、$y \in \mathscr{F}(x)$ 和 $n > 0$，记为

$$x_n = \bar{A}_\tau^{-n}(x) = A_f^{-n}(x) \in \mathbb{T}^d_{\sigma^{-n}(\tau)} \qquad \text{and} \qquad y_n = \bar{A}_\tau^{-n}(y) = A_f^{-n}(y) \in \mathbb{T}^d_{\sigma^{-n}(\tau)}.$$

记为 $\mathscr{F}_n = A_\tau^{-n}(\mathscr{F}) = A^{-n} f(\mathscr{F})$，则 $y_n \in \mathscr{F}_n(x)$。

由于 $A_\tau^{-n}(\mathscr{L}^u_k) = A^{-n} f(\mathscr{L}^u_k) = \mathscr{L}^u_k$，记 $\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}_n}_{x_n,y_n} : \mathscr{L}^u_k(x^n) \to \mathscr{L}^u_k(y^n)$ 为由 $\mathscr{F}_n$ 在 $\mathscr{L}^u_k(x^n)$ 与 $\mathscr{L}^u_k(y^n)$ 之间、位于叶 $\mathscr{F} \oplus \mathscr{L}^u_k(x^n)$ 内诱导的整体映射，我们有

$$\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}}_{x,y} = \bar{A}_{\sigma^n(\tau)} \circ \mathrm{Hol}^{\mathscr{F}_n}_{x_n,y_n} \circ \bar{A}_\tau^{-n} = A_f^n \circ \mathrm{Hol}^{\mathscr{F}_n}_{x_n,y_n} \circ A_f^{-n}. \tag{17}$$

特别地，Af沿 $\mathscr{L}^u_k$是共形的。由拓扑共轭，我们有

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_n = \bar{A}_\tau^{-n}(\mathscr{F}) &= \bar{A}_\tau^{-n} \circ H_\omega(\mathscr{F}^s_\tau) = A_f^{-n} \circ H_\omega(\mathscr{F}^s_\tau) \\ &= H_\omega \circ f^{-n}(\mathscr{F}^s_\tau) = H_\omega \circ f_\tau^{-n}(\mathscr{F}^s_\tau) \\ &= H_\omega(\mathscr{F}^s_{\sigma^{-n}(\tau)}). \end{aligned}$$

由于 $\mathscr{F}^u_{k,\sigma^{-n}(\tau)} = \mathscr{F}^u_{k,\tau} = \mathscr{F}^u_{k,f}$，两个共轭映射 H^ω 和 $H_{\sigma^{-n}(\tau)}$ 满足

$$\mathscr{L}^u_k = H_\omega(\mathscr{F}^u_{k,\sigma^{-n}(\tau)}) = H_{\sigma^{-n}(\tau)}(\mathscr{F}^u_{k,\sigma^{-n}(\tau)}).$$

记为

- $x'_n = H_\omega^{-1}(x_n)$ and $y'_n = H_\omega^{-1}(y_n) \in \mathscr{F}^s_{\sigma^{-n}(\tau)}(x'_n)$;
- $\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}^s_{\sigma^{-n}(\tau)}}_{x'_n,y'_n} : \mathscr{F}^u_{k,f}(x'_n) \to \mathscr{F}^u_{k,f}(y'_n)$ the holonomy map induced by $\mathscr{F}^s_{\sigma^{-n}(\tau)} = H_\omega^{-1}(\mathscr{F}_n)$ inside the leaf $\mathscr{F}^s_{\sigma^{-n}(\tau)} \oplus \mathscr{F}^u_{k,\sigma^{-n}(\tau)}(x'_n)$;
- $x''_n = H_{\sigma^{-n}(\tau)}(x'_n)$ and $y''_n = H_{\sigma^{-n}(\tau)}(y'_n) \in H_{\sigma^{-n}(\tau)}(\mathscr{F}^s_{\sigma^{-n}(\tau)}(x'_n)) = \mathscr{L}^s_{\sigma^{-n}(\tau)}(x''_n)$;
- $\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}^s_{\sigma^{-n}(\tau)}}_{x''_n,y''_n} : \mathscr{L}^u_k(x''_n) \to \mathscr{L}^u_k(y''_n)$ the holonomy map induced by $\mathscr{L}^s_{\sigma^{-n}(\tau)}$ inside the leaf $\mathscr{L}^s \oplus \mathscr{L}^u_k(x''_n)$, which is a parallel translation between $\mathscr{L}^u_k(x''_n)$ and $\mathscr{L}^u_k(y''_n)$.

整体映射 $\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}_n}_{x_n,y_n} : \mathscr{L}^u_k(x^n) \to \mathscr{L}^u_k(y^n)$ 满足

$$\begin{aligned} \mathrm{Hol}^{\mathscr{F}_n}_{x_n,y_n} &= \left(H_\omega|_{\mathscr{F}^u_{k,f}(y'_n)}\right) \circ \left(\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}^s_{\sigma^{-n}(\tau)}}_{x'_n,y'_n}\right) \circ \left(H_\omega^{-1}|_{\mathscr{L}^u_k(x_n)}\right) \\ &= \left(H_\omega|_{\mathscr{F}^u_{k,f}(y'_n)}\right) \circ \left(H_{\sigma^{-n}(\tau)}^{-1}|_{\mathscr{L}^u_k(y''_n)}\right) \circ \left(\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}^s_{\sigma^{-n}(\tau)}}_{x''_n,y''_n}\right) \circ \left(H_{\sigma^{-n}(\tau)}|_{\mathscr{F}^u_{k,f}(x'_n)}\right) \circ \left(H_\omega^{-1}|_{\mathscr{L}^u_k(x_n)}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

这里，$\mathrm{Hol}^{\mathscr{L}^s_{\sigma^{-n(\tau)}}}_{x''_n,y''_n}$是一个平行平移，其导数为恒等映射 Id。

由于两个共轭映射 H_ω 和 $H_{\sigma^{-n}(\tau)}$ 沿着 $\mathscr{F}^u_{k,\sigma^{-n}(\tau)} = \mathscr{F}^u_{k,f}$ 都是 C^{1+}光滑的，且具有赫尔德连续性和有界导数，因此整体映射 $\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}^n}_{x_n,y_n}$ 可微。

此外，由于 $\sigma^{-n}(\tau) \to \omega \text{ as } n \to +\infty$，$DH|_{\mathscr{F}^u_k}$的连续性可得

$$\begin{aligned}
\left(DH_{\sigma^{-n}(\tau)}|_{\mathscr{F}^u_{k,f}(x'_n)}\right) \circ \left(DH^{-1}_\omega|_{\mathscr{L}^u_k(x_n)}\right) &= \mathrm{Id} + \Delta_n \to \mathrm{Id} \qquad \text{as} \quad n \to +\infty; \\
\left(DH_\omega|_{\mathscr{F}^u_{k,f}(y'_n)}\right) \circ \left(DH^{-1}_{\sigma^{-n}(\tau)}|_{\mathscr{L}^u_k(y''_n)}\right) &= \mathrm{Id} + \Delta'_n \to \mathrm{Id} \qquad \text{as} \quad n \to +\infty.
\end{aligned}$$

由方程17和18，整体映射 $\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}}_{x,y}: \mathscr{L}^u_f(x^n) \to \mathscr{L}^u_f(y^n)$ 可微，且满足

$$\begin{aligned}
D\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}}_{x,y} &= A^n_f \circ \left(D\mathrm{Hol}^{\mathscr{F}^n}_{x_n,y_n}\right) \circ A^{-n}_f \\
&= A^n_f \circ (\mathrm{Id} + \Delta'_n) \circ (\mathrm{Id} + \Delta_n) \circ A^{-n}_f \qquad (n \to +\infty) \\
&= \mathrm{Id}.
\end{aligned}$$

最后一个等号利用了 A_f 沿 $\mathscr{L}^u_k$ 共形这一事实。这证明了该断言. □

由于 $H_\omega(\mathscr{F}^u_{k,\tau}) = H_\omega(\mathscr{F}^u_{k,f}) = \mathscr{L}^u_k$ 是 $\mathbb{T}^d$ 上与 $\mathscr{F}$ 横截的极小线性叶状结构，引理 5.6 表明 $\mathscr{F}$ 是线性叶状结构。因此我们有

$$H_f(\mathscr{F}^s_g) = H_\omega(\mathscr{F}^s_\tau) = \mathscr{F} = \mathscr{L}^s.$$

对称地，我们有 $H_g(\mathscr{F}^s_f) = \mathscr{L}^s$。这就完成了该命题的证明。 □

8 阿诺索夫作用的同时线性化

本节将证明，随机阿诺索夫微分同胚的稳定与不稳定叶状结构的非随机性蕴含同时线性化，并证明本文的主要定理。

我们先给出以下初等引理。

引理 8.1. 设 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 是 $\mathbb{T}^d$ 上的两个极小横截线性叶状结构，其中

$$\dim \mathscr{L}_1 + \dim \mathscr{L}_2 = d.$$

若同胚 $H: \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ 同伦于 $\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^d}$，且保持 $\mathscr{L}_1$，$\mathscr{L}_2$，则 H 是一个平移，即存在 $v \in \mathbb{T}^d$ 使得

$$H(x) = x + v, \qquad \forall x \in \mathbb{T}^d.$$

证明。记 $\tilde{H}$ 为 $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 的一个提升。我们只需证明 $\tilde{H}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的一个平移。由于 H 与 $\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^d}$ 同伦，因此有

$$\tilde{H}(x+n) = \tilde{H}(x) + n, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall n \in \mathbb{Z}^d.$$

假设 $\tilde{H}(0) = x_0,$，那么对每个 $n \in \mathbb{Z}^d$，都有 $\tilde{H}(n) = x_0 + n$。记 $\tilde{\mathscr{L}}_1$ 和 $\tilde{\mathscr{L}}_2$ 分别为线性叶状结构 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的提升。

由于对$i = 1$、2，有$H(\mathscr{L}_i) = \mathscr{L}_i$，我们也有

$$\tilde{H}(\tilde{\mathscr{L}}_i) = \tilde{\mathscr{L}}_i, \qquad i = 1, 2.$$

此外，$\tilde{\mathscr{L}}_1$ 和 $\tilde{\mathscr{L}}_2$ 是两个线性横截叶状结构，满足

$$\dim \tilde{\mathscr{L}}_1 + \dim \tilde{\mathscr{L}}_2 = d.$$

这意味着 $\tilde{\mathscr{L}}_1$ 和 $\tilde{\mathscr{L}}_2$ 具有全局乘积结构：对于任意一对点x、$y \in \mathbb{R}^d$，$\tilde{\mathscr{L}}_1(x)$与 $\tilde{\mathscr{L}}_2(y)$的交集是一个单点集。

现在，对于任意一对点m、$n \in \mathbb{Z}^d$，我们有

$$\tilde{H}(m) = x_0 + m \qquad \text{and} \qquad \tilde{H}(n) = x_0 + n.$$

这意味着

$$\tilde{H}\big(\tilde{\mathscr{L}}_1(m)\big) = \tilde{\mathscr{L}}_1(m + x_0) = \tilde{\mathscr{L}}_1(m) + x_0, \qquad \tilde{H}\big(\tilde{\mathscr{L}}_2(n)\big) = \tilde{\mathscr{L}}_2(n + x_0) = \tilde{\mathscr{L}}_2(n) + x_0.$$

因此，对于交点$z_{m,n} = \mathscr{L}_1(m) \cap \mathscr{L}_2(n)$，我们有

$$\tilde{H}(z_{m,n}) = \tilde{H}\big(\tilde{\mathscr{L}}_1(m)\big) \cap \tilde{H}\big(\tilde{\mathscr{L}}_2(n)\big) = \big(\tilde{\mathscr{L}}_1(m) + x_0\big) \cap \big(\tilde{\mathscr{L}}_2(n) + x_0\big) = z_{m,n} + x_0.$$

这证明对于集合

$$\Gamma = \left\{ z_{m,n} : \, m, n \in \mathbb{Z}^d \right\}, \qquad \text{we have} \qquad \tilde{H}|_\Gamma = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d} + x_0.$$

由于叶状结构 $\mathscr{L}_1$和 $\mathscr{L}_2$在 $\mathbb{T}^d$上都是极小的，集合 Γ在 $\mathbb{R}^d$中稠密，因此我们有

$$\tilde{H} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^d} + x_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d.$$

这就完成了引理的证明。 □

8.1 交换自同构的随机扰动

现在我们可以证明定理 3.4 和 3.7。

定理 *3.4* 的证明。令 $\mathscr{U}_f$为 $\mathrm{Diff}^r(\mathbb{T}^2)$ 中 f的一个邻域，使得每个满足$f \in \mathscr{U}g$的对象都具有公共的稳定与不稳定锥场，并且 $\Omega = \mathscr{U}^{\mathbb{Z}} f$。这意味着相应的斜积系统

$$F(\omega, x) = \big(\sigma(\omega), f_\omega(x)\big) : \Omega \times \mathbb{T}^2 \to \Omega \times \mathbb{T}^2$$

是纤维方向 Anosov（引理 5.1）。

令 $\bar{A} = \sigma \times A : \Omega \times \mathbb{T}^2 \to \Omega \times \mathbb{T}^2$ 为相应的扩张系统（见定义 5.2），并令 H: $\Omega \times \mathbb{T}^2 \to \Omega \times \mathbb{T}^2$为命题 5.3 中定义的共轭，满足$H \circ F = \bar{A} \circ H$。

令 ν 为支集在 $\mathscr{U}_f$ 上的概率测度，且令 μ_{SRB} 为唯一的 ν-平稳 SRB 测度。记 μ 为与 μ_{SRB} 相关联的纤维方向 SRB 测度，其定义见命题 2.2。

由于我们假设 $\lambda^+(\mu_{\mathrm{SRB}}) = \lambda^+(A)$，正的纤维方向李雅普诺夫指数 $\lambda^+(\mu) = \lambda^+(A)$。命题 6.3 表明

$$H_*(\mu) = \nu^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Leb}_{\mathbb{T}^2},$$

并且 H沿着 $\mathrm{Supp}(\mu) = \mathrm{Supp}(\nu)^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{T}^2$ 上的纤维方向不稳定叶是 C^r-光滑的。我们固定$g \in \mathrm{Supp}(\nu)$，并令H_g为拓扑共轭

$$H_g \circ g = A \circ H_g \qquad \text{and} \qquad H_g(\mathscr{F}^s_g) = \mathscr{L}^s_A,$$

其中 $\mathscr{F}^s_g$和 $\mathscr{L}^s_A$分别是g和A的稳定叶状结构。

命题 7.2 表明，$H_g(\mathscr{F}^s_{g'}) = \mathscr{L}^s_A$对于每个$g' \in$ 支撑(ν)都成立。这意味着

$$\mathscr{F}^s_g = H_g^{-1}(\mathscr{L}^s_A) = \mathscr{F}^s_{g'}, \qquad \forall g' \in \mathrm{Supp}(\nu).$$

这就证明了定理 3.4 的第一项。

如果我们进一步假设 $\lambda^-(\mu_{\mathrm{SRB}}) = \lambda^-(A)$，那么还有 $\lambda^-(\mu) = \lambda^-(A)$。我们考察逆斜积系统 $F^{-1}\colon\ \Omega \times \mathbb{T}^2 \to \Omega \times \mathbb{T}^2$。于是，$\mu$也是$F^{-1}$-不变的遍历测度，并且对应于$F^{-1}$。此外，我们有

- $\mathscr{F}^s$是F^{-1}的纤维方向扩张叶状结构；
- $\mathscr{F}^u$是 F^{-1}的纤维方向稳定叶状结构；
- $H \circ F^{-1} = \bar{A}^{-1} \circ H$。
- $H_*\mu$ 是沿 $\mathscr{L}^s_A$、对应于 $\bar{A}^{-1}$的纤维方向 u-Gibbs 态。

根据命题 5.14，μ也是关于F^{-1}沿 $\mathscr{F}^s$的一个u-Gibbs 测度。于是我们可以再次应用命题 6.3 和命题 7.2，这表明H在 μ的支撑上沿 $\mathscr{F}^s$是C^r-光滑的，并且F^{-1}-稳定叶状结构 $\mathscr{F}^u$是非随机的：

$$\mathscr{F}^u_g = H_g^{-1}(\mathscr{L}^u_A) = \mathscr{F}^u_{g'}, \qquad \forall g' \in \mathrm{Supp}(\nu).$$

对任意固定的$g \in \nu$的支撑，记$h = H_g\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$，其中$h \circ g = A \circ h$。由于$h$沿$g$的稳定与不稳定叶状结构均为$C^r$-光滑，Jourené 定理（引理 6.12）推出h是C^r-光滑的。

对于每个 $g' \in \mathbb{T}^2$，我们考虑一个同胚

$$h \circ g' \circ h^{-1} \circ A^{-1}\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2,$$

它满足

- $h \circ g' \circ h^{-1} \circ A^{-1}$ 与 $\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^2}$同伦；
- $h \circ g' \circ h^{-1} \circ A^{-1}$ 保持A的稳定与不稳定叶状结构：

$$\begin{aligned} h \circ g' \circ h^{-1} \circ A^{-1}\left(\mathscr{L}^{s/u}_A\right) &= h \circ g' \circ h^{-1}\left(\mathscr{L}^{s/u}_A\right) \\ &= h \circ g'\left(\mathscr{F}^{s/u}_{g'}\right) = h\left(\mathscr{F}^{s/u}_{g'}\right) \\ &= \mathscr{L}^{s/u}_A. \end{aligned}$$

将引理 8.1 应用于$h \circ g' \circ h^{-1} \circ A^{-1}$，存在$v_{g'} \in \mathbb{T}^2$使得

$$h \circ g' \circ h^{-1} \circ A^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{T}^2} + v_{g'}.$$

这意味着

$$h \circ g' \circ h^{-1} = A + v_{g'}, \qquad \forall g' \in \mathrm{Supp}(\nu).$$

□

现在我们可以证明高维定理。注意，定理 1.3 是定理 3.7 的特例。证明与定理 3.4 类似。我们将其列出以求完整。

定理 *3.7* 的证明。 设 $\{A_i\}^m{}_{i=1} \subseteq GL(d, \mathbb{Z})$ 是一族可交换自同构，其中每个 A_i 都满足一般性假设，并且具有相同的最细支配分裂。记 $\mathscr{L}^s, \mathscr{L}^u$为 A_1, 的稳定与不稳定叶状结构，它们对每个 $A_j, j = 2, \cdots, m$ 都相同。

设 $\mathscr{U}_i \subseteq \mathrm{Diff}^2(\mathbb{T}^d)$ 是 A_i（其中 $i = 1, \cdots, m$）的邻域，使得对于 $\mathscr{U} = \cup \mathscr{U}_i$ 和 $\Omega = \mathscr{U}^{\mathbb{Z}}$, 相应的斜积系统

$$F : \Omega \times \mathbb{T}^d \to \Omega \times \mathbb{T}^d, \qquad F(\omega, x) = \big(\sigma(\omega), f_\omega(x)\big)$$

以及其到扩张系统 $\bar{A}\colon\ \Omega \times \mathbb{T}^d \to \Omega \times \mathbb{T}^d$ 的共轭 $H\colon\ \Omega \times \mathbb{T}^d \to \Omega \times \mathbb{T}^d$ 满足命题 5.9。

若假设 ν-平稳 SRB 测度 μ_{SRB} 的所有正李雅普诺夫指数都等于 ν_0-平稳测度的正李雅普诺夫指数，则由命题 2.2 定义的 F 的相应纤维方向 SRB 测度 μ 的所有纤维方向正指数，均等于 $(A, H_*(\mu))$ 的正李雅普诺夫指数。

我们应用命题 6.6。该命题表明，H 将中间不稳定叶状结构相互交织，并且沿着 $\mathrm{Supp}(\mu) = \mathrm{Supp}(\nu)^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{T}^d$ 上的所有这些不稳定不变叶状结构都是 C^{1+}-光滑的。

我们固定 $f \in \mathrm{Supp}(\nu)$，并令 $Hf\colon\ \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$为拓扑共轭，满足$Hf \circ f = Af \circ Hf$，其中$Af = A_i$，若$f \in \mathscr{U}_i$。对每个$g \in \mathrm{Supp}(\nu)$，命题 7.3 表明

$$H_f(\mathscr{F}^s_g) = \mathscr{L}^s \qquad \text{thus} \qquad \mathscr{F}^s_g = H_f^{-1}(\mathscr{L}^s) = \mathscr{F}^s_f.$$

这就证明了定理 3.7 的第一项。

如果我们进一步假设 μ_{SRB} 的所有负李雅普诺夫指数都等于某个 ν_0-平稳测度的负李雅普诺夫指数，那么，与定理 3.4 的证明中一样，利用命题 5.14，相应的纤维方向 SRB 测度 μ 也是F^{-1}的纤维方向 SRB 测度。我们再次重复这一论证，得到H沿 $\mathrm{Supp}(\mu)$ 上的 $\mathscr{F}^s$ 是C^{1+}-光滑的，并且

$$\mathscr{F}^u_g = H_f^{-1}(\mathscr{L}^u) = \mathscr{F}^u_f, \qquad \forall g \in \mathrm{Supp}(\nu).$$

记为 $h = Hf\colon\ \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$，那么对于每个 $g \in$ 支撑(ν)，该同胚

$$h \circ g \circ h^{-1} \circ A_g^{-1}\colon\ \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d, \qquad \text{where} \qquad A_g = A_j \text{ if } g \in \mathscr{U}_j,$$

同伦于 $\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^d}$，并保持 $\mathscr{L}^s$、$\mathscr{L}^u$。引理 8.1 表明，$h \circ g \circ h^{-1} \circ A_g^{-1}$ 是 $\mathbb{T}^d$ 上的平移。这意味着

$$h \circ g \circ h^{-1} = A_g + v_g, \qquad \forall g \in \mathrm{Supp}(\nu). \qquad \square$$

8.2 非交换自同构的随机扰动

最后，我们证明定理 3.10：正李雅普诺夫指数相同意味着伊利诺伊州上的非交换阿诺索夫自同构可以同时线性化。

定理 *3.10* 的证明。设 $\{A_i\}^m{}_{i=1} \subseteq GL(2,\mathbb{Z})$ 是一个非交换的锥双曲阿诺索夫自同构族。

令 $\mathscr{U}_i$为 $\mathrm{Diff}^r(\mathbb{T}^2)$ 中 A_i 的一个 C^2-邻域，并记 $\mathscr{U} = \cup\mathscr{U}_i, \Omega = \mathscr{U}^{\mathbb{Z}}$，使得斜积系统

$$F(\omega, x) = \big(\sigma(\omega), f_\omega(x)\big) : \Omega \times \mathbb{T}^2 \to \Omega \times \mathbb{T}^2$$

是纤维方向 Anosov（引理 5.1）。

此外，对于任意一对不交换的 $A_i \neq A^j$，它们对应的稳定叶状结构 $\mathscr{L}^s{}_i$与 $\mathscr{L}^s{}_j$横截。其不稳定叶状结构 $\mathscr{L}^u{}_i$与 $\mathscr{L}^u{}_j$也同样如此。我们缩小每个 $\mathscr{U}_i$（$i = 1, \cdots, m$），使得对于任意一对不交换的 A_i、A_j，任意一对 $f \in \mathscr{U}_i$ 和 $g \in \mathscr{U}_j$ 都满足

- 它们对应的稳定叶状结构 $\mathscr{F}^s_f$与 $\mathscr{F}^s_g$在 $\mathbb{T}$ 上处处横截 ^{2};
- 它们对应的不稳定叶状结构 $\mathscr{F}^u_f$与 $\mathscr{F}^u_g$在 $\mathbb{T}^2$ 上处处横截。

令 $\bar{A}: \Omega \times \mathbb{T}^2 \to \Omega \times \mathbb{T}^2$ 为相应的扩张系统（定义 5.2），并令 $H: \Omega \times \mathbb{T}^2 \to \Omega \times \mathbb{T}^2$ 为命题 5.3 中定义的共轭，满足 $H \circ F = \bar{A} \circ H$。

令 ν 为支撑在 $\mathscr{U}$ 上的概率测度，且 $\nu(\mathscr{U}_i) = p_i \in (0,1)$，其中 $\sum^m{}_{i=1} p_i = 1$。记 p 为 $\{A_i\}^m{}_{i=1}$ 上满足 $p(A_i) = p_i$ 的概率测度。令 μ_{SRB} 为唯一的 ν-平稳 SRB 测度，μ 为与 μ_{SRB} 相关的斜积 F 的纤维方向 SRB 测度，其定义见命题 2.2。

记 $\lambda^+(p)$ 为线性随机游走的正李雅普诺夫指数。由于我们假设 $\lambda^+(\mu_{\mathrm{SRB}}) = \lambda^+(p)$，相对于 μ 的诱导扭系统 F 的正纤维方向李雅普诺夫指数满足 $\lambda^+(\mu) = \lambda^+(p)$。命题 6.3 表明

$$H_*(\mu) = \nu^{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Leb}_{\mathbb{T}^2},$$

且H 是 C^r-沿 $= \mathrm{Supp}(\nu)^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{T}^2 \mathrm{Supp}(\mu)$ 上纤维方向不稳定叶状结构光滑。

我们固定 f、$g \in \mathrm{Supp}(\nu)$，其中它们的线性部分 Af、$A_g \in \{A_i\}^m{}_{i=1}$不交换。令 $\mathscr{L}^s{}_f$和 $\mathscr{L}^s{}_g$分别为 A_f和 A_g的稳定叶状结构。由于 Af、Ag不交换，$\mathscr{L}^s{}_f$和 $\mathscr{L}^s{}_g$是 $\mathbb{T}^2$ 上两个横截的线性极小叶状结构。记 Hf为拓扑共轭

$$H_f \circ f = A_f \circ H_f \qquad \text{and} \qquad H_f(\mathscr{F}^s_f) = \mathscr{L}^s_f,$$

其中 $\mathscr{F}^s{}_f$是 f的稳定叶状结构。对共轭 Hg和 g的稳定叶状结构 $\mathscr{F}^s{}_g$，情况相同。

由于共轭 H在 $\mathrm{Supp}(\mu) = \mathrm{Supp}(\nu)^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{T}^2$ 上沿纤维方向不稳定叶状结构是 C^r-光滑的，命题 7.2 表明

$$H_f(\mathscr{F}^s_g) = \mathscr{L}^s_g \qquad \text{and} \qquad H_g(\mathscr{F}^s_f) = \mathscr{L}^s_f.$$

记 $h = H_f$: $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$，其中 $h \circ f \circ h^{-1} = A_f$。对于同胚 $h \circ H_g^{-1}$: $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$，它满足

- $h \circ H^{-1}{}_g$与恒等映射同伦$^2_{\mathbb{T}}$;
- $h \circ H^{-1}{}_g$同时保持稳定叶状结构 $\mathscr{L}^s{}_f$和 $\mathscr{L}^s{}_g$:

$$h \circ H_g^{-1}(\mathscr{L}^s_f) = h(\mathscr{F}^s_f) = \mathscr{L}^s_f \qquad \text{and} \qquad h \circ H_g^{-1}(\mathscr{L}^s_g) = h(\mathscr{F}^s_g) = \mathscr{L}^s_g.$$

引理 8.1 表明，存在 $u_g \in \mathbb{T}^2$ 使得

$$h \circ H_g^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{T}^2} + u_g \qquad \text{that is} \qquad h = H_g + u_g.$$

因此我们有

$$\begin{aligned} h \circ g \circ h^{-1} &= \left(h \circ H_g^{-1}\right) \circ \left(H_g \circ g \circ H_g^{-1}\right) \circ \left(h \circ H_g^{-1}\right)^{-1} \\ &= \left(\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^2} + u_g\right) \circ A_g \circ \left(\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^2} - u_g\right) \\ &= A_g + v_g, \end{aligned}$$

其中 $v_g = (u_g - A_g u_g) \in \mathbb{T}^2$。

同样的论证表明，对于每个 $g' \in \mathrm{Supp}(\mu)$，若其线性部分 $A_{g'}$ 不与 A_f 对易，则有

$$h \circ g' \circ h^{-1} = A_{g'} + v_{g'}, \qquad v_{g'} \in \mathbb{T}^2.$$

若 $A_{g'}$ 与 A_f 对易，那么它便不与 A_g 对易；同样的论证表明，

$$H_g \circ g' \circ H_g^{-1} = A_{g'} + u_{g'}, \qquad u_{g'} \in \mathbb{T}^2.$$

因此我们有

$$\begin{aligned} h \circ g \circ h^{-1} &= \left(h \circ H_g^{-1}\right) \circ \left(H_g \circ g \circ H_g^{-1}\right) \circ \left(h \circ H_g^{-1}\right)^{-1} \\ &= \left(\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^2} + u_g\right) \circ \left(A_{g'} + u_{g'}\right) \circ \left(\mathrm{Id}_{\mathbb{T}^2} - u_g\right) \\ &= A_{g'} + v_{g'}, \end{aligned}$$

其中 $v_{g'} = (u_g + u_{g'} - A_{g'} u_g) \in \mathbb{T}^2$。

最后，我们需要证明h在 $\mathbb{T}^2$ 上是C^r-光滑的。我们知道，h沿 $\mathscr{F}_{uf}$是C^r-光滑的，而H_g沿 $\mathscr{F}_{ug}$是 C^r- 光滑的。这意味着 $h = H_g + u_g$ 沿 $\mathscr{F}_{ug}$是 C^r- 光滑的。由于 $\mathscr{F}_{uf}$和 $\mathscr{F}_g^u$ 是 $\mathbb{T}^2$ 上的两个横截叶状结构，Journé定理（引理 6.12）表明h 是C^r-光滑的。至此，定理 3.10 的证明完成。 □

参考文献

[1] P. Baxendale，随机微分同胚流的李雅普诺夫指数与相对熵，《概率论及相关领域》，**81**（1989年），第4期，521–554。11，12，16[2] A. Brown、H. Lee、D. Obata 和 Y. Ruan，平稳测度的绝对连续性，*arXiv:2409.18252*。5，10[3] S. Crovisier 和 R. Potrie，部分双曲动力系统导论，动力系统暑期学校，国际理论物理中心，的里雅斯特，（2015年）。9[4] J. DeWitt，幂零流形自同构的局部李雅普诺夫谱刚性，《现代动力系统》，**17**（2021年），65–109。4，15[5] J. DeWitt，各向同性流形上微分同胚的同时线性化，《欧洲数学会杂志》，**26**（2024年），第8期，2897–2969。2

[6] J. DeWitt 和 A. Gogolev，基于常数周期数据的支配分裂与 Anosov 自同构的全局刚性，《几何与泛函分析》，34（2024年），第5期，1370–1398。4[7] D. Dolgopyat 和 R. Krikorian，关于球面微分同胚的同时线性化，《杜克数学杂志》，136（2007年），第3期，475–505。2[8] D. Fisher、B. Kalinin 和 R. Spatzier，环面和幂零流形上高秩阿诺索夫作用的全局刚性，《美国数学会杂志》，26（2013年），第1期，167–198。4[9] J. Franks，环面上的阿诺索夫微分同胚，《美国数学会会刊》，145（1969年），117–124。3[10] A. Gogolev，高维环面上阿诺索夫微分同胚的光滑共轭，《现代动力系统》，2（2008年），第4期，645–700。4[11] A. Gogolev 和 M. Guysinsky，三维环面上阿诺索夫微分同胚的 C^1-可微共轭，《离散与连续动力系统》，22（2008年），第1–2期，183–200。4[12] A. Gogolev、B. Kalinin 和 V. Sadovskaya，阿诺索夫自同构的局部刚性。附录由 Rafael de la Llave 撰写，《数学研究快报》，18（2011年），第5期，843–858。4，13，15，33，38，39，40[13] A. Gogolev、B. Kalinin 和 V. Sadovskaya，环面自同构的李雅普诺夫谱局部刚性，《以色列数学杂志》，238（2020年），第1期，389–403。4，32，33，34，35，36[14] A. Gogolev 和 F. Rodriguez Hertz，高度非代数扩张映射的光滑刚性，《欧洲数学会杂志》，25（2023年），第8期，3289–3323。3[15] A. Gogolev 和 Y. Shi，阿诺索夫微分同胚的联合可积性与谱刚性，《伦敦数学会会刊》，（3）127（2023年），第6期，1693–1748。21[16] M. Gromov，多项式增长群与扩张映射，《高等科学研究所数学出版物》，53（1981年），53–73。3[17] F. Rodriguez Hertz 和 Z. Wang，高秩阿贝尔 Anosov 代数作用的全局刚性，《数学创刊》，198（2014年），第1期，165–209。4[18] M. Hirsch、C. Pugh 和 M. Shub，不变流形，《数学讲义》，583（1977年），施普林格出版社，柏林。24[19] J.-L. Journé，多元函数的正则性引理，《伊比利亚美洲数学杂志》，4（1988年），第2期，187–193。5，34[20] B. Kalinin 和 V. Sadovskaya，关于无共振阿诺索夫 $\mathbb{Z}^k$ 作用的分类，《密歇根数学杂志》，55（2007年），第3期，651–670。39[21] B. Kalinin、V. Sadovskaya 和 Z. Wang，双曲环面自同构的光滑局部刚性，《美国数学会通讯》，3（2023年），290–328。4，14[22] B. Kalinin、V. Sadovskaya 和 Z. Wang，环面自同构的全局光滑刚性，arXiv:2407.13877。4，14

[23] A. Katok 和 B. Hasselblatt，《现代动力系统理论导论》。《数学及其应用百科全书》，第54卷，剑桥大学出版社，（1995年），xviii+802 页。20[24] A. Katok、S. Katok 和 K. Schmidt，环面自同构所诱导的 $\mathbb{Z}^d$-作用的可测结构刚性，《Commentarii Mathematici Helvetici》77（2002年），第4期，718–745。31[25] K. Khanin 和 Y. Kifer，随机变换的热力学形式主义与统计力学，《美国数学会译丛》第二辑，171（1996年），107–140。11[26] Y. Kifer，随机扩张变换的平衡态，《随机与计算动力学》1（1992/93年），第1期，1–31。11[27] Y. Kifer，随机变换的热力学形式主义再探，《随机动力学》8（2008年），第1期，77–102。11[28] K. Krzyzewsky，关于扩张映射的一些结果，《Astérisque》50，（1977年），205–218。18[29] Y. Le Jan，独立随机微分同胚乘积的统计平衡，《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》23（1987年），第1期，111–120。12, 16[30] P. Liu，Axiom A基本集的随机扰动，《统计物理学杂志》90（1998年），467–490。20[31] P. Liu 和 M. Qian，随机动力系统的光滑遍历理论，《数学讲义》1606，施普林格出版社，柏林，（1995年），xii+221 页。6, 7, 10, 11[32] R. de la Llave，双曲动力系统光滑共轭的不变量，II，《数学物理通讯》109（1987年），第3期，369–378。4[33] R. de la Llave，一致及非一致双曲系统的光滑共轭与SRB测度，《数学物理通讯》150（1992年），第2期，289–320。13[34] R. de la Llave 和 R. Moriyón，双曲动力系统光滑共轭的不变量，IV，《数学物理通讯》116（1988年），第2期，185–192。4[35] A. Manning，环面上不存在新的阿诺索夫微分同胚，《美国数学杂志》96（1974年），422–429。3[36] J. M. Marco 和 R. Moriyón，双曲动力系统光滑共轭的不变量，I，《数学物理通讯》109（1987年），第4期，681–689。4[37] Y. Pesin，部分双曲性与稳定遍历性讲义，《苏黎世高等数学讲义》，欧洲数学会，苏黎世，（2004年），vi+122 页。24[38] R. Saghin 和 J. Yang，阿诺索夫自同构与扭积的李雅普诺夫指数和刚性，《数学进展》355（2019年），文章编号106764。4, 15, 27, 31, 32[39] V. Sadovskaya，双曲系统上的纤维聚集余循环的上同调，《遍历理论与动力系统》35（2015年），2669–2688。38[40] V. Sadovskaya，双曲系统上的线性余循环，《21世纪动力学展望——阿纳托尔·卡托克的学术遗产》，剑桥大学出版社，剑桥，（2024年），384–434。35, 38

[41] R. Sacksteder，扩张映射下的不变测度，《微分几何》，《数学讲义》**392**，（1974年），施普林格出版社，柏林-纽约，第179–194页。18[42] M. Shub，紧致可微流形的自同态，《美国数学杂志》，**91**（1969年），175–199。3[43] M. Shub 和 D. Sullivan，圆周膨胀自同态再探，《遍历理论与动力系统》，**5**（1985年），285–289。3[44] S. Smale，可微动力系统，《美国数学会通报》，**73** （1967年），747–817。3

Aaron Brown
西北大学数学系，伊利诺伊州埃文斯顿 60208，美国电子邮箱：
awb@northwestern.edu

Yi Shi
四川大学数学学院，中国成都 610065电子邮箱：
shiyi@scu.edu.cn