正交基多项式逼近中弱 Marcinkiewicz-Zygmund 常数的作用

Congpei An[a]、Alvise Sommariva[b]、Marco Vianello[b,*]

[a]贵州大学数学与统计学院，中国贵州省贵阳市 *550025*[b]意大利帕多瓦大学“图利奥·列维-奇维塔”数学系

arXiv:2601.04708v1 [math.NA] 8 Jan 2026

摘要

我们通过数值计算求积公式的 L^2 Marcinkiewicz-Zygmund 常数，并特别关注这些常数在基于正交基的多项式逼近中的作用。我们在区间、正方形、圆盘、三角形、立方体和球面等区域上测试了一些重要的求积公式。我们将相应最小二乘（LS）投影的逼近能力与标准超插值及其近期提出的“放宽精确性”版本进行了比较。这些测试所用的 MATLAB 代码以开源形式提供。

关键词：MSC[2020] 65D32 15A18 41A10

1. 引言

本文通过数值计算，研究多变量区域 Ω 上求积公式的 L^2 Marcinkiewicz-Zygmund 常数，特别关注它们在利用正交基进行多项式逼近中的作用。我们回顾一下，具有正权重 $w_i > 0$ 的求积公式

$$S(f) = \sum_{i=1}^{M} w_i \, f(\mathbf{x}_i) \approx I(f) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\mu \tag{1}$$

在测度 Ω 上具有 MZ（Marcinkiewicz-Zygmund）性质 μ，如果存在常数 $A > 0$ 和$B > 0$ 使得

$$A\|p\|_{L^2}^2 \le S(p^2) \le B\|p\|_{L^2}^2, \quad \forall p \in \mathbb{P}_n \, , \;\; \|p\|_{L^2}^2 = I(p^2) \, . \tag{2}$$

一般而言，人们关心的是确定较大的 $A = A(n) > 0$ 和较小的 $B = B(n) > 0$ ，使得（2）成立。我们注意到，（2）是一个弱形式的 MZ 不等式，因为常数 A 和 B 与 $p \in \mathbb{P}_n$ 无关，但取决于 n。事实上，自 1937年最初的 Marcinkiewicz-Zygmund 论文以来，[21], 研究如何确保这类常数分别具有正的下界和有限的上界，也就是说，（2）中的常数与 n无关，已成为一个专门的研究领域，至今仍是活跃的研究课题。这里不求面面俱到，举例来说，我们可以引用 [7, 14, 18] 及其中的参考文献。

本文聚焦于弱形式的 MZ 不等式 (2) 以及 MZ 常数的计算。事实上，给定 $\mathbb{P}_n$ 的一个 μ标准正交基 $\{\phi_j\}$ ，如 [4] 所述，如果

$$\eta = \eta(n) = \max\{|A-1|, |B-1|\} < 1 \tag{3}$$

且它与 1 的距离不太近，也就是说，如果 $B < 2$ 且 $A > 0$ 不太小，根据辅助 MZ 不等式

$$|S(p^2) - I(p^2)| \le \eta \, I(p^2) \, , \;\; \forall p \in \mathbb{P}_n \, , \tag{4}$$

*通讯作者电子邮箱： marcov@math.unipd.it (Marco Vianello)

可得“精确性放宽”的超插值算子

$$\mathcal{H}_n f = \sum_{j=1}^{d_n} S(f\phi_j)\,\phi_j\ ,\ \ d_n = dim(\mathbb{P}_n)\ , \tag{5}$$

可用于对 $f \in C(\Omega)$进行逼近，尽管该公式不能在 $\mathbb{P}_{2n}$ 上精确积分，因此 $\mathcal{H}_n$ 不是一个投影。具体而言，当 S 是一个在 $\mathbb{P}_{n+k}$ 上精确的代数求积公式，且 $k \le n$时，在[4] 中已证明

$$\|f - \mathcal{H}_n f\|_{L^2} \le \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\eta}}\right)\ \sqrt{\mu(\Omega)}\ E_k(f)\ . \tag{6}$$

注意，对于 $k = n$ ，我们有 $\eta = 0$ ，并由此得到标准的 Sloan 超插值 [23]。该方法在 [3]中也称为“非受限”超插值。另一方面，当 S 是一个 QMC（准蒙特卡罗）公式时，正如近期在 [1], 中证明的，若 $0 < \eta < 1$

$$\|f - \mathcal{H}_n f\|_{L^2} \le \left(1 + \sqrt{1+\eta}\right)\ \sqrt{\mu(\Omega)}\,E_n(f) + \|p_n^* - \mathcal{H}_n p_n^*\|_{L^2}\ , \tag{7}$$

其中 p_n^* 是 f 在 $\mathbb{P}_n$中的最佳一致逼近，即 $\|f - p_n^*\|_\infty = E_n(f)$。(7) 右端的第二项不为零，因为在这种情况下， $\mathcal{H}_n$ 不是投影算子；在 [1]中，这一项被称为非受限超插值的“混叠项”。关于超插值理论的这些最新进展，读者还可参阅综述论文 [2]。

另一方面，正如 [14, 15] 中所观察到的，并在下一节中为完整起见详细证明的那样， A 和 B 不过是与该求积公式对应的离散测度的格拉姆矩阵的最小和最大特征值。因此，在满足上述关于 A 和 B的条件时，格拉姆矩阵是良态的，我们也能够高精度地计算 $\mathbb{P}_n$上的离散正交投影

$$\mathcal{G}_n f = \sum_{j=1}^{d_n} c_j\,\phi_j\ ,\ \{c_j\} = G^{-1}\{S(f\phi_j)\}\ ,\ \ G = (S(\phi_i\phi_j))_{1\le i,j\le d_n}\ . \tag{8}$$

关于最小二乘逼近误差，我们可以陈述并证明如下结果。

命题 1.1. 设 $\mathcal{G}_n f$ 是由 *(1)* 和 *(8)* 定义的加权最小二乘多项式，其中 $f \in C(\Omega)$，且该求积公式满足 *MZ* 性质 *(2)-(3)*。则有如下界

$$\|f - \mathcal{G}_n f\|_{L^2} \le \left(1 + \sqrt{cond_2(G)}\right)\sqrt{\mu(\Omega)}\,E_n(f) \le \left(1 + \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}\right)\ \sqrt{\mu(\Omega)}\ E_n(f)\ , \tag{9}$$

如果该求积公式对常数精确，则此界可进一步改进为

$$\|f - \mathcal{G}_n f\|_{L^2} \le \left(1 + \frac{1}{\sqrt{A}}\right)\ \sqrt{\mu(\Omega)}\,E_n(f) \le \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\eta}}\right)\ \sqrt{\mu(\Omega)}\ E_n(f)\ . \tag{10}$$

证明。鉴于 MZ 不等式 (2) 以及 $\mathcal{G}_n f$ 是正交投影这一事实，我们可以写出以下不等式链

$$\begin{aligned}
\|f - \mathcal{G}_n f\|_{L^2} &\le \|f - p_n^*\|_{L^2} + \|p_n^* - \mathcal{G}_n p_n^*\|_{L^2} + \|\mathcal{G}_n(p_n^* - f)\|_{L^2} \\
&= \|f - p_n^*\|_{L^2} + \|\mathcal{G}_n(p_n^* - f)\|_{L^2} \\
&\le \|f - p_n^*\|_{L^2} + \frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{S\big((\mathcal{G}_n(p_n^* - f))^2\big)} \\
&= \|f - p_n^*\|_{L^2} + \frac{1}{\sqrt{A}}\|\mathcal{G}_n(p_n^* - f)\|_{\ell_w^2} \\
&\le \|f - p_n^*\|_{L^2} + \frac{1}{\sqrt{A}}\|p_n^* - f\|_{\ell_w^2}
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\sqrt{\mu(\Omega)} + \sqrt{\frac{\sum w_i}{A}}\right)\|f - p_n^*\|_\infty = \left(\sqrt{\mu(\Omega)} + \sqrt{\frac{\sum w_i}{A}}\right)E_n(f). \tag{11}$$

现在，如果该求积公式至少对常数精确（任何代数求积公式或准蒙特卡罗求积公式 [10] 都满足这一点），我们有 $\sum w_i = \mu(\Omega)$，因此 (10) 成立

$$\|f - \mathcal{G}_n f\|_{L^2} \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{A}}\right)\sqrt{\mu(\Omega)}\,E_n(f) \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\eta}}\right)\sqrt{\mu(\Omega)}\,E_n(f)\,.$$

或者，由于权重为正，根据 MZ 不等式，

$$\sum w_i = |S(1)| \leq B\|1\|_{L^2}^2 = B\int_\Omega 1\,d\mu = B\mu(\Omega)$$

因此，由 $\mathrm{cond}_2(G) = B/A$ 以及式 (11) 的最后一行，可得式 (9)

$$\|f - \mathcal{G}_n f\|_{L^2} \leq \left(1 + \sqrt{\mathrm{cond}_2(G)}\right)\sqrt{\mu(\Omega)}\,E_n(f) \leq \left(1 + \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}}\right)\sqrt{\mu(\Omega)}\,E_n(f)\,,$$

即使求积公式 S 对常数不精确，这一结论仍然成立。 □

注 1.1. 注意，若 S 是在 $\mathbb{P}_{n+k}$ 上精确且具有 $k < n$ 的代数求积公式，则式 *(10)* 比式 *(6)* 的估计更优。此外，对于满足式 *(2)–(3)* 的一般求积公式，式 *(9)* 和式 *(10)* 均不含任何混叠项，这与非受限超插值 *(7)* 不同，因为 $\mathcal{G}_n f$ 是一个投影。

本文结构如下。下一节中，我们首先说明如何将固定求积公式 L^2的 Marcinkiewicz-Zygmund 常数 A， B 计算为 S与该求积公式对应的格拉姆矩阵的极端特征值。接着，我们证明，一元 k点高斯求积公式不满足式 (3)，对于$n \geq k$。

在数值部分，我们确定了单位区间、正方形、圆盘、三角形和球面等区域中一些相关代数求积公式的 MZ 常数值。特别地，我们尝试对以下问题进行数值回答：

- 具有代数精确度 $ADE = m$ 的求积公式，对于某些 $n > \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ 能否具有 $\eta < 1$？

或者换句话说，从对偶的角度来看，

- *for a fixed degree n, a rule with $ADE = m < 2n$ can have $\eta < 1$?*

正如第 2 节中的理论证明所示，这对于高斯求积公式永远不可能成立。对于所分析的次数，区间上的克伦肖-柯蒂斯求积公式、正方形中的基于帕多瓦点的求积公式，以及 [31], 中提出的一些球面设计和对称球面设计则属于这种情况，其中 η 并不太接近 1，这表明可以将它们用于（5）和（8）。在圆盘和三角形上的一些近乎最小求积公式实例中，也呈现出这一特征。然而，在这些情况下， $\eta \approx 1$，因此可以考虑将它们用于（5）和（8），但不建议这样做。

此外，对于任意收敛求积公式，我们有 $A, B \to 1$ 当 $M \to \infty$ 时成立，其中 n 固定，因为格拉姆矩阵收敛于单位矩阵，所以 $\eta \to 0$ ，因此当 $M = M(n)$ 足够大时，它与 1 之间有正的间隔。准蒙特卡罗求积公式就是一个例子，我们将在正方形和立方体中对一系列次数进行数值测试。

本研究中使用的所有 MATLAB 例程和演示程序，均可作为开源代码通过以下地址获取： [24]。我们强调，本文的目的并非从理论上研究或（若可行）数值计算“强”（即独立于 n）MZ 常数；关于这些主题，我们请读者参阅专业文献，其中部分文献已列于参考文献中。相反，我们尝试提供一些计算工具（包括相关代码），以便通过广泛采用的求积公式的“弱”（即依赖于 n）MZ 常数，检验给定次数下正交基多项式逼近的逼近能力。

2. 弱 Marcinkiewicz-Zygmund 常数的计算

本节旨在说明如何数值计算 最大的和最小的非负常数 $A = A(n)$ 以及 $B = B(n)$ 使得

$$A\|p\|_{L^2}^2 \le |S(p^2)| \le B\|p\|_{L^2}^2, \quad \forall p \in \mathbb{P}_n \ . \tag{12}$$

为此，为方便起见，我们可以陈述并证明以下基本结果，相关内容也可参见 [14, 15]。

命题 2.1 (弱 Marcinkiewicz–Zygmund 常数的特征值刻画)。 设 S 是一个正权求积公式，且 $\{\phi_j\}_{j=1}^{d_n}$ 是多项式空间 $\mathbb{P}_n$ 的 μ-标准正交基。记 G 为相应的格拉姆矩阵，其元素为

$$G_{j,k} = S(\phi_j\phi_k), \quad 1 \le j,k \le d_n. \tag{13}$$

那么，最优 常数 $A = A(n)$ 和 $B = B(n)$ 满足弱 *Marcinkiewicz–Zygmund* 不等式

$$A\|p\|_{L^2}^2 \le S(p^2) \le B\|p\|_{L^2}^2, \qquad \forall p \in \mathbb{P}_n \ , \tag{14}$$

恰好分别是格拉姆矩阵 G 的最小和最大特征值:

$$A = \lambda_{\min}(G), \qquad B = \lambda_{\max}(G). \tag{15}$$

因此，*(4)* 中的常数 η 为

$$\eta = \max\big\{|1-A|, |1-B|\big\} \ . \tag{16}$$

证明。 由于不等式 (14) 对任意 A 都显然适用于零多项式， $B > 0$，因此上述问题可限于 $\|p\|_{L^2} = 1$ 的情形，即求

$$A = \min_{p\in\mathbb{P}_n, \|p\|_{L^2}=1} |S(p^2)| \ , \ \ B = \max_{p\in\mathbb{P}_n, \|p\|_{L^2}=1} |S(p^2)| \ . \tag{17}$$

假设 $p = \sum_{j=1}^{d_n} c_j\phi_j$ 满足 $\|p\|_{L^2}^2 = I(p) = 1$，即 $\sum_{j=1}^{d_n} c_j^2 = 1$。对于 $\mathbf{c} = \{c_j\}$，有

$$\begin{aligned}
S(p^2) &= \sum_{i=1}^{M} w_i p^2(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{M} w_i \left(\sum_{j=1}^{d_n} c_j\phi_j(\mathbf{x}_i)\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{M} w_i \left(\sum_{j=1}^{d_n} c_j^2\phi_j^2(\mathbf{x}_i) + 2\sum_{j,k=1,j<k}^{d_n} c_jc_k\phi_j(\mathbf{x}_i)\phi_k(\mathbf{x}_i)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{d_n} c_j^2 \sum_{i=1}^{M} w_i\phi_j^2(\mathbf{x}_i) + 2\sum_{j,k=1,j<k}^{d_n} c_jc_k \sum_{i=1}^{M} w_i\phi_j(\mathbf{x}_i)\phi_k(\mathbf{x}_i) \\
&= \sum_{j=1}^{d_n} c_j^2 S(\phi_j^2) + 2\sum_{j,k=1,j<k}^{d_n} c_jc_k S(\phi_j\phi_k) \\
&= \sum_{j=1}^{d_n} c_j^2 G_{j,j} + 2\sum_{j,k=1,j<k}^{d_n} c_jc_k G_{j,k} \\
&= \mathbf{c}^T G\mathbf{c} \ .
\end{aligned} \tag{18}$$

因此，满足 (17) 的最大 A 和最小 B 对应于确定优化问题的解

$$\min_{\mathbf{c}^T\mathbf{c}=1} \mathbf{c}^T G\mathbf{c} \ , \quad \max_{\mathbf{c}^T\mathbf{c}=1} \mathbf{c}^T G\mathbf{c} \ . \tag{19}$$

换句话说，我们需要在单位球面上最小化/最大化与格拉姆矩阵 G 相关的二次型。根据极小极大 定理,

- A 是半正定矩阵 G 的最小特征值 $\lambda_{\min}(G)$,
- B 是半正定矩阵 G 的最小特征值 $\lambda_{\max}(G)$。

我们注意到， A 可能为 0，因为 G 仅为半正定矩阵。在这种情况下，该求积规则不具有 Marcinkiewicz-Zygmund 性质，因为要求 $A > 0$。此外，多项式 p_A 和 p_B的系数在标准正交基中是对应于矩阵 G 的极端特征值的单位特征向量的各分量，并且它们满足

$$A = S(p_A^2) \ , \quad B = S(p_B^2) \ . \tag{20}$$

现在我们着重确定满足以下条件的最小 $\eta \geq 0$

$$|I(p^2) - S(p^2)| \leq \eta |I(p^2)| \tag{21}$$

对于任意 $p \in \mathbb{P}_n$同样，很容易看出，我们可以将注意力限制在范数为单位的 $p \in \mathbb{P}_n$ 上 2，因此得到

$$\eta = \max_{p \in \mathbb{P}_n, \|p\|_{L^2}=1} |I(p^2) - S(p^2)| \ . \tag{22}$$

现在考虑 $p = \sum_{j=1}^{d_n} c_j \phi_j$ ，并假设 $I(p^2) = 1$，即 $\sum_{j=1}^{d_n} c_j^2 = 1$。由 (18) 可得,

$$\begin{aligned} |I(p^2) - S(p^2)| &= |1 - S(p^2)| \\ &= \left| 1 - \left(\sum_{j=1}^{d_n} c_j^2 S(\phi_j^2) + 2 \sum_{j,k=1, j<k}^{d_n} c_j c_k S(\phi_j \phi_k) \right) \right| \\ &= \left| 1 - \left(\sum_{j=1}^{d_n} c_j^2 G_{j,j} + 2 \sum_{j,k=1, j<k}^{d_n} c_j c_k G_{j,k} \right) \right| \\ &= |1 - \mathbf{c}^T G \mathbf{c}| = |\mathbf{c}^T \mathbf{c} - \mathbf{c}^T G \mathbf{c}| \\ &= |\mathbf{c}^T (Id - G) \mathbf{c}| \ , \end{aligned} \tag{23}$$

而要得到 η，我们必须在所有满足 $\|\mathbf{c}\|_{L^2} = 1$ 的向量 $\mathbf{c}$ 中，将 (23) 右端最大化；这相当于计算误差矩阵 $E = Id - G$ 的谱半径，其中 Id 是单位矩阵。换言之,

$$\eta = \|E\|_2 = \max\{|1 - \lambda_{\min}(G)|, |1 - \lambda_{\max}(G)|\} = \max\{|1 - A|, |1 - B|\} \ . \quad \square \tag{24}$$

注 2.1. 请注意，上述结果并未假设公式 S 具有某种精确性阶数，因此可应用于一般测度 μ，甚至包括离散测度。

注 2.2. 假设公式序列 S_m， $m = 1, 2, \ldots\ldots$在多项式上收敛。由波利亚–斯捷克洛夫定理的多元推广可知，这是在 $C(\Omega)$ 中收敛的充要条件。那么，相应的格拉姆矩阵序列 G_m 收敛到单位矩阵，其特征值也收敛到 *1*。因此，任意固定 $\eta \in (0,1)$ ，都存在 $m^* = m^*(n) \in \mathbb{N}$ ，使得 S_{m^*} 对 $p \in \mathbb{P}_n$ 满足性质 *(21)*。一个例子是基于 Ω 上递增数量的低差异点构造的 *QMC* 求积公式，因为它们在任意固定多项式上收敛，尤其是在多项式 $\phi_j \phi_k \in \mathbb{P}_{2n}$， $1 \leq j$， $k \leq d_n$ 上收敛。

注 2.3. 设 $\hat{} c \in \mathbb{R}^{d_n}$ 是 $E = Id - G$ 对应于其最大模特征值 $\lambda_{max}(E)$ 的单位特征向量。根据该问题的线性代数解释，范数为 *1* 的多项式 $\hat{} p \in \mathbb{P}_n$ 在 *(21)* 中取得最坏情况误差，该多项式为 $\hat{} p = \sum_{j=1}^{d_n} \hat{c}_j \phi_j$。

2.1. 关于高斯求积公式的否定性结果

如引言中所述，值得考察的是，代数精确度为 $ADE = m$ 的求积公式是否可能具有 $\eta < 1$，其中某个 $n > \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$; 参见 (3)–(6)。事实上，在这种情况下，例如可以采用 [4] 提出的精确度放宽的超插值。

我们在此研究 k点高斯求积公式 S_k，其相对于 $m = 2k-1$ 权函数 w在区间 (a,b)上具有 ADE，该区间可能无界。显然，如果 $n \in \mathbb{N}$且 $n < k$那么 $2n < 2k-1$，结合该求积规则的 ADE 可轻易推出 $\eta = 0$。

取 $n = k$。令 $p = \sum_{i=0}^{n} c_i \psi_i$ 其中 $\{\psi_i\}_{i=0,\dots,n}$ 是关于权函数 w的正交归一多项式三角族，即 $\deg(\psi_i) = i$ 且 $\int_a^b \psi_i(x)\psi_j(x)w(x)dx = \delta_{i,j}$ 其中 $i,j = 0,\dots,n$。记关于区间（a,b）上权函数 w 的首一正交多项式三角族为 $\{\psi_i^*\}_{i=0,\dots,n}$，我们注意到，如果 $\psi_n(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_0$，那么由于 ψ_n^*是首一的，$\psi_n(x) = \alpha_n \psi_n^*(x)$。特别地，$\alpha_n = \frac{1}{\|\psi_n^*\|_{L_w^2}}$。我们回忆一下，如果 $f \in C^{2n}(a,b)$，那么

$$\int_a^b f(x)w(x)dx - S_n(f) = \frac{D^{(2n)}f(\xi)}{2n!}\|\psi_n^*\|_{L_w^2}^2, \quad \xi \in (a,b), \tag{25}$$

其中 $\|f\|_{L_w^2} = \int_a^b f^2(x)w(x)dx$对于 $f \in L_{L_w^2}$（例如参见 [27, 第159]页）。

Now

- 假设 $\|p\|_{L_w^2} = 1$，或等价地，$\sum_{i=0}^{n} c_i^2 = 1$;
- 令 $q_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \psi_i \in \mathbb{P}_{n-1}$，使得 $p = c_n\psi_n + q_{n-1}$。

由 (25) 可知，对于某个 $\xi \in (a,b)$，我们得到

$$\begin{aligned}\int_a^b p^2(x)w(x)dx - S_n(p^2) &= \frac{D^{(2n)}p^2(\xi)}{2n!}\|\psi_n^*\|_{L_w^2}^2 = \frac{D^{(2n)}(c_n\psi_n + q_{n-1})^2(\xi)}{2n!}\|\psi_n^*\|_{L_w^2}^2 \\ &= c_n^2\frac{D^{(2n)}\psi_n^2(\xi)}{2n!}\|\psi_n^*\|_{L_w^2}^2 = c_n^2\frac{2n!\alpha_n^2}{2n!}\frac{1}{\alpha_n^2} = c_n^2. \end{aligned}\tag{26}$$

由于我们假设了 $\|p\|_{L_w^2} = \sum_{i=0}^{n} c_i^2 = 1$，若 $n = k$，则

$$\eta = \max_{p\in\mathbb{P}_n, \|p\|_{L_w^2}=1} |I(p^2) - S_m(p^2)| = \max_{p\in\mathbb{P}_n, \|p\|_{L_w^2}=1} c_n^2 = 1. \tag{27}$$

因此，对于 m 个点的高斯求积公式，当 $n = k$ 时，量 η 为 1。由于 η 关于 n 单调不减，我们有 $\eta \geq 1$ 对于 $n \geq k$。

因此，以下定理成立

定理2.1。设 S_k 是关于权函数 $w : (a,b) \to \mathbb{R}^+$的一个 k 点高斯求积公式，其中 (a,b)不一定有界。那么对于 $n \geq k$，我们有

$$\eta = \max_{p\in\mathbb{P}_n, \|p\|_{L^2}=1} |I(p^2) - S(p^2)| \geq 1. \tag{28}$$

注 2.4。注意，由 *(27)* 还可得，最坏情形多项式为 $\hat{} p_n = \pm\psi_n$。

注 *2.5.* 鉴于其简便性，人们通常使用基于一元高斯公式的张量积求积公式 $S_k = S_k^{(1)} \otimes S_k^{(2)}$，其中包含 $m = 2k-1$，来计算关于乘积测度$d\mu = d\mu_1\, d\mu_2 = w_1(x)w_2(y)\,dxdy$ 在盒 $(a,b) \times (c,d)$ 上的二重积分（见 *[26, p.25]*）。在这种情况下，取 $n = k$ 和多项式 $p(x,y) = \psi_n(x)/\sqrt{\mu_2((c,d))}$，很容易验证 $|I(p^2) - S_k(p^2)| = |1 - S_k^{(1)}(\psi_n^2)| = 1$。因此，鉴于 η 关于 n 单调不减，若 $n \geq k$，则 $\eta \geq 1$。对于任意维数盒上的乘积测度和张量积高斯求积公式，同样的结论显然成立。

3. 数值例子

本节旨在评估一些常用求积公式在相关集合上的 Marcinkiewicz-Zygmund 常数，例如区间、正方形、圆盘、三角形和球面。 在这些情况下，我们可以参考单位参考集合，因为绝对连续测度的求积公式的 MZ 不等式以及相应格拉姆矩阵的条件数，在仿射变换下保持不变。 本文附带的开源 MATLAB 程序可在 [24] 获取。

3.1. 区间

对于区间 $[-1,1]$，高斯-勒让德和克伦肖-柯蒂斯求积公式特别适用于关于 勒贝格测度的数值积分，参见 [28]。我们实现了一个 MATLAB 程序，对于给定的代数精确度 m 和多项式次数 n:

- 通过三项递推，在 th 处计算前 $d_n = n+1$ 个正交归一 Legendre 多项式 e 求积节点;
- 针对每种求积规则，使用 $ADE = m$ 计算格拉姆矩阵 G，然后定义矩阵 $E = Id - G$;
- 确定了 Marcinkiewicz-Zygmund 常数 $\eta = \|E\|_2$。

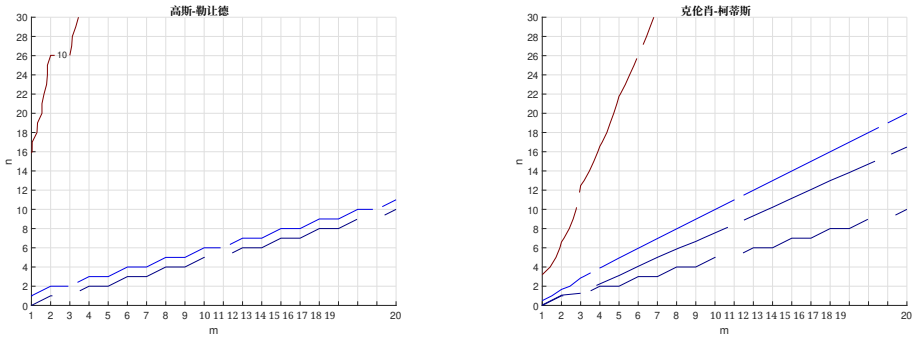

图 1：计数 高斯-勒让德（左）和克伦肖-柯蒂斯（右）求积规则在（4）中的马尔钦凯维奇-齐格蒙德常数等值线 η 带有 ADE的求积规则 $= m$，其中 $m = 1$、2、.....、20，且 $n = 0$、.....、30。

图 1 绘出了 η 高斯-勒让德和克伦肖-柯蒂斯求积规则的马尔钦凯维奇-齐格蒙德常数等值线，其中 $ADE = m$ 取 $m = 1$、.....、20 以及 $n = 0$、.....、30。在高斯情形下，当 n 从 $k = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ 变为 $k+1$ 时，显然会出现跳变，因为马尔钦凯维奇-齐格蒙德常数会从接近机器精度的数值骤然变为1，这与理论预期一致。克伦肖-柯蒂斯求积规则的情形下，变化较为缓慢，其等值线 $\eta \approx 0$ 和 $\eta = 1$ 显著分离；对于给定的 m，马尔钦凯维奇-齐格蒙德常数 η 在$\lfloor \frac{m}{2} \rfloor < n \leq m-1$时严格小于 1。据我们所知，这种现象尚未被发现，值得进一步研究。这或许与图 1 中也体现出的一个事实有关：对于某些高于预期的次数，克伦肖-柯蒂斯求积规则仍能较为准确地计算多项式的积分；这一现象早已为人所知并得到研究，见 [28]。

关于基于上述两种求积规则的格拉姆矩阵的条件数 $\text{cond}_2(G)$（由 MATLAB 函数 cond 计算），其表现也有所不同，如图 2 所示。对于

- 高斯-勒让德求积公式 $\text{cond}_2(G) \approx 1$ 当 $n \leq \lfloor m/2 \rfloor$ 其他情况下大于机器精度的倒数,
- 对于 $\lfloor m/2 \rfloor < n \leq m$，克伦肖-柯蒂斯 $\text{cond}_2(G)$ 小于 10；而对于 $n > m$，它会急剧增大，直至 G 接近奇异。

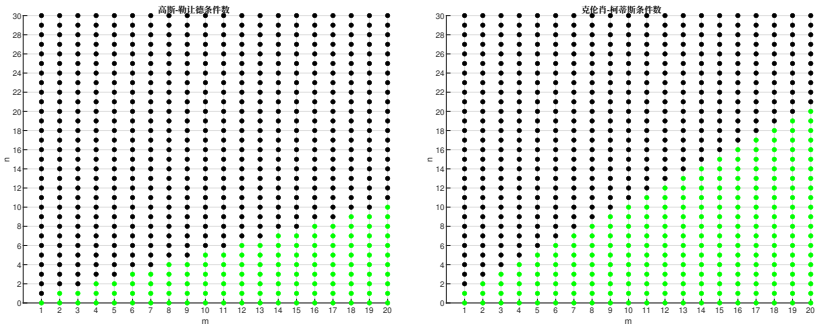

图 2: 基于高斯-勒让德和克伦肖-柯蒂斯求积规则的格拉姆矩阵的 2-范数条件数，其中 $ADE = m$，其中 $m = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ 20$ 和 $n = 0,\ \ldots\ldots,\ 30$。绿色圆点：$\mathrm{cond}_2(G) \in [1, 10)$。黑色圆点：$\mathrm{cond}_2(G) \in [10^7, +\infty)$。

3.2. 正方形

这里我们计算单位正方形上某些求积规则相对于 $[-1, 1]^2$ 勒贝格测度和乘积切比雪夫测度的 MZ 常数（见 [8, 26]）。第一个例子是基于高斯-勒让德求积规则的张量积求积公式。对于勒贝格测度，其他求积规则包括基于帕多瓦点的规则 [6] 以及 [13]中提出的近乎最小求积公式。最后一个例子是$Morrow\text{-}Patterson\text{-}Xu$ 多重数值积分求积公式，它对于乘积切比雪夫测度是（近乎）最小的（见 [22, 29]）。我们首先在求积节点处计算给定测度下维数为 $d_n = （n+1）（n+2）/2$ 的全次数正交归一乘积基，然后计算误差矩阵 $E = Id - G$，其中 G 是相应的格拉姆矩阵，最后计算 $\eta = \|E\|_2$。

数值结果汇总于图 (3)-(4) 中。我们注意到，对于张量积规则、近最小规则和 Morrow-Patterson-Xu 求积规则，当 $m = 1,\ \ldots\ldots,\ 20$ 且 $n > \lfloor m/2 \rfloor$ 时，始终有 $\eta \geq 1$，而 $\mathrm{cond}_2(G)$ 会急剧增大，直至 G 近奇异。相比之下，采用基于帕多瓦点的多重数值积分时，$\eta < 1$ 直至 $n = m - 1$，且当 $n < m$ 时，$\mathrm{cond}_2(G)$ 小于 10；而对于 $n > m$，它会急剧增大，直至 G 近奇异。

3.3. 圆盘与三角形

对于单位圆盘 $B(0, 1) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$，我们使用了相对于勒贝格测度 [17]的 Logan-Shepp 正交归一基。基于高斯-勒让德求积规则和梯形求积公式，极坐标下的张量积求积公式是一种常用选择，其中 $ADE = m$ （见 [26, 第32]页）。这类求积规则的优点是，即使对于较大的 m，也很容易实现，不过其节点数远非最少。另一种选择是，对于较小的次数 m，存在具有 $ADE = m$ 但节点数特别少的求积规则（例如见 [25]）。对于较小的 m，这些求积规则已通过理论方法确定，使节点数达到最少；而对于较大的取值，则是通过数值方法得到的。

对于单位单纯形 $T = \{(x, y) : x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$，我们使用了相对于勒贝格测度 [11]的 Dubiner 正交归一基。张量积求积公式同样是一种常用选择，因为它在任意精度次数下都易于实现（例如见 [26, 第29] 页及（[20]）。它们通常称为*Stroud* 圆锥求积公式，具有正权重、内部节点， $ADE = m$ 位于参考三角形上，节点数为 $(\lceil \frac{m+1}{2} \rceil)^2 \approx \frac{m^2}{4}$。同样，对于较小的次数，存在具有 $ADE = m$但节点数较少的求积规则。其中一些是通过理论方法得出的，另一些则是借助优化算法得到的（见 [19] 和 [12]）。关于这些公式的最新进展，请参见 [25] 。

数值结果汇总于图 (5)-(8) 中。只有对于 $n > \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$的张量积求积公式 $\eta < 1$，因为等高线 $\eta \approx 0$ 和 $\eta = 1$ 略有偏离。另一方面，在所有情况下，$\mathrm{cond}_2(G)$ 都会急剧增大，直至 $n > \lfloor m/2 \rfloor$的 G 近奇异。

3.4. 球面

在球面上，除了通过将问题改写为球坐标并应用适当的高斯求积规则和梯形求积公式而得到的基本经纬度求积规则 [26, p.40], 之外，还有许多关于球面设计的研究（例如，开创性论文 [9] 以及介绍性文献 [16] ）。

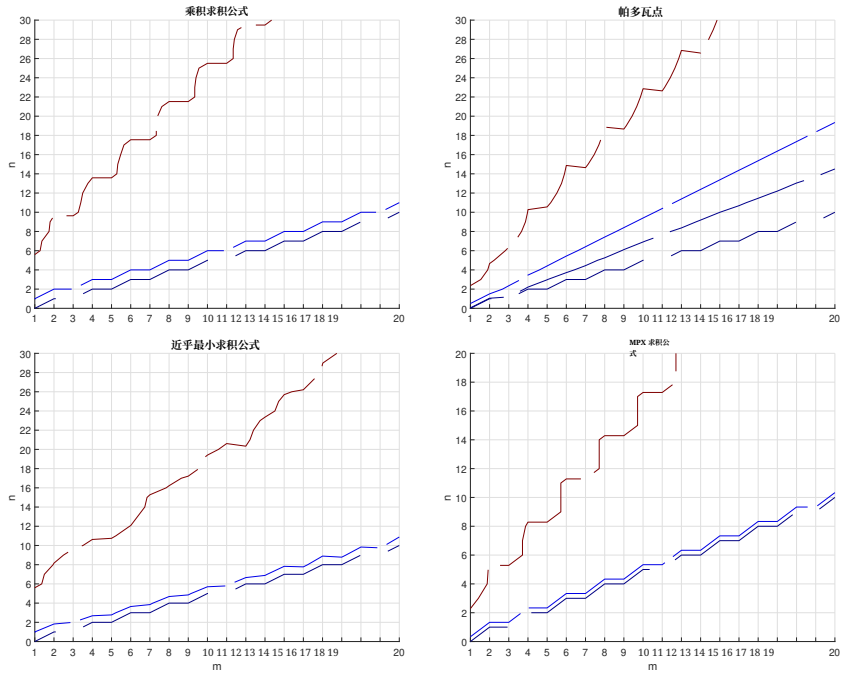

图 3： Marcinkiewicz-Zygmund 常数的等高线 η 在单位正方形上的某些多重数值积分（4）。张量积 Gauss-Legendre 求积公式（左上）、基于帕多瓦点的求积公式（右上）、近乎最小求积公式（左下）和 Morrow-Patterson-Xu 求积公式（右下）。

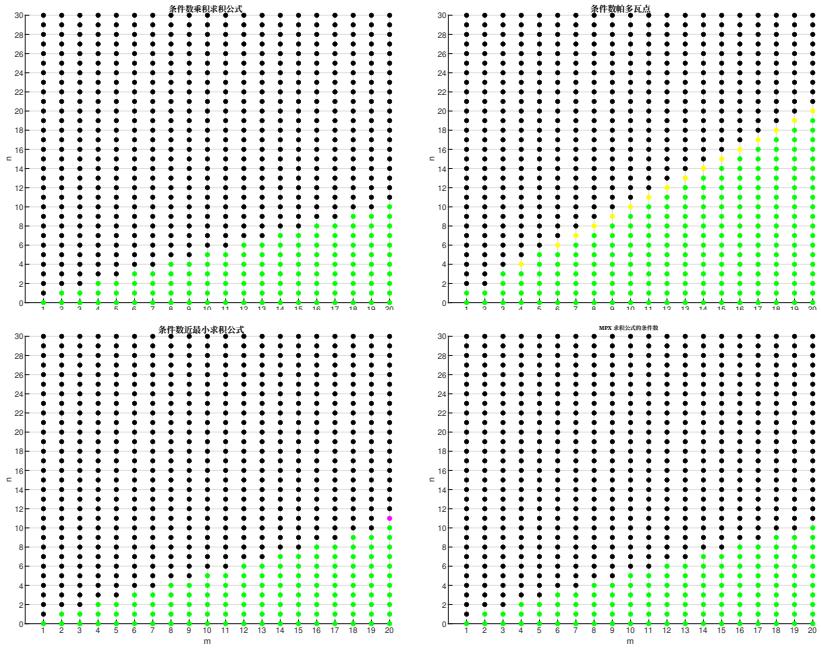

图 4：基于张量积高斯-勒让德求积公式、帕多瓦点求积公式、近乎最小求积公式和 Morrow-Patterson-Xu 求积规则的格拉姆矩阵的 2-范数条件数，其中 $ADE = m$， $m = 1,2,\ldots,20$ 且 $n = 0,\ldots,30$。绿色圆点：$\mathrm{cond}_2(G) \in [1,10)$。黄色圆点：$\mathrm{cond}_2(G) \in [10,10^2)$。洋红色圆点：$\mathrm{cond}_2(G) \in [10^4,10^7)$。黑色圆点：$\mathrm{cond}_2(G) \in [10^7,+\infty)$。

本文关注 [31], 中近期提出的求积规则，它们是球面 $\mathbb{S}^2$上的一组特定球面 t-设计，其中 $m = 1$为 2、.....、180；以及对称（对跖）球面 t-设计，位于 $\mathbb{S}^2$ 上，适用于

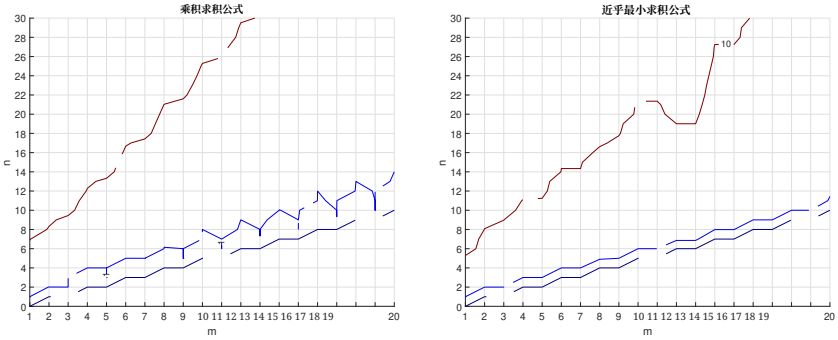

图 5： Marcinkiewicz-Zygmund 常数的等值线 η，对应于单位圆盘上的几种多重数值积分求积公式。

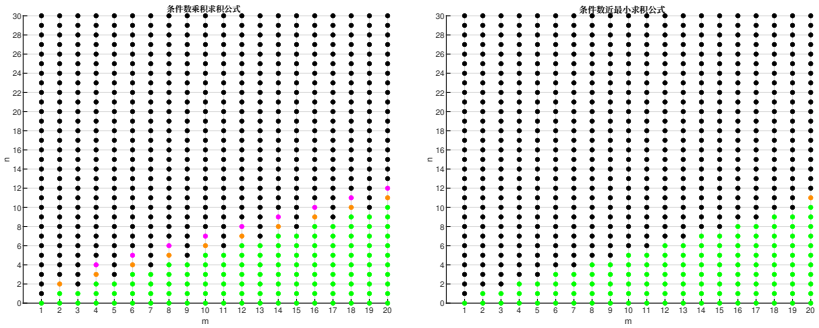

图 6： 单位圆盘上几种多重数值积分求积公式的格拉姆矩阵的 2-范数条件数。绿色圆点：条件数$_2(G) \in [1, 10)$。橙色圆点：条件数$_2(G) \in [10^2, 10^4)$。洋红色圆点：条件数$_2(G) \in [10^4, 10^7)$。黑色圆点：条件数$_2(G) \in [10^7, +\infty)$。

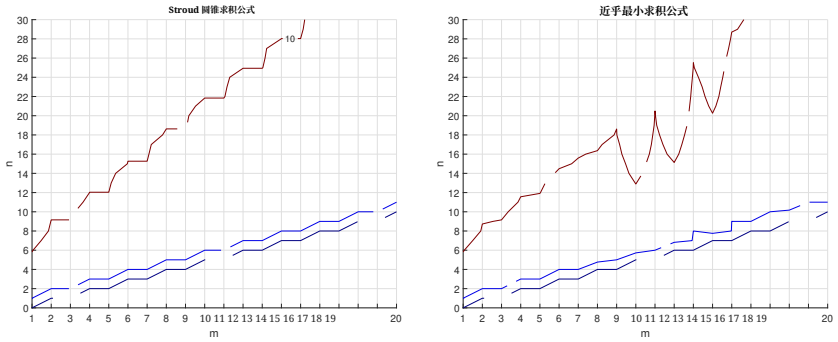

图 7：Marcinkiewicz-Zygmund 常数的等高线 η：单位单纯形上几种求积公式在 (4) 中的情形。

$m = 1, 3, 5, \ldots, 325$。这些 MATLAB 数据集以开源代码的形式提供。

在数值测试中，我们采用球谐函数作为标准正交基。数值测试结果见图 9。对于经纬度求积公式，其 Marcinkiewicz-Zygmund 常数 η 只有在 $n \le \lfloor m/2 \rfloor$时才小于1 $n \le \lfloor m/2 \rfloor$；而球面设计即使在某些 $\eta < 1$ 的情况下，也可能具有 $n > \lfloor m/2 \rfloor$，因为等高线 $\eta \approx 0$ 与 $\eta = 1$ 略有偏离。另一方面，球面设计的 Gram 矩阵在 n 略大于 $\lfloor m/2 \rfloor$ 之前也仍然保持良态，随后条件数会骤然增大。

3.5. QMC 求积公式

我们在关注准蒙特卡罗求积公式的同时，结束了对数值求积公式的分析。我们在单位正方形 $[-1, 1]^2$ 和单位立方体 $[-1, 1]^3$ 上测试了基于 Halton 点集的准蒙特卡罗求积公式。 由于参考

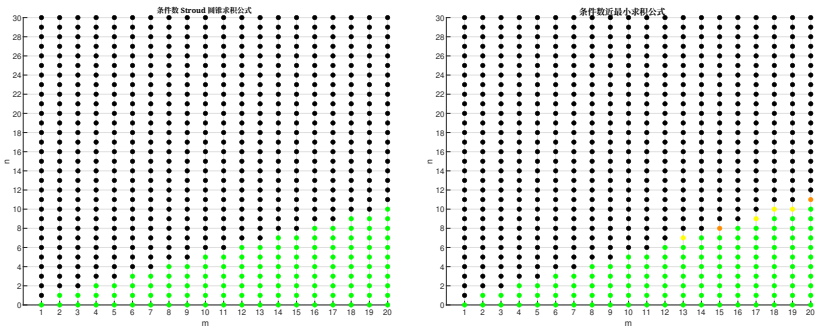

图 8 $_2G \in [1,10)$ $_2G \in [10,10^2)$ $_2G \in [10^2,10^4)$ $_2G \in [10^7,+\infty)$：单位单纯形上几种求积公式的格拉姆矩阵范数条件数。绿色点：条件数()。黄色点：条件数()。橙色点：条件数()。黑色点：条件数()。

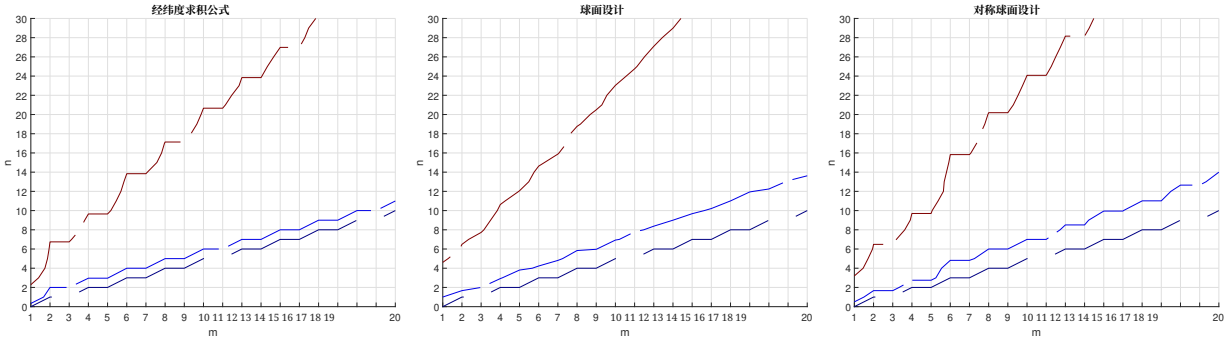

图 9：Marcinkiewicz-Zygmund 常数的等高线 η，对应于单位球面上的某些求积公式中的 (4) $\mathbb{S}^2$。从左到右分别为经纬度规则、球面设计和 [31] 中所建议的对称球面设计。

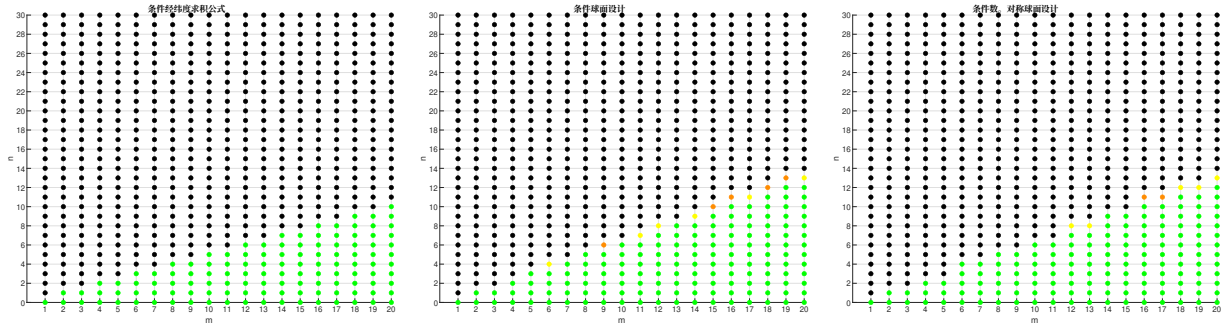

图 10：单位球面上一些求积公式的格拉姆矩阵 2-范数条件数 $\mathbb{S}^2$。绿色点：条件数$_2(G) \in [1,10)$。黄色点：条件数$_2(G) \in [10,10^2)$。橙色点：条件数$_2(G) \in [10^2,10^4)$。洋红色点：条件数$_2(G) \in [10^4,10^7)$。黑色点：条件数$_2(G) \in [10^7,+\infty)$。

测度是勒贝格测度，我们选择 $\mathbb{P}_n$ 全次数乘积Legendre基作为底层标准正交基。我们考虑了 $M = 2^m$、$m = 1$、.....、20 作为求积规则的基数，以及$n = 0$、.....、20。

关于这些区域上 η 的相应结果，以及格拉姆矩阵在范数 2 下的条件数，分别如图 11 和图 12 所示。正如当 $M \to \infty$ 时格拉姆矩阵收敛到单位矩阵所显示的，对于固定的 n，η 会随着 M的增大而减小。$M = 2^m$越大，满足 n 的 $\eta < 1$取值就越大。我们发现存在一些数对 (m,n)，使得 $\eta > 1$，但 cond(G) 并不太大。这意味着我们仍然可以通过格拉姆矩阵，稳妥地求解 中的最小二乘问题 $\mathbb{P}_n$。此外，(9) 中的第一个估计成立，而界 (7) 不适用。

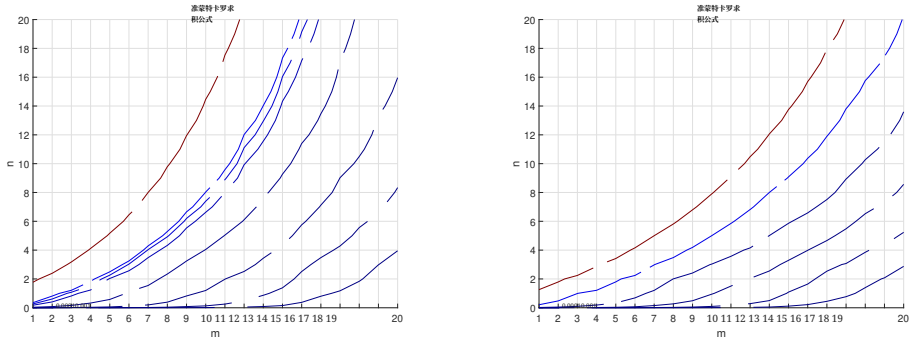

图 11：左：单位正方形 η 上准蒙特卡罗求积规则的 Marcinkiewicz-Zygmund 常数等值线（式 (4)）。右：单位立方体 $[-1,1]^3$ 上式 (4) 中准蒙特卡罗求积规则的 Marcinkiewicz-Zygmund 常数等值线。本例考察 Halton 点上的准蒙特卡罗求积规则，其基数为 $M = 2^m$，其中 $m = 1$，……，20，以及 $n = 0$，……，20。

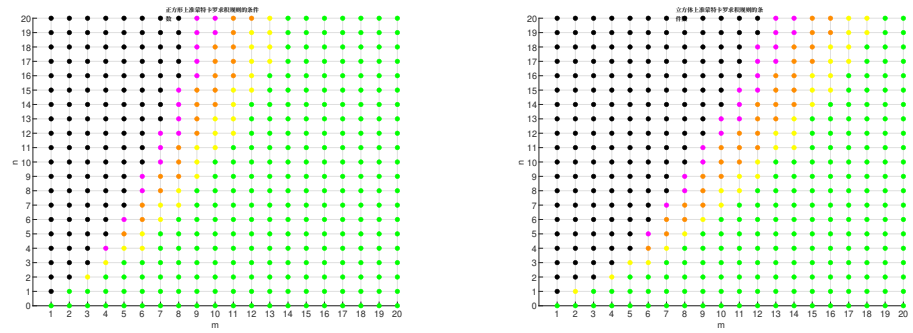

图 12：左：基于单位正方形 $[-1,1]^2$ 上准蒙特卡罗求积规则的格拉姆矩阵的 2-范数条件数。右：基于单位立方体 $[-1,1]^3$ 上准蒙特卡罗求积规则的格拉姆矩阵的 2-范数条件数。绿点：$\mathrm{cond}_2(G) \in [1, 10)$。黄点：$\mathrm{cond}_2(G) \in [10, 10^2)$。橙点：$\mathrm{cond}_2(G) \in [10^2, 10^4)$。洋红点：$\mathrm{cond}_2(G) \in [10^4, 10^7)$。黑点：$\mathrm{cond}_2(G) \in [10^7, +\infty)$

3.6. 正交基下的多项式逼近

在不同基本区域上测试的代数求积公式中，区间上的克伦肖-柯蒂斯求积公式和基于帕多瓦点的正方形求积公式显然是精确性放宽（或非受限）超插值的良好候选方案，正如 [4] 中所提出的。我们猜测这可能归因于 Chebyshev多项式的特殊性质，这与 [28] 中的研究思路一致，值得进一步探究，但这超出了本文的范围。此外，按照 [1], , 基数 M 足够大的 QMC 求积公式也可用于正方形和立方体上的非受限超插值。原因在于 A, $B \to 1$ 对于固定的 n，因为格拉姆矩阵收敛到单位矩阵，所以 $M \to \infty$ $\eta \to 0$，因此当 $M = M(n)$ 足够大时，该值与 1 保持一定距离。

因此，结合估计式 (7) 和 (10)，比较经典的 Sloan 超插值、非受限超插值以及最小二乘逼近在 L^2 范数下的相对误差是很有意义的，这三种方法均由上述三个求积规则构造。由于参考测度为勒贝格测度，我们选择全次数乘积Legendre基作为 $\mathbb{P}_n$ 的底层标准正交基。具体而言，我们测试了区间上的克伦肖-柯蒂斯求积公式、基于帕多瓦点的正方形求积规则，以及立方体上基于 Halton 点的准蒙特卡罗求积公式。

在前两种情形中，我们固定一个 ADE，例如 $m = 15$。经典超插值（$\eta = 0$）通过具有 ADE $2m = 30$ 的（乘积）高斯-勒让德求积公式实现。给定测试函数 f 和式 (5) 中的多项式超插值函数 $p_n = \mathcal{H}_n f$，或式 (8) 中的最小二乘投影 $p_n = \mathcal{G}_n f$，对于 $n = 1$、2、……、15，我们用具有 $ADE = 50$ 的（乘积）高斯-勒让德求积公式近似 L^2-范数下的相对误差，其中

节点记作 $X = \{\mathbf{z}_k\}$，权重记作 $u = \{u_k\}$，则

$$\frac{\|p_n - f\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}} \approx \frac{\|p_n - f\|_{\ell^2_u(X)}}{\|f\|_{\ell^2_u(X)}} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{\nu_{50}} u_k \left(p_n(\mathbf{z}_k) - f(\mathbf{z}_k)\right)^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{k=1}^{\nu_{50}} u_k\, f^2(\mathbf{z}_k)\right)^{1/2}}, \tag{29}$$

其中，$\nu_{50} = 26$ 适用于区间，$\nu_{50} = 26^2$ 适用于正方形。

对于单位区间，我们选取了具有不同正则性的测试函数 $[-1, 1]$

$$f_1(x) = \exp(-x^2),\ f_2(x) = (0.5 + x)^{15},\ f_3(x) = \sin(\pi x),\ f_4(x) = |x - 0.5|^3,\ f_5(x) = |x - 0.5|^7.$$

对于单位正方形，则选取了 $[-1, 1]^2$

$$f_1(x, y) = \exp(-(x^2 + y^2)),\ f_2(x, y) = (0.5 + x + 0.1y)^{15},\ f_3(x, y) = \sin(\pi x + \pi y),$$
$$f_4(x, y) = d((x, y), (0.5, 0.5))^3 = ((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2)^{3/2},$$
$$f_5(x, y) = d((x, y), (0.5, 0.5))^7 = ((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2)^{7/2}.$$

.

数值结果表明，尽管非受限超插值在较低的 n下，对 f_4 和 f_5的逼近误差尚可，但随着 n增大，误差往往会变差。这在正则性最高的函数上尤为明显：非受限超插值的最小误差维持在 10^{-5}左右。值得注意的是，它不能很好地重构多项式 f_2，这正如预期，因为它不是 $\mathbb{P}_n$上的投影。

我们观察到，基于帕多瓦点的最小二乘逼近所得误差与经典超插值的误差接近，但前者使用的是具有 $ADE = 15$ 的求积公式，而非具有 $ADE = 30$的求积公式。这可以看作是放宽经典超插值严格求积精确性的另一种方式。对于区间，两种方法的采样基数均为 16；对于正方形，最小二乘法仅在 $d_{15} = 16 \times 17/2 = 136$ 个帕多瓦点上采样，而经典超插值通过乘积高斯-勒让德求积公式在 $(m + 1)^2 = (15 + 1)^2 = 256$ 个点上采样。这意味着，基于帕多瓦点的最小二乘法，其表现相当于使用了一个针对正方形上勒贝格测度、具有 $ADE = 30$ 的最小多重数值积分公式（不过目前尚无此类公式，参见近期专著 [30]）。另一方面，即便我们采用基于已知最佳近乎最小求积公式的经典超插值（该公式具有 $ADE = 30$，于[13], 中得到，共有 167 个点），这一优势仍然存在。

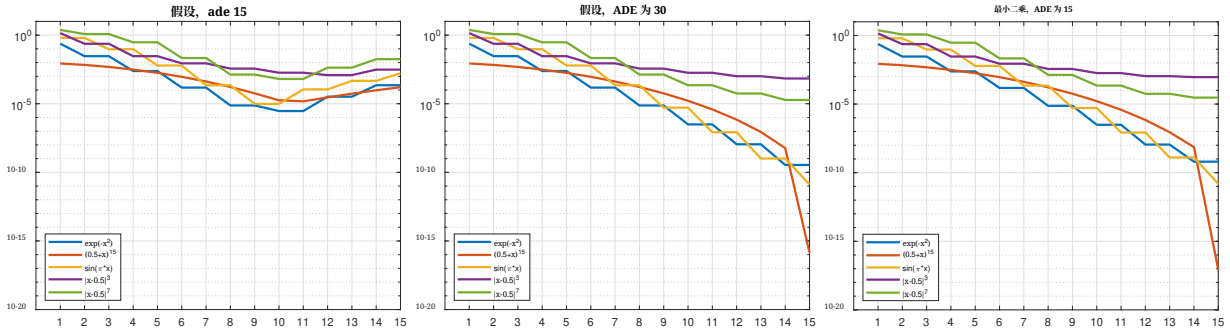

图13: 单位区间上的数值比较 $[-1, 1]$。次数为 1、2、.....、15 时，使用克伦肖-柯蒂斯求积公式进行超插值 $ADE = 15$（左），使用高斯-勒让德求积公式 $ADE = 30$（中），使用克伦肖-柯蒂斯求积公式计算最小二乘误差 $ADE = 15$（右）。

最后 我们测试了基于单位立方体上的 QMC 求积公式 $[-1, 1]^3$ 的函数逼近

$$f_1(x, y, z) = \exp(-(x^2 + y^2 + z^2)),\ f_2(x, y, z) = (0.5 + x + 0.1y + 0.4z)^{15},\ f_3(x, y, z) = \sin(\pi x + \pi y + \pi z),$$
$$f_4(x, y, z) = d((x, y, z), (0.5, 0.5, 0.5))^3 = ((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 + (z - 0.5)^2)^{3/2},$$

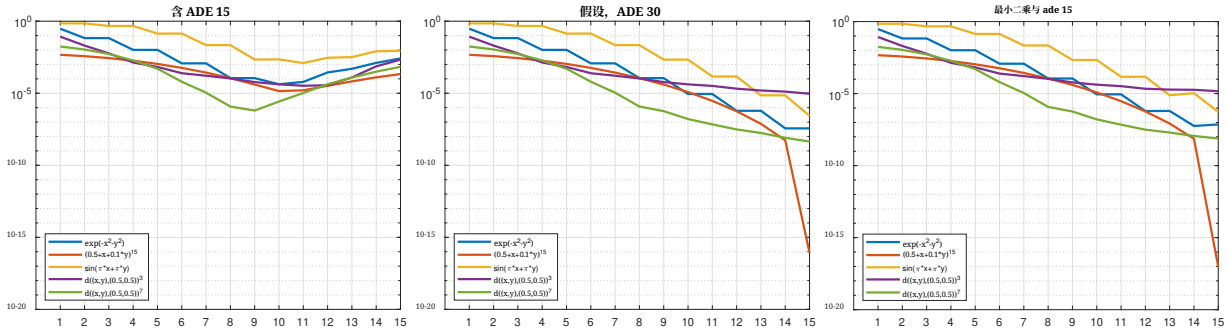

图14：单位正方形上的数值比较 $[-1,1]^2$。次数为1、2、.....、15 时，采用 Padua点规则进行超插值 $ADE = 15$ （左），采用 Gauss-Legendre 张量求积公式进行超插值 $ADE = 30$ （中），以及采用 Padua点规则得到的最小二乘误差 $ADE = 15$ （右）。

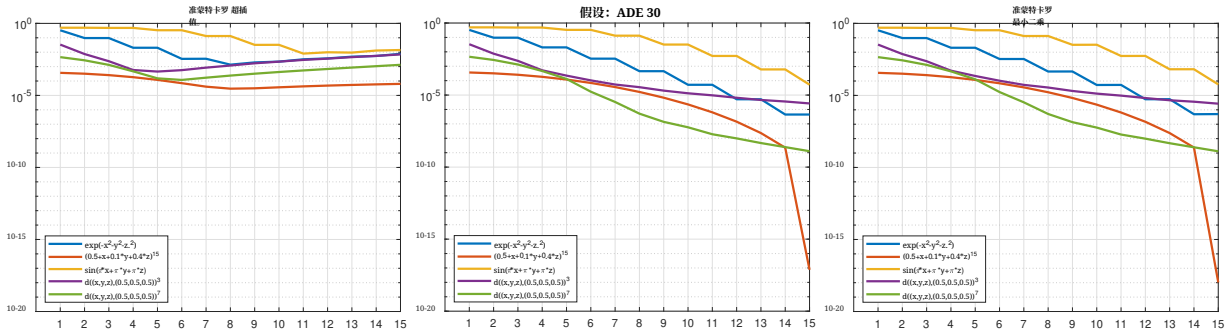

图15：单位立方体上的数值比较 $[-1,1]^3$。准蒙特卡罗超插值误差采用 $2^{15} = 32768$ Halton 点（左），经典超插值误差采用高斯-勒让德张量求积公式及 $ADE = 30$ （中），采用准蒙特卡罗的最小二乘误差及 2^{15} Halton 点（右）。

$$f_5(x,y,z) = d((x,y,z),(0.5,0.5,0.5))^7 = ((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 + (z-0.5)^2)^{7/2} .$$

数值结果见图14，对应于使用 $2^{15} = 32768$Halton 点的 QMC 求积公式。可以看出，QMC 最小二乘的表现接近经典超插值，而随着多项式次数 n的增加，QMC 无约束超插值的表现再次出现退化。

致谢。 本研究部分由帕多瓦大学的 DOR 基金和 INdAM-GNCS 2025 项目“多项式、样条与核函数：从数值逼近到开源软件”资助。本研究是在 Arqus 欧洲大学联盟的“绿色计算”实践共同体、RITA“意大利逼近研究网络”以及 SIMAI ANA&A 活动组框架内完成的。本研究部分获得国家自然科学基金委员会资助（项目编号：12371099）。

参考文献

[1] C.-P. An、M. Cai、T. Goda，准蒙特卡罗超插值，
`https://arxiv.org/abs/2506.11622` 。

[2] C.-P. An、J. Ran、H.-N. Wu，超插值之路：综述，Dolomites Res. Notes Approx. (DRNA) 18.1（2025），135–145。

[3] C.-P. An、H .-N. Wu，球面上绕过超插值的求积精确性假设
，《Journal of Complexity 80 (2024), 101789。

[4] C.-P. An, H.-N. Wu，超插值中的求积精确性，BIT Numerical Mathematics 80 (2022), 101789。[5] R. Cools，《求积公式百科全书》，J. Complexity 19 (2003), 445–453 https://nines.cs.kuleuven.be/research/ecf/ 。[6] M. Caliari, S. De Marchi, A. Sommariva, M. Vianello，Padua2DM：在 Matlab/Octave 中对帕多瓦点进行快速插值与多重数值积分，Numer. Algo. 56 (2011), 45–60。[7] F. Dai, A. Kroó, A. Prymak，关于多变量 C^{α}- 域上的伯恩斯坦型与马尔钦凯维奇型不等式，J. Approx. Theory 305 (2025), 106101。[8] P.J. Davis, P. Rabinowitz，《数值积分方法》，第二版，Dover, 1984。[9] P. Delsarte, J.M. Goethals, J.J. Seidel，球面码与设计，Geometriae Dedicata, 6 (3) (1977), 363–388。[10] J. Dick 和 F. Pillichshammer，《数字网与序列：差异理论与准蒙特卡罗积分》，剑桥大学出版社，剑桥，2010。[11] M. Dubiner，三角形及其他区域上的谱方法，J. Sci. Comput. 6 (1991), 345–390。[12] D.A. Dunavant，三角形上的高次数高效对称高斯求积公式，Int. J. Numer. Meth. Engng. 21 (1985), 1129–1148。[13] M. Festa, A. Sommariva，正方形上近乎最小公式的计算，Journal of Computational and Applied Mathematics 236 (2012), 4296–4302。[14] F. Filbir, H.N. Mhaskar，流形上的马尔钦凯维奇–齐格蒙德测度，J. Complex. 27 (2010), 568–596。[15] K. Gröchenig，采样、马尔钦凯维奇–齐格蒙德不等式、逼近与求积规则，J. Approx. Theory 257 (2020), 105455。[16] K. Hesse, I.H. Sloan, R.S. Womersley，球面上的数值积分，载于 W. Freeden, M.Z. Nashed 和 T. Sonar（编），《地球数学手册》，第 2 版，2015, 2671–2710，施普林格。[17] B.F. Logan, L.A. Shepp，由投影最优重建函数，Duke Math. J. 42 (1975), 645–659。[18] D.S. Lubinsky，《马尔钦凯维奇–齐格蒙德不等式：方法与结果》，载于：Milovanović, G.V.（编）《不等式研究新进展》，数学及其应用，第 430 卷，施普林格，多德雷赫特，1998。[19] J.N. Lyness, D. Jespersen，三角形上的中等次数对称求积公式，IMA J. Appl. Math. 15 issue 1 (1975), 19–32。[20] J.N. Lyness, R. Cools，三角形上的数值多重积分综述，载于：W. Gautschi（编）《计算数学 1943–1993：计算数学的半个世纪》，美国数学学会，1994, pp. 127–150。[21]J. Marcinkiewicz, A. Zygmund，关于独立函数，Fund. Math. 28 (1937), 60–90。重印于 Józef Marcinkiewicz，《论文集》，Antoni Zygmund 编，波兰科学出版社，华沙，1964, pp. 233–259。[22] C.R. Morrow, T.N.L. Patterson，利用多项式理想理论构造代数求积公式，SIAM J. Numer. Anal. 15 (1978), 953—976。[23] I.H. Sloan，《一般区域上的插值与超插值》，J. Approx. Theory 83 (1995), 238–254。

[24] A. Sommariva，用于计算 *Marcinkiewicz-Zygmund* 常数的 *MATLAB* 软件：https://github.com/alvisesommariva/MZ 。[25] A. Sommariva，*MATLAB* 和 *Python* 中的求积公式：https://sites.google.com/view/alvisesommarivaunipd/home-page/sets 。[26] A.H. Stroud。重积分的近似计算，Prentice-Hall，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1971年。[27] J. Stoer，R. Bulirsch，数值分析导论，第二版，Springer Verlag，应用数学文本，2010年。[28] L.N. Trefethen，高斯求积比克伦肖-柯蒂斯求积更好吗？，SIAM 综述 50 (2008)，67–87。[29] Y. Xu，两个变量切比雪夫点上的拉格朗日插值，J. Approx. Theory 87 (1996) 220—238。[30] Y. Xu，最小求积公式：理论与实践，剑桥应用数学与计算数学专著 45，剑桥大学出版社，2025。[31] R.S. Womersley，具有优良几何性质的高效球面设计：https://web.maths.unsw.edu.au/~rsw/Sphere/EffSphDes/index.html 。