arXiv:2601.04738v1 [math.PR] 8 Jan 2026

具有无界 H¨older 连续漂移系数的随机微分方程欧拉–丸山格式的强收敛速率

Tsukasa Moritoki* 和 Dai Taguchi†

2026年1月9日

摘要

本文给出了具有一致局部（无界）H¨older 连续漂移和乘性噪声的多维随机微分方程欧拉–丸山格式的强收敛速率。我们采用针对无界漂移的 Itˆo–Tanaka 技巧（Zvonkin变换）。此外，为了应用随机缝合引理，我们使用了欧拉–丸山格式密度函数的热核估计。

2020年数学主题分类：60H10；60H35；60H50
关键词：随机微分方程；欧拉–丸山格式；无界 H¨older 连续漂移；Itˆo–Tanaka 技巧；随机缝合引理；热核估计。

1 引言

设 $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ 是如下 d 维随机微分方程（SDE）的一个解

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\,\mathrm{d}B_t,\ X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^d,\ t \in [0,T], \tag{1.1}$$

其中， B 是定义在滤过概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{F},\ \mathbb{P})$ 上的 d 维标准布朗运动，该空间配备满足通常条件的滤过 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ 。本文假设漂移系数 $b = (b_1,\ \ldots,\ b_d)^\top$: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是一致局部（无界）H¨older 连续的，其指数为 $\alpha \in (0,1]$, 即,

$$\sup_{x\neq y\in\mathbb{R}^d,\,|x-y|\le 1} \frac{|b(x)-b(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty$$

并且扩散系数 σ : $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ 被假设为有界、光滑且一致椭圆。在这些条件下，Flandoli、Gubinelli 和 Priola [11, 定理 7] 证明了随机微分方程（1.1）存在微分同胚的整体流以及路径唯一性。他们的证明技术基于对漂移系数进行的一种变换，这种变换称为 Itˆo–Tanaka 技巧（或 Zvonkin变换 [25, 26]）。更准确地说，他们证明了当 $\lambda > 0$ 足够大时，方程

$$\lambda u_\lambda - \mathscr{L} u_\lambda = b$$

*冈山大学数学系，Tsushima-naka，Kita-ku，冈山 700-8530，日本，电子邮箱： pxyq0l31@s.okayama-u.ac.jp

†关西大学数学系，日本大阪吹田市564-8680，电子邮箱： taguchi@kansai-u.ac.jp

存在唯一经典解 $u_\lambda = (u_{\lambda,\,1},\ \ldots\ldots,\ u_{\lambda,\,d})^\top$。这里，算子 $\mathscr{L}$ 是 X 的无穷小生成元，即，

$$(\mathscr{L}g)(x) := \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(a(x)(\nabla^2 g)(x)\big) + \langle b(x), (\nabla g)(x)\rangle,\ a(x) := \sigma(x)\sigma(x)^\top.$$

然后利用伊藤公式，对于 $i = 1,\ \ldots\ldots,\ d$，我们有

$$\int_0^t b_i(X_s)\,\mathrm{d}s = u_{\lambda,i}(x_0) - u_{\lambda,i}(X_t) + \lambda\int_0^t u_{\lambda,i}(X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \langle(\nabla u_{\lambda,i})(X_s), \sigma(X_s)\,\mathrm{d}B_s\rangle,$$

这一变换表明，我们可以利用解 $u_{\lambda,\,i}$ 的正则性来证明（例如）路径唯一性，并给出数值格式的收敛速率。

本文关注在 $X^n = (X_t^n)_{t\in[0,T]}$ 定义的 Euler–Maruyama 格式的强收敛速率

$$\mathrm{d}X_t^n = b(X_{\kappa_n(t)}^n)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_{\kappa_n(t)}^n)\,\mathrm{d}B_t,\ X_0^n = x_0,\ t\in[0,T], \tag{1.2}$$

在上述系数正则性条件下，特别是漂移系数一致局部（无界）H¨older 连续的条件下。这里 κ_n 由 $\kappa_n(t) := t_k := kT/n,\ \ t\in[t_k, t_{k+1})$ 定义。众所周知，如果系数 b 和 σ 是利普希茨连续的，那么 Euler–Maruyama 格式具有强收敛速率 $1/2$ （例如 [16]），也就是说，对于任意 $p\geq 1$,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}|X_t - X_t^n|^p\Big]^{1/p} \lesssim n^{-1/2}.$$

对于非利普希茨系数，Kaneko 和 Nakao [15, 定理 D] 证明，若具有连续且满足线性增长条件的系数的随机微分方程 (1.1) 满足路径唯一性，则欧拉–丸山格式在 L^2 中收敛，但他们没有研究其收敛速率。关于强收敛速率的结果，若漂移系数有界且为 H¨older 连续，指数为 $\alpha\in(0,1)$，并且扩散系数为单位矩阵，则 Menoukeu Pamen 和 Taguchi [21] 证明欧拉–丸山格式具有强收敛速率 $\alpha/2$，也就是说，对任意 $p\geq 1$,

$$\mathbb{E}[|X_T - X_T^n|^p]^{1/p} \lesssim n^{-\alpha/2}.$$

证明技巧基于 Itˆo–Tanaka 技巧，以消除 H¨older 漂移。近年来，这一结果在许多论文中得到了推广（例如 [1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 19, 22, 23]）。特别是，Butkovsky、Dareiotis 和 Gerencs´er [6] 改进了强收敛速率，并证明对任意 $p\geq 1$,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}|X_t - X_t^n|^p\Big]^{1/p} \lesssim \begin{cases} n^{-1/2+\varepsilon}, & \text{if } \sigma\in C_b^2 \text{ and uniformly elliptic,}\\ n^{-(1+\alpha)/2+\varepsilon}, & \text{if } \sigma \text{ is the identity matrix,}\end{cases}$$

证明的关键思路是使用 L´e [18] 提出的随机缝合引理。随机缝合引理是确定性缝合引理 [10, 13], 的随机推广，它给出了随机黎曼和收敛的充分条件。此外，对于具有一致局部（无界）H¨older 连续漂移和 $\sigma = I_d$ 的情形，Babi、Dieye 和 Menoukeu Pamen [1] 给出了 $T>0$ 足够小时的强收敛速率。他们使用了 Itˆo–Tanaka 技巧 [11]。

本文给出了具有一致局部 H¨older 连续漂移和乘性噪声的欧拉–丸山格式的强收敛速率。更确切地说，我们证明，若进一步假设漂移具有次线性增长，那么对于任意 $T > 0$ 和 $p \geq 1$，有

$$\mathbb{E}[|X_T - X_T^n|^p]^{1/p} \lesssim \begin{cases} n^{-1/2}, & \text{if } \sigma \in C_b^3 \text{ and uniformly elliptic,} \\ n^{-(1+\alpha)/2+\varepsilon}, & \text{if } \sigma \text{ is the identity matrix.} \end{cases}$$

我们主要结果的证明思路是使用随机缝合引理和 Itˆo–Tanaka 技巧。为了应用随机缝合引理，我们使用 Konakov 和 Mammen [17]证明的欧拉–丸山格式（不含漂移）密度函数及其导数的热核估计。更确切地说，他们证明了，利用参数法，如果系数足够光滑，那么密度函数 $p_{t_k}^n(x,\cdot)$ of $X_{t_k}^n$ with $X_0^n = x$ 满足以下热核估计：对于某个多重指标 ℓ, m，存在 $C_+, c_+ > 0$，使得对于任意 $y \in \mathbb{R}^d$,

$$|\partial_y^\ell \partial_x^m p_{t_k}^n(x,y)| \leq C_+ t_k^{-(|\ell|+|m|)} \frac{e^{-\frac{|y-x|^2}{2c_+ t_k}}}{(2\pi c_+ t_k)^{d/2}}.$$

然后，我们使用 Girsanov 变换为欧拉–丸山格式加入漂移项。为了确认 Novikov 条件（漂移可以无界，但具有次线性增长），我们使用带最佳常数的 Burkholder–Davis–Gundy 不等式（例如 [5, 24]）。最后，对于无界漂移系数 [11]，我们使用 Itˆo–Tanaka 技巧来变换漂移系数。

1.1 符号

本文中，我们将使用以下符号。对于 $x, y \in \mathbb{R}$, $x \lesssim y$ 表示存在一个常数 $c > 0$，使得 $x \leq cy$。对于 $x \in \mathbb{R}^d$, $|x|$ 表示欧几里得范数。对于矩阵 A,$|A|$ 表示弗罗贝尼乌斯范数。对于矩阵值函数 a, 我们定义 $\|a\|_\infty := \sup_x |a(x)|$。$I_d$ 表示 d 维单位矩阵。对于定义在带有滤过 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ 的滤过概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量 X，我们令 $\|X\|_{L^p} := \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}$ 和 $\mathbb{E}^t[X] := \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t]$, $t \in [0,T]$。对于 d 维对称正定矩阵 A，我们定义

$$g_A(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}(\det A)^{1/2}} \exp\Big(-\frac{\langle A^{-1}x, x\rangle}{2}\Big), \ x \in \mathbb{R}^d,$$

对于 $c > 0$，以及 $g_c(x) := g_{cI_d}(x)$。

2 主要结果

我们首先引入一些函数空间。令 $d, k, n \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \in (0,1]$.

若可测函数 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 满足 $\|(1+|\cdot|)^{-1} f(\cdot)\|_\infty < \infty$，则称其具有线性增长。若函数$f$ 在任意紧集上有界，且满足 $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)|/|x| = 0$，则称其具有次线性增长。在后一种情况下，我们有如下增长条件：对于任意 $\delta > 0$，存在 $L_\delta > 0$，使得对于任意 $x \in \mathbb{R}^d$，$|f(x)| \leq \delta|x| + L_\delta$.

$C^\alpha(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^k)$ 表示所有从 $\mathbb{R}^d$ 到 $\mathbb{R}^k$ 的函数构成的集合，这些函数均为一致局部 α-H¨older 连续函数，即:

$$[f]_\alpha := \sup_{x\neq y\in\mathbb{R}^d,\, |x-y|\leq 1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty.$$

注意，若 $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^k)$，则它具有线性增长。事实上，令 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $m = \lfloor |x| \rfloor + 1$，其中 $\lfloor a \rfloor$ 表示下取整函数。于是有：

$$\begin{aligned} |f(x)| &\le |f(0)| + \sum_{j=0}^{m-1} \Big| f\Big(\frac{j}{m}x\Big) - f\Big(\frac{j+1}{m}x\Big)\Big| \le |f(0)| + [f]_\alpha \sum_{j=0}^{m-1} \Big(\frac{|x|}{m}\Big)^\alpha \\ &= |f(0)| + [f]_\alpha m^{1-\alpha}|x|^\alpha \le |f(0)| + [f]_\alpha(1+|x|). \end{aligned} \tag{2.1}$$

因此， f 具有线性增长。集合 $C^\alpha(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^k)$ 是一个巴拿赫空间，其范数为

$$\|f\|_\alpha := \|(1+|\cdot|)^{-1} f(\cdot)\|_\infty + [f]_\alpha.$$

此外，对于 α， $\beta \in (0,1]$ 且 $\alpha < \beta$，有 $C^\alpha(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^k) \subset C^\beta(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^k)$。特别地，如果$f \in C^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^k)$，那么 f 是全局Lipschitz连续的，即

$$[f]_{\mathrm{Lip}} := \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} < \infty.$$

事实上，对于 x， $y \in \mathbb{R}^d$ 且 $|x-y| > 1$，我们令 $m = \lfloor |x-y| \rfloor + 1$。于是有

$$|f(x)-f(y)| \le \sum_{j=0}^{m-1} \Big| f\Big(x + \frac{j}{m}(y-x)\Big) - f\Big(x + \frac{j+1}{m}(y-x)\Big)\Big| \le [f]_1 \sum_{j=0}^{m-1} \frac{|x-y|}{m} = [f]_1 |x-y|.$$

$C_b^n(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^k)$ 是从 $\mathbb{R}^d$ 到 $\mathbb{R}^k$ 的所有函数组成的空间，这些函数具有直至 n阶的有界导数，即

$$\|f\|_{C_b^n} := \sum_{i=0}^n \|\nabla^i f\|_\infty < \infty.$$

此外， $C^{n+\alpha}(\mathbb{R}^d:\mathbb{R}^k)$ 表示从 $\mathbb{R}^d$ 到 $\mathbb{R}^k$ 的所有满足以下条件的函数组成的集合

$$\|f\|_{n+\alpha} := \|(1+|\cdot|)^{-1} f(\cdot)\|_\infty + [\nabla^n f]_\alpha + \|\nabla f\|_{C_b^{n-1}} < \infty.$$

我们给出几种属于类 $C^\alpha(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ 的例子。

例 2.1. ***(i)*** 令 $\alpha, \beta \in (0,1)$。定义 $f(x) := |x|^\alpha + |x|^\beta$, $x \in \mathbb{R}^d$。则 $f \in C^\gamma(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R})$，其中 $\gamma := \alpha \wedge \beta$，且 f 具有次线性增长。然而，若 $\alpha < \beta$ （或 $\alpha > \beta$），则对于任意指数 $\rho \in (0,1]$， f 都不是全局 ***H¨older*** 连续的。事实上，对于任意 $x \in \mathbb{R}^d$，都有

$$\frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|^\rho} = |x|^{\alpha-\rho} + |x|^{\beta-\rho} \to \infty,$$

当 $|x| \to \infty$ 时，若 $\alpha > \rho$ 或 $\alpha \le \rho < \beta$，则如此；若 $\alpha < \beta \le \rho$，则当 $|x| \to 0$ 时如此。

(ii) 设 $\alpha \in (0,1)$ 且 $f(x) := |x|^\alpha \log(2+|x|)$， $x \in \mathbb{R}^d$。则 $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$，且 f是次线性增长的。事实上，映射 $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ 是全局***Lipschitz***连续的，因此我们可以假设 $d = 1$。若 $|x|$、 $|y| \ge 1$，则 f 是光滑的，且 f'有界，因此对于 $|x-y| \le 1$，

$$|f(x)-f(y)| \le \|f'\|_\infty |x-y| \le \|f'\|_\infty |x-y|^\alpha.$$

若 $|x|<1$ 且 $|x-y|\le 1$，则有

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\le \log(2+|x|)\big||x|^\alpha-|y|^\alpha\big|+|y|^\alpha\big|\log(2+|x|)-\log(2+|y|)\big| \\ &\le (\log 3)|x-y|^\alpha+\frac{2^\alpha}{2+|x|\wedge|y|}|x-y|\le(\log 3+2^{\alpha-1})|x-y|^\alpha.\end{aligned}$$

因此 $f\in C^\alpha(\mathbb{R};\mathbb{R})$。然而，对于任意指数 $\rho\in(0,1]$， f都不具有全局 *H¨ölder* 连续性。事实上，对于任意 $x\in\mathbb{R}$ 和 $\rho\in(0,1]$, ，我们有

$$\frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|^\rho}=|x|^{\alpha-\rho}\log(2+|x|)\to\infty,$$

当 $\alpha\ge\rho$时， $|x|\to\infty$ ；当 $\alpha<\rho$时， $|x|\to 0$ 。

我们需要对随机微分方程 (1.1) 的系数作出以下假设。

假设 2.2。 我们假设漂移系数 b: $\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 和扩散系数 σ满足以下条件。

(i) $b\in C^\alpha(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ *with* $\alpha\in(0,1]$.

(ii) b 具有次线性增长。

(iii) $\sigma\in C_b^3(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^{d\times d})$.

(iv) 存在 $\lambda\ge 1$ ，使得对于任意 x、$\xi\in\mathbb{R}^d$

$$\lambda^{-1}|\xi|^2\le\langle a(x)\xi,\xi\rangle\le\lambda|\xi|^2,\ a(x)=\sigma(x)\sigma(x)^\top.$$

在假设 2.2 (i)、(iii) 和 (iv) 下，随机微分方程 (1.1) 存在唯一的强解（参见 [11,定理 7]）。

We 给出欧拉–丸山格式 (1.2 的如下强收敛速率).

定理 2.3. 我们假设假设 *2.2* 成立。那么对于任意 $p\ge 1$ 和 $\varepsilon\in(0,\ (1+\alpha)/2)$，存在常数 $C_p>0$ 和 $C_{p,\varepsilon}>0$ ，使得

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}[|X_t-X_t^n|^p]^{1/p}\le\begin{cases}C_p n^{-1/2}, & \textit{if } \sigma \textit{ is not a constant matrix,}\\ C_{p,\varepsilon}n^{-(1+\alpha)/2+\varepsilon}, & \textit{if } \sigma \textit{ is a constant matrix.}\end{cases}$$

定理 2.3 的主要关注点是情形 $\alpha\in$ (0,1)，但情形 $\alpha=1$ （即， b 是全局 Lipschitz 连续且具有次线性增长）以及常矩阵 σ 也是新的结果。若去掉假设 2.2 (ii)，则对于充分小的 $T>0$ ，我们仍能证明相同的收敛速率（见注 3.8）。

注 2.4. Butkovsky、Dareiotis 和 Gerencs´er [6] 证明，若漂移全局有界且为α-H¨ölder 连续，且满足 $\alpha\in(0,1]$, ，则对任意 $p\ge 1$,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]}|X_t-X_t^n|^p\Big]^{1/p}\lesssim\begin{cases}n^{-1/2+\varepsilon}, & \text{if } \sigma\in C_b^2 \text{ and uniformly elliptic,}\\ n^{-(1+\alpha)/2+\varepsilon}, & \text{if } \sigma \text{ is the identity matrix,}\end{cases}$$

（参见 [6, 定理 2.1 和定理 2.7]）。Babi、Dieye 和 Menoukeu Pamen [1]证明，若$b \in C^{\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, 其中 $\alpha \in (0, 1)$，且 $\sigma = I_d$，则对任意 $\varepsilon \in (0, 1/2)$，存在 $T_\varepsilon > 0$ 使得

$$\sup_{t\in[0,T_\varepsilon]} \mathbb{E}[|X_t - X_t^n|^2]^{1/2} \lesssim n^{-1/2+\varepsilon},$$

（见 [1, 定理 1.1]）。因此，定理 2.3 是上述结果的推广。

此外，Ellinger、M¨uller-Gronbach 和 Yaroslavtseva [9] 证明，若 $d = 1$ 且 $\sigma = 1$，则存在一个有界的 α-H¨older 连续函数 b，使得

$$\inf_{g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \text{ measurable}} \mathbb{E}[|X_T - g(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})|] \gtrsim n^{-(1+\alpha)/2},$$

（见 [9, 定理 1]）。因此，定理 2.3 中的收敛速率几乎是最优的。

3 主定理的证明

本节中，我们给出定理 2.3 的证明。

3.1 一些辅助估计

本节中，我们为欧拉–丸山格式 (1.2) 给出一些辅助估计。下面的引理可通过标准随机微积分证明。

引理 3.1. 我们假设系数 b 和 σ 满足线性增长条件。那么对于任意 $p \geq 1$，存在常数 $C_p > 0$，使得对于任意 $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[|X_t^n|^p] \leq C_p \ \textit{and} \ \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_t^n - X_s^n|^p] \leq C_p(t-s)^{p/2}.$$

接下来，我们给出以下求积估计。

引理 3.2. 我们假设系数 b 和 σ 满足线性增长条件。设 $f\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 为一个线性增长可测函数，且 $g\colon$ $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 为一个有界可测函数。那么对于任意 $p \geq 1$，存在常数 $C_p > 0$，使得对于任意 $0 \leq s \leq t \leq T$和 $n \in \mathbb{N}$,

$$\Big\| \int_s^t \Big\{ f(X_r^n) - f(X_{\kappa_n(r)}^n) \Big\} g(X_r^n, X_s^n)\, \mathrm{d}r \Big\|_{L^p} \leq C_p \|(1 + |\cdot|)^{-1} f(\cdot)\|_\infty \|g\|_\infty (t-s).$$

证明。 由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}
&\Big\| \int_s^t \Big\{ f(X_r^n) - f(X_{\kappa_n(r)}^n) \Big\} g(X_r^n, X_s^n)\, \mathrm{d}r \Big\|_{L^p} \\
&\leq \int_s^t \Big\| \{ f(X_r^n) - f(X_{\kappa_n(r)}^n) \} g(X_r^n, X_s^n) \Big\|_{L^p} \mathrm{d}r \\
&\leq \|(1 + |\cdot|)^{-1} f(\cdot)\|_\infty \|g\|_\infty \int_s^t \Big\{ 2 + \|X_r^n\|_{L^p} + \|X_{\kappa_n(r)}^n\|_{L^p} \Big\} \mathrm{d}r \\
&\lesssim \|(1 + |\cdot|)^{-1} f(\cdot)\|_\infty \|g\|_\infty (t-s).
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

3.2 求积估计

本节的目标是证明以下求积估计：设假设 2.2 成立，并令 $f \in C^{\alpha}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$，其中 $\alpha \in (0,1]$ 和 $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是有界的全局利普希茨连续函数，则有

$$\sup_{t\in[0,T]} \Big\| \int_0^t \Big\{ f(X_r^n) - f(X_{\kappa_n(r)}^n) \Big\} g(X_r^n)\,\mathrm{d}r \Big\|_{L^p} \lesssim ([f]_\alpha \vee |f(0)|)(\|g\|_\infty + [g]_{\mathrm{Lip}}) n^{-\frac{1+\alpha}{2}+\varepsilon},$$

（见命题 3.6）。我们首先证明上述估计对无漂移的 Euler–Maruyama 格式成立，然后利用 Maruyama–Girsanov 定理将其推广到 X^n。

令 $Y^n = (Y_t^n)_{t\in[0,T]}$ 为无漂移系数的 Euler–Maruyama 格式，即

$$\mathrm{d}Y_t^n = \sigma(Y_{\kappa_n(t)}^n)\,\mathrm{d}B_t,\ Y_0^n = x_0,\ t\in[0,T].$$

于是得到关于 Y^n的下述求积估计。

命题 3.3。设 $f \in C^{\alpha}(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R})$ 满足 $\alpha \in (0,1]$ 且 $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是有界的全局利普希茨连续函数。假设扩散系数 σ 满足假设 *2.2 (iii)* 和 *(iv)*。那么，对任意 $p \geq 1$ 和 $\varepsilon \in (0,\ (1+\alpha)/2)$，存在常数 $C_{p,\ \varepsilon} > 0$ 使得对任意 $t \in [0,T]$ 和 $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{t\in[0,T]} \Big\| \int_0^t \Big\{ f(Y_r^n) - f(Y_{\kappa_n(r)}^n) \Big\} g(Y_r^n)\,\mathrm{d}r \Big\|_{L^p} \leq C_{p,\varepsilon}([f]_\alpha \vee |f(0)|)(\|g\|_\infty + [g]_{\mathrm{Lip}}) n^{-\frac{1+\alpha}{2}+\varepsilon}. \quad (3.1)$$

我们使用 L´e 在[18] 中引入的以下随机缝合引理来证明该命题，其证明类似于 [14, 引理 6.1]。

引理 3.4（随机缝合引理，[18, 定理 2。3]）。设 $m \geq 2$ 和 $(A_{s,\ t})_{0\leq s\leq t\leq T}$ 是一个取值于 $\mathbb{R}^d$、L^m-可积且适应于滤过$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$的二参数随机过程，也就是说，对每个 $0 \leq s \leq t \leq T$、$\mathbb{E}[|A_{s,t}|^m] < \infty$和 $A_{s,\ t}$都是 $\mathcal{F}_t$-可测的。假设存在常数 Γ_1、$\Gamma_2 \geq 0$、ε_1、$\varepsilon_2 > 0$，使得对于每个 $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$,

$$\|A_{s,t}\|_{L^m} \leq \Gamma_1 |t-s|^{1/2+\varepsilon_1}, \quad (3.2)$$

$$\|\mathbb{E}^s[A_{s,t} - A_{s,u} - A_{u,t}]\|_{L^m} \leq \Gamma_2 |t-s|^{1+\varepsilon_2}. \quad (3.3)$$

则存在唯一的随机过程 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_t)_{t\in[0,T]}$，其取值于 $\mathbb{R}^d$，并满足以下性质。

(i) $\mathcal{A}_0 = 0$ 和 $\mathcal{A}_t$ 是 $\mathcal{F}_t$-可测且 L^m-可积的。

(ii) 存在常数 Γ_3、$\Gamma_4 \geq 0$，使得对任意 $0 \leq s < t \leq T$,

$$\|\mathcal{A}_t - \mathcal{A}_s - A_{s,t}\|_{L^m} \leq \Gamma_3 |t-s|^{1/2+\varepsilon_1} + \Gamma_4 |t-s|^{1+\varepsilon_2}, \quad (3.4)$$

$$\|\mathbb{E}^s[\mathcal{A}_t - \mathcal{A}_s - A_{s,t}]\|_{L^m} \leq \Gamma_4 |t-s|^{1+\varepsilon_2}. \quad (3.5)$$

此外，存在一个仅依赖于 ε_1、ε_2 和 d 的常数 $K > 0$，使得对于任意 $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\|\mathcal{A}_t - \mathcal{A}_s\|_{L^m} \leq K\Gamma_1 |t-s|^{1/2+\varepsilon_1} + K\Gamma_2 |t-s|^{1+\varepsilon_2}. \quad (3.6)$$

为了处理 f 的一致局部 H¨older 连续性，我们还需要以下引理。

引理 3.5。 设 $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ 且 $\alpha \in (0,1]$。我们假设扩散系数 σ 满足假设 *2.2 (iv)*。那么对于任意 $p \geq 1$，存在 $C_p > 0$，使得对于任意 $0 \leq s \leq r \leq T$，

$$\Big\| \mathbb{E}^s \Big[\Big\{ f(Y_r^n) - f(Y_{\kappa_n(r)}^n) \Big\} 1_{\{|Y_r^n - Y_{\kappa_n(r)}^n|>1\}} \Big] \Big\|_{L^p} \leq C_p([f]_\alpha \vee |f(0)|) \exp\Big(- \frac{n}{8p\lambda T} \Big).$$

证明。 由于 f 满足 (2.1)，利用詹森不等式、H¨older 不等式和引理 3.1，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big| \mathbb{E}^s \Big[\Big\{ f(Y_r^n) - f(Y_{\kappa_n(r)}^n) \Big\} 1_{\{|Y_r^n - Y_{\kappa_n(r)}^n|>1\}} \Big] \Big|^p \Big] \leq \mathbb{E}\Big[\Big| f(Y_r^n) - f(Y_{\kappa_n(r)}^n) \Big|^p 1_{\{|Y_r^n - Y_{\kappa_n(r)}^n|>1\}} \Big] \\
&\leq \mathbb{E}\Big[\Big| f(Y_r^n) - f(Y_{\kappa_n(r)}^n) \Big|^{2p} \Big]^{1/2} \mathbb{P}(|Y_r^n - Y_{\kappa_n(r)}^n| > 1)^{1/2} \\
&\lesssim ([f]_\alpha \vee |f(0)|)^p \mathbb{P}(|Y_r^n - Y_{\kappa_n(r)}^n| > 1)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Let $t_k = \kappa_n(r)$。根据欧拉–丸山格式 Y^n的定义，有 t

$$Y_r^n - Y_{t_k}^n = \sigma(Y_{t_k}^n)(B_r - B_{t_k}).$$

由于 $\sigma(Y_{t_k}^n)$ 与 $B_r - B_{t_k}$ 相互独立，可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|Y_r^n - Y_{\kappa_n(r)}^n| > 1) &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}^{t_k} \Big[\mathbf{1}_{\{|\sigma(Y_{t_k}^n)(B_r - B_{t_k})|>1\}} \Big] \Big] = \mathbb{E}\Big[\int_{|y|>1} g_{a(Y_{t_k}^n)(r-t_k)}(y)\,\mathrm{d}y \Big] \\
&\leq \sup_{z\in\mathbb{R}^d} \int_{|y|>1} g_{a(z)(r-t_k)}(y)\,\mathrm{d}y \leq \lambda^d \int_{|y|>1} g_{\lambda(r-t_k)}(y)\,\mathrm{d}y \\
&\leq \frac{\lambda^d}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\sqrt{\lambda(r-t_k)}|u|>1} \exp\Big(- \frac{|u|^2}{2} \Big)\,\mathrm{d}u \\
&\leq \frac{\lambda^d}{(2\pi)^{d/2}} \exp\Big(- \frac{1}{4\lambda(r-t_k)} \Big) \int_{\mathbb{R}^d} \exp\Big(- \frac{|u|^2}{4} \Big)\,\mathrm{d}u \\
&\lesssim \exp\Big(- \frac{n}{4\lambda T} \Big).
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

现在我们可以证明命题 3.3。

命题 *3.3* 的证明。 只需证明测试函数 f 足够光滑时该命题成立。事实上，令 $\rho(x) := C^{-1} \exp(-\frac{1}{1-|x|^2})$，$C = \int_{|x|<1} \exp(-\frac{1}{1-|x|^2})\,\mathrm{d}x$，定义 $\rho_m(x) := m^d \rho(mx)$ 和 $f_m(x) := (\rho_m * f)(x)$，$x \in \mathbb{R}^d$，$m \in \mathbb{N}$。则有 $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x), x \in \mathbb{R}^d$，并且对于 x，$y \in \mathbb{R}^d$ 满足 $|x-y| \leq 1$，

$$|f_m(x) - f_m(y)| = \Big| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_m(z) \Big\{ f(x-z) - f(y-z) \Big\}\,\mathrm{d}z \Big| \leq [f]_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \rho_m(z)|x-y|^\alpha\,\mathrm{d}z = [f]_\alpha |x-y|^\alpha.$$

这意味着 $[f_m]_\alpha \leq [f]_\alpha$。因此，若将 f替换为 f_m时估计式 (3.1) 成立，则由法图引理可得 f的估计。

现在，我们利用随机缝合引理（引理 3.4）证明 $p \geq 2$ 和 $\varepsilon \in (0,\ 1/2)$ 的情形下 (3.1) 成立。我们定义一个二参数随机过程 $(A_{s,\ t})_{0\leq s\leq t\leq T}$ 如下:

$$A_{s,t} := \mathbb{E}^s\Big[\int_s^t \Big\{f(Y_r^n) - f(Y_{\kappa_n(r)}^n)\Big\}g(Y_s^n)\,\mathrm{d}r\Big],\ 0 \leq s \leq t \leq T.$$

接下来证明 $(A_{s,t})_{0\leq s\leq t\leq T}$ 满足引理 3.4 的条件。

首先证明 $(A_{s,t})_{0\leq s\leq t\leq T}$ 满足条件 (3.2)。固定 $0 \leq s \leq t \leq T$，则存在 $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 使得 $\kappa_n(s) = t_k$。我们先假设 $t > t_{k+3}$。根据引理 3.5，可得

$$\begin{aligned}
\|A_{s,t}\|_{L^p} \leq \|g\|_\infty \int_s^t \Big\{&\Big\|\mathbb{E}^s\Big[\Big\{f(Y_r^n) - f(Y_{\kappa_n(r)}^n)\Big\}1_{\{|Y_r^n - Y_{\kappa_n(r)}^n|\leq 1\}}\Big]\Big\|_{L^p} \\
&+ \Big\|\mathbb{E}^s\Big[\Big\{f(Y_r^n) - f(Y_{\kappa_n(r)}^n)\Big\}1_{\{|Y_r^n - Y_{\kappa_n(r)}^n|> 1\}}\Big]\Big\|_{L^p}\Big\}\,\mathrm{d}r \\
\lesssim \|g\|_\infty\Big(\int_s^{t_{k+2}} + \int_{t_{k+2}}^t\Big)&\Big\|\mathbb{E}^s\Big[\Big\{f(Y_r^n) - f(Y_{\kappa_n(r)}^n)\Big\}1_{\{|Y_r^n - Y_{\kappa_n(r)}^n|\leq 1\}}\Big]\Big\|_{L^p}\,\mathrm{d}r \\
&+ \|g\|_\infty([f]_\alpha \vee |f(0)|)\exp\Big(-\frac{n}{8p\lambda T}\Big)|t-s|. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

利用 f 的一致局部 Hölder 连续性和引理 3.1，可得

$$\begin{aligned}
\int_s^{t_{k+2}} \Big\|\mathbb{E}^s\Big[\Big\{f(Y_r^n) - f(Y_{\kappa_n(r)}^n)\Big\}1_{\{|Y_r^n - Y_{\kappa_n(r)}^n|\leq 1\}}\Big]\Big\|_{L^p}\,\mathrm{d}r &\leq [f]_\alpha \int_s^{t_{k+2}} \mathbb{E}[|Y_r^n - Y_{\kappa_n(r)}^n|^{p\alpha}]^{1/p}\,\mathrm{d}r \\
&\lesssim [f]_\alpha n^{-\alpha/2}(t_{k+2} - s) \\
&\leq [f]_\alpha n^{-\alpha/2}(t_{k+2} - t_k)^{1/2-\varepsilon}|t-s|^{1/2+\varepsilon} \\
&\lesssim [f]_\alpha n^{-\frac{1+\alpha}{2}+\varepsilon}|t-s|^{1/2+\varepsilon}. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

接下来，考虑 $(t_{k+2}, t]$ 上的积分。设 $r \in (t_{k+2}, t]$ 满足 $r - \kappa_n(r) > 0$。由于$\kappa_n(r) > t_{k+1} > s$，可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^s\Big[\Big\{f(Y_r^n) - f(Y_{\kappa_n(r)}^n)\Big\}1_{\{|Y_r^n - Y_{\kappa_n(r)}^n|\leq 1\}}\Big] \\
&= \mathbb{E}^s\Big[\mathbb{E}^{t_{k+1}}\Big[\mathbb{E}^{\kappa_n(r)}\Big[\Big\{f(Y_r^n) - f(Y_{\kappa_n(r)}^n)\Big\}1_{\{|Y_r^n - Y_{\kappa_n(r)}^n|\leq 1\}}\Big]\Big]\Big] \\
&= \mathbb{E}^s[h(Y_{t_{k+1}}^n)],
\end{aligned}$$

其中函数 $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 定义为

$$h(w) := \int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{d}z\int_{|y|\leq 1}\mathrm{d}y\Big\{f(z+y) - f(z)\Big\}\,g_{a(z)(r-\kappa_n(r))}(y)\,p^n(t_{k+1}, w, \kappa_n(r), z),\ w \in \mathbb{R}^d,$$

且 $p^n(t_{k+1}, w, \kappa_n(r)\ \cdot)$ 是 Y^n 的转移密度。注意，扩散系数 σ 假设为与时间无关，因此 $(Y_{t_k}^n)_{k=0,\ldots,n}$ 是一个非齐次马尔可夫链，这意味着 $p^n(t_{k+1}, w, \kappa_n(r)\ \cdot)$ 等于 $Y_{\kappa_n(r)-t_{k+1}}^n$ 在 $Y_0^n = w$ 条件下的密度函数 $p_{\kappa_n(r)-t_{k+1}}^n(w, \cdot)$。根据对扩散系数 σ 的假设以及定理 2.1]，，存在常数 $C, c > 0$，使得对任意 $0 \leq i < j \leq n$,

$$g_{a(z)(r-\kappa_n(r))}(y) \leq C g_{c(r-\kappa_n(r))}(y) \text{ and } p^n(t_i, w, t_j, z) \leq C g_{c(t_j-t_i)}(z-w).$$

Ther因此，利用中值定理和分部积分公式，我们得到

$$\begin{aligned} h(w) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{|y|\le 1} \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}\theta \, \big\langle y, (\nabla_z f)(z+\theta y)\big\rangle \, g_{a(z)(r-\kappa_n(r))}(y)\, p^n(t_{k+1}, w, \kappa_n(r), z) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{|y|\le 1} \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}\theta \, f(z+\theta y) \, \big\langle y, \nabla_z \{ g_{a(z)(r-\kappa_n(r))}(y)\, p^n(t_{k+1}, w, \kappa_n(r), z)\}\big\rangle \\ &= -\{h_1(w) + h_2(w)\}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

其中， $h_1, h_2 \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 定义如下

$$\begin{aligned} h_1(w) &:= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{|y|\le 1} \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}\theta \, f(z+\theta y) \, \big\langle y, \nabla_z g_{a(z)(r-\kappa_n(r))}(y)\big\rangle \, p^n(t_{k+1}, w, \kappa_n(r), z), \\ h_2(w) &:= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{|y|\le 1} \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}\theta \, f(z+\theta y) \, g_{a(z)(r-\kappa_n(r))}(y) \, \big\langle y, (\nabla_z p^n)(t_{k+1}, w, \kappa_n(r), z)\big\rangle. \end{aligned}$$

我们首先考虑 h_1。对于每个 $j = 1,\dots,d$，有

$$\begin{aligned} \partial_{z_j} g_{a(z)(r-\kappa_n(r))}(y) &= \frac{1}{(2\pi(r-\kappa_n(r)))^{d/2}} \partial_{z_j} \Big\{ \{\det a(z)\}^{-1/2} \exp\Big(-\frac{\langle a(z)^{-1}y, y\rangle}{2(r-\kappa_n(r))}\Big)\Big\} \\ &= -\frac{\det(a(z))^{-3/2}}{2(2\pi(r-\kappa_n(r)))^{d/2}} (\partial_{z_j} \det a(z)) \, \exp\Big(-\frac{\langle a(z)^{-1}y, y\rangle}{2(r-\kappa_n(r))}\Big) \\ &\quad - \frac{\det(a(z))^{-1/2}}{(2\pi(r-\kappa_n(r)))^{d/2}} \frac{\partial_{z_j}\langle a(z)^{-1}y, y\rangle}{2(r-\kappa_n(r))} \exp\Big(-\frac{\langle a(z)^{-1}y, y\rangle}{2(r-\kappa_n(r))}\Big) \\ &= -\frac{1}{2}\Big\{ \frac{\partial_{z_j} \det a(z)}{\det a(z)} + \frac{\partial_{z_j}\langle a(z)^{-1}y, y\rangle}{r-\kappa_n(r)}\Big\} g_{a(z)(r-\kappa_n(r))}(y). \end{aligned}$$

因此，我们有

$$h_1(w) = -\frac{1}{2}\Big\{ h_{1,1}(w) + h_{1,2}(w)\Big\},$$

其中， $h_{1,1}$,$h_{1,2} \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 定义如下

$$\begin{aligned} h_{1,1}(w) &:= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{|y|\le 1} \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}\theta \, f(z+\theta y) \, \frac{\langle y, \nabla_z \det a(z)\rangle}{\det a(z)} \, g_{a(z)(r-\kappa_n(r))}(y)\, p^n(t_{k+1}, w, \kappa_n(r), z), \\ h_{1,2}(w) &:= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{|y|\le 1} \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}\theta \, f(z+\theta y) \, \frac{\langle y, \nabla_z \langle a(z)^{-1}y, y\rangle\rangle}{r-\kappa_n(r)} \, g_{a(z)(r-\kappa_n(r))}(y)\, p^n(t_{k+1}, w, \kappa_n(r), z). \end{aligned}$$

我们估计 $h_{1,1}$。注意，对于每个 $j = 1,\dots,d$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{|y|\le 1} \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}\theta \, f(z) \, \frac{y_j \, \partial_{z_j} \det a(z)}{\det a(z)} \, g_{a(z)(r-\kappa_n(r))}(y)\, p^n(t_{k+1}, w, \kappa_n(r), z) = 0$$

以及对扩散系数 σ 的假设，映射 $\mathbb{R}^d \ni z \mapsto \nabla_z \det\, a(z)/\det\, a(z) \in \mathbb{R}^d$ 有界。因此，利用 f 的一致局部 H¨older 连续性，我们有

$$|h_{1,1}(w)| = \Big| \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{|y|\le 1} \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}\theta \, \{f(z+\theta y) - f(z)\}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad \times \frac{\langle y, \nabla_z \det a(z)\rangle}{\det a(z)}\, g_{a(z)(r-\kappa_n(r))}(y)\, p^n(t_{k+1}, w, \kappa_n(r), z)\Big| \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{|y|\le 1} \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}\theta\, |f(z+\theta y) - f(z)||y|\, g_{c(r-\kappa_n(r))}(y)\, p^n(t_{k+1}, w, \kappa_n(r), z) \\
&\le [f]_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{|y|\le 1} \mathrm{d}y\, |y|^{1+\alpha}\, g_{c(r-\kappa_n(r))}(y)\, p^n(t_{k+1}, w, \kappa_n(r), z) \\
&\lesssim [f]_\alpha n^{-\frac{1+\alpha}{2}}. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

接下来我们估计 $h_{1,\ 2\circ}$ 注意，对于每个 $j = 1, \ldots\ldots d$,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{|y|\le 1} \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}\theta\, f(z)\, \frac{y_j\, \partial_{z_j} \langle a(z)^{-1} y, y\rangle}{r - \kappa_n(r)}\, g_{a(z)(r-\kappa_n(r))}(y)\, p^n(t_{k+1}, w, \kappa_n(r), z) \\
&= \sum_{m,\ell=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{|y|\le 1} \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}\theta\, f(z)\, y_j y_m y_\ell \frac{\partial_{z_j} (a(z)^{-1})_{m\ell}}{r - \kappa_n(r)}\, g_{a(z)(r-\kappa_n(r))}(y)\, p^n(t_{k+1}, w, \kappa_n(r), z) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

并且根据扩散系数 σ 的假设，我们有

$$
|\nabla_z \langle a(z)^{-1} y, y\rangle| \lesssim |y|^2.
$$

因此，利用 f 的一致局部 H¨older 连续性，我们有

$$
\begin{aligned}
|h_{1,2}(w)| = \Big| &\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{|y|\le 1} \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}\theta\, \{f(z+\theta y) - f(z)\} \\
&\qquad \times \frac{\langle y, \nabla_z \langle a(z)^{-1} y, y\rangle\rangle}{r - \kappa_n(r)}\, g_{a(z)(r-\kappa_n(r))}(y)\, p^n(t_{k+1}, w, \kappa_n(r), z)\Big| \\
&\lesssim \frac{[f]_\alpha}{r - \kappa_n(r)} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{|y|\le 1} \mathrm{d}y\, |y|^{3+\alpha} g_{c(r-\kappa_n(r))}(y)\, p^n(t_{k+1}, w, \kappa_n(r), z) \\
&\lesssim [f]_\alpha n^{-\frac{1+\alpha}{2}}. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

因此，由 (3.10) 和 (3.11)，我们有

$$
\sup_{w\in\mathbb{R}^d} |h_1(w)| \lesssim [f]_\alpha n^{-\frac{1+\alpha}{2}}. \qquad (3.12)
$$

接下来，我们估计 $h_{2\circ}$ 注意到

$$
\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{|y|\le 1} \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}\theta\, f(z)\, g_{a(z)(r-\kappa_n(r))}(y) \left\langle y, (\nabla_z p^n)(t_{k+1}, w, \kappa_n(r), z)\right\rangle = 0
$$

根据第 [17, 页第 9], 行，存在常数 C， $c > 0$ 使得

$$
|(\nabla_z p^n)(t_{k+1}, w, \kappa_n(r), z)| \le \frac{C}{(\kappa_n(r) - t_{k+1})^{1/2}} g_{c(\kappa_n(r)-t_{k+1})}(z - w).
$$

因此，利用 f的一致局部 H¨older 连续性，我们有

$$\begin{aligned}|h_2(w)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{|y|\le 1} \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}\theta \left\{ f(z+\theta y) - f(z) \right\} g_{a(z)(r-\kappa_n(r))}(y) \left\langle y, (\nabla_z p^n)(t_{k+1}, w, \kappa_n(r), z) \right\rangle \Big| \\ &\lesssim \frac{[f]_\alpha}{(\kappa_n(r)-t_{k+1})^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}z \int_{|y|\le 1} \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}\theta \, |y|^{1+\alpha} \, g_{a(z)(r-\kappa_n(r))}(y) \, g_{c(\kappa_n(r)-t_{k+1})}(z-w). \\ &\lesssim \frac{[f]_\alpha n^{-\frac{1+\alpha}{2}}}{(\kappa_n(r)-t_{k+1})^{1/2}}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

因此，结合（3.9）、（3.12）和（3.13），可得

$$\sup_{w\in\mathbb{R}^d} |h(w)| \lesssim [f]_\alpha \Big\{ 1 + \frac{1}{(\kappa_n(r)-t_{k+1})^{1/2}} \Big\} n^{-\frac{1+\alpha}{2}}.$$

这意味着

$$\begin{aligned} &\int_{t_{k+2}}^t \Big\| \mathbb{E}^s \Big[\Big\{ f(Y_r^n) - f(Y^n_{\kappa_n(r)}) \Big\} 1_{\{|Y_r^n - Y^n_{\kappa_n(r)}|\le 1\}} \Big] \Big\|_{L^p} \mathrm{d}r \\ &\lesssim [f]_\alpha n^{-\frac{1+\alpha}{2}} \int_{t_{k+2}}^t \Big\{ 1 + \frac{1}{(\kappa_n(r)-t_{k+1})^{1/2}} \Big\} \mathrm{d}r \\ &\le [f]_\alpha n^{-\frac{1+\alpha}{2}} \int_{t_{k+2}}^t \Big\{ 1 + \frac{1}{(r-t_{k+2})^{1/2}} \Big\} \mathrm{d}r = [f]_\alpha n^{-\frac{1+\alpha}{2}} \Big\{ (t-t_{k+2}) + 2(t-t_{k+2})^{1/2} \Big\} \\ &\lesssim [f]_\alpha n^{-\frac{1+\alpha}{2}} (t-t_{k+2})^{1/2} \lesssim [f]_\alpha n^{-\frac{1+\alpha}{2}+\varepsilon} |t-s|^{1/2+\varepsilon}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

因此，根据（3.7）、（3.8）和（3.14），对于 $t > t_{k+3}$，可得

$$\begin{aligned} \|A_{s,t}\|_{L^p} &\lesssim ([f]_\alpha \vee |f(0)|) \|g\|_\infty \Big\{ n^{-\frac{1+\alpha}{2}+\varepsilon} + \exp\Big(-\frac{n}{8p\lambda T} \Big) \Big\} |t-s|^{1/2+\varepsilon} \\ &\lesssim ([f]_\alpha \vee |f(0)|) \|g\|_\infty n^{-\frac{1+\alpha}{2}+\varepsilon} |t-s|^{1/2+\varepsilon}. \end{aligned}$$

对于 $t \le t_{k+3}$，通过与（3.8）类似的论证可得到与上式相同的界。因此，条件（3.2）成立，其中 $\varepsilon_1 = \varepsilon$和 $\Gamma_1 = C([f]_\alpha \vee |f(0)|)\|g\|_\infty n^{-\frac{1+\alpha}{2}+\varepsilon}$，且 $C>0$为某个常数。—

接下来我们证明 $(A_{s,t})_{0\le s\le t\le T}$满足条件（3.3）。根据 $(A_{s,t})_{0\le s\le t\le T}$的定义，对于任意 $0 \le s \le u \le t \le T$，有

$$\mathbb{E}^s[A_{s,t} - A_{s,u} - A_{u,t}] = \int_u^t \mathbb{E}^s \Big[\Big\{ g(Y_s^n) - g(Y_u^n) \Big\} \mathbb{E}^u \Big[f(Y_r^n) - f(Y^n_{\kappa_n(r)}) \Big] \Big] \mathrm{d}r.$$

因此，利用 Hölder 不等式、詹森不等式、引理 3.1、引理 3.5、(3.8) 和 (3.14)，可得

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}^s[A_{s,t} - A_{s,u} - A_{u,t}]\|_{L^p} &\le \int_u^t \Big\| \mathbb{E}^s \Big[\Big\{ g(Y_s^n) - g(Y_u^n) \Big\} \mathbb{E}^u \Big[f(Y_r^n) - f(Y^n_{\kappa_n(r)}) \Big] \Big] \Big\|_{L^p} \mathrm{d}r \\ &\le \|g(Y_s^n) - g(Y_u^n)\|_{L^{2p}} \int_u^t \Big\| \mathbb{E}^u \Big[f(Y_r^n) - f(Y^n_{\kappa_n(r)}) \Big] \Big\|_{L^{2p}} \mathrm{d}r \end{aligned}$$

$$\le [g]_{\mathrm{Lip}}\|Y_s^n - Y_u^n\|_{L^{2p}} \int_u^t \Big\|\mathbb{E}^u\Big[f(Y_r^n) - f(Y_{\kappa_n(r)}^n)\Big]\Big\|_{L^{2p}} \mathrm{d}r$$
$$\lesssim ([f]_\alpha \vee |f(0)|)[g]_{\mathrm{Lip}} n^{-\frac{1+\alpha}{2}+\varepsilon}|t-s|^{1+\varepsilon}.$$

因此，对于某个常数 $C>0$，条件 (3.3) 在 $\varepsilon_2 = \varepsilon$ 和 $\Gamma_2 = C([f]_\alpha \vee |f(0)|)[g]_{\mathrm{Lip}} n^{-\frac{1+\alpha}{2}+\varepsilon}$ 下成立。

因此，根据随机缝合引理（引理 3.4），存在唯一的随机过程 $(\mathcal{A}_t)_{t\in[0,T]}$ 满足引理 3.4 中的条件 (i)、(ii)，特别地，(3.6) 成立。~我们定义随机过程 $(\mathcal{A}_t)_{t\in[0,T]}$ 为

$$\widetilde{\mathcal{A}}_t := \int_0^t \Big\{f(Y_r^n) - f(Y_{\kappa_n(r)}^n)\Big\} g(Y_r^n)\,\mathrm{d}r,\ t\in[0,T].$$

~~下面证明 $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_t$. a.s. 对于 $t\in[0,T]$。根据定义，显然 $\mathcal{A}$ 满足引理 3.4 中的 (i)~。接下来我们证明 $\mathcal{A}$ 满足条件 (3.4) 和 (3.5)，其中常数为Γ_3，$\Gamma_4 \ge 0$。根据引理 3.2，对于任意 $0\le s\le t\le T$，有

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{\mathcal{A}}_t - \widetilde{\mathcal{A}}_s - A_{s,t}\|_{L^p} \le \|\widetilde{\mathcal{A}}_t - \widetilde{\mathcal{A}}_s\|_{L^p} + \|A_{s,t}\|_{L^p}\\
&\le \Big\|\int_s^t \Big\{f(Y_r^n) - f(Y_{\kappa_n(r)}^n)\Big\} g(Y_r^n)\,\mathrm{d}r\Big\|_{L^p} + \Big\|\mathbb{E}\Big[\int_s^t \Big\{f(Y_r^n) - f(Y_{\kappa_n(r)}^n)\Big\} g(Y_s^n)\,\mathrm{d}r\Big]\Big\|_{L^p}\\
&\lesssim |t-s| = |t-s|^{1/2-\varepsilon}|t-s|^{1/2+\varepsilon} \le T^{1/2-\varepsilon}|t-s|^{1/2+\varepsilon}.
\end{aligned}$$

因此，条件 (3.4) 对某个 $\Gamma_3>0$ 及任意 $\Gamma_4\ge 0$ 成立。由于 f 具有线性增长性，利用 Hölder 不等式和引理 3.1，我们有

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}^s[\widetilde{\mathcal{A}}_t - \widetilde{\mathcal{A}}_s - A_{s,t}]\|_{L^p} &\le \int_s^t \Big\|\Big\{g(Y_r^n) - g(Y_s^n)\Big\}\Big\{f(Y_r^n) - f(Y_{\kappa_n(r)}^n)\Big\}\Big\|_{L^p}\mathrm{d}r\\
&\le \int_s^t \Big\|g(Y_r^n) - g(Y_s^n)\Big\|_{L^{2p}}\Big\|f(Y_r^n) - f(Y_{\kappa_n(r)}^n)\Big\|_{L^{2p}}\mathrm{d}r\\
&\lesssim \int_s^t \|Y_r^n - Y_s^n\|_{L^{2p}}\,\mathrm{d}r \lesssim \int_s^t (r-s)^{1/2}\,\mathrm{d}r \lesssim (t-s)^{1+\varepsilon}.
\end{aligned}$$

因此，条件 (3.5) 对某个常数 $\Gamma_4>0$ 成立。因此，根据~随机过程 $\mathcal{A}$ 的唯一性，我们有 $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_t$，几乎处处成立，$t\in[0,T]$。特别地，由于 $\mathcal{A}$ 满足条件 (3.6)，我们得到

$$\sup_{t\in[0,T]}\Big\|\int_0^t \Big\{f(Y_r^n) - f(Y_{\kappa_n(r)}^n)\Big\} g(Y_r^n)\,\mathrm{d}r\Big\|_{L^p} \lesssim ([f]_\alpha \vee |f(0)|)(\|g\|_\infty + [g]_{\mathrm{Lip}}) n^{-\frac{1+\alpha}{2}+\varepsilon}.$$

证明至此完成。 □

最后，我们将上述命题推广到欧拉–丸山格式 X^n。

命题 3.6。设 $f\in C^\alpha(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ 满足 $\alpha\in(0,1]$ 且 $g\colon \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 是一个有界且全局利普希茨连续函数。我们假设假设 *2.2* 成立。那么对任意 $p\ge 1$ 和$\varepsilon\in(0,(1+\alpha))/2)$，存在常数 $C_{p,\varepsilon}>0$，使得对任意 $t\in[0,T]$ 和 $n\in\mathbb{N}$，

$$\sup_{t\in[0,T]}\Big\|\int_0^t \Big\{f(X_r^n) - f(X_{\kappa_n(r)}^n)\Big\} g(X_r^n)\,\mathrm{d}r\Big\|_{L^p} \le C_{p,\varepsilon}([f]_\alpha \vee |f(0)|)(\|g\|_\infty + [g]_{\mathrm{Lip}}) n^{-\frac{1+\alpha}{2}+\varepsilon}.$$

为了证明该命题，我们使用丸山–吉尔萨诺夫变换。对于 $q \in \mathbb{R}$ 和$n \in \mathbb{N}$，我们定义随机过程 $Z(q,n) = (Z_t(q,n))^{t\in[0,T]}$ 如下

$$Z_t(q,n) := \exp\Big(q\int_0^t \langle \sigma(Y^n_{\kappa_n(s)})^{-1} b(Y^n_{\kappa_n(s)}),\, \mathrm{d}B_s\rangle - \frac{q^2}{2}\int_0^t |\sigma(Y^n_{\kappa_n(s)})^{-1} b(Y^n_{\kappa_n(s)})|^2\,\mathrm{d}s\Big).$$

接下来，我们需要以下关于 $Z(q,n)$ 的矩估计。

引理 3.7. 我们假设假设 *2.2 (ii)* 和 *(iv)* 成立。那么，对于任意 $p > 0$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\Big[\exp\Big(p\int_0^T |\sigma(Y^n_{\kappa_n(s)})^{-1} b(Y^n_{\kappa_n(s)})|^2\,\mathrm{d}s\Big)\Big] < \infty.$$

特别地，对于任意 $q \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，随机过程 $Z(q,n) = (Z_t(q,n))^{t\in[0,T]}$ 是一个鞅，并且对于任意 $p > 0$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[Z_t(q,n)^p] < \infty.$$

证明。 我们设 $M^n_t := \int_0^t \sigma(Y^n_{\kappa_n(r)})\,\mathrm{d}B_r$, $t \in [0,T]$。根据欧拉–丸山格式 Y^n 的定义，对于任意 $k = 0, \ldots, n$,

$$|Y^n_{t_k}|^2 \le 2|x_0|^2 + 2\sup_{t\in[0,T]} |M^n_t|^2.$$

由于 b 是次线性增长的，对于任意 $\delta > 0$，存在 $L_\delta > 0$，使得对于任意 $x \in \mathbb{R}^d$

$$|b(x)| \le \delta|x| + L_\delta.$$

因此我们有

$$\int_0^T |\sigma(Y^n_{\kappa_n(r)})^{-1} b(Y^n_{\kappa_n(r)})|^2\,\mathrm{d}r \lesssim \int_0^T \Big\{\delta^2 |Y^n_{\kappa_n(r)}|^2 + L^2_\delta\Big\}\,\mathrm{d}r \lesssim (L^2_\delta + \delta^2) + \delta^2 \sup_{t\in[0,T]} |M^n_t|^2.$$

现在我们固定 $p \ge 2$。于是存在 $C_p > 0$，使得:

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(p\int_0^T |\sigma(Y^n_{\kappa_n(s)})^{-1} b(Y^n_{\kappa_n(s)})|^2\,\mathrm{d}s\Big)\Big] \le \exp(C_p(L^2_\delta + \delta^2))\mathbb{E}\Big[\exp\Big(C_p\delta^2 \sup_{t\in[0,T]} |M^n_t|^2\Big)\Big].$$

利用具有最佳常数的 Burkholder–Davis–Gundy 不等式（见 [5, 24]）

$$A_q := K_d q^{q/2},\ q \ge 2,$$

对于某个仅依赖于维数 d 的常数 $K_d > 0$，对任意 $q \ge 2$，有

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} |M^n_t|^q\Big] \le A_q \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T |\sigma(Y^n_{\kappa_n(r)})|^2\,\mathrm{d}r\Big)^{q/2}\Big] \le A_q \|\sigma\|^q_\infty T^{q/2}.$$

然后利用指数函数的泰勒展开和单调收敛定理，可得

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(C_p\delta^2 \sup_{t\in[0,T]} |M^n_t|^2\Big)\Big] = \sum_{k=0}^\infty \frac{C^k_p \delta^{2k}}{k!} \mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} |M^n_t|^{2k}\Big] \le 1 + K_d \sum_{k=1}^\infty \frac{(2C_p\|\sigma\|^2_\infty T k\delta^2)^k}{k!}.$$

根据斯特林公式，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，有 $\sqrt{2\pi}k^{k+1/2}e^{-k} \leq k!$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2C_p\|\sigma\|_\infty^2 Tk)^k \delta^{2k}}{k!} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2C_p\|\sigma\|_\infty^2 Te\delta^2)^k}{k^{1/2}}.$$

因此，取 δ 为 $\delta = 2^{-1}(C_p\|\sigma\|_\infty^2 Te)^{-1/2}$，我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2C_p\|\sigma\|_\infty^2 Tk\delta^2)^k}{k!} < \infty. \tag{3.15}$$

这意味着

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\Big[\exp\Big(p\int_0^T |\sigma(Y^n_{\kappa_n(s)})^{-1} b(Y^n_{\kappa_n(s)})|^2 \,\mathrm{d}s\Big)\Big] < \infty.$$

特别地，由 Novikov 条件，对于 $q \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，$Z(q,\ n) = (Z_t(q,\ n))_{t\in[0,T]}$ 是一个鞅。利用 H¨older 不等式，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_t(q,n)^p] &= \mathbb{E}\Big[\exp\Big(pq\int_0^t \langle \sigma(Y^n_{\kappa_n(s)})^{-1} b(Y^n_{\kappa_n(s)}),\, \mathrm{d}B_s\rangle - \frac{pq^2}{2}\int_0^t |\sigma(Y^n_{\kappa_n(s)})^{-1} b(Y^n_{\kappa_n(s)})|^2 \,\mathrm{d}s\Big)\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[Z_t(2pq,n)^{1/2} \exp\Big(\frac{(2p^2-p)q^2}{2}\int_0^t |\sigma(Y^n_{\kappa_n(s)})^{-1} b(Y^n_{\kappa_n(s)})|^2 \,\mathrm{d}s\Big)\Big] \\
&\leq \mathbb{E}\Big[Z_t(2pq,n)\Big]^{1/2} \mathbb{E}\Big[\exp\Big((2p^2-p)q^2\int_0^t |\sigma(Y^n_{\kappa_n(s)})^{-1} b(Y^n_{\kappa_n(s)})|^2 \,\mathrm{d}s\Big)\Big]^{1/2}.
\end{aligned}$$

由于 $Z(2pq,\ n)$ 是一个鞅，我们有 $\mathbb{E}[Z_t(2pq,\ n)] = 1$。因此得到

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[Z_t(q,n)^p] < \infty.$$

证明至此完成。 □

注 3.8。 如果我们将假设 2.2 (ii) 替换为线性增长条件：存在 $L > 0$，使得 $|b(x)| \leq L(1+|x|)$，$x \in \mathbb{R}^d$，那么对于充分小的 $T > 0$，我们可以证明定理 2.3 中的结论。事实上，若 T 充分小，则级数 (3.15) 以 $\delta = L$ 收敛。Babi、Dieye 和 Menoukeu Pamen [1] 在他们的证明中使用了这一论证。

现在我们可以证明命题 3.6 了。

命题 *3.6* 的证明。 由 H¨older 不等式，只需证明 $p \geq 2$ 的界。令$t \in [0,T]$ 固定。于是由引理 3.7、Maruyama–Girsanov 定理和 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t \Big\{f(X^n_r) - f(X^n_{\kappa_n(r)})\Big\} g(X^n_r)\,\mathrm{d}r\Big|^p\Big] = \mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t \Big\{f(Y^n_r) - f(Y^n_{\kappa_n(r)})\Big\} g(Y^n_r)\,\mathrm{d}r\Big|^p Z_t(1,n)\Big] \\
&\leq \mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t \Big\{f(Y^n_r) - f(Y^n_{\kappa_n(r)})\Big\} g(Y^n_r)\,\mathrm{d}r\Big|^{2p}\Big]^{1/2} \mathbb{E}[Z_t(1,n)^2]^{1/2}.
\end{aligned}$$

因此，由命题 3.3 和引理 3.7 可得

$$\sup_{t\in[0,T]} \Big\|\int_0^t \Big\{f(X^n_r) - f(X^n_{\kappa_n(r)})\Big\} g(X^n_r)\,\mathrm{d}r\Big\|_{L^p} \lesssim ([f]_\alpha \vee |f(0)|)(\|g\|_\infty + [g]_{\mathrm{Lip}}) n^{-\frac{1+\alpha}{2}+\varepsilon}.$$

证明至此结束。 □

3.3 主要结果的证明

令 $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是一个可测函数，且 $\lambda>0$。我们考虑以下椭圆方程 n

$$\lambda u - \mathscr{L}u = f, \tag{3.16}$$

其中，算子 $\mathscr{L}$ 是 X的无穷小生成元，即

$$(\mathscr{L}g)(x) := \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(a(x)(\nabla^2 g)(x)\big) + \langle b(x), (\nabla g)(x)\rangle,\ a(a) = \sigma(x)\sigma(x)^\top.$$

下面的引理表明，若 $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$， $\alpha \in (0,1)$，则椭圆方程（3.16）存在一个经典解。

引理 3.9 (定理 5，见 [11])。 我们假设假设 *2.2 (i)*、*(iii)* 和 *(iv)* 成立。那么，对于任意 $\alpha' \in (0,\alpha)$，存在 $\lambda_0 > 0$，使得对于任意 $\lambda \geq \lambda_0$ 和任意 $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$，方程 (3.16) 存在唯一经典解 $u \in C^{2+\alpha'}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$，满足

$$\|u\|_{2+\alpha'} = \|u(\cdot)(1+|\cdot|)^{-1}\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty + \|\nabla^2 u\|_\infty + [\nabla^2 u]_{\alpha'} \leq C(\lambda)\|f\|_\alpha,$$

其中，常数 $C(\lambda)$ 与 u 和 f无关，且 $C(\lambda) \to 0$ 当 $\lambda \to \infty$时。

现在我们可以证明定理 2.3 了。

定理 *2.3* 的证明。 只需证明 $p \geq 2$和 $\varepsilon \in (0,\alpha/2)$的界。固定 $t \in [0,T]$。则有

$$\mathbb{E}[|X_t - X_t^n|^p] \lesssim \Big\{ I_1^n(t) + I_2^n(t) + I_3^n(t) + I_4^n(t) \Big\},$$

其中，$I_1^n(t)$、$I_2^n(t)$、$I_3^n(t)$ 和 $I_4^n(t)$ 定义如下：

$$I_1^n(t) := \mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t \Big\{b(X_r) - b(X_r^n)\Big\}\,\mathrm{d}r\Big|^p\Big],\ I_2^n(t) := \mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t \Big\{b(X_r^n) - b(X_{\kappa_n(r)}^n)\Big\}\,\mathrm{d}r\Big|^p\Big],$$
$$I_3^n(t) := \mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t \Big\{\sigma(X_r) - \sigma(X_r^n)\Big\}\,\mathrm{d}B_r\Big|^p\Big],\ I_4^n(t) := \mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t \Big\{\sigma(X_r^n) - \sigma(X_{\kappa_n(r)}^n)\Big\}\,\mathrm{d}B_r\Big|^p\Big].$$

对于 $\alpha = 1$ 和 σ 是常矩阵的情形，由于 b 全局Lipschitz连续，利用 $g = 1$和命题 3.6，可得

$$\mathbb{E}[|X_t - X_t^n|^p] \lesssim \int_0^t \mathbb{E}[|X_s - X_s^n|^p]\,\mathrm{d}s + I_2^n(t) \lesssim \int_0^t \mathbb{E}[|X_s - X_s^n|^p]\,\mathrm{d}s + ([b]_1 \vee |b(0)|)n^{-p+\varepsilon p}.$$

因此，由 Gronwall不等式可得

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}[|X_t - X_t^n|^p] \lesssim n^{-p+\varepsilon p}.$$

现在我们假设 $\alpha \in (0,\ 1)$。令 $\lambda > 0$，并令 $u_\lambda = (u_{\lambda,\ 1},\ \ldots,\ u_{\lambda,\ d})^\top \in C^{2+\alpha/2}(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}^d)$ 为以下椭圆方程的一个解

$$\lambda u_\lambda - \mathscr{L}u_\lambda = b.$$

根据引理 3.9， u_λ 满足

$$\|u_\lambda\|_{2+\alpha/2} \le C(\lambda)\|b\|_\alpha, \tag{3.17}$$

且 $\lim_{\lambda\to\infty} C(\lambda) = 0$。由伊藤公式，对每个 $i = 1,\dots,d$,

$$\begin{aligned}
\int_0^t b_i(X_r)\,\mathrm{d}r &= u_{\lambda,i}(x_0) - u_{\lambda,i}(X_t) + \lambda\int_0^t u_{\lambda,i}(X_r)\,\mathrm{d}r + \int_0^t \langle(\nabla u_{\lambda,i})(X_r), \sigma(X_r)\,\mathrm{d}B_r\rangle,\\
\int_0^t b_i(X_r^n)\,\mathrm{d}r &= u_{\lambda,i}(x_0) - u_{\lambda,i}(X_t^n) + \lambda\int_0^t u_{\lambda,i}(X_r^n)\,\mathrm{d}r + \int_0^t \langle b(X^n_{\kappa_n(r)}) - b(X_r^n), (\nabla u_{\lambda,i})(X_r^n)\rangle\,\mathrm{d}r\\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{Tr}\big(\{a(X^n_{\kappa_n(r)}) - a(X_r^n)\}(\nabla^2 u_{\lambda,i})(X_r^n)\big)\,\mathrm{d}r\\
&\quad + \int_0^t \langle(\nabla u_{\lambda,i})(X_r^n), \sigma(X^n_{\kappa_n(r)})\,\mathrm{d}B_r\rangle.
\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
I_1^n(t) &\lesssim \mathbb{E}[|u_\lambda(X_t) - u_\lambda(X_t^n)|^p] + \lambda^p\int_0^t \mathbb{E}[|u_\lambda(X_r) - u_\lambda(X_r^n)|^p]\,\mathrm{d}r\\
&\quad + \sum_{i=1}^d \mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t \Big\{(\nabla u_{\lambda,i})(X_r)\sigma(X_r) - (\nabla u_{\lambda,i})(X_r^n)\sigma(X^n_{\kappa_n(r)})\Big\}\,\mathrm{d}B_r\Big|^p\Big]\\
&\quad + \sum_{i=1}^d \mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t \langle b(X_r^n) - b(X^n_{\kappa_n(r)}), \nabla u_{\lambda,i}(X_r^n)\rangle\,\mathrm{d}r\Big|^p\Big]\\
&\quad + \sum_{i,k,\ell=1}^d \mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t \Big\{a_{k\ell}(X^n_{\kappa_n(r)}) - a_{k\ell}(X_r^n)\Big\}(\partial^2_{k\ell}u_{\lambda,i})(X_r^n)\,\mathrm{d}r\Big|^p\Big]\\
&=: \sum_{j=1}^5 I^n_{1,j}(t).
\end{aligned}$$

利用 (3.17)，我们有

$$I^n_{1,1}(t) \le \|\nabla u_\lambda\|_\infty^p \mathbb{E}[|X_t - X_t^n|^p] \le C(\lambda)^p\|b\|_\alpha^p\mathbb{E}[|X_t - X_t^n|^p]. \tag{3.18}$$

由 u_λ 的全局利普希茨连续性，

$$I^n_{1,2}(t) \le \lambda^p\|\nabla u_\lambda\|_\infty^p\int_0^t \mathbb{E}[|X_r - X_r^n|^p]\,\mathrm{d}r. \tag{3.19}$$

根据 Burkholder–Davis–Gundy 不等式和引理 3.1,

$$\begin{aligned}
I^n_{1,3}(t) &\lesssim \sum_{i=1}^d \Big\{\mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t \Big\{(\nabla u_{\lambda,i})(X_r)\sigma(X_r) - (\nabla u_{\lambda,i})(X_r^n)\sigma(X_r^n)\Big\}\,\mathrm{d}B_r\Big|^p\Big]\\
&\qquad + \mathbb{E}\Big[\Big|\int_0^t \Big\{(\nabla u_{\lambda,i})(X_r^n)(\sigma(X_r^n) - \sigma(X^n_{\kappa_n(r)})\Big\}\,\mathrm{d}B_r\Big|^p\Big]\Big\}\\
&\lesssim \|\nabla u_\lambda\|^p_{C_b^1}\|\sigma\|^p_{C_b^1}\int_0^t \mathbb{E}[|X_r - X_r^n|^p]\,\mathrm{d}r + \|\nabla u_\lambda\|_\infty^p\|\nabla\sigma\|_\infty^p\int_0^t \mathbb{E}[|X_r^n - X^n_{\kappa_n(r)}|^p]\,\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

$$\lesssim \|\nabla u_\lambda\|_{C_b^1}^p \|\sigma\|_{C_b^1}^p \int_0^t \mathbb{E}[|X_r - X_r^n|^p]\,\mathrm{d}r + \|\nabla u_\lambda\|_\infty^p \|\nabla\sigma\|_\infty^p n^{-p/2}. \tag{3.20}$$

特别地，如果 σ 是常矩阵，那么由于 $\nabla\sigma = 0$，我们有

$$I_{1,3}^n(t) \lesssim \|\nabla u_\lambda\|_{C_b^1}^p \int_0^t \mathbb{E}[|X_r - X_r^n|^p]\,\mathrm{d}r. \tag{3.21}$$

由于 ∇u_λ 是有界且全局Lipschitz连续的函数，利用$g = \nabla u_\lambda$和命题 3.6，可得

$$I_{1,4}^n(t) \lesssim ([b]_\alpha \vee |b(0)|)(\|\nabla u_\lambda\|_\infty + [\nabla u_\lambda]_{\mathrm{Lip}}) n^{-\frac{1+\alpha}{2}p+\varepsilon p}. \tag{3.22}$$

由于 $a \in C_b^3(\mathbb{R}^d)$和 $\nabla^2 u_\lambda$ 有界，利用引理 3.1，可得

$$I_{1,5}^n(t) \lesssim \|\nabla a\|_\infty^p \|\nabla^2 u_\lambda\|_\infty^p \int_0^t \mathbb{E}[|X_{\kappa_n(r)}^n - X_r^n|^p]\,\mathrm{d}r \lesssim \|\nabla a\|_\infty^p n^{-p/2}. \tag{3.23}$$

特别地，若 σ 是常矩阵，则由于 $\nabla a = 0$，可得

$$I_{1,5}^n(t) = 0. \tag{3.24}$$

由命题 3.6 和 $g = 1$，可得

$$I_2^n(t) \lesssim ([b]_\alpha \vee |b(0)|) n^{-\frac{1+\alpha}{2}p+\varepsilon p}. \tag{3.25}$$

由 Burkholder–Davis–Gundy 不等式和引理 3.1，可得

$$\begin{aligned} I_3^n(t) + I_4^n(t) &\lesssim \int_0^t \mathbb{E}[|\sigma(X_r) - \sigma(X_r^n)|^p]\,\mathrm{d}r + \int_0^t \mathbb{E}[|\sigma(X_r^n) - \sigma(X_{\kappa_n(r)}^n)|^p]\,\mathrm{d}r \\ &\lesssim \|\nabla\sigma\|_\infty^p \Big\{ \int_0^t \mathbb{E}[|X_r - X_r^n|^p]\,\mathrm{d}r + \int_0^t \mathbb{E}[|X_r^n - X_{\kappa_n(r)}^n|^p]\,\mathrm{d}r \Big\} \\ &\lesssim \|\nabla\sigma\|_\infty^p \Big\{ \int_0^t \mathbb{E}[|X_r - X_r^n|^p]\,\mathrm{d}r + n^{-p/2} \Big\}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

特别地，若 σ 是常矩阵，则可得

$$I_3^n(t) = I_4^n(t) = 0. \tag{3.27}$$

如果扩散系数 σ 不是常矩阵，那么结合 (3.17)、(3.18)、(3.19)、(3.20)、(3.22)、(3.23)、(3.25) 和 (3.26)，存在 $C_p > 0$ 和 $C_{p,\ \lambda}$ 使得

$$\mathbb{E}[|X_t - X_t^n|^p] \le C_p C(\lambda)^p \|b\|_\alpha^p \mathbb{E}[|X_t - X_t^n|^p] + C_{p,\lambda}\Big\{ n^{-\frac{1+\alpha}{2}p+\varepsilon p} + n^{-\frac{p}{2}} + \int_0^t \mathbb{E}[|X_r - X_r^n|^p]\,\mathrm{d}r \Big\}.$$

注意，由于 $\varepsilon < \alpha/2$，我们有 $-\frac{1+\alpha}{2}p + \varepsilon p < -\frac{p}{2}$。因此，通过选择 $\lambda > \lambda_0$ with

$$C_p C(\lambda)^p \|b\|_\alpha^p < 1$$

然后应用格朗沃尔不等式，我们得到

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}[|X_t-X_t^n|^p]\lesssim n^{-p/2}.$$

若扩散系数 σ 是常矩阵，则由 (3.21)、(3.24) 和 (3.27),

$$\mathbb{E}[|X_t-X_t^n|^p]\le C_pC(\lambda)^p\|b\|_\alpha^p\mathbb{E}[|X_t-X_t^n|^p]+C_{p,\lambda}\Big\{n^{-\frac{1+\alpha}{2}p+\varepsilon p}+\int_0^t\mathbb{E}[|X_r-X_r^n|^p]\,\mathrm{d}r\Big\}.$$

因此，采用与上述相同的论证，我们得到

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}[|X_t-X_t^n|^p]\lesssim n^{-\frac{1+\alpha}{2}p+\varepsilon p}.$$

证明至此完成。 □

致谢

第二作者获得了 JSPS KAKENHI Grant Number 21H00988 和 23K12988 的资助。

参考文献

[1] Babi, A. O.、Dieye, M. 和 Menoukeu Pamen, O. 具有无界漂移的随机微分方程的欧拉–丸山近似的强收敛。*Stoch. Anal. Appl.* **41**(3) 545–563。（2023）。[2] Bao, J.、Huang, X. 和 Yuan, C. 具有 Hölder–Dini 连续漂移的随机微分方程的欧拉–丸山格式收敛速率。*J. Theoret. Probab.***32**(2) 848–871。（2019）。[3] Bao, J.、Huang, X. 和 Zhang, S. Q. 具有低正则性漂移的随机微分方程的欧拉–丸山算法收敛速率。*J. Appl. Probab.* **59**(2) 447–470。（2022）。[4] Bao, J. 和 Wu, Y. 具有 Hölder 连续漂移系数的随机微分方程的随机化欧拉–丸山方法。*BIT* **65**(4)（2025）。[5] Barlow, M. T 和 Yor, M. 通过 Garsia–Rodemich–Rumsey 引理得到的半鞅不等式及其在局部时中的应用。*J. Funct. Anal.* **49**(2) 198–229。（1982）。[6] Butkovsky, O.、Dareiotis, K. 和 Gerencs´er M. 随机微分方程的近似：随机缝合方法 *Probab. Theory Related Fields.***181**(4) 975–1034。（2021）。[7] Dareiotis, K. 和 Gerencs´er M. 具有不规则漂移的欧拉–丸山格式中的噪声正则化。*Electron. J. Probab.* **251**–18。（2020）。[8] Dareiotis, K.、Gerencs´er, M. 和 Lˆe, K. 对 Gy¨ongy–Krylov 收敛定理的定量研究。*Ann. Appl. Probab.* **33**(3) 2291–2323。（2023）。[9] Ellinger, S.、M¨uller-Gronbach, T. 和 Yaroslavtseva, L. 关于具有 Hölder 连续漂移系数的随机微分方程强逼近的最优误差速率。arXiv:2504.20728。

[10] Feyel, D. 和 de La Pradelle, A. 沿增强路径的曲线积分。Electron. J. Probab. 11 860–892。（2006）。[11] Flandoli, F.、Gubinelli, M. 和 Priola, E. 具有无界 Hölder 连续漂移的随机微分方程的微分同胚流。Bull. Sci. Math. 134(4) 405–422。（2010）。[12] Gerencs´er, M.、Lampl, G. 和 Ling, C. 具有 Hölder 连续漂移的奇异随机微分方程的米尔斯坦格式。IMA J. Numer. Anal. 45(5) 3077–3108。（2025）。[13] Gubinelli, M. 粗糙路径控制。J. Funct. Anal. 216(1) 86–140。（2004）。[14] Holland, T. 关于具有 Hölder 漂移的欧拉–丸山格式的弱收敛速率。Stochastic Process. Appl. 174（2024）。[15] Kaneko, H. 和 Nakao, S. 关于随机微分方程近似的注记。S´eminaire de Probabilit´es 22 155–162。（1988）。[16] Kloeden, P. E. 和 Platen, E. 随机微分方程的数值解。Springer（1992）。[17] Konakov, V. 和 Mammen, E. 随机微分方程欧拉格式的 Edgeworth 型展开。Monte Carlo Methods Appl. 8(3) 271–285。（2002）。[18] L^e, K. 随机缝合引理及其应用。Electron. J. Probab. 25 1–55。（2020）。[19] L^e, K. 和 Ling, C. 奇异随机微分方程的驯化：一种数值方法 Ann. Probab. 53(5) 1764–1824。（2025）。[20] Lemaire, V. 和 Menozzi, S. 关于欧拉格式的一些非渐近界。Electron. J. Probab. 15 1645–1681。（2017）。[21] Menoukeu Pamen, O. 和 Taguchi, D. 具有 Hölder 连续漂移系数的随机微分方程的欧拉–丸山近似的强收敛速率。Stochastic Process. Appl. 127(8) 2542–2559。（2017）。[22] Neuenkirch, A. 和 Sz¨olgyenyi, M. 具有不规则漂移的随机微分方程的欧拉–丸山格式：通过化归为求积问题得到收敛速率。IMA J. Numer. Anal. 41(2) 1164–1196。（2021）。[23]Ngo, H-L. 和 Taguchi, D. 关于具有不规则系数的一维随机微分方程的欧拉–丸山近似。IMA J. Numer. Anal. 37(4) 1864–1883。（2017）。[24] Ren, Y. F. 关于连续鞅的 Burkholder–Davis–Gundy不等式。Statist. Probab. Lett. 78(17) 3034–3039。（2008）。[25] Veretennikov, A. Yu. 关于随机积分方程的强解及其显式公式。Math. USSR Sb. 39 387–403。（1981）。[26] Zvonkin, A. K. 消除扩散过程漂移的相空间变换。Math. USSR Sb. 22(1) 129–149。（1974）。